

# Die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit eines Eisenbahnfahrzeuges: Die richtige, die falsche und die Zufallsmethode

## Calculation of the Critical Speed of a Railway Vehicle: The right, the wrong and the gambling way

Prof. Dr.-Ing. Hans True, Lyngby, Dänemark

### Zusammenfassung

In den letzten Jahren haben mehrere Autoren viele Methoden zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeit vorgeschlagen. In dem Beitrag werden die in der Industrie und in den Forschungsinstituten angewandten Methoden verglichen und bewertet. Es wird plausibel gemacht, warum die Schlingerbewegung robuster als die ungestörte, stationäre Bewegung ist. Begriffe wie „Multiple Attraktoren“, „Erlaubte Linearisierung und Methodik“, „Subkritische und Superkritische Verzweigungen“, „Gefahren des Betriebes bei überkritischen Geschwindigkeiten“ – hierunter „Chaotische Transienten“ – werden erörtert.

### Abstract

In recent years several authors have proposed ‚easier numerical methods‘ to find the critical speed in railway dynamical problems. Actually the methods do function in some cases, but in most cases it is really a gamble. In this presentation the methods will be discussed and the pros and contras commented. We shall also address the questions when a linearisation is allowed and the curious fact that the hunting motion is more robust than the ideal stationary state motion in the track. Concepts such as „multiple attractors“, „permitted linearisation“, „subcritical and supercritical bifurcations“, „the danger of running at supercritical speeds“ and „chaotic motion“, will be addressed.

## 1 Einleitung

Das mathematische Problem der Berechnung der kritischen Geschwindigkeit eines Eisenbahnfahrzeuges ist in erster Linie ein *Existenzproblem* – nämlich eine Berechnung der oberen Grenze der Fahrzeuggeschwindigkeit, für welche eine Gleichgewichtslösung eines nichtlinearen dynamischen Problems global eindeutig ist. Eine Gleichgewichtslösung ist hier definiert als die asymptotische Lösung eines Anfangswertproblems, wenn die Zeit  $t$  gegen unendlich strebt, oder anders ausgedrückt, wenn die Transiente verschwunden ist. Global eindeutig heißt, dass die asymptotische Lösung unabhängig von den Anfangswerten ist.

Die fehlende Eindeutigkeit wird sehr oft durch Verzweigungen – auch Bifurkati-

onen genannt – verursacht, und die Geschwindigkeiten, an denen Verzweigungen im Parameter-Zustandsraum auftreten, heißen Verzweigungspunkte. Das mathematische Problem der Berechnung der kritischen Geschwindigkeit führt also zu einer Berechnung des kleinsten Verzweigungspunktes.

In der Eisenbahnfahrzeugdynamik liegt aber der kleinste Verzweigungspunkt sehr oft nicht an der Lösung, die für kleine Geschwindigkeiten global eindeutig ist, sondern sonstwo im Parameter-Zustandsraum. Ein für Drehgestellfahrzeuge sehr typisches Verzweigungsdiagramm zeigt *Bild 1*.

Die Nulllösung ist bekannt, und der Verzweigungspunkt der Nulllösung liegt in unserem Beispiel im *Bild 1* bei  $V = 160$  km/h. Die Nulllösung ist aber

nur im Intervall  $0 < V < 134$  km/h global eindeutig. Im Geschwindigkeitsintervall  $134 < V < 160$  km/h existieren drei Lösungen, wovon zwei stabil sind, und in diesem Intervall kann die Transiente nach einer Anfangsstörung entweder zur stabilen Nulllösung oder zur stabilen periodischen Lösung streben. Eine stabile Lösung wird *Attraktor* genannt, wenn, wie in unserem Fall, Transienten gegen sie streben. Weil in unserem Beispiel zwei Attraktoren im Geschwindigkeitsintervall  $134 < V < 160$  km/h existieren, arbeiten wir in dem Intervall mit *multiple Attraktoren*.

$V = 134$  km/h ist auch ein Verzweigungspunkt, in dem eine stabile und eine instabile periodische Lösung – *die Schlingerbewegungen* – für wachsende Geschwindigkeit von einander abzweigen. Die üb-

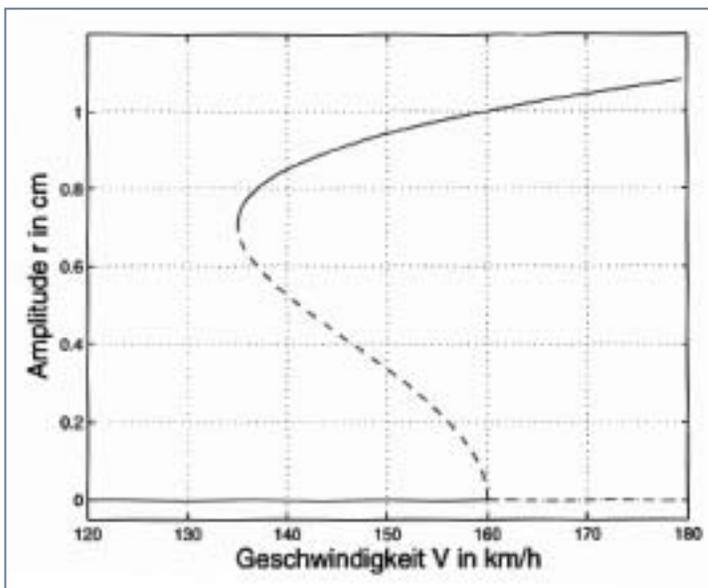
liche Bezeichnung, ‚Sinuslauf‘, ist irreführend, weil der Lauf *nicht* sinusförmig ist.  $V = 134 \text{ km/h}$  ist der kleinste von den beiden Verzweigungspunkten, und er ist daher *die kritische Geschwindigkeit*, die berechnet werden muss. Die Nulllösung ist in dem Geschwindigkeitsintervall  $134 < V < 160 \text{ km/h}$  gegenüber hinreichend kleinen Anfangsstörungen stabil, und es ist daher unmöglich, in unserem

werden. Wie im *Bild 1* können aber kleinere Verzweigungspunkte, die nicht an der Nulllösung liegen, existieren. Die mathematische Methode zur Berechnung eines anderen Verzweigungspunktes heißt *Fortsetzung*, wobei man einem *Pfad* von einem zum nächsten Verzweigungspunkt folgt. In unserem Fall ist der Pfad der der instabilen periodischen Lösung im Parameter-Zustandsraum vom Verzweigungs-

andere Strategien zur Berechnung des kleinsten Verzweigungspunktes angewandt werden müssen.

Die Strategie von True [1], [2], [3], [4] basiert auf einer Fortsetzung der bekannten Nulllösung für wachsende Geschwindigkeiten, die problemlos durchgeführt werden kann, bis zum Verlust ihrer Stabilität. Bei einer wenig höheren Geschwindigkeit wird das dynamische Problem wieder mit einer kleinen Anfangsstörung numerisch gelöst, und die Lösung wird dann gegen den im Zustandsraum nächsten Attraktor streben. Er ist in allen bisher untersuchten Fällen eine periodische Lösung, die die Schlingerbewegung darstellt. Es gilt sowohl im *subkritischen* Fall wie im *Bild 1* dargestellt, als auch wenn die Verzweigung superkritisch wie in *Bild 2* ist, was auch vorkommt.

Wenn die stabile periodische Lösung auf dieser Weise gefunden ist – d. h. wenn die Transiente vernachlässigbar ist – wird der Endvektor der periodischen Lösung gespeichert und als Anfangswert für die folgende Berechnung angewandt. Weil die gefundene periodische Lösung stabil ist, kann man Schupps Methode [6] zur Fortsetzung der periodischen Lösung bis zum nächsten Verzweigungspunkt für wachsende Werte der Geschwindigkeit wie im *Bild 2* oder für abnehmende Geschwindigkeit wie im *Bild 1* anwenden. Alternativ kann man Trues Methode [1], [2], [3], [4] anwenden, wobei die Geschwindigkeit manuell in kleinen Stufen geändert wird. In jeder Stufe werden die Endwerte der vorigen Berechnung als Anfangswerte für die nächste Stufe angewandt. Die Berechnungen werden so lange fortgesetzt, bis der nächste Verzweigungspunkt erreicht wird. Ein schnellerer Voranschlag lässt sich mit Hilfe von *Ramping* durchführen, wo anstelle der stufenweisen, diskreten Geschwindigkeitsänderung die Geschwindigkeit als eine stetige, sich langsam ändernde Funktion der Zeit ins dynamische System eingeführt wird. Hierbei wird aber der nächste Verzweigungspunkt nur annäherungsweise bestimmt, und es ist notwendig, für die genauere Bestimmung die diskrete Berechnung – jetzt aber nur in einem kleinen Geschwindigkeitsintervall – anzuwenden. Zu beachten ist, dass diese Berechnungen eine *mathema-*



**Bild 1:** Beispiel eines Verzweigungsdiagrammes für ein Drehgestellfahrzeug, Amplitude der lateralen Bewegung des führenden Radsatzes im führenden Drehgestell vs. Fahrzeuggeschwindigkeit. Der ungestörte Lauf ist die Nulllösung – die Abszissenachse. Der kleinste Verzweigungspunkt, liegt aber nicht auf dieser Achse sondern bei  $134 \text{ km/h}$ . Dort verzweigen eine instabile – gestrichelt – und eine stabile – ausgezogen – periodische Lösung von einander. Die Nulllösung ist für  $V > 160 \text{ km/h}$  instabil

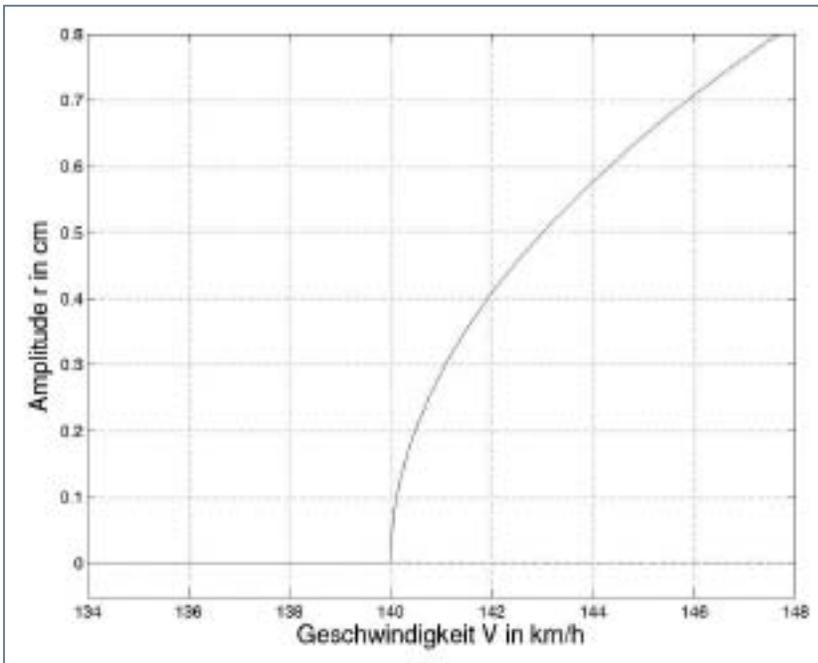
Fall die kritische Geschwindigkeit durch eine konventionelle Stabilitätsanalyse zu berechnen. Eine Methode zur Berechnung des kleinsten Verzweigungspunktes in der Eisenbahnfahrzeugdynamik ist in mehreren Veröffentlichungen des Autors [1], [2], [3], [4] beschrieben, aber andere Forscher haben andere Methoden vorgeschlagen und *angewandt*. Eine kritische Beurteilung der Berechnungsmethoden ist das Thema dieses Beitrags.

## 2 Die richtige Methode

Die Nulllösung ist bekannt, und ihr erster Verzweigungspunkt kann durch eine gewöhnliche Stabilitätsanalyse berechnet

werden. Wie im *Bild 1* können aber kleinere Verzweigungspunkte, die nicht an der Nulllösung liegen, existieren. Die mathematische Methode zur Berechnung eines anderen Verzweigungspunktes heißt *Fortsetzung*, wobei man einem *Pfad* von einem zum nächsten Verzweigungspunkt folgt. In unserem Fall ist der Pfad der der instabilen periodischen Lösung im Parameter-Zustandsraum vom Verzweigungs-

punkt  $V = 160 \text{ km/h}$  weg. True und Kaas-Petersen [5] haben in dieser Weise den kleinsten Verzweigungspunkt für ein fahrdynamisches System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen berechnet. Normalerweise ist ein fahrdynamisches System aber ein differential-algebraisches System und die Fortsetzungsmethoden, die vom Web heruntergeladen werden können, funktionieren nicht. Schupp [6] hat aber ein Fortsetzungsprogramm entwickelt, das *stabilen, periodischen* Lösungen eines fahrdynamischen Systems folgen kann. Instabilen periodischen Lösungen kann aber in der Eisenbahnfahrzeugdynamik mit den bekannten heutigen Fortsetzungsprogrammen nicht gefolgt werden, weswegen



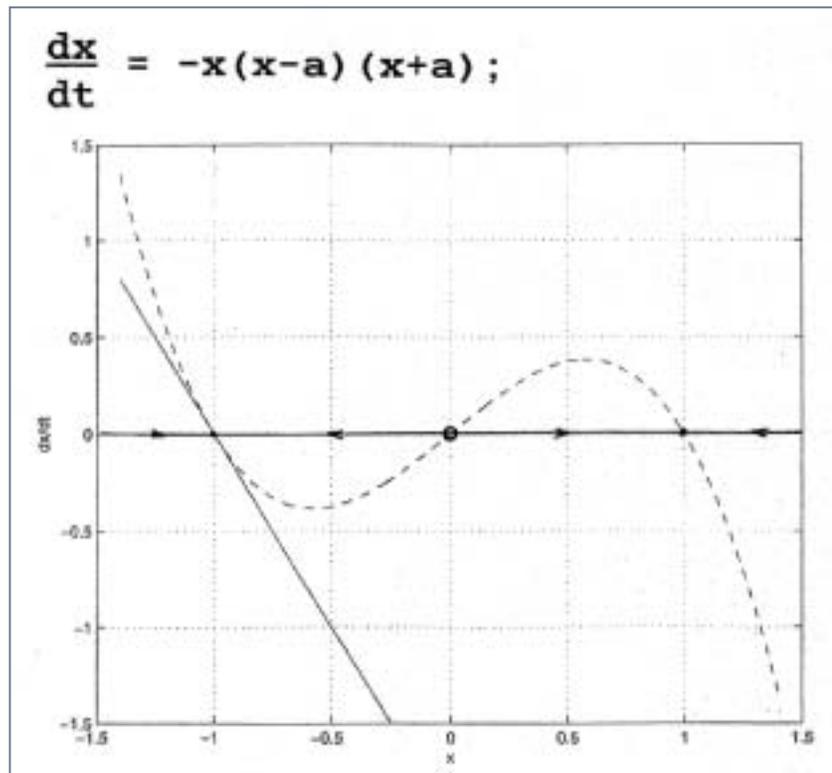
**Bild 2:** Beispiel einer superkritischen Verzweigung für ein Eisenbahnfahrzeug, Amplitude der lateralen Bewegung des führenden Radsatzes vs. Fahrzeuggeschwindigkeit. Der ungestörte Lauf ist die Nulllösung – die Abszissenachse. Der kleinste Verzweigungspunkt, liegt bei 140 km/h. Dort verzweigt eine stabile – ausgezogen – periodische Lösung. Die Nulllösung ist für  $V > 140$  km/h instabil – gestrichelt

schwindigkeitszügen mehrere hundert Kilometer pro Stunde betragen! Ferner kann auf der stabilen periodischen Lösung im *Bild 2* ein neuer, aber subkritischer Verzweigungspunkt auftreten, dessen neuer Zweig, der ja instabil ist, bis unterhalb des superkritischen Verzweigungspunktes verläuft, bevor er mit einer stabilen Lösung, ähnlich wie im *Bild 1*, vereint wird. Beim amerikanischen Standard-Güterwagendrehgestell zweigt ein chaotischer Attraktor bei hoher Geschwindigkeit von der periodischen Lösung ab und verschwindet bei einer viel kleineren Geschwindigkeit in einer sogenannten Krise (s. Xia und True [7]). Dieser Verzweigungspunkt – die Krise – ist dann die kritische Geschwindigkeit. Linearisierungen, wie sie für die üblichen Stabilitätsuntersuchungen angewandt werden, sind mit Vorsicht zu gebrauchen. Zuerst muss ein Attraktor des nichtlinearen dynamischen Problems, um die linearisiert werden kann, gewählt werden (*Bild 3*). Das resultierende lineare Problem hat nur eine Gleichgewichtslösung – die des gewähl-

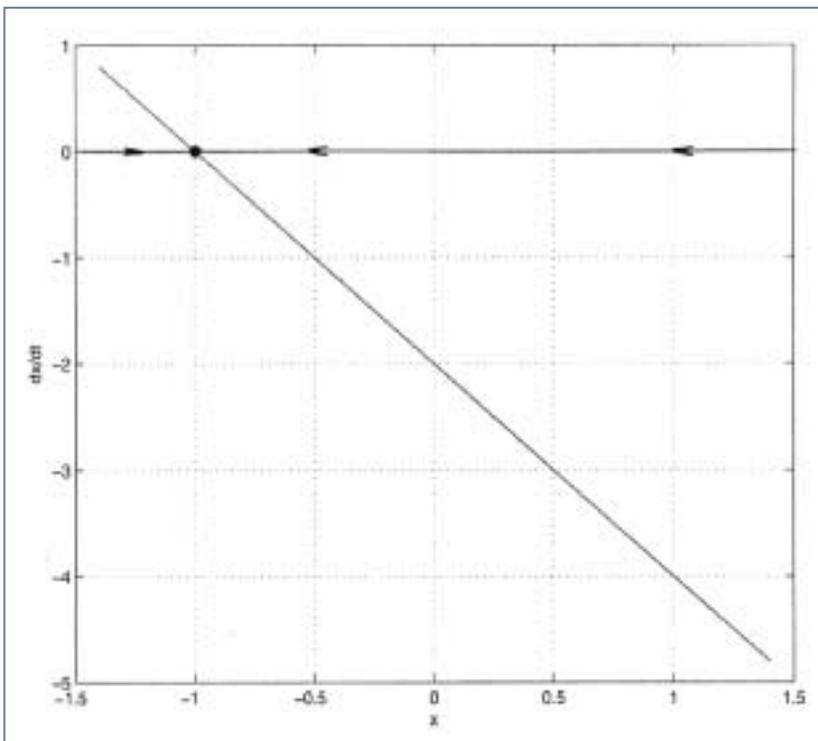
tische Methode zum Suchen der Attraktoren ist – also ein Existenzproblem, das im Prinzip nichts mit Stabilität zu tun hat! Es ist bemerkenswert, dass die Methode mit derselben Fragestellung sowohl im Fall des *Bildes 1* als auch im Fall des *Bildes 2* funktioniert.

### 3 Die falsche Methode

Eine Stabilitätsanalyse der Nulllösung ist die falsche Berechnungsmethode der kritischen Geschwindigkeit. Das Problem ist schlechthin falsch formuliert, und die Berechnung liefert daher im Allgemeinen *nicht* die kritische Geschwindigkeit, sondern nur das, was gefragt wird: Eine Stabilitätsgrenze für die Nulllösung gegenüber infinitesimalen Störungen! Im *Bild 2* ist zwar die Stabilitätsgrenze auch der kleinste Verzweigungspunkt, aber im *Bild 1*, ein Fall der sehr oft vorkommt, ist sie nicht der kleinste Verzweigungspunkt. Man weiß im Voraus nicht, ob der Fall im *Bild 1* oder der im *Bild 2* auftreten wird. Der Unterschied zwischen der Stabilitätsgrenze der Nulllösung und dem kleinsten Verzweigungspunkt kann bei Hochge-



**Bild 3:** Ein eindimensionales nichtlineares dynamisches Problem mit drei Gleichgewichtspunkten: Die Attraktoren  $-1$  und  $1$ , und  $0$ , der instabil ist. Die gestrichelte Kurve zeigt  $dx/dt$ , deren Vorzeichen die Richtungsvektoren auf der  $x$ -Achse bestimmt. Die schräge Linie durch  $-1$  ist die Linearisierung des dynamischen Problems um den Punkt  $-1$



**Bild 4:** Das aus Bild 3 resultierende lineare dynamische Problem. Zwei der Gleichgewichtspunkte sind verschwunden und damit auch jede Information über den stabilen Gleichgewichtspunkt in 1. Wenn **bloß** die Linearisierung benutzt wird, kann man keine Auskunft über den Attraktor in 1 erhalten

ten Attraktors – und alle anderen Attraktoren sind aus dem Problem verschwunden (Bild 4). Das um die Nulllösung linearisierte dynamische Problem enthält keine Auskunft über die Schlingerbewegung, und sie kann daher nichts über die Existenz der Schlingerbewegung aussagen – insbesondere auch nichts über die kleinste Geschwindigkeit, wo die Schlingerbewegung auftreten kann – also die kritische Geschwindigkeit.

Linearisierungen sind nicht immer erlaubt. Die erste Ableitung der zu linearisierenden Funktion muss existieren, was z. B. für  $\sqrt{x}$  in  $x = 0$  nicht der Fall ist. Die eisenbahnfahrzeugdynamischen Probleme sind nicht-glatt, und in den nicht-glaten Punkten der Kraft- und Momentfunktionen ist die erste Ableitung der Funktionen nicht definiert. Ferner soll die Linearisierung Auskunft über die Neigung der Funktion in einer Umgebung des Linearisierungspunktes geben, was z. B. bei  $\cos x$  in  $x = 0$  nicht der Fall ist. Linearisierungen eines nichtlinearen dynamischen Problems sind sehr nützlich für elementare Stabilitätsuntersuchungen gegenüber

infinitesimalen Störungen – und nur für sie – und für Frequenzanalysen, aber sie können keine Auskunft über Existenzfragen geben.

Die Jacobimatrix des dynamischen Systems wird vom impliziten numerischen Differentialgleichungslöser gebraucht. Die impliziten Differentialgleichungslöser sind wegen ihrer Stabilitätseigenschaften bei der numerischen Analyse nichtlinearer dynamischer Probleme empfehlenswert. Bei den nicht-glaten Systemen, wie die eisenbahndynamischen Systeme es sind, ist besondere Vorsicht geboten, weil die Linearisierung in gewissen Punkten, wo Nicht-glattheiten auftreten, nicht definiert ist. Es ist nicht ratsam über solche Punkte hinweg zu integrieren, weil ein solches Vorgehen zu großen Fehlern führen kann. Die Lösungsroutinen müssen daher die Nicht-glattheiten berücksichtigen. Die Änderungen der Routinen bei eisenbahndynamischen Systemen sind in den Arbeiten von Xia [8] und Hoffmann [9] durchgeführt und vom Autor in [4] diskutiert.

## 4 Die Zufallsmethoden

Einige Eisenbahndynamiker meinen, dass die ‚Richtige Methode‘ zur Bestimmung der kritischen Geschwindigkeit zu schwer durchführbar oder zu langsam ist und deswegen modifizierte Verfahren anwenden und begründen. Stichel [10] probiert mit einer endlichen Störung der lateralen Verschiebung des führenden Radsatzes bei wachsenden Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit zu finden, wo die Schlingerbewegung auftritt. Er folgt danach dem Pfad der Schlingerbewegung im Phasen-Zustandsraum mit Ramping rückwärts – d. h. bei abnehmender Geschwindigkeit – bis die Schlingerbewegung aufhört. Diese Methode ist auch ‚Richtig‘, weil Stichel der Schlingerbewegung für abnehmende Geschwindigkeiten folgt. Stichel spart Rechenzeit für die Fortsetzung der Nulllösung vom Sprung auf die Schlingerbewegung bis zum Stabilitätsverlust der Nulllösung. Die Ersparnis ist verschwindend klein, wenn der Nulllösung gefolgt wird, aber oft ist die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Gleismittellinie – die Nulllösung – nicht die stabile grundlegende Gleichgewichtslösung. Ein Beispiel ist die quasi-stationäre Kurvenfahrt eines Eisenbahnfahrzeuges. In solchen Fällen ist das Verfahren von Stichel zeitsparend, wenn der Unterschied zwischen der kritischen Geschwindigkeit und dem Stabilitätsverlust – der ja unbekannt ist – groß ist. Die Mehrheit der Eisenbahndynamiker, die wie Stichel eine endliche Störung der lateralen Verschiebung des führenden Radsatzes anwenden, machen den Fehler, dem Pfad der Schlingerbewegung im Parameter-Zustandsraum nicht mit abnehmender Geschwindigkeit zu folgen und nennen die Geschwindigkeit, wo die Schlingerbewegung bei steigender Geschwindigkeit zuerst auftritt, die kritische Geschwindigkeit. Es ist dann ein reiner Zufall, ob die gefundene Geschwindigkeit überhaupt in der Nähe der kritischen liegt, weil die gefundene Geschwindigkeit im Fall des Bildes 1 von der zufälligen Größe einer Störung einer Anfangsbedingung abhängt – eine Anfangs-

bedingung, die nur *eine Komponente eines großen Anfangswertvektors* ist, dessen andere Komponenten aber auch eine Rolle spielen. Bei der Störung nur eines Anfangswertes wird übrigens wertvolle Rechenzeit mit Erregung der anderen Komponenten bis zum Ausklingen vergeudet. Nur im Fall des *Bildes 2* wird das richtige Ergebnis geliefert, aber man weiß meistens, wie gesagt, im Voraus nicht, mit welchem Fall man arbeitet.

Die Eisenbahndynamiker in Chengdu, China, haben schon eingesehen, dass eine Störung nur eines Anfangswertes nicht ausreicht. Sie verwenden deswegen als Eingabe eine hinreichend lange gemessene Gleislage. Dann werden gleich mehrere Komponenten angeregt, und die bei wachsender Geschwindigkeit gefundene kritische Geschwindigkeit erhält eine anscheinend realistische Grundlage. *Der gefundenen Schlingerbewegung wurde aber im Parameter-Zustandsraum mit abnehmender Geschwindigkeit nicht gefolgt.* Bei einem Test im Institut haben ein Mitarbeiter des Institutes und der Autor dann in einem schon untersuchten Modell eine Fortsetzung der Schlingerbewegung für abnehmende Geschwindigkeit durch Ramping durchgeführt. Die Ramping wurde bei der gefundenen kritischen Geschwindigkeit angefangen, aber wegen eines dringenden Termins des Mitarbeiters mussten die Berechnungen vorzeitig unterbrochen werden. Dann war aber die Geschwindigkeit schon über 10 % kleiner, und das Fahrzeug schlingerte immer noch!

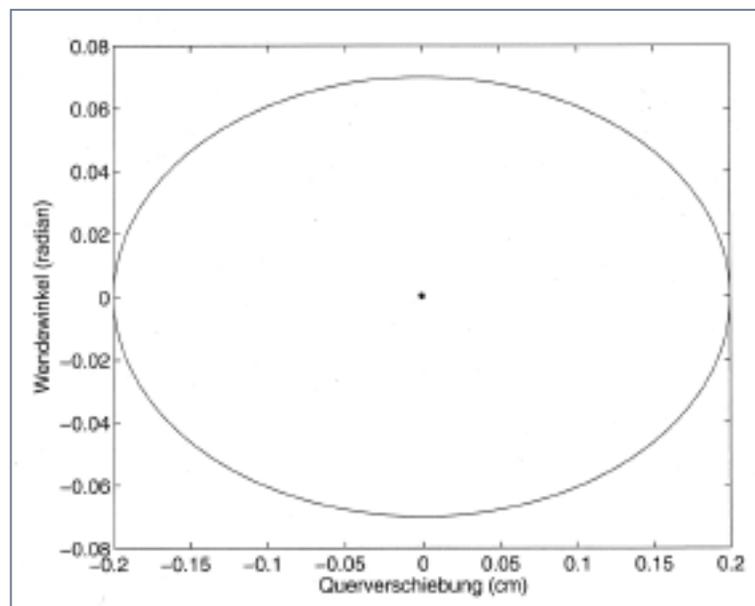
In dem Test wurde ein kommerzielles Simulationsprogramm angewandt, und der Einwand, „dass die ‚Richtige Methode‘ schwer durchführbar und zu langsam ist“ wurde verständlich. Das Programm erlaubt nämlich nicht, dass der Endvektor einer durchgeführten Simulation unmittelbar als Anfangswert einer nachfolgenden Simulation angewandt werden kann. Das ist aber ein Fehler des Programmes und nicht einer der Methode. Bei einer früheren Berechnung bei einem Besuch des Autors bei Bombardier hat der Chefrechner des Unternehmens aber in weniger als einer halben Stunde die notwendigen Modifikationen im Programm durchführen können, und die

‚Richtige Methode‘ lief dann problemlos und schnell.

Man muss daraus schließen, dass die publizierten numerischen Berechnungen der kritischen Geschwindigkeiten nur glaubhaft sind, wenn entweder eine Fortsetzung der Schlingerbewegung im Zustandsraum für abnehmende Geschwindigkeiten bis zum Aufhören der Schlingerbewegung numerisch durchgeführt wurde, oder der Autor nachgewiesen hat, dass er mit dem Fall im *Bild 2* arbeitet und auch untersucht hat, ob eine subkritische sekundäre Verzweigung auf der im *Bild 2* gefundenen Schlingerbewegung existiert und dann dieser Verzweigungslösung gefolgt ist.

Es muss aber hervorgehoben werden, dass mit der Anwendung der ‚Richtigen Methode‘ in den Fällen in *Bild 1 und 2* nicht alle mathematisch möglichen Fälle untersucht worden sind. Der Autor hat aber in 25 Jahren eisenbahndynamischer Forschung keine anderen Fälle gefunden. Das *Bild 1* wird sehr oft falsch interpretiert. Zum Beispiel liest man oft, wenn *Bild 1* betrachtet wird, dass eine Störung  $\Delta r > 0.2$  cm bei z. B. 157 km/h eine Schlingerbewegung starten wird, und wenn  $\Delta r < 0.2$  cm ist, klingt die Schlingerbewegung aus. Es wird stillschweigend angenommen dass der Punkt (157, 0.2) im Zu-

standsraum, der auf dem instabilen Zyklus liegt, den Attraktionsbereich der Nulllösung vom Attraktionsbereich des periodischen Attraktors trennt. Ein *Attraktionsbereich* eines Attraktors ist definiert als die Punktmenge im Zustandsraum durch welche die Trajektorien (auch Integralkurven oder IKurven genannt) verlaufen, die asymptotisch für  $t \rightarrow \infty$  gegen den Attraktor streben. Die Menge ist im glatten Fall eindeutig, weil die Trajektorien sich dann nicht kreuzen können. Die Annahme ist aber ein Trugschluss, weil der Zustandsraum mehrdimensional ist, und ein Punkt nur im eindimensionalen Fall zwei Attraktionsbereiche von einander trennen kann, und weil die Lage des instabilen Zyklus meistens unbekannt ist. Wir können die Lage des instabilen Zyklus in den realistischen eisenbahnfahrzeugdynamischen Problemen numerisch nicht erfassen. Der Diplomand des Autors, Daniele Bigoni, hat neuerdings nachgewiesen, dass eine Störung der Nulllösung eines dynamischen Fahrzeugmodells mit einer alleinigen Querverschiebung von der Größe der Amplitude der Schlingerbewegung – und keinen anderen Komponenten – zu einer transienten Lösung führt, *die zurück auf Null strebt*. Das ist in einem höherdimensionalen Zustandsraum schon möglich.



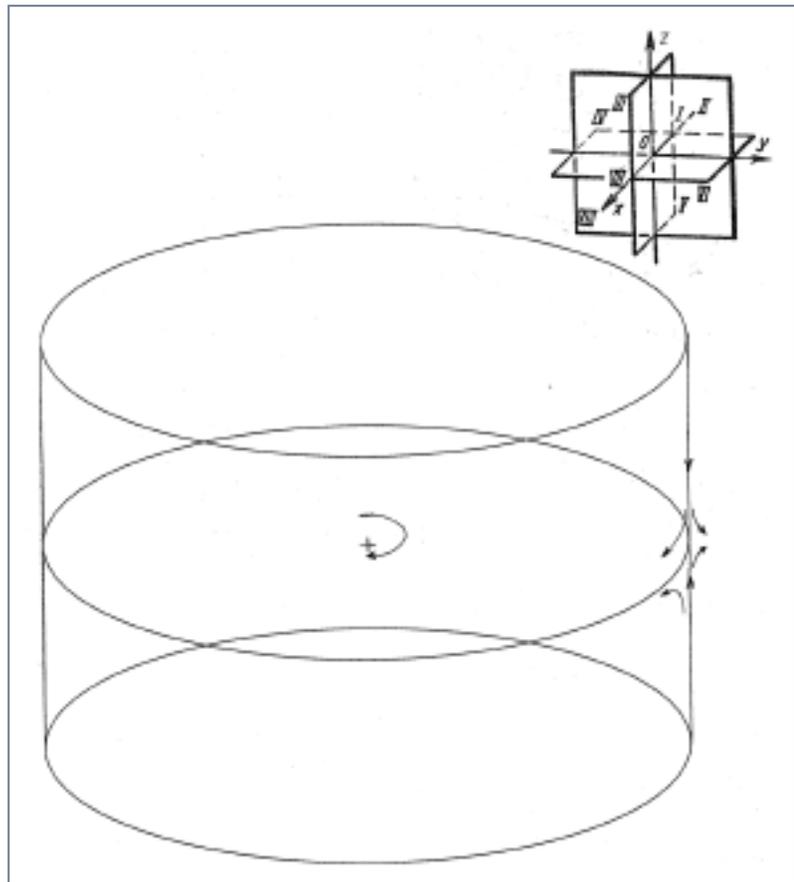
**Bild 5:** Ein stabiler Gleichgewichtspunkt (0,0) umgeben von einem instabilen Grenzzyklus. Das Innere des Grenzzyklus ist das Attraktionsgebiet des Nullpunktes

## 5 Zum höherdimensionalen Zustandsraum

Der Trugschluss wird schon in einem zweidimensionalen Beispiel klar. Wir betrachten den instabilen Zyklus (eine Ellipse) in einer Phasenebene mit der lateralen Verschiebung eines Radsatzes  $x$  als Abszisse und der Wendewinkel  $y$  als Ordinate des Koordinatensystems (*Bild 5*). Der Nullpunkt ist dann ein Attraktor. Das Innere der Ellipse ist das Attraktionsgebiet des Nullpunktes, während das Äußere das Attraktionsgebiet eines weiter draußen liegenden Attraktors ist. Der Punkt  $(157, 0.2)$  entspricht im *Bild 5* einem der Punkte  $(\pm 0.2, 0)$ , und es ist leicht einzusehen, dass für alle  $y=0$  alle Trajektorien durch Punkte  $|x| < 0.2$  gegen 0 streben, während alle Trajektorien durch Punkte  $|x| > 0.2$  von 0 weg streben. Wenn aber  $y \neq 0$ , gibt es Punkte außerhalb der Ellipse mit Abszissen  $|x| < 0.2$  – z.B. auch  $x = 0$  – durch welche die Trajektorien von 0 weg streben. Es ist also möglich, dass Störungen im *Bild 1* – wo  $\Delta r$  die einzige Komponente des Zustandes ist – auch für  $\Delta r = 0$  zu Schlingerbewegungen führen können.

Man kann mathematisch beweisen, dass der instabile Grenzzyklus in der Nähe der subkritischen Verzweigung in einer Fläche im  $N$ -dimensionalen Zustandsraum liegt, deren Tangentenebene von den Eigenvektoren zu den komplex konjugierten Eigenwerten im Verzweigungspunkt mit Realwert gleich Null ausgespannt wird. Dieser Grenzzyklus ist Leitkurve einer Erzeugenden eines  $(N-2)$ -dimensionalen Zylinders, der die Attraktionsgebiete des Nullpunktes und des stabilen Grenzzyklus – die Schlingerbewegung – trennt. Eine Vorstellung davon gibt *Bild 6*. Die Zylinderfläche selbst ist in dieser Darstellung eine Art Projektion eines  $(N-2)$ -dimensionalen Hyperraums auf eine zweidimensionale Fläche. Die Trajektorien auf dieser ‚Zylinderfläche‘ streben alle gegen den instabilen Grenzzyklus.

Der Grenzzyklus liegt von Anfang an schräg im Zustandsraum und biegt sich mit abnehmender Geschwindigkeit derart, dass die Projektionen des Grenzzyklus auf eine beliebige Koordinatenebene



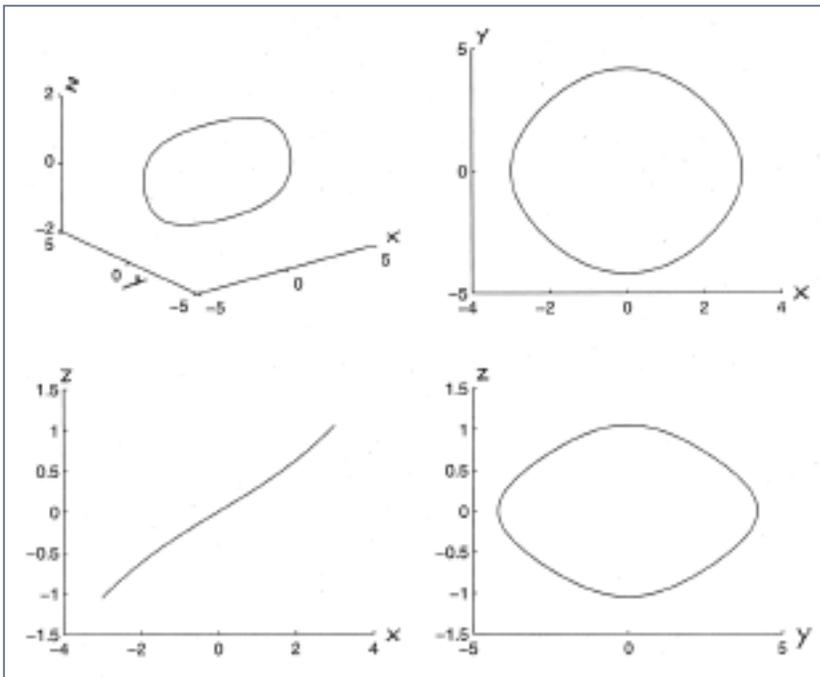
**Bild 6:** Eine bildliche Darstellung im dreidimensionalen Raum des instabilen Grenzzyklus mit der ‚Zylinderfläche‘, deren Innere das Attraktionsgebiet der Nulllösung bildet. Der Grenzzyklus ist ein sogenannter Sattel-Zyklus in dessen innere Fläche alle Trajektorien spiralförmig gegen Null streben, während sie außerhalb der ‚Zylinderfläche‘ gegen den weit draußen liegenden stabilen Grenzzyklus streben. Die Struktur der ‚Zylinderfläche‘ ist eigentlich die in der oberen Ecke gezeichnete, wobei jede der Koordinatenebenen wiederum diese dreidimensionale Struktur hat und jede der dabei entstandenen Koordinatenebenen wiederum und ... bis die Dimension  $N-2$  im Zustandsraum erreicht ist

ne im  $N$ -dimensionalen Zustandsraum eine geschlossene Kurve darstellt. Diese Projektionen zeigen, dass alle Teilkörperschwingen. Ein dreidimensionales Beispiel zeigt *Bild 7*.

Mit abnehmender Geschwindigkeit verbiegen sich der instabile Grenzzyklus und das Attraktionsgebiet so sehr, dass das Ergebnis – wenigstens heute – nicht berechenbar ist.

Drei Beispiele sind Indikationen dafür, dass das Attraktionsgebiet des Nullpunktes im  $N$ -dimensionalen Zustandsraum sich um den stabilen Grenzzyklus herum derart schlängelt, dass es mit einer großen Anregung möglich ist, die Schlingerbewegung zu stabilisieren – obwohl nur kurzzeitig! Erstens hat Jensen [11] dem Autor numerisch in einem Beispiel mit

einem realistischen Drehgestellmodell demonstriert, dass eine große Anregung die Schlingerbewegung stabilisieren kann. Zweitens hat TTCI in Pueblo, COL, USA, dem Autor bei einem Test auf ihrer Versuchsanlage mit einem offenen Güterwagen mit ‚3-piece‘-Güterwagendrehgestellen, wo die ‚Snubbers‘ (Dämpferelemente in einem Drehgestell) in einem Drehgestell entfernt waren, um das Drehgestell zu destabilisieren, demonstriert, dass der Wagen bei einer bestimmten Geschwindigkeit wiederholt beim Überfahren einer Weiche einen derart harten Schlag im Herzstück bekam, dass die Schlingerbewegung sofort aufhörte. Innerhalb von Sekunden fing das Drehgestell selbstverständlich wieder an zu schlingern. Drittens hat von Wagner [12] bei einem ein-

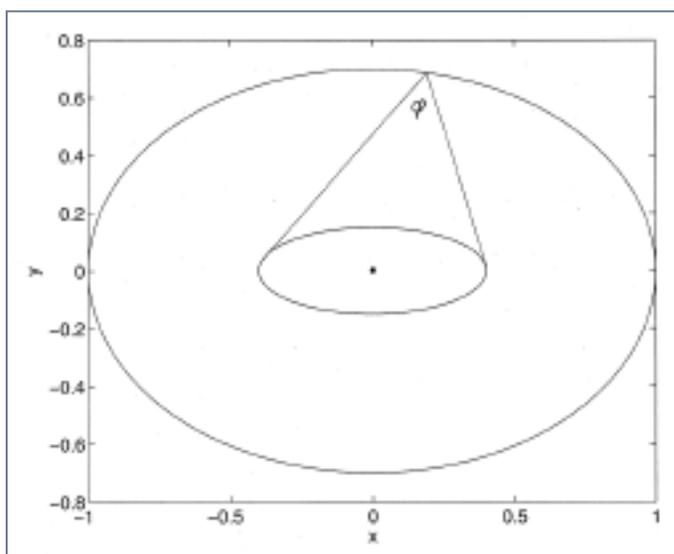


**Bild 7:** Eine geschlossene Raumkurve im dreidimensionalen xyz-Raum deren Projektionen auf alle drei Koordinatenflächen xy, xz und yz geschlossene ebene Kurven sind. Die Kurve in der xz-Fläche ist wegen des Zusammenfalls der Perioden der x- und z-Komponenten entartet

fachen Modell eines Radsatzes einige Projektionen des Attraktionsgebietes der Nulllösung auf Ebenen berechnet, wo das Attraktionsgebiet nicht zusammenhängend ist.

Die Frage, warum bei den multiplen Attraktoren die periodische Lösung robuster als die Nulllösung ist, kann wegen

der großen Komplexität der Attraktionsgebiete im N-dimensionalen Raum nicht beantwortet werden, aber ein anschauliches *Bild 8* kann es plausibel machen. Die kleine Ellipse im *Bild 8* – ein instabiler Grenzzyklus – begrenzt das Attraktionsgebiet des stabilen Nullpunktes auf der einen Seite, und auf der anderen Sei-



**Bild 8:** Ein instabiler Grenzzyklus – die kleine Ellipse – mit einem stabilen Gleichgewichtspunkt – Null – wird von einem stabilen Grenzzyklus – die große Ellipse – umgeben

te das viel größere Attraktionsgebiet des stabilen Grenzzyklus – die große Ellipse. Hier in zwei Dimensionen sieht man leicht, dass eine hinreichend große – aber sonst beliebige, weil richtungsunabhängige – Störung des Nullpunktes zur Schlingerbewegung – die große Ellipse – führen wird. Hingegen muss eine Störung der Bewegung auf der großen Ellipse nicht nur hinreichend groß sein sondern deren Richtung auch in dem kleinen Winkelraum,  $\varphi$ , liegen, damit die Bewegung in das Attraktionsgebiet des Nullpunktes hineinspringt.

## 6 Fahren mit überkritischer Geschwindigkeit und Chaos

Man liest oft in technischen Aufsätzen, dass das Fahren mit überkritischer Geschwindigkeit gefährlich ist. Ich möchte vor dem Gebrauch des Wortes ‚gefährlich‘ warnen, weil viele Güterwagen bei normaler Betriebsgeschwindigkeit schlängeln. Die Öffentlichkeit könnte leicht den Eindruck gewinnen, dass die hoch gelobte Sicherheit bei der Eisenbahn nicht gewährleistet ist. Das Schlängeln ist gewiss unerwünscht, aber es ist nur in den schlimmsten Fällen gefährlich, unter anderen dann, wenn das Gleis nicht stabil liegt und/oder große Störungen hat.

Selbsterregte chaotische Schwingungen waren in keinem der von dem Autor und seinen Mitarbeitern durchgeführten theoretischen Untersuchungen unangenehmer als die Schlingerbewegung. Die Amplituden der chaotischen Bewegung sind von derselben Größe wie die der Schlingerbewegung – *wenn die Bewegungen auf chaotischen Attraktoren im Zustandsraum liegen*. Die chaotischen Attraktoren ziehen die Trajektorien in ihrer näheren Umgebung sehr stark an, so dass Störeinflüsse begrenzt sind und sehr schnell ausklingen.

Bewegungen, die als *chaotische Transienten* bezeichnet sind, können dagegen gefährlich sein. Chaotische Transienten können beispielsweise als eine transiente Bewegung zwischen zwei konkurrierenden Attraktoren auftreten, und ist vom Autor in niedrigdimensionalen dynamischen

Systemen wie dem berühmten Lorenz-System gefunden worden. Bei einer gewissen Kombination von Parameterwerten existieren im Lorenz-System zwei periodische Attraktoren im Zustandsraum. Bei gewissen Anfangsbedingungen kann eine Transiente im System chaotisches Verhalten aufweisen (d. h. Empfindlichkeit der Bewegung gegenüber infinitesimalen Anfangsstörungen) bis sie an einem der Attraktoren endet. Die Amplituden der chaotischen Transiente können größer als die größten Amplituden der beiden periodischen Attraktoren sein und daher im wirklichen Leben schwere Folgen haben. Pascal [13] hat die Entgleisung eines chaotisch schlingernden Güterwagens simuliert. Wegen der andauernden Erregungen vom Gleis muss das Chaos als transientes Chaos betrachtet werden, weil der Wagen nicht einen Gleichgewichtszustand fand. Einen interessanten Beitrag zum Chaos im System Eisenbahn lieferten auch Maicz et al. [14]. Für Chaosstudien ist das Buch von Moon [15] empfehlenswert.

## 7 Schlussfolgerung

Die kritische Geschwindigkeit eines Eisenbahnfahrzeuges kann numerisch nur durch *Fortsetzung des periodischen Attraktors* berechnet werden. Alle Werte, die nicht mit dieser Methode berechnet worden sind, sind ungläubwürdig.

– A 434 –

(Indexstichworte: Eisenbahnfahrzeuge, Spurführungstechnik)

(Bildnachweis: Alle Bilder, Verfasser)

## Literatur

- [1] True, H.: Does a Critical Speed for Railroad Vehicles exist?, RTD-Vol. 7, Proc. of the 1994 ASME/IEEE Joint Railroad Conference, Chicago Ill., March 22–24, 1994 (1994), S. 125–131, American Society of Mechanical Engineers, United Engineering Center, 345 East 47th Street, New York, 10017, USA.
- [2] True, H.: On the Theory of Nonlinear Dynamics and its Applications in Vehicle Systems Dynamics, Vehicle System Dynamics, 31, (1999) 5–6, S. 393–421.
- [3] True, H.: Nichtlineare Schienenfahrzeugdynamik, neue Grundlagen, Methoden und Ergebnisse. ZEVrail Glas. Ann., 128, (2004) 11–12, S. 526–537.
- [4] True, H.: Dynamics of Railway Vehicles and Rail/Wheel Contact, Dynamic Analysis of Vehicle Systems, Theoretical Foundations and Advanced Applications, CISM Courses and Lectures No. 497 (2007) S. 75–128, Springer Wien New York, url <http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/p.php?5617>.
- [5] True, H.; Kaas-Petersen, Chr.: A Bifurcation Analysis of Nonlinear Oscillations in Railway Vehicles, Proc. 8th IAVSD-IUTAM Symposium on Vehicle System Dynamics, The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks (1984) S. 655–665, Swets & Zeitlinger, Lisse, NL.
- [6] Schupp, G.: Computational Bifurcation Analysis of Mechanical Systems with Applications to Railway Vehicles, Proc. 18th IAVSD Symposium on Vehicle System Dynamics, The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks (2004) S. 458–467, Taylor & Francis, London, UK.
- [7] Xia, F.; True, H.: The Dynamics of the Three-Piece-Freight Truck, Proc. 18th IAVSD Symposium on Vehicle System Dynamics, The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks (2004) S. 212–221, Taylor & Francis, London, UK.
- [8] Xia, F.: The Dynamics of The Three-Piece-Freight Truck, Ph.d. Thesis (2002) IMM, The Technical University of Denmark, <http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/public/search.phpsearchstr=Fujie+Xia&n=5&searchtype=strict>.
- [9] Hoffmann, M.: Dynamics of European two-axle Freight Wagons, Ph.d. Thesis (2006) IMM, The Technical University of Denmark, [http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication\\_details.php?id=4853](http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication_details.php?id=4853).
- [10] Stichel, S.: Modellierung und Parameterstudien zum Fahrverhalten von Güterwagen

mit UIC-Fahrwerken, ZEVrail Glas. Ann., 123, (1999) 7–8, S. 289–296.

- [11] Jensen, J. C.: Persönliche Kommunikation.
- [12] von Wagner, U.: Nonlinear dynamic behaviour of a railway wheelset, Vehicle System Dynamics, 47, (2009) 5, S. 627–640.
- [13] Pascal, J.-P.: Oscillations and Chaotic Behaviour of Unstable Railway Wagons over Large Distances, Chaos, Solitons and Fractals, 5, (1995) 9, S. 1725–1753.
- [14] Maicz, D.; Mittermayr, P.; Presle, G.; Stephanides, J.: Muster im chaotischen dynamischen System Eisenbahn – Bildung von Strukturen, ZEVrail, Tagungsband SFT Graz 2008, 132 (2008) S. 190–201.
- [15] Moon, F.: Chaotic and Fractal Dynamics, John Wiley & Sons, New York, 1992.

## Bild

Prof. em. Dr.-Ing. Hans True. Studium des Maschinenbaus an der Dänischen Technischen Universität (DTU), Kgs. Lyngby und der Angewandten Mathematik an der Albert-Ludwigs Universität, Freiburg i. Br. sowie an der Harvard Universität, Cambridge, Mass.,

USA. Von 1960 bis 1961 Assistent an der DTU; Promotion 1964. Von 1967 bis 2003 Lehrer für Angewandte Mathematik an der DTU. Gastforscher an der Yale Universität von 1964 bis 1965, der Albert-Ludwigs Universität, Freiburg i. Br., von 1970 bis 1972, der Pennsylvania State University von 1974 bis 1975, der California Institute of Technology im Sommer 1975, der University of Leeds 1985, der Northwestern University von 1987 bis 1988 und der Clemson University im Sommer 1988. Senior Ingenieur bei ES-Consult, Vedbæk, Dänemark, von 1992 bis 1996 und bei Scan Rail Consult, Kopenhagen, von 1997 bis 1998. Eigene Beraterfirma ‚True Consult‘ seit 1997. 1964–1967 Fulbright Fellow und 1970–1971 Stipendiat der Alexander von Humboldt-Stiftung. Seit 2003 Präsident der ‚International Association for Vehicle System Dynamics‘.

Anschrift: DTU Informatics, Die Dänische Technische Universität, Richard Petersens Plads 321, 2800 Kgs. Lyngby, Dänemark.  
E-Mail: ht@imm.dtu.dk