14. Spilteori

14.2. Planlægning af valgmøder
14.3. Blandede strategier
14.4. Grafisk løsningsmetode
14.5. LP løsningsmetode

Henrik Juel

OR, DTU Management

14.2. Planlægning af valgmøder

2 personers nulsum-spil

Udbyttematricen viser rækkespillerens gevinster

	S_1	S_2	S_3
R_1	1	2	4
R_2	1	0	5
R_3	0	1	−1

Konsekutivt dominerede strategier: $R_3,\ S_3,\ R_2,\ S_2$

Løsning: $R_1,\ S_1$
Spillets værdi $v = 1$

Minimax-kriteriet

Hver spiller maksimerer sin minimale gevinst
(dvs. søjlespilleren minimerer sit maksimale tab)

$$\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & 6 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} -3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ \hline 5 & 0 & 6 \end{array}$$

Løsning: $R_2,\ S_2,\ v = 0$ (fair spil)

Sadelpunkt

Mindst i sin række, størst i sin søjle
Stabil løsning

Intet sadelpunkt:

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -4 \\ \hline 5 & 4 & 2 & \end{array}$$

Minimax-løsningen $R_1,\ S_3$ er ikke stabil:
$R_1 \to S_2 \to R_2 \to S_3 \to R_1 \to \cdots$

14.3. Blandede strategier

Rækkespilleren vælger $R_1, R_2, \ldots$ med sandsynlighederne $x_1, x_2, \ldots$
Søjlespilleren vælger $S_1, S_2, \ldots$ med sandsynlighederne $y_1, y_2, \ldots$

Minimax-kriteriet for blandede strategier:
Hver spiller maksimerer
sin minimale forventede gevinst

$$\begin{array}{rr} -2 & 2 \\ 4 & -3 \end{array}$$

Rækkespilleren:
$\max_{x_1,x_2} \min\{-2x_1 + 4x_2,\ 2x_1 - 3x_2\}$
$\max_{x_1} \min\{-2x_1 + 4(1-x_1),\ 2x_1 - 3(1-x_1)\}$

Grafisk løsningsmetode

Rækkespilleren:
En skitse viser at maximin antages i skæringspunktet,

$-2x_1 + 4(1-x_1) = 2x_1 - 3(1-x_1) \Rightarrow$
$x_1 = 7/11$
$v = -2 \cdot 7/11 + 4(1 - 7/11) = 2/11$

Søjlespilleren:

$\min_{y_1} \max\{-2y_1 + 2(1-y_1),\ 4y_1 - 3(1-y_1)\}$

$-2y_1 + 2(1-y_1) = 4y_1 - 3(1-y_1) \Rightarrow y_1 = 5/11$

14.5. LP løsningsmetode

Udbyttet ved R_i, S_j kaldes p_{ij}
$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$

Rækkespilleren vælger $x_1, \ldots, x_m$ så han
max. $\min_{y_1,\ldots,y_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i y_j$
max. x_{m+1} uht. $x_{m+1} = \min_{y_1,\ldots,y_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i y_j$
max. x_{m+1} uht. $x_{m+1} \le \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i y_j \ \forall\ y$
max. x_{m+1} uht. $x_{m+1} \le \sum_{i=1}^m p_{ij} x_i,\ j = 1, \ldots, n$

Rækkespillerens problem

max. x_{m+1}
uht. $-\sum_{i=1}^m p_{ij} x_i + x_{m+1} \le 0,\ j = 1, \ldots, n$
$\sum_{i=1}^m x_i = 1$
$x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, m$

Søjlespillerens problem

findes analogt

min. y_{n+1}

uht. $-\sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j + y_{n+1} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$

$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$

$y_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n$

Problemerne er hinandens duale problemer

$x_{m+1}^* = y_{n+1}^* = v$

Valgmødeproblemet med LP

$$\begin{array}{rrr} 0 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrr} 3 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & x_3 \\ \text{uht.} & -3x_1 - 8x_2 + x_3 \leq 0 \\ & -1x_1 - 7x_2 + x_3 \leq 0 \\ & -5x_1 - 0x_2 + x_3 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Slackvariablerne x_4, x_5, x_6 tilføjes

’Tableauer’

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1			-1				0
	-3	-8	1	1			0
	-1	-7	1		1		0
	-5	0	1			1	0
	1	1					1
1					$5/11$	$6/11$	$35/11$
				1	$-10/11$	$-1/11$	$18/11$
			1		$5/11$	$6/11$	$35/11$
		1			$-1/11$	$1/11$	$4/11$
	1				$1/11$	$-1/11$	$7/11$