

Stokastiske modeller for varmedynamiske systemer

Ole Knop

LYNGBY 2001
EKSAMENSPROJEKT
NR. 10/01

IMM

Abstract

The present master thesis concerns stochastic dynamic modelling of heating systems. The thesis is organized into two parts. In the first part a mathematical model for a thermostatic valve is developed based on knowledge of the physical properties of the system. The key issue is that the hysteresis effects due to friction forces in the valve is compensated by an adaptive friction model.

The presented valve model is a continuous-discrete state space model in terms of stochastic differential equations. Statistical methods and empirical data from controlled experiments are used to estimate the parameters in the model. The model performance is illustrated using independent empirical datasets. Furthermore, the model is extended to account for the heat dynamics of the valve thermostat. The parameters are estimated and the dynamical model is validated.

In the second part of the project a micro combined heat and power (CHP) unit is studied. A simplified model for a heating system is suggested by exploiting the physical knowledge of the micro-CHP in conjunction with empirical energy demand data.

The heating system is simulated when the micro-CHP is operated according to a commonly used heating strategy. This strategy is compared with a optimum operating solution found by dynamic programming. It is found that the loss of electricity could be reduced 50–75% if the CHP are controlled in an optimal way. As a result an optimum operation strategy for the micro-CHP is proposed based on prediction of the energy demand and dynamic programming.

Keywords

Thermostatic valve, hysteresis, friction compensation, heat dynamics, grey-box modelling, stochastic differential equations, maximum likelihood estimation, extended Kalman filter, micro combined heat and power unit, operation strategy, dynamic programming.

Forord

Rapporten udgør et eksamensprojekt som afslutning af civilingeniøruddannelsen på Danmarks Tekniske Universitet (DTU). Projektperioden har været fra august 2000 til marts 2001 og er udført ved Institut for Matematisk Modellering (IMM), nuværende Informatik og Matematisk Modellering.

Det første del af projektet, der omhandler modellering af termostatventil, er udført i samarbejde med Danfoss, Silkeborg. Forsøg og dataopsamling er lavet af Danfoss, hvor Niels Holding Gregersen har været stor hjælp med råd og vejledning omkring termostatventilens funktion og konstruktion samt analyse af data.

Anden del af eksamensprojektet om optimal styringsstrategi for et mikrokraftvarmeanlæg er bl.a. lavet på grundlag af data opsamlet på NESAs, Stenløse, v. Morten Peter Rasmussen. Desuden er anvendt data fra Dansk Gasteknisk Center a/s, hvor Karsten V. Frederiksen har været behjælpelig med input og afklaringer.

Først en tak til min hovedvejleder professor Henrik Madsen, IMM, som foreslog projektet og er kommet med ideer og forklaringer i projektføreløbet. Som medvejleder har været ph.d. Klaus Kaae Andersen, IMM, der dagligt har givet vejledning og inspiration, derigennem har han stor andel i denne rapport.

Desuden en stor tak til alle ansatte og medstuderende på IMM, der gennem hele projektperioden har været behjælpelig med ideer og forslag til at løse de problemer, som opstod undervejs.

Lyngby, den 1. marts 2001

Ole Knop

Indhold

Forord	v
1 Indledning	1
1.1 Rapportstruktur	2
I Stokastisk model for termostatventil	5
2 Introduktion	7
2.1 Baggrund	7
2.2 Termostatventilen	8
2.2.1 RA2000	8
2.2.2 RA-FN 15	9
2.3 Projektbeskrivelse	9
3 Forsøg	11
3.1 Forsøgsopstilling	11
3.1.1 Forsøg til statisk karakteristik	11
3.1.2 Forsøg til dynamisk karakteristik	13
3.2 Usikkerhed på måledata	15

4	Model af termostatventil	17
4.1	Eksisterende modeller	17
4.2	Fysisk beskrivelse af gasfyldt termostatventil	18
4.2.1	Skitse	18
4.2.2	Kraftbidrag	19
4.2.3	Kraftbalance	20
4.2.4	Trykdifferens over bælg $\Delta p_b(T_g)$	21
4.3	Sammenhæng mellem åbningshøjde x og flow q	22
4.3.1	Korrektion for varierende differenstryk p_{dif}	24
4.4	Dahl's hysterese-model	25
4.4.1	Dahl's model til ventilproblem	27
4.4.2	Bliman-Sorine modeller	27
4.5	Ventilmodel med Dahl's hysterese	28
5	Modellerings- og estimeringsmetode	29
5.1	Fysisk modellering	29
5.1.1	System identifikation	30
5.2	Stokastiske differentiaalligninger	31
5.2.1	Analytisk løsning af stokastisk differentiaalligning	32
5.3	Den blandede kontinuerte-diskrete stokastiske tilstandsmodel	32
5.4	Estimeringsmetoder	33
5.4.1	Maksimum likelihood estimat	33
5.4.2	Extended Kalman Filter	36
5.5	Valideringsmetoder og modelkontrol	38
5.5.1	Residualanalyse	39
5.5.2	Validering af parameterestimerer	40
5.5.3	Simulering og krydsvalidering	42

6	Simpel hysteresemodel	43
6.1	Play model	43
6.2	Estimering af play model	44
7	Modelleringsresultat af fysisk ventilmodel	49
7.1	Statisk ventilmodel	49
7.1.1	Estimering af ventilmodel uden hysteresese på test3	50
7.1.2	Estimering af ventilmodel med Dahl's hysteresese	51
7.1.3	Krydsvalidering af statisk ventilmodel	57
7.2	Dynamisk ventilmodel	60
7.2.1	Dynamisk model af gastemperatur	60
7.2.2	Estimering af dynamisk ventilmodel	61
7.2.3	Test for modelreduktion	63
7.2.4	Test for modeludvidelse	65
7.2.5	Analyse af residualer	66
7.2.6	Krydsvalidering af dynamisk ventilmodel	69
7.2.7	Kommentar	71
7.3	Modelresumé	73
8	Konklusion	75
II Optimal styringsstrategi for mikrokraftvarmeanlæg		77
9	Introduktion	79
9.1	Baggrund	79
9.2	Projektbeskrivelse	79

10 Karakteristik af mikrokraftvarmeanlæg	81
10.1 MKV-anlæg	81
10.2 Forsøgsopstilling	82
10.2.1 Måledata	82
10.3 Databehandling	83
10.3.1 Undersøgelse ved kontinuert testkørsel	83
10.3.2 Undersøgelse ved periodisk testkørsel	84
10.3.3 Estimerede parameterverdier for sterlingenhed	85
11 Varmesystem	87
11.1 Model af varmesystem med MKV-anlæg	87
11.2 Model formulering	88
11.2.1 Modelling af kapacitet	89
11.2.2 Modelling af akkumulatortank	89
11.2.3 Modelling af efterspørgsel	90
11.2.4 Kriteriefunktion	91
12 Driftsresultater	95
12.1 Anvendte efterspørgselsdata	95
12.2 Varmestyret driftsstrategi	96
12.3 Optimal driftsløsning	98
12.3.1 Dynamisk programmering	99
12.3.2 Optimeringsresultat	100
12.4 Forslag til optimal styringsstrategi	102
12.5 Forslag til videre arbejde	105
13 Konklusion	107
A Dataserier	109

B	Udregning af forsøgsvariable	115
B.1	Indfyret energi	115
B.2	Produceret varme	116
B.3	Flow i primærkreds	116
B.4	Startomkostning	117
C	Efterspørgselsdata	119
D	Resultater af varmestyret driftsstrategi	123
E	Resultater af optimal drift	127

Kapitel 1

Indledning

Det er rapportens mål at opstille matematiske modeller for forskellige varmedynamiske systemer. I løbet af projektperioden er studeret to eksempler på sådanne systemer, der hver indgår som en del af større projekter.

Første del af rapporten omhandler stokastisk modellering af en termostatventil. Her opstilles på baggrund af en fysisk viden om systemet en matematisk model for termostatventilen. Der er i forsøgsdata for termostatventilen fundet tydelige hystereseforløb pga. friktionen i ventilen. Denne friktionskraft forsøges kompenseres ved forskellige hysteresemodeller, hvor især en adaptiv friktionsmodel er anvendelig. Projektet er lavet i samarbejde med Danfoss og IT-Energi.

I anden del af rapporten opstilles en matematisk model for et mikrokraftvarmeanlæg, der skal forsyne en bolig. Energibehovet baseres på empiriske data. Herudfra undersøges det, hvordan driften af anlægget kan optimeres vha. forskellige driftsstrategier. Projektet er lavet i samarbejde med Dansk Gasteknisk Center a/s og NESAs.

For begge projekter er opsamlet en række måledata. En stor andel af projektet består heraf at analysere empiriske måledata og herudfra undersøge forskellige sammenhænge og faktoreres indvirkning. Desuden haves for begge systemer et rimeligt godt kendskab til den bagvedliggende fysik. Denne fysiske viden kombineres med kendskabet opnået gennem måledata til at opstille de matematiske modeller.

Opbygningen af de to modeller adskiller sig ved, at for termostatventilen opstilles den matematiske model ud fra en detaljeret betragtning. Dette betyder, at for hver enkel bevægelig del og ydre påvirkning i termostatventilen opstilles et matematisk udtryk for kraften. Samles disse kraftpåvirkninger fås en total model for termostatventilens funktion.

Udviklingen af modellen for varmesystemet med et mikrokraftvarmeanlæg tager udgangspunkt i en mere makroskopisk betragtning. Her opstilles modellen ud fra de forskellige input og output. Det er således underordnet, hvordan selve processen inde i anlægget forløber, så længe modellen kan simulere de større sammenhænge.

1.1 Rapportstruktur

Del I Stokastisk model for termostatventil

Kapitel 2 Til det første delprojekt indledes med en kort introduktion af termostatventilen. Derefter gives en beskrivelse af formålet og baggrunden for projektet.

Kapitel 3 Med termostatventilen er lavet en række empiriske forsøg til fastlæggelse af hhv. den statiske og dynamiske karakteristik. I kapitlet gennemgås begge typer forsøg samt data, der er opsamlet ved forsøgene. Derudover gives et skøn over hvilken usikkerhed, data er behæftet med.

Kapitel 4 På baggrund af den fysiske konstruktion af termostatventilen opstilles en matematisk model. Modellen formuleres som en kraftbalance for summen af de enkelte kræfter, der virker i ventilen. Friktionskraften modelleres med en adaptiv friktionsmodel.

Kapitel 5 Den anvendte modelleringsmetode diskuteres. Det beskrives, hvordan estimering af parametre kan gøres med maksimum likelihood metoden og Kalman filteret. Endelig beskrives metoder til modelvalidering.

Kapitel 6 De empiriske data for termostatventilen forsøges modelleret med en lineær sammenhæng og en simpel hysteresemodel, kaldet play model. Modellens parametre bliver estimeret og dens simuleringsevne vurderes.

Kapitel 7 Parametre i den fysiske ventilmodel med den adaptive hysteresemodel estimeres. Modellen valideres på et uafhængigt datasæt. Det

samme udføres med den dynamiske model for termostatventilen. Her laves desuden en række forsøg til forbedring af modellen.

Kapitel 8 I kapitlet konkluderes på resultaterne for ventilmodellering.

Del II Optimal styringsstrategi for mikrokraftvarmeanlæg

Kapitel 9 Til det andet delprojekt i dette eksamensprojekt gives en kort baggrund for projektet samt en beskrivelse af formålet.

Kapitel 10 Empiriske forsøgsdata anvendes til estimering af forskellige parametre, der karakteriserer det undersøgte mikrokraftvarmeanlæg.

Kapitel 11 En model for et simplificeret varmesystem til en bolig opstilles. Heri indgår det undersøgte mikrokraftvarmeanlæg og en lager-tank. Boligens energiefterspørgslen findes ud fra en række målinger af energiforbruget i forskellige huse. De målte energidata analyseres.

Kapitel 12 Varmesystemet med mikrokraftvarmeanlægget og de empiriske energiefterspørgsler simuleres først med en varmestyret driftsstrategi. Derefter udregnes en optimal driftsløsning ved dynamisk programmering. De to simuleringer sammenlignes og til sidst foreslås en metode til optimal styringsstrategi ved prædiktions og dynamisk programmering.

Kapitel 13 I kapitlet laves konklusionen over arbejdet og resultaterne mht. en optimal styringsstrategi for et mikrokraftvarmeanlæg.

Del I

Stokastisk model

for

termostatventil

Kapitel 2

Introduktion

Først gives en kort introduktion til baggrunden for projektet og i hvilken sammenhæng, det indgår i et større projekt. Herefter laves en mere detaljeret beskrivelse af selve projektet om modellering af en termostatventil, og hvordan projektet forventes udført.

2.1 Baggrund

Der er store fordele ved at udvikle matematiske modeller, der kan beskrive et dynamisk system. Med en matematisk model er det muligt at prædiktere og simulere det pågældende system. Hermed kan opnås et kendskab til tilstande uden, at systemet nødvendigvis har været der rent fysisk.

En sådan tanke ligger bag udviklingscenteret IT-Energi, med bl.a. Danfoss og IMM. Her ønsker man at udvikle IT-baserede værktøjer til simulering af et komplet vandbaseret varmesystem i et givent hus året rundt. Metoden, der anvendes til dette mål, er at udvikle matematiske modeller for de enkelte komponenter, e.g. pumpe, varmeveksler, rør, termostatventil, hus, osv. De enkelte komponenter, dvs. de matematiske modeller, kan herefter kobles sammen til et komplet varmesystem. Det er i denne sammenhæng, at en matematisk model for en Danfoss termostatventil ønskes udviklet.

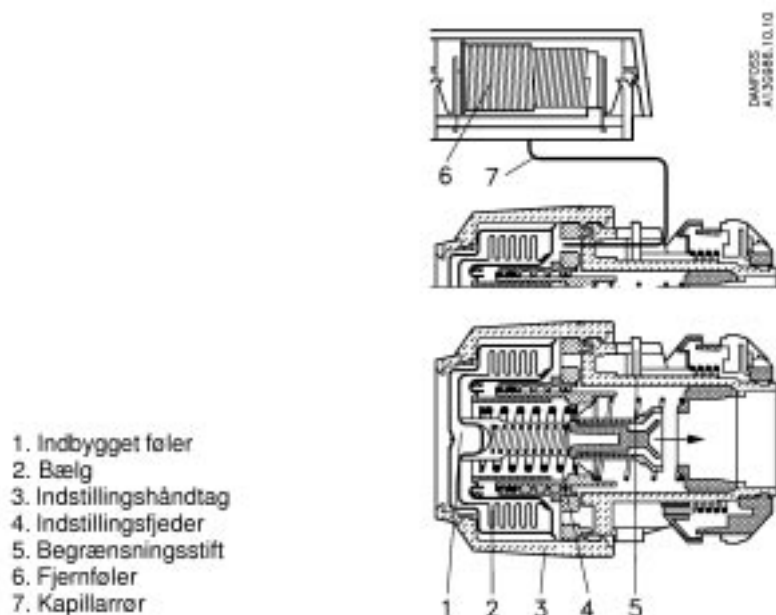
2.2 Termostatventilen

Der indledes med en kort beskrivelse af henholdsvis termostaten RA 2000 og ventilen RA-FN 15, begge fabrikeret af Danfoss. Herunder gives en kort introduktion af deres generelle funktion og anvendelse.

2.2.1 RA2000

Konstruktionen af en RA 2000 radiatortermostat er vist i figur 2.1. Omkring bælgen er indesluttet en gas, der ved varierende temperaturer påvirker den midterste stift. Ved høj temperatur ekspanderer gassen, og stiften presses i pilens retning. Gassens temperatur er enten afhængig af en fjernføler eller en føler indbygget forrest i termostaten [1].

Med indstillingshåndtaget kan termostaten indstilles til at fungere i forskellige temperaturområder. Det er indstillingsfjederen, der spændes og slækkes, så den juster gastykket til, at ventilen lukker eller åbner ved en bestemt temperatur.

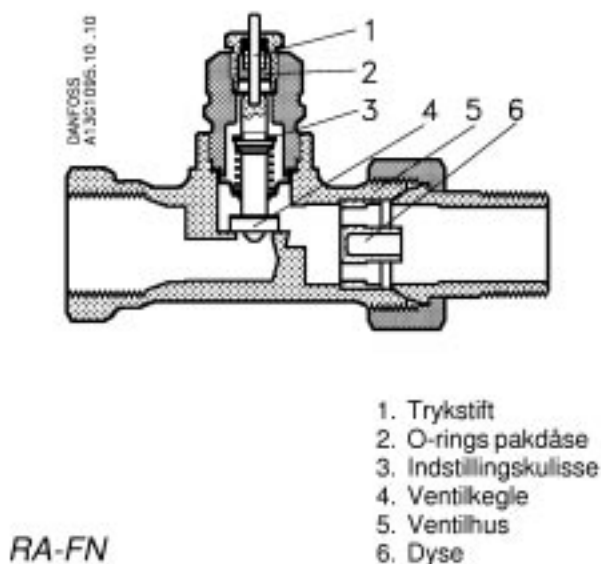


Figur 2.1: Konstruktionen af RA 2000 radiatortermostat [1].

2.2.2 RA-FN 15

I figur 2.2 ses konstruktionen af et ventilhus type RA-FN 15. Ventilen virker ganske enkel ved, at ventilkeglen løftes og sænkes i henhold til den ønskede strømning. Når termostaten er monteret, styres løftehøjden af termostaten gennem trykstiften øverst på ventilen.

Det er som regel strømmingen, i.e. flowet, der er interessant for en ventils egenskaber. Det er derfor nødvendig at kunne etablere en sammenhæng mellem flow og ventilåbning. Hertil benyttes empiriske bestemte tabeller, også kaldet '*fiskeben*', der angiver et flow som funktion af forskellige forhold som f.eks. tryk og temperatur.



Figur 2.2: Konstruktionen af RA-FN 15 ventilhus [2].

En termostatventil af ovennævnte model anvendes typisk til varmesystemer i boliger o. lign.

2.3 Projektbeskrivelse

Projektet udføres i samarbejde med Danfoss, Silkeborg. Her er lavet en række empiriske forsøg med ovennævnte termostatventil. Ved forsøgene er

målt flowet og eksterne faktorer, der menes at have indflydelse på termostatventilens funktion.

Projektet har som mål at opskrive en dynamisk model for en Danfoss termostatventil, hvor den fysiske beskrivelse af termostatventilen vil danne grundlag for modellen. Det vil heraf være muligt at identificere og validere de enkelte parametre i modellen ud fra en reel fysisk størrelse.

En total forståelse af dynamikken, samt eksakte og pålidelige måledata er i praksis meget svært at opnå. Indgangen til modelleringen vil derfor være at lave en stokastisk model, der både inkluderer den overordnede fysiske betragtning, men derudover kompenserer for usikkerhed i måledata og støj fra ukendte faktorer.

Den stokastiske model giver mulighed for at anvende forskellige statistiske redskaber til estimering og modelvalidering. Det vil derfor i høj grad blive lagt vægt på de statistiske metoder, teorien bag dem og forudsætningen for at anvende dem. Her tænkes især på ikke-lineære modeller, hvor forudsætningen for mange almindelige statistiske metoder ikke holder.

Kapitel 3

Forsøg

I dette kapitel gennemgås de forsøg, hvormed de eksperimentelle data er opsamlet. Først beskrives de to forsøgsopstillinger, der skal danne grundlag for bestemmelse af hhv. den statiske og dynamiske model for termostatventilen. For hver forsøgsopstilling gennemgås de opsamlede dataserier. Endelig udarbejdes et skema med skøn over usikkerheden på de målte data.

3.1 Forsøgsopstilling

Der er foretaget målinger på termostatventilen i to forskellige forsøgsopstillinger, der påvirker termostatventilen gennem et hhv. statisk og dynamisk temperaturforløb.

3.1.1 Forsøg til statisk karakteristik

Ved denne testopstilling er ingen dynamisk temperaturændring omkring termostaten, heraf navnet statisk karakteristik. Termostaten er her neddyppet i et vandbad. Temperaturen af vandbadet ændres forholdsvis langsomt, således at systemet med den gode varmeovergang kan antages at være i termisk ligevægt. Herved haves, at gastemperaturen under hele forsøget er lig temperaturen af vandbadet, i.e. processen mellem gas og vandbad er

reversibel. Med denne forsøgsopstilling er data for en statistisk karakteristik af termostatventilen opsamlet.

Der måles ved den statistiske karakteristik følgende variable

- Flow gennem ventil [kg/h]
- Temperatur i vandbad [$^{\circ}C$]
- Medietemperatur [$^{\circ}C$]
- Statisk tryk [$bar(O)$]
- Differenstryk over ventil [$mbar$]

Det statiske tryk er opgivet i ‘bar overtryk’ [$bar(O)$]. Størrelsen er således trykforskellen mellem det statiske tryk i ventilen og atmosfæretrykket.

Statistiske måledata

Der er opsamlet tre måleserier ved forsøgsopstillingen til den statistiske karakteristik. Først er lavet en test (**test1**), hvor temperaturen i vandbadet sænkes fra ca. $24^{\circ}C$ til ca. $19^{\circ}C$ og hæves til $24^{\circ}C$ igen. Under et sådant forløb vil ventilen åbnes og lukkes. De resterende variable, medietemperaturen T_{med} , differenstrykket p_{dif} og det statiske tryk p_{sta} , holdes konstant.

Ved den næste test (**test2**) er der til forskel fra **test1** lavet en sløjfe på det forløb, hvor temperaturen sænkes. Det vil sige, at temperaturen under sænkingsforløbet ved ca. $22.5^{\circ}C$ sættes til at stige med ca. $1^{\circ}C$ for derefter igen at falde som **test1**, se figur 3.1.

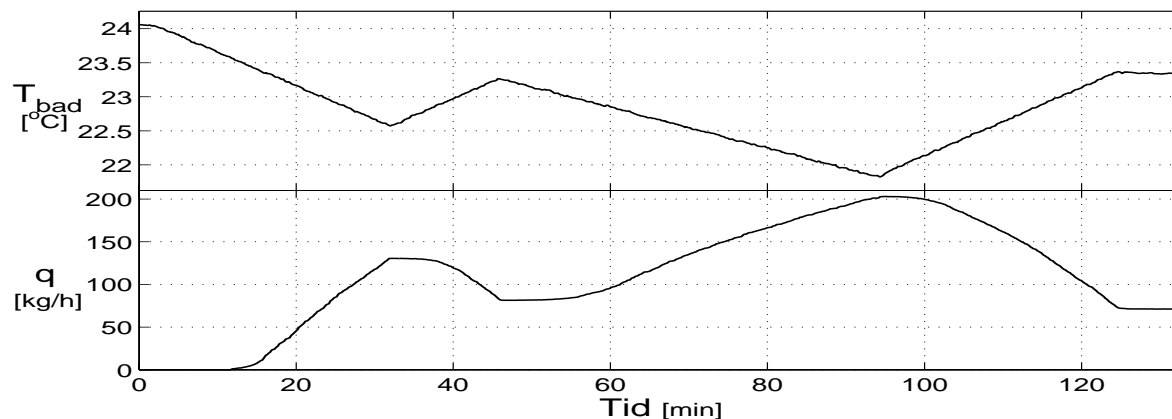
Den sidste statistiske test (**test3**) er meget kort. Her ændres udelukkende på differenstrykket og det statiske tryk for at undersøge deres indflydelse på flowet.

De tre dataserier for den statistiske karakteristik er sammenfattet i tabel 3.1, hvor t_s angiver samplingstiden for den enkelte dataserie. Plot af dataserierne kan tillige ses i bilag A.

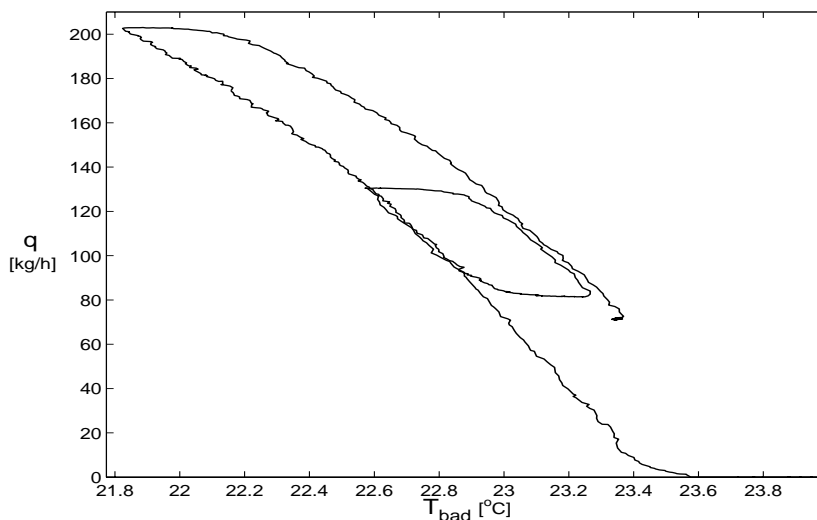
Tabel 3.1: Måledata for statistisk karakteristik

navn	tid [h]	t_s [s]	beskrivelse
test1	3.5	10	åben- og lukkekurve
test2	2	10	hysteresesløjfe på åbnekurve
test3	0.1	ca.0.3	flowrespons til stat. og diff. tryk steps

I figur 3.1 er forsøgsserien `test2` plottet. Figuren viser, hvordan flowet gennem ventilen ændres med temperaturen. Dette er endnu tydeligere med faseplottet i figur 3.2, hvor der desuden ses en klar hystereseffekt omkring åbningsforløbet.



Figur 3.1: Figuren viser `test2`, hvor henholdsvis temperaturen T_{bad} og flowet q er plottet som funktion af tiden.



Figur 3.2: Et faseplot af `test2`, hvor flowet er plottet som funktion af temperaturen. Der ses tydelig hystereseffekt.

3.1.2 Forsøg til dynamisk karakteristik

En anden forsøgsopstilling anvendes til fastlæggelse af termostaternes dynamiske karakteristik, hvor gassens temperatur er givet dynamisk ud fra

temperaturen af omgivelserne. Termostatventilen er her placeret i en vind-tunnel, hvor det er muligt hurtigt at skifte temperaturen af den omgivne luft. I disse situationer kan det ikke antages, at systemet er i en statisk lige-vægt, pga. de hurtige temperaturændringer. Forsøgsopstilling giver derved mulighed for at få kendskab til termostatventilens dynamiske karakteristik.

Ved den dynamiske karakteristik måles følgende variable

- Flow gennem ventil [kg/h]
- Lufttemperatur omkring termostat ved $1 m/s$ [$^{\circ}C$]
- Medietemperatur [$^{\circ}C$]
- Statisk tryk [$bar(O)$]
- Differenstryk over ventil [$mbar$]

De $1 m/s$ i lufttemperaturen omkring termostaten angiver vindhastigheden i tunnelen.

Dynamiske måledata

Med forsøgsopstillingen i vindtunnelen er igen lavet tre måleserier til undersøgelse af den dynamiske karakteristik. Først en måleserie (**test4**), hvor der stepvis varieres på lufttemperaturen T_{air} , mens medietemperaturen T_{med} , differenstrykket p_{dif} og det statiske tryk p_{sta} holdes konstant. Dernæst en måleserie (**test5**), hvor først medietemperaturen ændres langsomt fra ca. $30^{\circ}C$ til ca. $70^{\circ}C$, mens de øvrige variable holdes konstant. Senere varieres lufttemperaturen som i **test4**. Sidst i måleserien forsøges trinvis variation med differenstrykket og det statiske tryk.

Ved den sidste måleserie (**test6**) foretages en variation af alle variablerne over hele tidsforløbet. De tre dataserier for den dynamiske karakteristik er sammenfattet i tabel 3.2, og som ovennævnt kan plot af alle dataserierne ses i bilag A.

Tabel 3.2: Måledata for dynamisk karakteristik

navn	tid [h]	t_s [s]	beskrivelse
test4	5.5	20	steps i lufttemperatur
test5	8.5	20	først variation af medietemp., senere steps på lufttemp., sidst steps på stat. og diff. tryk
test6	8.5	20	variation af alle input

3.2 Usikkerhed på måledata

På de anvendte dataserier er opgivet en maksimal måleusikkerhed på $\pm 3\%$ for tryk og flow, mens den på temperaturen er ± 0.1 [$^{\circ}C$]. Antages en maksimal måleusikkerhed svarende til to standardafvigelser fås et skøn over spredningen på de målte værdier, som angivet i tabel 3.3.

Tabel 3.3: Usikkerhed for måledata

navn	parameter	spredning σ	enhed
flow	q	$0.015 \cdot q$	kg/h
vandtemperatur	T_{bad}	0.05	$^{\circ}C$
lufttemperatur	T_{air}	0.05	$^{\circ}C$
medietemperatur	T_{med}	0.05	$^{\circ}C$
differenstryk	p_{dif}	$0.015 \cdot p_{dif}$	$mbar$
statisk tryk	p_{sta}	$0.015 \cdot p_{sta}$	bar

Kapitel 4

Model af termostatventil

I dette kapitel gennemgås først kort nogle eksisterende modeller for en termostatventil, hvor deres begrænsninger pointeres. Herefter præsenteres en model, som udelukkende tager udgangspunkt i en fysisk beskrivelse, idet den redegør for de enkelte påvirkninger og kræfter i termostaten og ventilen.

4.1 Eksisterende modeller

Der har i mange år været lavet matematiske modeller af både termostater og ventiler hver for sig, og hvor de er koblet sammen, se e.g. [3], [4], [5] og [6]. Målet med disse matematiske modeller er hovedsagelig en forbedret styring af forskellige varme/køle-systemer. Den matematiske modellering er dog vanskeliggjort af, at der i termostatventilen optræder en række ikke-lineære faktorer som f.eks. varmeledning, friktion, delay, hysteresis, turbulens osv.

I [5] er samlet en række dynamiske modeller for HVAC¹ komponenter, der indgår i varmesystemer. Modellen heri for en termostatventil bygger på følgende antagelser.

1. En førsteordens varmeledningsligning mellem temperaturen af termostaten og dens omgivelser

¹Heating Ventilation Air Conditioning

2. Omgivelserne påvirker termostaten parallelt med hver sin termiske modstand
3. Lineær relation mellem flow og løftehøjden af ventilen for konstant differenstryk
4. Konstant hysterese
5. Ingen skift i lukketemperatur pga. faldende differenstryk

Antagelserne 1. og 2. stemmer overens med, hvad de fysiske karakteristika forventes at være for en termostatventil, [6]. Derimod kan de resterende antagelser ikke altid forventes opfyldt. Figur 3.2 og figur 4.3 viser med stor tydelighed, at der hverken kan antages lineær relation som i pkt. 3 eller konstant hysterese.

I [6] er forsøgt opstillet en termostatventilmodel, som ligeledes tager udgangspunkt i en fysisk beskrivelse, hvor modellen udformes til at følge Newton's 2. lov. Forinden laves følgende antagelser

1. Gassen i termostatventilen er en idealgas
2. Ingen hysterese og heraf friktionskraft
3. Lineære fjedre

Igen kan antagelsen om ingen hysterese ikke accepteres i relation til data i denne fremstilling. Modellen udviklet omkring Newton's 2. lov anses i selvsamme afhandling for kompliceret til en strukturel identifikation og forsøges ikke estimeret. Der udvikles i stedet en ad hoc model, hvor data tilpasses en tanh-funktion, hvormed en større fysisk fortolkning af modelstrukturen er udelukket.

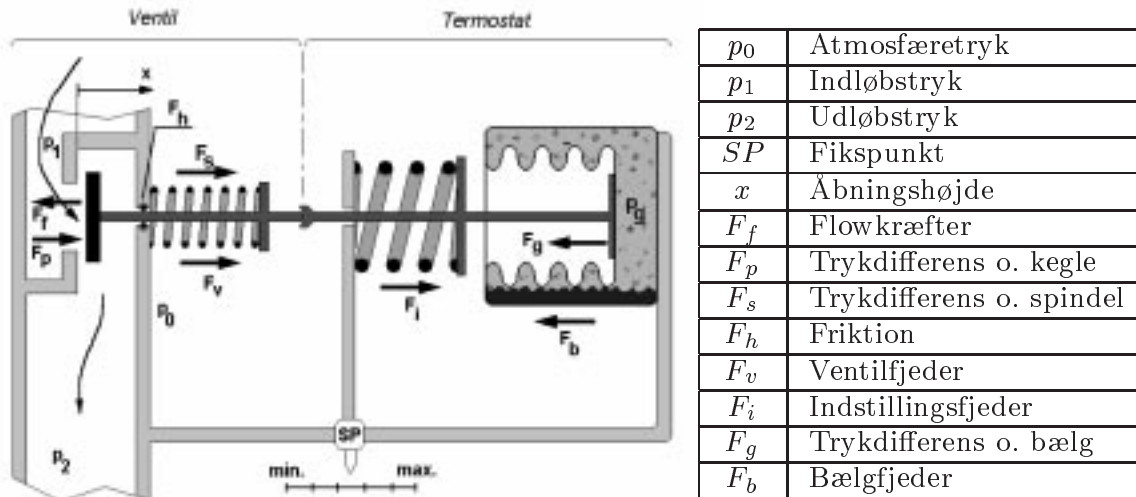
De eksisterende modeller har selvsagt sine begrænsninger i de ovennævnte antagelser. Det er således med disse in mente, at en modificeret model udvikles, der ikke er bundet af samme strikse antagelser og dermed samtidig kan tolkes fysisk.

4.2 Fysisk beskrivelse af gasfyldt termostatventil

4.2.1 Skitse

Til sammenligning med figur 2.1 og figur 2.2 er i figur 4.1 lavet en simplificeret skitse af termostatventilen, hvor de enkelte mekaniske dele er

fremhævet. Kræfterne, der påvirker de forskellige dele, er påtegnet som vektorer. Det er især kraftbidrag fra fjedre og trykforskelle, men derudover høves kraftbidrag fra væskens acceleration gennem ventilen og friktionen i ventilen.



Figur 4.1: Skitse af termostatventil, med de enkelte kraftbidrag tegnet som vektorer, [7]. Det grå område omkring p_g indikerer det gasfyldte kammer, mens de snoede pile ved p_1 og p_2 angiver strømmen gennem ventilen. Betegnelsen af de enkelte parametre er beskrevet i tabellen til højre.

4.2.2 Kraftbidrag

I det følgende defineres størrelsen af de enkelte kraftbidrag, der påvirker termostatventilen. Retningen af kraftbidragene er defineret som angivet med vektorerne i figur 4.1.

Flowkræfterne, der er bestemt ud fra den reaktionskraft væskens acceleration gennem ventilen påvirker keglen, kan jf. [8] opfattes som en fjederkraft med stivheden $K_f \Delta p_k$, der forsøger at lukke ventilen.

$$F_f = K_f \cdot x \cdot \Delta p_k \quad (4.1)$$

hvor Δp_k er trykdifferensen over keglen, K_f er en konstant, og x er åbningshøjden.

Størrelsen af kraftbidragene på grund af trykdifferenserne i termostatventilen defineres ud fra det respektive areal, der indgår.

$$F_p = A_k(p_1 - p_2) = A_k \cdot \Delta p_k \quad (4.2)$$

$$F_s = A_s(p_1 - p_0) = A_s \cdot \Delta p_s \quad (4.3)$$

$$F_g = A_b(p_g - p_0) = A_b \cdot \Delta p_b(T_g) \quad (4.4)$$

hvor A_k , A_s og A_b er henholdsvis arealet af keglen, spindlen og bælgens. Det ses desuden, at trykdifferensen over bælgens $\Delta p_b(T_g)$ afhænger af gastemperaturen T_g , da den bestemmer gastrykket p_g , se afsnit 4.2.4.

Fjederkræfterne fra ventilfjeder, indstillingsfjeder og bælgfjeder defineres, jf. Hook's lov, som en lineær funktion af positionen, der her er åbningshøjden x .

$$F_v = F_{v0} - C_v \cdot x \quad (4.5)$$

$$F_i = F_{i0} - C_i \cdot x \quad (4.6)$$

$$F_b = F_{b0} + C_b \cdot x \quad (4.7)$$

hvor $F_{v0, i0, b0}$ og $C_{v, i, b}$ er konstanter.

Endelig haves friktionskraften, F_h , der hovedsagelig stammer fra friktion mellem spindel og o-ringspakning. Den er altid er rettet modsat en bevægelse og skaber heraf hysteres. Det er umiddelbart svært at definere størrelsen af friktionskraften, derfor introduceres i afsnit 4.4 en adaptiv hysteresemodel, hvis formål er at kompensere for friktionskraften. Foreløbig anvendes betegnelsen F_h i modellen.

4.2.3 Kraftbalance

Kraftbalancen fås ved en summering af de enkelte bidrag, og idet kraftbidragene regnes som positiv mod højre på figur 4.1, fås udtrykket

$$F_p + F_s + F_v + F_i - F_f - F_g - F_b \pm F_h = 0 \quad (4.8)$$

⇕

$$A_k \cdot \Delta p_k + A_s \cdot \Delta p_s + (F_{v0} - C_v \cdot x) + (F_{i0} - C_i \cdot x) - K_f \cdot x \cdot \Delta p_k - A_b \cdot \Delta p_b(T_g) - (F_{b0} + C_b \cdot x) \pm F_h = 0 \quad (4.9)$$

Sættes $x = 0$ i (4.9) kan fire fikspunktsværdier (SP) benævnes.

$$A_k \cdot \Delta p_{k,SP} + A_s \cdot \Delta p_{s,SP} + F_{v0} + F_{i,SP} - A_b \cdot \Delta p_b(T_{g,SP}) - F_{b0} = 0 \quad (4.10)$$

Her ses bort fra friktionskraften. Disse fikspunktsværdier er konstanter, der udelukkende definerer den pågældende indstilling af termostatventilen.

Kendskab til de forskellige fjederforspændingskræfter $F_{\{v,i,b\}0}$ elimineres ved at subtrahere (4.10) fra (4.9). Her gælder at $F_{i0} = F_{i,SP}$.

$$A_k (\Delta p_k - \Delta p_{k,SP}) + A_s (\Delta p_s - \Delta p_{s,SP}) - A_b (\Delta p_b(T_g) - \Delta p_b(T_{g,SP})) - x \cdot (C_v + C_i + C_b + K_f \Delta p_k) \pm F_h = 0 \quad (4.11)$$

⇕

$$x = \frac{A_k (\Delta p_k - \Delta p_{k,SP}) + A_s (\Delta p_s - \Delta p_{s,SP}) - A_b (\Delta p_b(T_g) - \Delta p_b(T_{g,SP})) \pm F_h}{C_v + C_i + C_b + K_f \Delta p_k} \quad (4.12)$$

Ud fra en gennemgang af de enkelte kraftbidrag, der virker i termostatventilen, er nu opstillet et udtryk for ventilåbningen el. løftehøjden som en funktion af trykforskelle og indstillingsparametre. Den primære trykforskel Δp_b beskrives i næste afsnit.

Åbningshøjden x for ventilen er udledt til funktionen (4.12). Der er dog ud fra termostatventilens fysiske konstruktion, se evt. figur 4.1, en begrænsning på x . Dette kan skrives som

$$x \in [0, x_{max}] \quad (4.13)$$

hvor x_{max} er ventilens fysiske maksimale åbningshøjde. If. tabel 4.1 er den opgivet til 1.9 mm .

4.2.4 Trykdifferens over bælg $\Delta p_b(T_g)$

Gasttrykket p_g kan beskrives som funktion af gastemperaturen ved følgende andengradspolynomium [7]

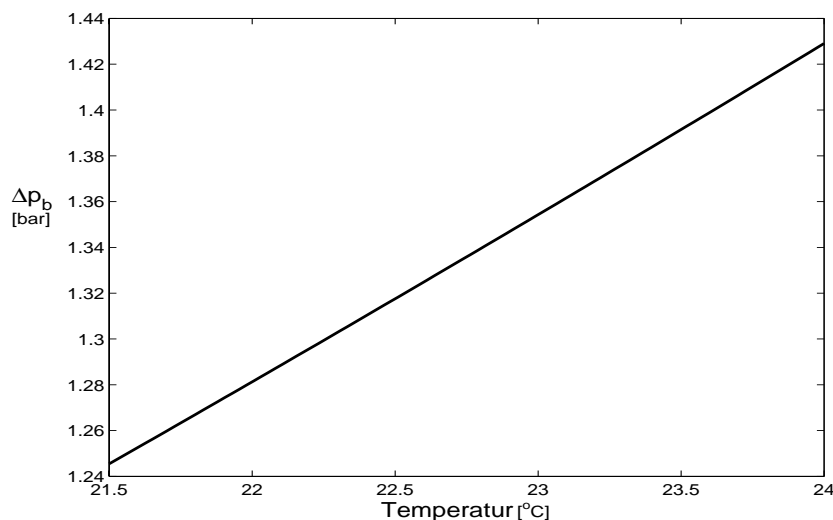
$$p_g = 90,057 \frac{N}{m^2 \cdot C^2} T_g^2 + 3343,4 \frac{N}{m^2 \cdot C} T_g + 114011 \frac{N}{m^2} \quad (4.14)$$

hvor T_g er gastemperaturen i [$^{\circ}C$].

Atmosfæretrykket antages i alle forsøgene ikke at variere betydeligt, hvilket medfører, at trykforskel mellem atmosfæretryk og gastryk (4.14) direkte kan udledes. Trykdifferensen over bælg til et atmosfæretryk på $p_0 = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ N/m}^2$ kan umiddelbart skrives som

$$\Delta p_b(T_g) = p_g - p_0 = 90,057 \frac{\text{N}}{\text{m}^2 \cdot \text{C}^2} T_g^2 + 3343,4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2 \cdot \text{C}} T_g + 12686 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (4.15)$$

Udtrykket er afbildet i figur 4.2 for et passende temperaturspænd. Det ses, at i det pågældende temperaturområde stiger gastrykket Δp_b jævnt med stigende gastemperaturen T_g .



Figur 4.2: Afbildning af trykdifferensen over bælgen $\Delta p_b(T_g)$, som angivet i (4.15). Det ses på figuren, at i et typisk temperaturområde for termostatventilen vil indflydelsen fra kvadratleddet være begrænset.

4.3 Sammenhæng mellem åbningshøjde x og flow q

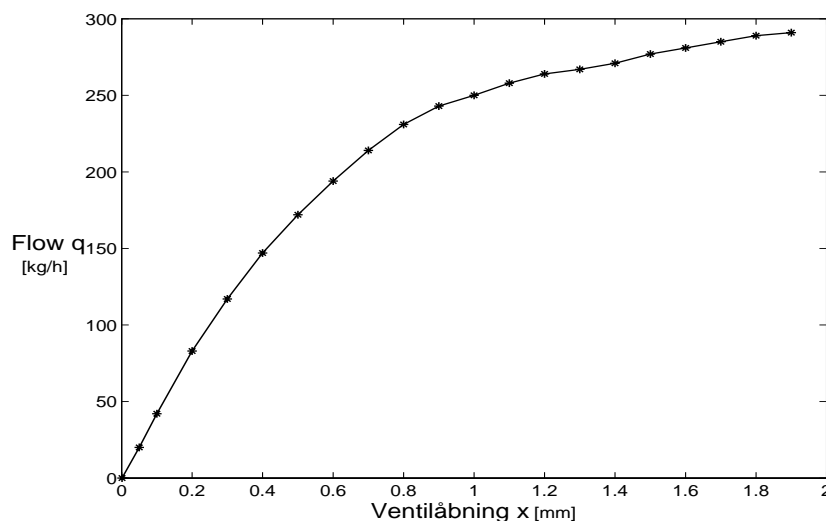
I dataserierne for termostatventilen beskrevet i kapitel 3, var netop flowet q en af de målte værdier. Derimod er i den matematiske model (4.12) opstillet et udtryk for løftehøjden x . Det er derfor vigtigt at kunne forbinde de to størrelser præcist med henblik på at benytte måledata i den matematiske model og vice versa.

For ventilen, der blev anvendt til forsøgene, er i tabel 4.1 opgivet den pågældende sammenhæng mellem åbningshøjde x og flow q . For tabellen er det statiske tryk $p_{sta} = 1 \text{ bar}$, differenstrykket $p_{dif} = 0.1 \text{ bar}$ og medietemperaturen $T_{med} = 50^\circ\text{C}$.

Tabel 4.1: Angivet sammenhæng mellem åbningshøjde x og flow q

x [mm]	0.001	0.5	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
q [kg/h]	0.001	20	42	83	117	147	172	194	214	231	243
x [mm]	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	
q [kg/h]	250	258	264	267	271	277	281	285	289	291	

Tabel 4.1 er afbildet i figur 4.3. Den viser, at for en løftehøjde under ca. 0.4 mm er relationen mellem flow og løftehøjde tilnærmelsesvis lineær. For større løftehøjder er virkningen på flowet aftagende. Antagelsen, for modellen beskrevet i afsnit 4.1 og gengivet fra [5], om en lineær relation mellem flow og ventilens løftehøjde kan derfor ikke accepteres for større værdier.



Figur 4.3: Plot af angivet sammenhæng mellem ventilåbning og flow, jf. tabel 4.1

Omregning mellem ventilhøjde og flow kan således foretages ud fra tabel 4.1 ved anvendelse af mere eller mindre avancerede former for interpolation. Flere af forsøgene er varieret med variableerne p_{sta} , p_{dif} og T_{med} , hertil er det vigtigt at kunne omregne tabellen ud fra disse værdier, så forholdet mellem ventilhøjde og flow er nøjagtigt beskrevet til de eksterne faktorer.

4.3.1 Korrektion for varierende differenstryk p_{dif}

I den fysiske ventilmodel (4.12) vil et varierende differenstryk påvirke åbningshøjden. Samtidig vil det varierende differenstryk desuden en have kraftig indflydelse på flowet. For at anvende de opsamlede data i den fysiske ventilmodel, er det derfor nødvendigt at kunne opsplitte det varierende differenstryks indvirkning på hhv. flow og ventilåbning.

En metode til at opsplitte denne effekt er at korrigere flowet mht. det aktuelle differenstrykket ved en omregning med bl.a. tabel 4.1. Opfattes ventilen som en enkeltmodstand, kan der tages udgangspunkt i den generelle teori om tryktab i enkeltmodstande, se evt. [9]. Tryktabet over en enkeltmodstand, i.e. ventil, kan herved skrives som

$$\Delta p = \zeta \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (4.16)$$

hvor ζ er en koefficient, ρ viskositeten og V er hastigheden.

Ligningen (4.16) divideres med sig selv, hvor der er indført nogle nye differenstryk/hastighed, der korresponderer til det kendte forhold i tabel 4.1. Dette kan skrives umiddelbart som

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_{SP}} = \left(\frac{V}{V_{SP}} \right)^2 \quad (4.17)$$

Flowet q kan ud fra hastigheden findes som $q = V \cdot A$, hvor A er arealet. Udtrykket (4.17) omskrives til

$$q = q_{SP} \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{SP}}} \quad (4.18)$$

hvor q_{SP} er flowet givet ud fra tabel 4.1 og en åbningshøjde. Δp_{SP} er differenstrykket, hvorved tabellen er gyldig.

Overføres udtrykket (4.18) til den aktuelle problemstilling, hvor differenstrykket p_{dif} svarer til trykdifferensen over keglen Δp_k , haves $\Delta p_{SP} = \Delta p_{k,SP} = 0.1 \text{ bar}$ og $\Delta p = \Delta p_k = p_{dif}$. Udtrykket for omregning mellem

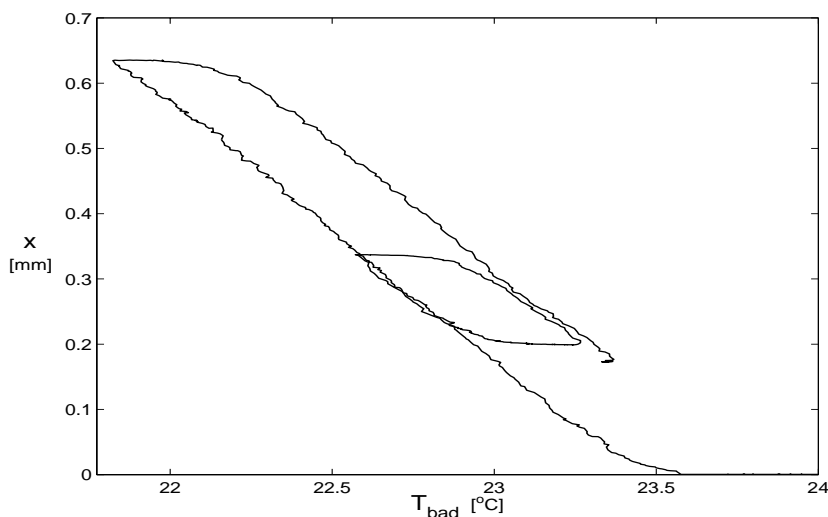
flow og åbningshøjde kan herved skrives som

$$q = q_{tabel}(x) \cdot \sqrt{\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k,SP}}} \quad (4.19)$$

$$x = x_{tabel} \left(\frac{q}{\sqrt{\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k,SP}}}} \right) \quad (4.20)$$

hvor $q_{tabel}(x)$ og $x_{tabel}(q)$ er omregning ved tabel 4.1.

Et plot af `test2` ses i figur 4.4, hvor flowet q er omregnet til ventilhøjden x , vha. (4.20). Det tilsvarende plot med flowet er vist i figur 3.2.



Figur 4.4: Figuren viser et faseplot af `test2`, hvor ventilåbningen x er plottet som funktion af temperaturen T_{bad} .

4.4 Dahl's hysteresemodel

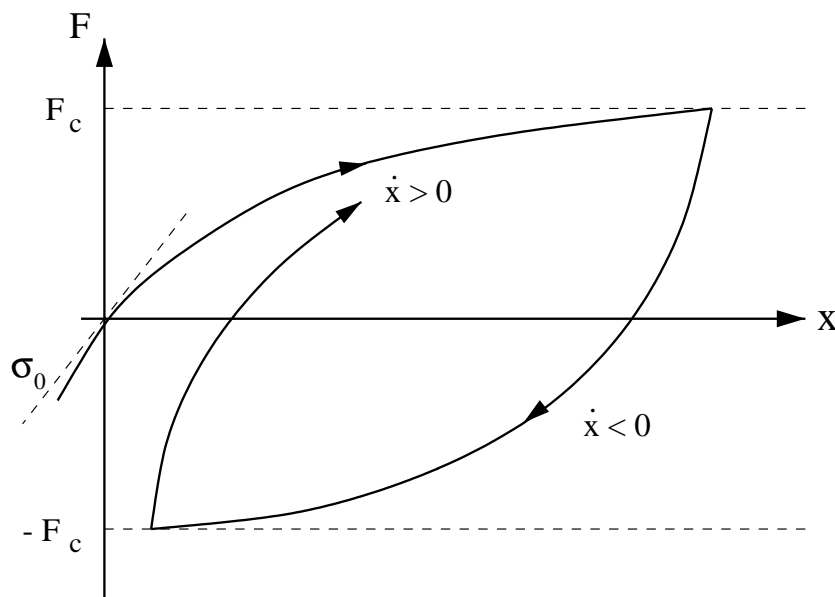
En ofte anvendt model til beskrivelse af friktionskraft er Dahl's model [12]. Den bygger på de klassiske trækdiagrammer, som angiver sammenhængen mellem spændingen og tøjningen for et materiale. Med dette udgangspunkt udviklede Dahl en model til simulering af kontrolsystemer med friktion. Modellen kan dog i mange situationer benyttes til adaptiv friktion kompensering [13], hvilket er hensigten i denne fremstilling.

Lad friktionskraften være givet ved F , Coulomb's friktionskraft F_c og forskydningen x . Dahl's model har derved formen

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha \quad (4.21)$$

hvor σ er elasticitetsmodulet, α angiver formen af arbejdslinjen. En skitse af modellen er vist i figur 4.5. Friktionskraften er således udelukkende givet ud fra længden af forskydningen x og dets retning $\operatorname{sgn}(v)$, herved tager Dahl's model ikke hensyn til eventuel statisk friktion eller Stribeck effekt, dvs. hastighedsafhængig friktion. Det er derimod modellens afhængighed af forskydningens retning, der giver en hystereseeffekt.

På figur 4.5 ses, at for stigende forskydning x vil friktionskraften gå mod Coulomb's friktionskraft F_c , som herved er den maksimale friktionskraft, for både positiv og negativ forskydning, i.e. $|F| \leq F_c$. Ved en ændring af forskydningsretningen vendes kurven, som nu går mod $-F_c$. Hældningen for linien ved $F = 0$ er vist som σ_0 .



Figur 4.5: Skitse af friktionskraften F som funktion af forskydninger x , jf. Dahl's model. Ved ændring i hastighedsretningen skifter funktionen bane, hvilket netop giver hystereseeffekten. Desuden ses, hvordan friktionskraften nærmer sig værdien af Coulomb's friktionskraft F_c .

Dahl's model (4.21) kan omskrives til en tidsdomæne model ved

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} v = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha v \quad (4.22)$$

hvorved der haves en første ordens ordinær differentiaalligning, der dog er ulineær.

4.4.1 Dahl's model til ventilproblem

Dahl's model anvendes her som en adaptiv model for friktionskraften F_h i ventilmodellen (4.12). Da Dahl's model direkte giver en friktionskraft som funktion af en position x , (4.21), ville det umiddelbart virke naturligt at benytte ventilpositionen som x . Dette er dog vanskeligt, idet vi ønsker at kunne prædiktere ventilpositionen, men ville i så fald ikke kende friktionskraften F_h , før ventilpositionen x var kendt, hvor igen værdien af F_h indgår i bestemmelsen x . Der er således en slags modstrid mellem at kunne benytte F_h til bestemmelse af x og samtidig kende værdien af F_h .

Dahl's model tilpasses herved til ventilproblemet ved at lade gastemperaturen T_g være den parameter friktionskraften bestemmes ud fra. Det er hovedsageligt omkring parameteren T_g , at der er observeret en tydelig hystereseeffekt, figur 4.4, og ved at bestemme en friktionskraft i Dahl's model ud fra T_g er det muligt at modellere netop denne hystereseseffekt. Herved kan den adaptive model for friktionskraften F_h i ventilmodellen (4.12) skrives som

$$\frac{dF_h}{dt} = v \sigma \left(1 - \frac{F_h}{F_{h,max}} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha \quad (4.23)$$

hvor $F_{h,max}$ er den maksimale friktionskraft og $v = \frac{dT_g}{dt}$, dvs. ændringen i gastemperaturen.

4.4.2 Bliman-Sorine modeller

Idet Dahl's model ikke kompensere for den statiske friktion, vil man til dette formål kunne benytte Bliman-Sorine modeller [13].

Bliman-Sorine modeller kan opfattes som to parallelle Dahl modeller, hvor der er en hurtig og en langsom. Den hurtige Dahl model vil øjeblikkeligt skifte friktionskraften modsat en begyndende bevægelse og modellere herved en statisk friktion. Dette kunne være en mulighed i tilfælde af, at Dahl's model ikke viser sig at være tilstrækkelig.

4.5 Ventilmodel med Dahl's hysteresese

Sammenfattende kan en model for termostatventilen nu opskrives som en tilstandsmodel i kontinuert tid.

I den statiske model antages gastemperaturen T_g at være lig temperaturen i vandbadet, og derved er T_g en inputvariabel.

Tilstanden for friktionskraften er fra (4.23) givet ved

$$\frac{dF_h}{dt} = v\sigma \left(1 - \frac{F_h}{F_{h,max}} \operatorname{sgn}(v)\right)^\alpha + d\omega_t \quad (4.24)$$

hvor $d\omega_t$ er en standard Wienerproces, der udgør støjen på tilstanden. Metoden gennemgås i kapitel 5.

Flowet q er observationerne, men ved omregning til ventilåbningen x ud fra tabel 4.1 og (4.20) kan ventilåbningen betragtes som observationer, hvilket giver følgende observationsligning

$$x_k = \frac{A_k (\Delta p_k - \Delta p_{k,SP}) + A_s (\Delta p_s - \Delta p_{s,SP}) - A_b (\Delta p_b(T_g) - \Delta p_b(T_{g,SP})) + F_h}{C_v + C_i + C_b + K_f \Delta p_k} + e_k \quad (4.25)$$

hvor e_k er usikkerheden på observationen, og hvor derudover gælder $x \geq 0$. Funktionen $\Delta p_b(T_g)$ er givet ved

$$\Delta p_b(T_g) = 90,057 \frac{N}{m^2 \cdot C^2} T_g^2 + 3343,4 \frac{N}{m^2 \cdot C} T_g + 12686 \frac{N}{m^2} \quad (4.26)$$

for forsøg med atmosfæretryk på konstant 1 atm.

Kapitel 5

Modellerings- og estimeringsmetode

I dette kapitel introduceres modellerings og estimeringsmetoden, der vil blive anvendt til modellering af termostatventilen. Først beskrives nogle forskellige matematiske modeller for dynamiske systemer, herefter koncentrerer om modeller formuleret ved stokastiske differentiaalligninger, da disse er bedst velegnet til kontinuerte *grey box* modeller, [14].

Derefter gennemgås den anvendte estimeringsmetode, hvor maksimum likelihood metoden og herunder et udvidet Kalman filter anvendes til at estimere parametre i den stokastiske model. Endelig anføres kort de anvendte metoder til validering af model og parameterestimerer.

5.1 Fysisk modellering

Ofte forsøges fysiske systemer beskrevet deterministiske, hvor modellen for det fysiske system præcis angiver systemets udvikling i fremtiden. Beskriver de deterministiske modeller ikke den fysiske dynamik fuldstændig nøjagtig, kan man ikke umiddelbart overføre løsningskarakteristikken på det fysiske system, da selv små usikkerheder kan influere løsningen.

I stokastiske modeller forsøges usikkerheder i modellen, e.g. ukendte faktorer i fysikken, måleusikkerhed og andre tilfældigheder, indeholdt i modellen

ved at addere en stokastisk proces til den deterministiske model. En mere generel opdeling af de forskellige matematiske modeller for dynamiske gives i følgende afsnit.

5.1.1 System identifikation

De ovennævnte matematiske modeller for dynamiske systemer kan klassificeres mere systematisk, hvor to yderligheder fastlægges som henholdsvis *white box* modeller og *black box* modeller, se evt. [15], [16] og [17].

white box modeller

En *white box* model er en deterministiske model, hvor den underliggende struktur antages fuldstændig kendt. Modellerne er derfor ofte baseret på fysiske naturlove. Disse modeller udnytter til fulde en a priori kendskab til systemet, hvilket giver sig selv, da denne kendskab er selve modellen. Heri er også bagsiden, idet en ukendt faktor eller støj i data ikke kompenseres. Parametrene i *white box* modeller estimeres typisk ved *least square*, [15].

black box modeller

For *black box* modeller bestemmes modellen typisk udelukkende på baggrund af data, dvs. relationen mellem input og output. Afvigelser mellem model og data kompenseres ved en stokastisk proces, som udgør støjen. Der er således ingen fysisk viden om det dynamiske system knyttet til modellen, hvilket gør det svært at tolke modellen fysisk. Parametrene bestemmes typisk ved statistiske metoder. I klassisk tidsrækkeanalyse er f.eks. ARIMA-modeller eksempler på *black box* modeller, der er anvendt i stort omfang, [18].

grey box modeller

Ved forsøg på modeller, der både udnytter a priori kendskab til systemet og samtidig inkludere en stokastisk proces til beskrivelse af eventuelle afvigelser, haves *grey box* modeller. Begrundelsen for at inkludere stokastiske led i en deterministiske model er

- Modellen er en approksimation til det sande system
- Ukendte faktorer påvirker systemet
- Observationer (både input og output) til estimering i modellen er støjbehæftet

En fordel ved *grey box* modeller er, at metoder fra både *black box* og *white box* modellerne stadig kan anvendes til eksempelvis modelformulering, parameterestimering og modelvalidering.

En yderligere fordel er desuden, at ved prædiktering/simulering over længere tidshorizont vil *grey box* modeller ligeledes forventes bedre end *black box* modeller, fordi den underliggende fysik er inkluderet, [16]. Heri ligger også muligheden for at en ændring af en parameter i modellen umiddelbart kan henføres til en ændring af en fysisk størrelse, hvilket i en design-situation kan være nyttig.

5.2 Stokastiske differentiallyigninger

Ofte er fysiske systemer beskrevet som et system af ordinære differentiallyigninger (ODE), hvor ændringer af enkelte tilstandsvariable kan skrives som en funktion af andre tilstande samt eventuelle input. Haves de almindelige differentiallyigninger på formen

$$\frac{d\mathbf{X}_t}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \theta, t) \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

hvor $\mathbf{X}_t \in R^x$ er en vektor af tilstandsvariable, $\mathbf{U}_t \in R^u$ inputvektor, $\theta \in R^p$ er en vektor med parameterverdier, og $\mathbf{f} \in R^x$ er en funktion, der deterministisk beskriver ændringen af tilstandene til tiden t .

Ved *grey box* modeller inkluderes en stokastisk proces til den deterministiske model. Dvs. til ovenstående kontinuerte deterministiske differentiallyigning (5.1) adderes et støjled, der er en kontinuert stokastisk proces (Wiener processen). Ud fra denne udvidelse kan et system af stokastiske differentiallyigninger (SDE) skrives på formen [17]

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \theta, t)dt + \sigma(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \theta, t)d\omega_t \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

hvor ω_t er en q -dimensional standard Wienerproces, se [17]. $\sigma \in R^{xq}$ er en funktion, der beskriver, hvordan Wienerprocessen indgår i systemet.

5.2.1 Analytisk løsning af stokastisk differentiallyigning

Det er muligt at løse en stokastisk differentiallyigning analytisk. Haves for eksempel den endimensionale stokastiske differentiallyigning

$$dX_t = f(t, X_t)dt + G(t, X_t)d\omega_t \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

kan løsningen X_t formuleres som en stokastisk integrallyigning, [19]

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s, s)ds + \int_0^t G(X_s, s)d\omega_s \quad (5.4)$$

hvor det første integral kan opfattes som et almindeligt Riemann-integral, det andet som et Ito-integral. Det kan vises, [19], at under forudsætningen om en Wienerproces, så konvergerer Ito-integralet mod en entydig løsning. Ligningen (5.4) kan løses ved den såkaldte *Ito formula*, hvormed løsningen selv er en Markovproces. Det er kun i meget simple tilfælde, at der kan opnås en analytisk løsning til en stokastisk differentiallyigning, derfor må løsningen ofte findes gennem andre numeriske metoder, [15].

5.3 Den blandede kontinuerte-diskrete stokastiske tilstandsmodel

Som ved de ovenstående SDE's antages de stokastiske modeller for tilstandene i denne rapport, at være kontinuerte differentiallyigninger. Observationerne er derimod diskrete, idet de foretages på bestemte tidspunkter med et tidsinterval imellem. Observationerne til tiden t kan beskrives ved en funktion af hhv. tilstandene og inputtet til tiden t . Dertil må forventes en måleusikkerhed på observationerne. Denne måleusikkerhed kan beskrives ved en diskret hvid støj proces.

Den blandede kontinuerte-diskrete stokastiske tilstandsmodel kan opskrives som, [20]

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \theta, t)dt + \sigma(\theta, t)d\omega_t \quad (5.5)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \theta, t_k)dt + \mathbf{e}_k \quad (5.6)$$

hvor tilstandsmodellen (5.5), modsat (5.2), har støjleddet konstant, $\sigma(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, hvilket er en forudsætning for den anvendte estimeringsmetode. Desuden haves definitionerne for tiden $t \in \mathbb{R}$, tilstandsvektoren $\mathbf{X}_t \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$,

inputvektoren $\mathbf{U}_t \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ og observationerne som vektoren $\mathbf{Y}_k \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$. Observationsligningen (5.6) angiver observationerne, givet ud fra tilstandene i funktionen $\mathbf{h}(\cdot) \in \mathcal{R}^l$, hvor $x_k = x_{t=t_k}$, $u_k = u_{t=t_k}$. Måleusikkerheden er hvid støj angivet som $\mathbf{e}_k \in N(0, S(t_k, \theta))$. Tilstandsfunktionen er $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{R}^n$, og ω_t er en q -dimensional standard Wienerproces. Parametervektoren angives som $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$. I næste afsnit beskrives, hvordan parameterverdierne estimeres.

5.4 Estimeringsmetoder

Til at estimere parametre og tilstande i en model formuleret som system af stokastiske differentiaalligninger, (5.5-5.6), anvendes programmet CTSM¹, [20]. I det følgende beskrives en *maksimum likelihood* metode, der er estimeringsmetoden i denne anvendelse af CTSM.

5.4.1 Maksimum likelihood estimat

Ved et maksimum likelihood estimat $\hat{\theta}$ for parameteren θ forstås det parametersæt θ (her inklusiv den ukendte varians og kovarians for ω_t og \mathbf{e}_k), der giver den maksimale værdi af likelihoodfunktionen (simultane frekvensfunktion) for de givne observationer.

Antag, at der foreligger følgende N observationer

$$\mathcal{Y}_N = [\mathbf{Y}_N \quad \mathbf{Y}_{N-1} \quad \cdots \quad \mathbf{Y}_k \quad \cdots \quad \mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_0] \quad (5.7)$$

Likelihoodfunktionen \mathcal{L} angiver den simultane frekvensfunktion for det stokastiske udfald \mathcal{Y}_N og parameterverdierne θ , der antages kendt.

$$\mathcal{L}(\theta, \mathcal{Y}_N) = p(\mathcal{Y}_N, \theta) \quad (5.8)$$

hvor $p(\cdot)$ er den simultane frekvensfunktion.

Ved anvendelse af multiplikationssætningen $p(A \cap B) = p(A|B)p(B)$ kan

¹Continuous Time Stochastic Modeling

(5.8) omskrives til

$$\mathcal{L}(\theta, \mathcal{Y}_N) = p(\mathcal{Y}_N, \theta) \quad (5.9)$$

$$= p(\mathbf{Y}_N | \mathcal{Y}_{N-1}, \theta) \cdot p(\mathcal{Y}_{N-1}, \theta) \quad (5.10)$$

$$= \left(\prod_{k=1}^N p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}, \theta) \right) \cdot p(\mathbf{Y}_0, \theta) \quad (5.11)$$

Likelihoodfunktionen er herved udelukkende et produkt af de betingede frekvensfunktioner samt frekvensfunktionen for den første observation.

Bayes metode

Såfremt der ønskes en bayesiansk tilgang, hvor parametervektoren selv er en stokastisk variabel, der kan antage at tilhøre en a priori frekvensfunktion, [17]

$$\theta \sim p(\theta) \quad (5.12)$$

Herudfra kan Bayes' sætning anvendes, hvormed a posteriori information om parametervektoren inkluderes i likelihoodfunktionen. Dette gøres ved at likelihoodfunktionen $p(\mathcal{Y}_N | \theta)$ multipliceres med (5.12), se evt. [17], [21].

$$\mathcal{L}(\theta, \mathcal{Y}_N) = p(\mathcal{Y}_N | \theta) \cdot p(\theta) \quad (5.13)$$

Parameterestimering ved maksimering af (5.13), kaldes *maximum a posteriori estimate* (MAP). Da der ikke umiddelbart haves nogen bestemt a priori information omkring værdien af parametrene i systemerne, der betragtes i denne fremstilling, koncentrerer den teoretiske del omkring maksimum likelihood metoden.

Parametrisering af likelihoodfunktionen

For maksimum likelihood metoden findes parametervektoren θ , der maksimerer likelihoodfunktionen givet i (5.11). Da de stokastiske processer ω_t og \mathbf{e}_k , der udgør støjen i (5.5-5.6), er normalfordelte, vil alle frekvensfunktioner i likelihoodfunktionen (5.11) ligeledes være normalfordelte. Derved kan disse parametriseres ved hhv. deres betinget forventningsværdi og betinget varians.

$$\hat{\mathbf{Y}}_{k|k-1} = E[(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}, \theta)] \quad (5.14)$$

$$\mathbf{R}_{k|k-1} = V[(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}, \theta)] \quad (5.15)$$

Udtrykkene giver et-trinsprædiktionen og den tilhørende varians. Det er herved naturligt at indføre et-trinsprædiktionsfejlen (innovationen) som

$$\epsilon_k = \mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_{k|k-1} \quad (5.16)$$

De normalfordelte bidrag i likelihoodfunktionen kan nu direkte opskrives vha. deres parametrisering (5.14-5.15), således omskrives (5.11) til

$$\mathcal{L}(\theta, \mathcal{Y}_N) = \left(\prod_{k=1}^N \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_{k|k-1})^T \mathbf{R}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_{k|k-1})\right)}{\sqrt{\det \mathbf{R}_{k|k-1}} \cdot (\sqrt{2\pi})^l} \right) \cdot p(\mathbf{Y}_0, \theta) \quad (5.17)$$

Indsættes prædiktionsfejlen (5.16) i ovenstående fås (5.17) som

$$\mathcal{L}(\theta, \mathcal{Y}_N) = \left(\prod_{k=1}^N \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\epsilon_k^T \mathbf{R}_{k|k-1}^{-1} \epsilon_k\right)}{\sqrt{\det \mathbf{R}_{k|k-1}} \cdot (\sqrt{2\pi})^l} \right) \cdot p(\mathbf{Y}_0, \theta) \quad (5.18)$$

Til estimering anvendes ofte den negative logaritme til likelihoodfunktionen, hvilket giver

$$-\ln(\mathcal{L}(\theta, \mathcal{Y}_N)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\epsilon_k^T \mathbf{R}_{k|k-1}^{-1} \epsilon_k + \ln(\det(\mathbf{R}_{k|k-1})) \right) + \frac{1}{2} Nl \ln(2\pi) + c \quad (5.19)$$

hvor konstanten c angiver logaritmen til frekvensfunktionen for den første observation, med det angivne parametersæt θ .

Maksimum likelihood estimererne $\hat{\theta}$ bestemmes som det parametersæt, der minimerer (5.19), [17]

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} (-\ln(\mathcal{L}(\theta, \mathcal{Y}_N))) \quad (5.20)$$

Maksimum likelihood estimererne er asymptotisk normalfordelt, [15], med middelværdi θ og kovariansmatricen

$$\mathbf{D}(\hat{\theta}) = \mathbf{H}^{-1}, \quad (5.21)$$

hvor \mathbf{H} er Hessian (el. informations) matricen af (5.19). I udtrykket (5.21) er $\mathbf{D}(\hat{\theta})$, jf. Cramer-Rao's ulighed, en nedre grænse for kovariansen, [15].

Elementerne i \mathbf{H} er estimeret ved, [17]

$$H_{ij} \simeq - \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log(\mathcal{L}(\theta, \mathcal{Y}_N | \mathbf{Y}_0)) \right) \Bigg|_{\theta=\hat{\theta}} \quad (5.22)$$

Herved haves et estimat for variansen på parameterestimerterne, hvilket igen giver mulighed for at lave en t-test for hypotese om parameterværdi.

Minimering af likelihoodfunktion udføres numerisk i CTSM med en quasi-Newton metode. Den betingende forventningsværdi, betingede varians og prædiktionsfejlen (5.14-5.16) er naturlig at beregne med det såkaldte *Extended Kalman filter* (EKF), der gennemgås i følgende afsnit.

5.4.2 Extended Kalman Filter

I programpakken CTSM benyttes Kalman filteret til at beregne den betingede forventningsværdi, betingede varians og prædiktionsfejlen (5.14-5.16) samt opdatere og prædiktere tilstandene i modellen. Kalmanfilteret giver optimal, dvs. minimum varians, ved lineær opdatering og prædiktions af tilstandsvektoren \mathbf{X}_t og observationen \mathbf{Y}_k , [18].

Idet grundlaget for Kalmanfilteret er lineære projektioner, se evt. [18], vil det dog ikke nødvendigvis være optimal for ikke-lineære modeller. Det er dog stadig muligt at anvende Kalmanfilteret for ikke-lineære modeller ved at linearisere modellen omkring tilstanden, der beregnes på. Herunder antages, at modellen er tilnærmelsesvis lineær i nærheden af tilstanden. Metoden kaldes Extended Kalman Filter.

Først tages der udgangspunkt i modellen (5.5-5.6) i afsnit 5.3.

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \theta, t)dt + \sigma(\theta, t)d\omega_t \quad (5.23)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \theta, t_k)dt + \mathbf{e}_k \quad (5.24)$$

hvor funktionerne $\mathbf{f}(\cdot)$ og $\mathbf{h}(\cdot)$ ikke nødvendigvis er lineære funktioner. De to funktioner lineariseres som

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{X}}_{k|k}, \mathbf{U}_t, \theta, t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \Bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{C}(\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{U}_t, \theta, t) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{X}} \Bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \quad (5.26)$$

Kalmanfilteret består af hhv. prædiktion og opdatering. De ønskede estimater af den betingede prædiktion og varians af observationerne kan opskrives som, [20]

$$\hat{\mathbf{Y}}_{k|k-1} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{U}_k, \theta, t_k) \quad (5.27)$$

$$\mathbf{R}_{k|k-1} = \mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T + S \quad (5.28)$$

hvor S er variansen på måleusikkerheden og $\mathbf{P}_{k|k-1}$ er den betingede varians på et-trinsprædiktionen af tilstandene $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$.

Kalman forstærkningen er givet ved

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}_{k|k-1}^{-1} \quad (5.29)$$

Opdateringsligningerne for tilstandene kan skrives som

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k} = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_{k|k-1}) \quad (5.30)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{R}_{k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (5.31)$$

Prædiktionen på tilstandene findes som

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}_{t|k}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{t|k}, \mathbf{U}_t, \theta, t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (5.32)$$

$$\frac{d\mathbf{P}_{t|k}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{t|k} + \mathbf{P}_{t|k}\mathbf{A}^T + \sigma\sigma^T, \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (5.33)$$

hvor der integreres over tidsintervallet. Idet en numerisk integration kan være meget beregningskrævende, så udfører estimeringsprogrammet CTSM prædiktionen af tilstandene ved at dele tiden mellem observationerne op i mindre tidsintervaller. Der laves således lokale iterationer af tilstandene mellem observationerne. Metoden kaldes *Iteratede EKF* og forklares kort i næste afsnit.

Med begyndelsesværdier på $\hat{\mathbf{X}}_{1|0} = \mathbf{X}_0$ og $\hat{\mathbf{P}}_{1|0} = \mathbf{P}_0$ kan EKF, vha. skiftevis prædiktion og opdatering, estimerer værdier af den betingede varians og prædiktionsfejlen af observationerne (5.14-5.16). Disse værdier anvendes således i likelihoodfunktionen (5.19), hvormed maksimum likelihood estimatet for parameterværdierne θ kan findes som (5.20).

Iterated EKF

Tidsintervallet for integrationen i (5.32-5.33) er $t \in [t_k, t_{k+1}]$. En simplificering af den numeriske integration kan gøres ved at subsample tidsintervallet $\tau = t_{k+1} - t_k$ i n_s delintervaller med længden $\tau_s = \tau/n_s = t_{j+1} - t_j$, hvor $j = [0, n_s]$. En linearisering af (5.32-5.33) kan skrives som, [20]

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}_{t|j}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{t|j}, \mathbf{U}_j, \theta, t_j) + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{X}}_t - \hat{\mathbf{X}}_j) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{U}}_t - \hat{\mathbf{U}}_j) \quad (5.34)$$

$$\frac{d\mathbf{P}_{t|j}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{t|j} + \mathbf{P}_{t|j} \mathbf{A}^T + \sigma\sigma^T \quad (5.35)$$

hvor $t \in [t_j, t_{j+1}]$ og

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{j|j-1}, \mathbf{U}=\mathbf{U}_j, t=t_j} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{j|j-1}, \mathbf{U}=\mathbf{U}_j, t=t_j} \quad (5.37)$$

Prædiktionen af tilstanden er nu lineære ordinære differentiaalligninger, der kan løses på sædvanligvis. Det må desuden forventes, at det itererede EKF giver et bedre estimat, idet antagelsen om linearitet kun holder i ‘nærheden’ af tilstanden, der lineariseres, så jo flere punkter des større sandsynlighed for at denne nærhed holdes, [16].

5.5 Valideringsmetoder og modelkontrol

Når parametre i en anslået modelstruktur er blevet estimeret, er det vigtigt at validere modellen, for at kontrollere om modellens egenskaber er tilstrækkelig til beskrivelse af fysik og data. Da fysikken ofte er en stor del af grey box modeller, kan viden om det fysiske system derfor benyttes til at vurdere om parameterestimerer og tilstande i modellen er fysisk realistiske. Modeltypen er tillige stokastisk, derfor anvendes statistiske metoder som et supplement til den fysiske fortolkning.

Modellerne i dette projekt vurderes på grundlag af

- Residualanalyse af prædiktionsfejl
- Analyse parameterestimerer
- Simuleringsevne
- Krydsvalidering

5.5.1 Residualanalyse

Ved residualanalyse afprøves om modellernes prædiktionsfejl, dvs. $\epsilon_k = y_k - \hat{y}_{k|k-1}$, kan anses for at være normalfordelt hvid støj. Såfremt prædiktionsfejlen ikke kan anses for at være hvid støj, indikerer dette, at modellen ikke beskriver al dynamikken i systemet. Der ikke nogen endegyldig metode for test af hvid støj, men der kan opstilles nogle betingelser, som bl.a. skal være opfyldt. De anvendte betingelser for hvid støj, der benyttes i denne fremstilling, beskrives kort.

Residualanalysen består af afbildning af prædiktionsfejl, test i autokorrelationsfunktionen $\rho(k)$ og test i det kumulerede periodogram $C(v_j)$.

Det er ud fra en samlet vurdering af residualanalysen, sammen med de andre valideringsredskaber, at modellens samlede egenskaber karakteriseres.

Afbildning af residualer

En grafisk afbildning er et stærkt redskab til vurdering af residualer. Ved at plotte residualerne som funktion af tiden kan der direkte vurderes for trends og variationer i variansen samt eventuelle outliers. Residualerne kan ligeledes plottes som funktion af evt. input, output og tilstande, hvormed de ovennævnte karakteristika igen kan vurderes.

Test i autokorrelationsfunktionen

Såfremt ϵ_t er hvid støj gælder for autokorrelationen, [18]

$$\hat{\rho}(k) \in_{approx.} N\left(0, \frac{1}{N}\right) \quad (5.38)$$

På grundlag heraf kan det testes, om de enkelte værdier af $\hat{\rho}(k)$ er signifikant forskellige fra nul. I det endimensionale tilfælde bestemmes autokorrelationsfunktionen i lag k ved

$$\hat{\rho}(k) = \frac{1}{N\hat{\sigma}_\epsilon^2} \sum_{t=1}^{N-|k|} (\epsilon(t) - \hat{\epsilon}_\mu)(\epsilon(t+|k|) - \hat{\epsilon}_\mu) \quad (5.39)$$

hvor ϵ_t angiver sekvensen af N prædiktionsfejl med middelværdi $\hat{\epsilon}_\mu$ og varians $\hat{\sigma}_\epsilon^2$. Et approksimativt 95 % konfidensinterval, $\pm \frac{2}{\sqrt{N}}$, benyttes til at afgøre om, prædiktionsfejlene er signifikant forskellig fra hvid støj.

Resultatet for testen i autokorrelationen tages igen kun som en indikation, da autokorrelationen er et mål for den lineære korrelation mellem residualerne. Der kan således meget vel være en ikke-lineære korrelation, selv om autokorrelation ikke er signifikant.

Kumulerede periodogram

Et lignende test kan gøres i frekvensdomænet ved at beregne det kumulerede periodogram for prædiktionsfejlene. For frekvenserne $v_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$ beregnes periodogrammet for prædiktionsfejlene som

$$\hat{I}(v_i) = \frac{1}{N} \left(\left(\sum_{t=1}^N \epsilon(t) \cos(2\pi v_i t) \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^N \epsilon(t) \sin(2\pi v_i t) \right)^2 \right) \quad (5.40)$$

hvilket er en frekvensdomæne beskrivelse af variationerne af $\epsilon(t)$, idet $I(v_i)$ angiver, hvor stor en del af variationerne af $\epsilon(t)$ som kan tillægges frekvensen v_i . Det normerede kumulerede periodogram fås som

$$\hat{C}(v_j) = \frac{\sum_{i=1}^j \hat{I}(v_i)}{\sum_{i=1}^{N/2} \hat{I}(v_i)} \quad (5.41)$$

For hvid støj er variationerne ligelig fordelt på alle frekvenser, og det teoretiske periodogram er derfor konstant, dvs. det kumulerede periodogram er en ret linie. Såfremt $\epsilon(t)$ er hvid støj, forventes at $\hat{C}(v_i)$ grupperer sig om denne linie, [18]. Et konfidensinterval for normalfordelingen beregnes ved et Kolmogorov-Smirnov test og indlægges i periodogrammet, [23].

5.5.2 Validering af parameterestimer

Parameterestimer ved maksimum likelihood metoden og herunder dens forudsætninger er asymptotiske normalfordelte, [15]. Deres middelværdi og varians estimeres i CTSM ved maksimum likelihood metoden, hvor variansen estimeres ved den inverse informations-matrice. Estimererne for middelværdi og varians kan herudfra indgå ved forskellige test i normalfordelingen.

Haves der således et skøn for en fysisk parameter vil det umiddelbart kunne sammenlignes med parameterestimatet iht. spredningen på estimatet. Et

test for om skøn og parameterestimat kan antages at være ens, kan gøres ved at opstille et approksimativt 95%-konfidensinterval for parameterestimatet

$$\left[\hat{\theta} - 2\hat{\sigma}, \hat{\theta} + 2\hat{\sigma} \right]_{95\%} \quad (5.42)$$

hvor $\hat{\theta}$ er parameterestimatet med spredning $\hat{\sigma}$. Såfremt skønnet ligger i intervallet givet ved (5.42), er estimat og skøn ikke signifikant forskellige for niveauer mindre en 5%.

Ovenstående approksimation kan præciseres, idet $\theta \in N(\hat{\theta}, \hat{\sigma}^2)$ kan der laves en t-test for hypotese om en parameter kan antage parameter værdien θ_0 , [23].

$$\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}} \in t(N - 1 - p), \quad (5.43)$$

N er antal observationer og p angiver antallet af estimerede parametre i modellen.

Estimeringsprogrammet CTSM vil automatisk generere være et signifikansniveau for t-test, om estimatet kan antages at være nul, dvs. $\theta_0 = 0$.

Test for modelstruktur

På grund af den stokastiske led i grey box modeller er det ligeledes muligt at teste for modelreduktion ved det såkaldte likelihood-ratio test.

Der testes for hypotesen $H_0 : \theta_0 \in M_0$ mod hypotesen $H_1 : \theta_1 \in M_1$, hvor M_1 og M_0 er to modeller, for hvilke der gælder $M_0 \subset M_1$. Dvs. at modellen M_0 skal være en ægte delmængde af M_1 . Likelihood-ratioen haves som, [24]

$$\Lambda = \frac{\mathcal{L}(\hat{\theta}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\theta}_1)} \quad (5.44)$$

hvor \mathcal{L} er likelihoodfunktionen maksimeret ved $\hat{\theta}$. Teststørrelsen for accept af H_0 mod H_1 findes herved som

$$-2 \log \Lambda \in_{asympt.} \chi^2(n) \quad (5.45)$$

hvor antallet af frihedsgrader n er forskellen i antal parametre for de to modeller, [24].

Normalt fortages dette likelihood-ratio test for en reduceret model M_0 mod en model M_1 , der i forvejen er accepteret, hvilket bl.a. betyder, at residualerne skal være normalfordelt ukorreleret hvid støj. Dette er dog ikke strengt nødvendig. For at anvende metoden gælder, at maksimum likelihood estimatet skal findes for begge modeller, samt at M_0 skal være en ægte delmængde af M_1 , [24].

I outputtet ved estimering med CTSM er angivet værdien af den negative log-likelihoodfunktion. Denne værdi for hver af de to modeller kan direkte anvendes i likelihood-ratio testet. Udtrykkene (5.44-5.45) kan omskrives til

$$2 ((-\log \mathcal{L}_0) - (-\log \mathcal{L}_1)) \in_{asympt.} \chi^2(n) \quad (5.46)$$

Teststørrelsen er derved den dobbelte differens mellem log-likelihoodfunktionerne.

5.5.3 Simulering og krydsvalidering

Ved en simulering opdateres tilstandene i modellen ikke for hvert tidsskridt som ved et-trinsprædiktionen. Det betyder, at modellen simulerer systemet udelukkende ud fra de angivne begyndelsesbetingelser og evt. input. Simuleringsevnen er vigtig, hvis modellen skal benyttes til at beskrive/prædiktere systemet mange tidsskridt frem.

Maksimum likelihood estimatet findes gennem Kalmanfilteret, der som førnævnt giver minimal varians på et-trinsprædiktionen. Det kan i nogle tilfælde være forskel på det optimale estimatet for et-trinsprædiktion og simulering. Ofte vil begge estimater kunne opnås simultant.

Når en model er blevet estimeret ved én dataserie, vil det give en god indikation for modellens evne at foretage en krydsvalidering. Herved afprøves modellens prædikterings/simuleringsevne på observationer fra et andet datasæt, som ikke har indgået i estimeringen af parametre.

Kapitel 6

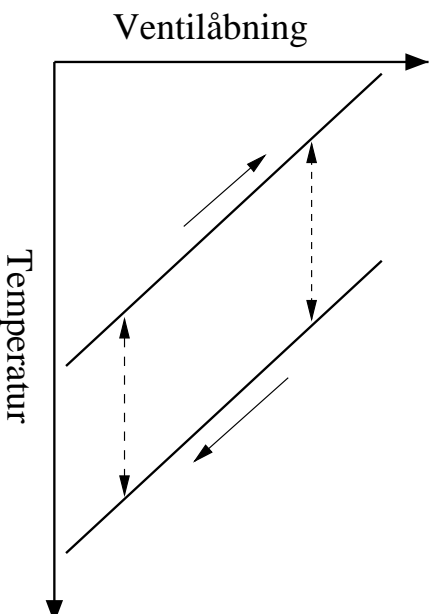
Simpel hysteresemodel

I dette kapitel beskrives ganske kort en simpel hysteresemodel, kaldet '*play model*'. Den medtages som et sammenligningsgrundlag for en model, der ikke nødvendigvis bygger på nogen dybere fysiske antagelser. Efter en introduktion af selve hysteresemodellen, estimeres parametrene i modellen med de to statistiske måleserier `test1` og `test2`. Endelig vurderes hysteresemodellens egenskaber under hensyn til dens forudsætninger.

6.1 Play model

En simpel hysteresemodel er en '*play model*', se e.g. [10] og [11]. Til play modellen defineres to funktioner, der afgrænser hystereseregionen i henholdsvis højre og venstre side, se figur 6.1. Hvis temperaturen falder og ventilåbningen er, hvad der svare til den venstre side af hystereseregionen, så vil ventilåbningen følge funktionen, der afgrænser siden. Stiger temperaturen derimod ved samme udgangspunkt som før, vil ventilåbningen ikke ændres før højre side af hystereseregionen nås. Dette svarer til, at bevægelse mellem de to funktioner altid er horisontal.

Hysteresekaraktistikken er ækvivalent med, hvad der er observeret i forsøgene med statistiske temperaturomgivelser, se evt. figur 4.4. Det er derfor oplagt at undersøge hysteresemodellens evne på forsøgsdata.



Figur 6.1: Skitse af play model. De to funktioner, der afgrænser hystereseregionen, er her lineære. De stiplede pile viser den horizontale bevægelse mellem funktionerne, mens de fuldt optrukne pile angiver bevægelsesretningen på hver funktion.

I figur 6.1 er de to funktioner, der afgrænser hystereseregionen en ret linie, hvilket ikke nødvendigvis behøver at være tilfældet for at kunne benytte modellen. I dette studie af play modellen anvendes dog kun lineære funktioner.

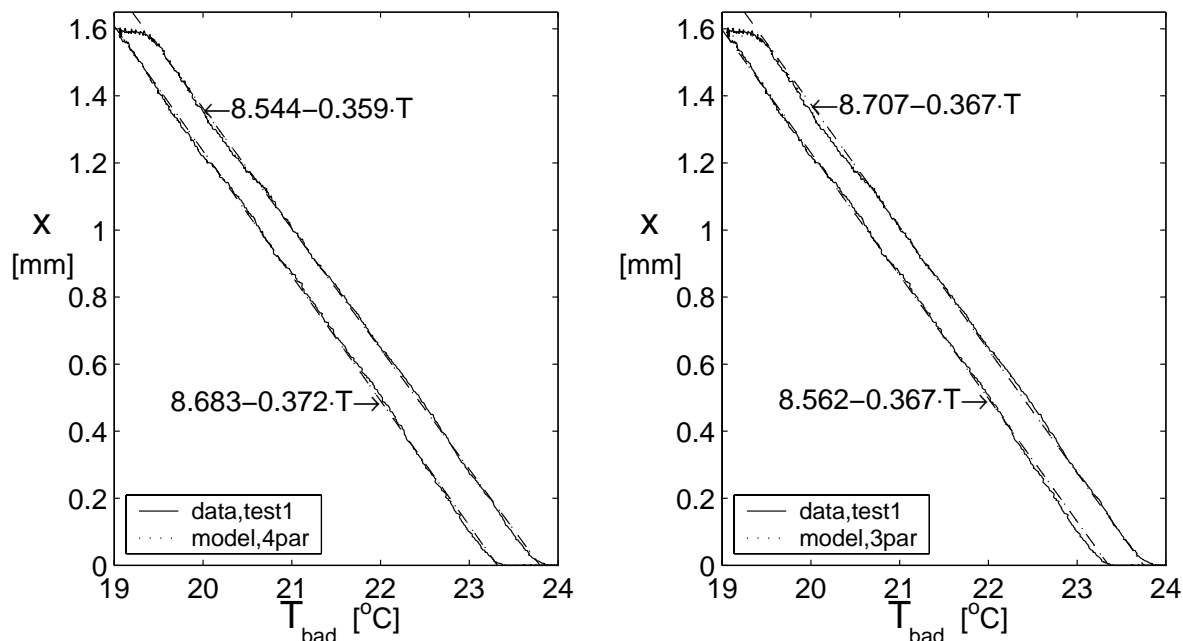
6.2 Estimering af play model

Play modellen estimeres på dataserierne `test1` og `test2`, der vist i figur A.1 og figur A.2. Parametrene P_{sta} , P_{dif} og T_{med} regnes her konstante, hvormed tabel 4.1 uden forbehold kan benyttes til omregning mellem flow q og ventilåbningen x .

Play modellen anvendes som beskrevet i forrige afsnit og vist i figur 6.1. Funktionerne til at afgrænse hystereseregionen vælges som lineære, se figur 6.2 og figur 6.4. De to rette linier angiver ventilåbningen x direkte som en funktion af temperaturen T_{bad} . Er de to linier uafhængige har modellen 4 parametre, 2 hældninger og 2 skæringspunkter. Til sammenligning estimeres ligeledes en model, hvor hældningerne antages at være ens, dvs. modellen reduceres til 3 parametre, 1 hældninger og 2 skæringspunkter.

Parametrene for de to linier, der afgrænser hystereseregionen, estimeres ved *least square* med Matlab-funktionen `lsqcurvefit`, se evt. [25]. Algoritmen

for play modellen er beskrevet i [11]. Resultatet ses som de stiplede linier i figur 6.2 og figur 6.4, og værdierne er samlet i tabel 6.1.



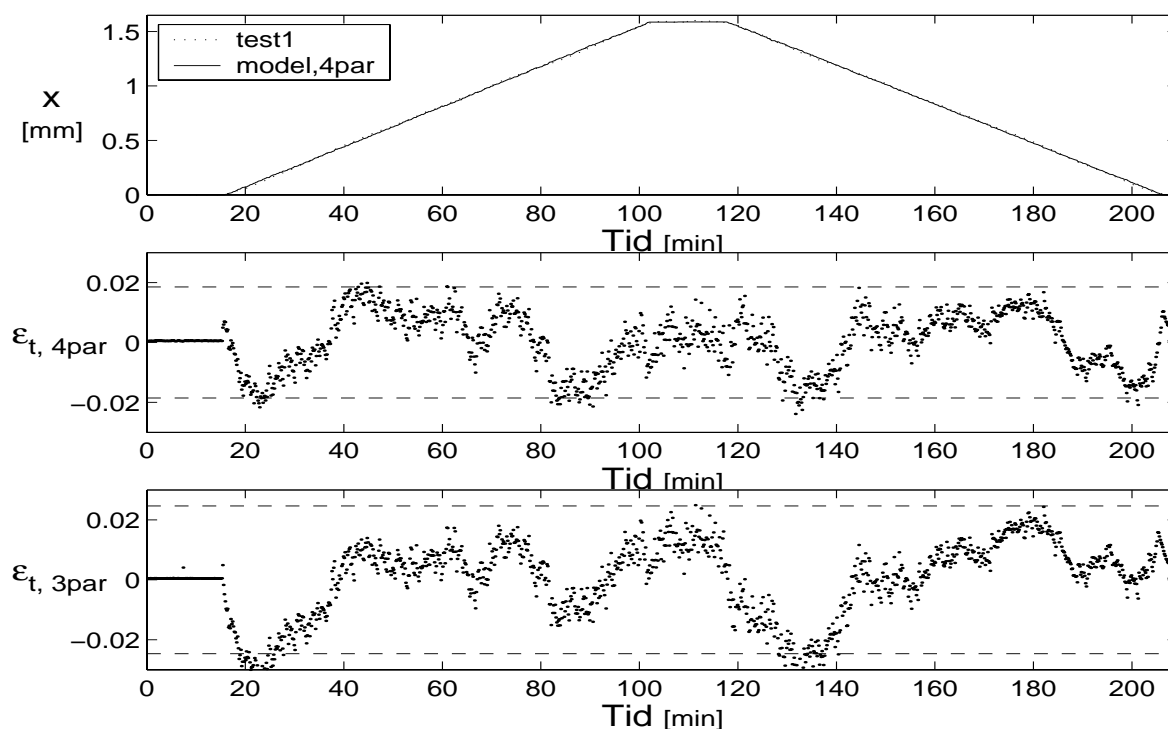
Figur 6.2: På figuren er løftehøjden x afbildet som funktion af temperaturen T_{bad} for dataserien `test1`. Som afgrænsning af hystereseregionen er estimeret to rette linier. For plottet til venstre har linierne forskellig hældning, dvs. 4 parametre i modellen. Modsat har linierne i plottet til højre samme hældning, dvs. 3 parametre, se tabel 6.1.

Tabel 6.1: Estimerede lineære afgrænsning af hystereseregion

dataserie	ant.para.	$f_v(T)$	$f_h(T)$	$\hat{\sigma}_\epsilon [mm]$
test1	4	$8.683 - 0.372 \cdot T$	$8.544 - 0.359 \cdot T$	$9.3 \cdot 10^{-3}$
test1	3	$8.562 - 0.367 \cdot T$	$8.707 - 0.367 \cdot T$	$12.3 \cdot 10^{-3}$
test2	4	$9.278 - 0.396 \cdot T$	$9.309 - 0.391 \cdot T$	$5.5 \cdot 10^{-3}$
test2	3	$9.096 - 0.388 \cdot T$	$9.226 - 0.388 \cdot T$	$6.1 \cdot 10^{-3}$

Det er umiddelbart svært at sammenligne play modellen med data ud fra hysteresefigurene, derfor er de to dataserier i figur 6.3 og figur 6.5 plottet som funktion af tiden, samt i figurene er residualplots for play modellen med hhv. 3 og 4 parametre.

For modellen estimeret på `test1` (figur 6.2) ses, at linierne med forskellig hældning spidser en anelse mod hinanden for høje åbningsværdier. En bedre

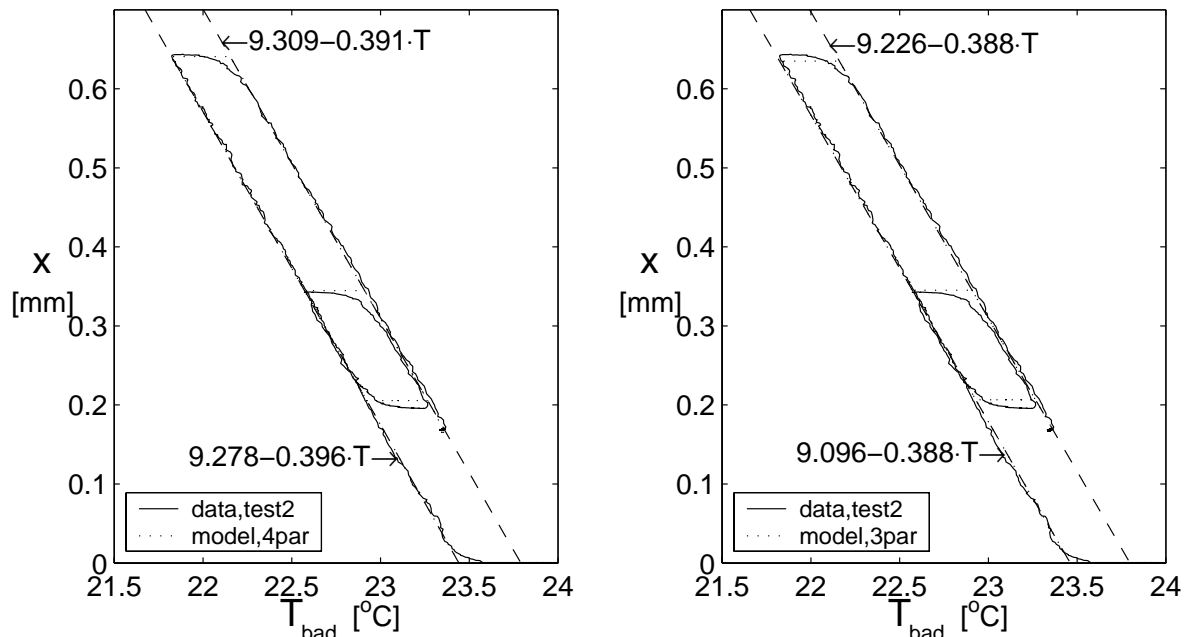


Figur 6.3: På det øverste plot ses, hvordan den simulerede tidsrække fra play modellen og de målte data fra `test1` følges pænt. I det midterste plot er residualerne afbildet som funktion af tiden for modellen med 4 parametre, med spredningen $\hat{\sigma}_\epsilon = 9.3 \cdot 10^{-3} mm$, de stiplede linier giver $\pm 2\hat{\sigma}_\epsilon$. Nederst plot er residualerne for modellen med 3 parametre, med spredningen $\hat{\sigma}_\epsilon = 12.3 \cdot 10^{-3} mm$.

vurdering af modellen fås af residualplottene i figur 6.3. Residualerne for både modellen med 3 og 4 parameter er stærkt korrelerede, derudover er variansen og middelværdien ikke konstant over tiden. Det ses desuden, at de lange åbne og lukke forløb ikke er helt lineære, idet residualerne er negative i enderne, dvs. for helt høje og lave x værdier, mens der er positive residualerne midt på forløbene.

Spredningen ved at reducere modellen med én parameter stiger fra $\hat{\sigma}_\epsilon = 9.3 \cdot 10^{-3} mm$ til $\hat{\sigma}_\epsilon = 12.3 \cdot 10^{-3} mm$. Det er umiddelbart svært at vurdere om denne stigning retfærdiggør modelreduktionen. De sædvanlige metoder som, *likelihood-ratio*, *informationskriterier*, samt t-test på parameterestimater ud fra deres varianser, kan ikke uden forbehold anvendes, da play-modellen ikke er differentiabel, og residualerne er korrelerede. I denne fremstilling er play modellen introduceret for at undersøge en hysteresemo-

del på dataserierne, uden tanke på den fysiske termostatventil.

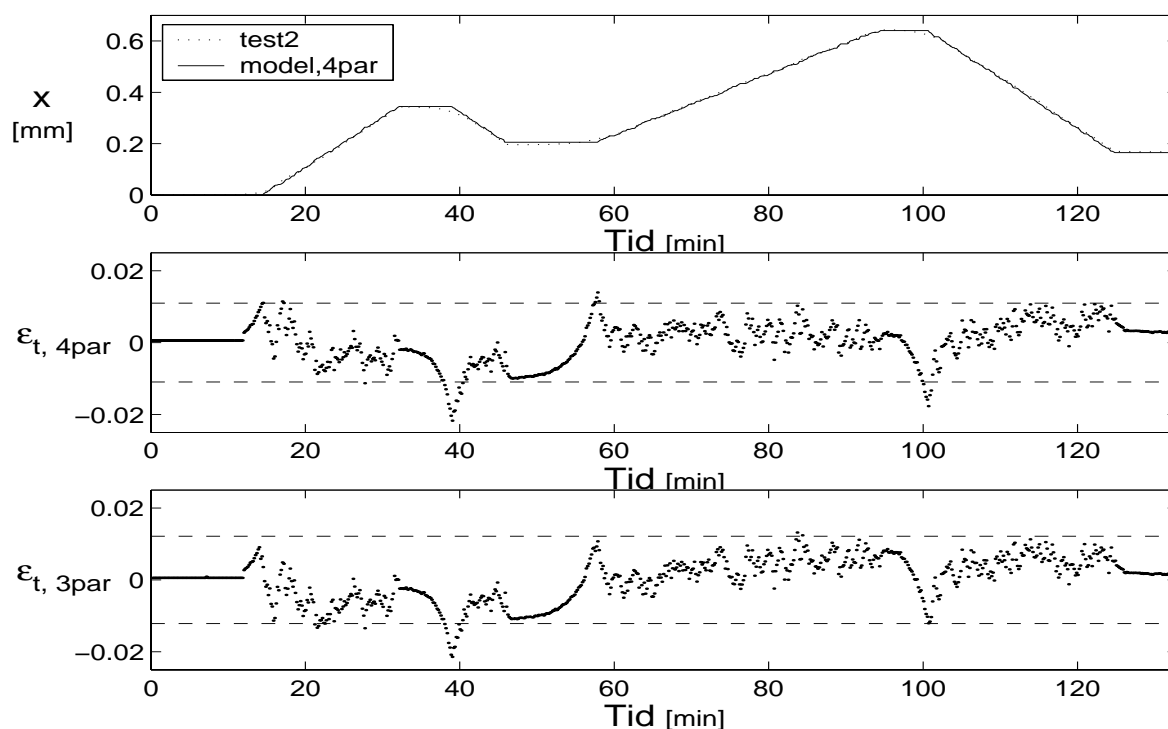


Figur 6.4: På figuren er løftehøjden x afbildet som funktion af temperaturen T_{bad} for dataserien `test2`. Som afgrænsning af hystereseregionen er to rette linier. For plottet til venstre har linierne forskellig hældning, dvs. 4 parametre i modellen, mens linierne i plottet til højre har samme hældning, dvs. 3 parametre, se tabel 6.1.

For `test2` er ligeledes estimeret rette linie til play modellen. Igen har linierne hhv. forskellige og ens hældning. Resultaterne ses i figur 6.4. Måleserien `test2` åbner cirka kun halvt så højt som `test1`, men derimod er lavet en sløjfe på åbningsforløbet. Pga. den lave åbningshøjde er forskellen mellem de to hældninger heraf mindre. Tilsvarende ses ved residualplottene i figur 6.5, hvor forskellen mellem play modellen med hhv. 3 og 4 parametre er minimal. Stigningen i spredningen ved en modelreduktion er $0.6 \cdot 10^{-3} mm$.

Da åbningshøjden for `test1` er større end `test2` giver det ikke mening at sammenligne spredningerne direkte. I stedet anvendes varianskoefficienten, [22], hvilket er den relative spredning σ/μ . Varianskoefficienterne er estimeret til

$$\begin{aligned} \text{test1: } \quad \frac{\sigma}{\mu} &= \frac{9.3 \cdot 10^{-3} mm}{0.78 mm} = 0.012 \\ \text{test2: } \quad \frac{\sigma}{\mu} &= \frac{5.5 \cdot 10^{-3} mm}{0.30 mm} = 0.018 \end{aligned}$$



Figur 6.5: På det øverste plot ses, hvordan den simulerede tidsrække fra play modellen og de målte data fra `test2` følges pænt. I det midterste plot er residualerne afbildet som funktion af tiden for modellen med 4 parametre, med spredningen $\hat{\sigma}_\epsilon = 5.5 \cdot 10^{-3} mm$, de stiplede linier giver $\pm 2\hat{\sigma}_\epsilon$. Nederst plot er residualerne for modellen med 3 parametre, med spredningen $\hat{\sigma}_\epsilon = 6.1 \cdot 10^{-3} mm$.

Den større varianskoeficient for `test2` skyldes, at det især er omkring skift i retningen, dvs. hysteresen, der er store residualer, se figur 6.5. Den ekstra sløjfe i åbningsforløbet giver således et ekstra bidrag til spredningen i forhold til åbningshøjden.

Generelt fanger play modellen karakteristikken af termostatventilen meget godt, når det tages i betragtning, hvor simpel modellen er og antallet af parametre, der indgår. Spredningen er bestemt ikke stor i forhold til måleusikkerheden, som behandles mere detaljeret i afsnit 7.2.5. Måleusikkerhed betragtes dog oftest som normalfordelt hvid støj, hvilket ikke er tilfældet for residualerne i play modellen.

Kapitel 7

Modelleringsresultat af fysisk ventilmodel

I dette afsnit estimeres parametre i modellen udviklet på fysisk baggrund, dvs. ventilmodellen med Dahl's hysteresse. Dette er for de 3 første dataserier igen en statiske model. Derefter forsøges modellen udbygget til at medregne den dynamiske karakteristik af termostaten, som er gældende for de 3 dataserier opsamlet i vindtunnelen.

7.1 Statisk ventilmodel

For den matematiske model, der bygger på den fysiske termostatventil og Dahls hysteresse, indgår 8 parametre. For ikke-lineære modeller er det, modsat lineære, ikke umiddelbart mulig præcist at undersøge om alle parametre er identificerbare, jf. strukturel identifikation i [17]. Ud fra modellens struktur må det forventes, at de fleste parametre vil være stærkt korrelerede. Problemet med at estimere korrelerede parametre forsøges undgået ved at antage nogle parametre, som kendte.

Fremgangsmåden er således i første omgang at estimere parametrene så modellen tilpasses data optimal. Dette gøres ved maksimum likelihood metoden i CTSM, jf. afsnit 5.4. Ved den nærmere undersøgelse af parameterestimerne, heraf deres varians, skal korrelationen inkluderes, idet et evt.

t-test for parameterværdi ikke umiddelbart kan anvendes for stærkt korrelerede parametre. En stor korrelation har desuden tendens til at trække variansen op, fordi *score funktionen* bliver flad mht. pågældende parametre.

Det er forskellige input, der varieres ved de enkelte forsøgsserier. Først estimeres parametrene angående variation i det statiske tryk og differensstrykket.

7.1.1 Estimering af ventilmodel uden hysteresis på test3

En præliminær estimering foretages på **test3**. I dette forsøg er temperaturen konstant, mens det statiske tryk og differensstrykket varieres.

For den statiske model i (4.24-4.25) er hysteresen lagt omkring en ændring i temperaturgradienten. Da temperaturen i **test3** regnes konstant, vil hysteresen, heraf friktionen, kunne sættes til nul, $F_h = 0$. Udtrykket for ventilåbningen kan skrives som

$$x = \frac{A_k (\Delta p_k - \Delta p_{k,SP}) + A_s (\Delta p_s - \Delta p_{s,SP}) - A_b (\Delta p_b(T_g) - \Delta p_b(T_{g,SP}))}{C_v + C_i + C_b + K_f \Delta p_k} \quad (7.1)$$

Uden hysteresen er modellen tidsinvariant, og herved kan parametrene estimeres ved ikke-lineær *least square*, [17].

Fjederkonstanterne C_v , C_i og C_b fastholdes som kendte, se tabel 7.1, idet de ikke individuelt kan estimeres pga. korrelation, jf. strukturel identifikation. Ud fra samme betragtning fastholdes arealet på bælgen A_b . De to setpunkter for det statiske tryk og differensstrykket er ligeledes opgivet til $\Delta p_{k,SP} = 0.01 \frac{N}{mm^2}$ og $\Delta p_{s,SP} = 0.1 \frac{N}{mm^2}$, mens indstillingstemperaturen, i.e. trykket $\Delta p_{b,SP}(T_g)$ findes som netop dér, hvor ventilen åbner.

Indstillingstemperaturen, heraf $\Delta p_{b,SP}(T_g)$, estimeres individuelt for hver dataserie pga. elasticitet omkring åbningspunktet, [6].

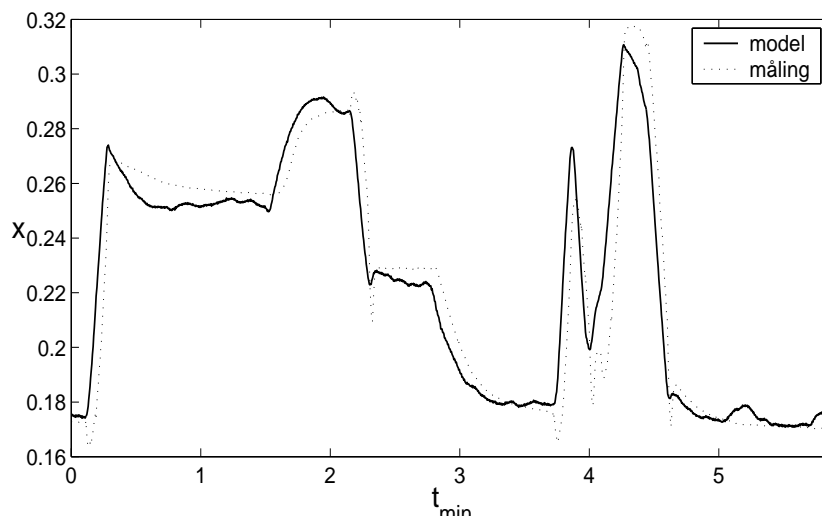
Parameterestimererne fundet ved *least square* af den matematiske model (7.1) på **test3**, hvor flowet er omregnet til åbningshøjden x vha. (4.20), giver resultaterne

$$A_k = 52.0 \text{ mm}^2 \quad A_s = 2.45 \text{ mm}^2 \quad K_f = 99.7 \text{ mm}$$

hvor $\Delta p_{b,SP}(T_g) = 0.1431 \frac{N}{mm^2} \sim 23.78 \text{ }^\circ\text{C}$, vha. (4.15).

Modellen med de estimerede parameter er sammen med **test3** afbildet i figur 7.1. Det ses, at modellen i høj grad fanger strukturerne i måledata.

Ved de meget hurtige variationer i det statiske tryk og differenstrykket, se evt. figur A.3, giver det dog afvigelser fra modellen, hvilket kan skyldes noget transient strømningsturbulens i ventilen.



Figur 7.1: Figuren viser en simulering af den fysiske ventilmodel (7.1), hvor resultatet af parameterestimering med *least square* på `test3` anvendes. Til sammenligning er de målte data plottet.

Af figur 7.1 fremgår det tydeligt, at afvigelsen mellem model og måling, hverken er ukorrelerede eller har konstant varians. Det vil derfor ikke give nogen mening at udregne variansen på selve parameterestimerterne, ved f.eks. reciprok Hessian-matrice, [18]. Estimerterne giver modellens bud på parameter-værdierne ved anvendelse af `test3`. Ved sammenligning med a priori skønnet ud fra den fysiske termostatventil på $A_k = 40.7 \text{ mm}^2$, $A_s = 3.1 \text{ mm}^2$ og $K_f = 55 \text{ mm}$, er parameterestimerterne bestemt ikke urealistiske.

7.1.2 Estimering af ventilmodel med Dahl's hysteresse

I forrige afsnit blev 3 parametre estimeret, ved *least square* på `test3`, idet hysteresen kunne negligeres. Medtages Dahl's hysteresse kan modellen skrives som en stokastisk differentiaalligning, der kan løses numerisk ved estimeringsprogrammet CTSM¹.

Hysteresen beregnes ud fra gradienten af gastemperaturen. Derfor beskrives først kort, hvordan dataserierne for den statiske model udjævnes for at

¹Continuous Time Stochastic Modeling, [20]

undgå fluktuationer fra temperaturmålingerne i gradienten. I forrige afsnit ang. parameterestimering med `test3` er denne filtrering ikke nødvendig, da temperaturen blev regnet konstant.

Eksponentiel udjævning

Til ventilmodellen for de statiske forsøg ved (4.24) og (4.25) benyttes v , som temperaturen differentieret mht. tiden. Denne inputvariabel udregnes ved differensen på to hinanden følgende temperaturmålinger. Differensen er dog relativ lille, da samplingstiden er 10 sekunder. Af denne grund vil hastighedsparameteren være meget følsom for små fluktuationer i temperaturmålingerne. For at undgå disse fluktuationer udjævnes temperaturmålingerne med en *eksponentiel udjævning*.

En generel eksponentiel udjævning er givet som, [18]

$$S_n^{[k]} = (1 - \lambda)S_n^{[k-1]} + \lambda S_{n-1}^{[k]}; \quad S_n^{[0]} = Y_n \quad (7.2)$$

hvor k angiver ordnen af udjævningen og konstanten λ er glemselsfaktoren.

Der er i temperaturmålingerne en klar lineær trend, se figur 7.2 øverst, hvortil anvendes en 2. ordens eksponentiel udjævning, der er defineret ved

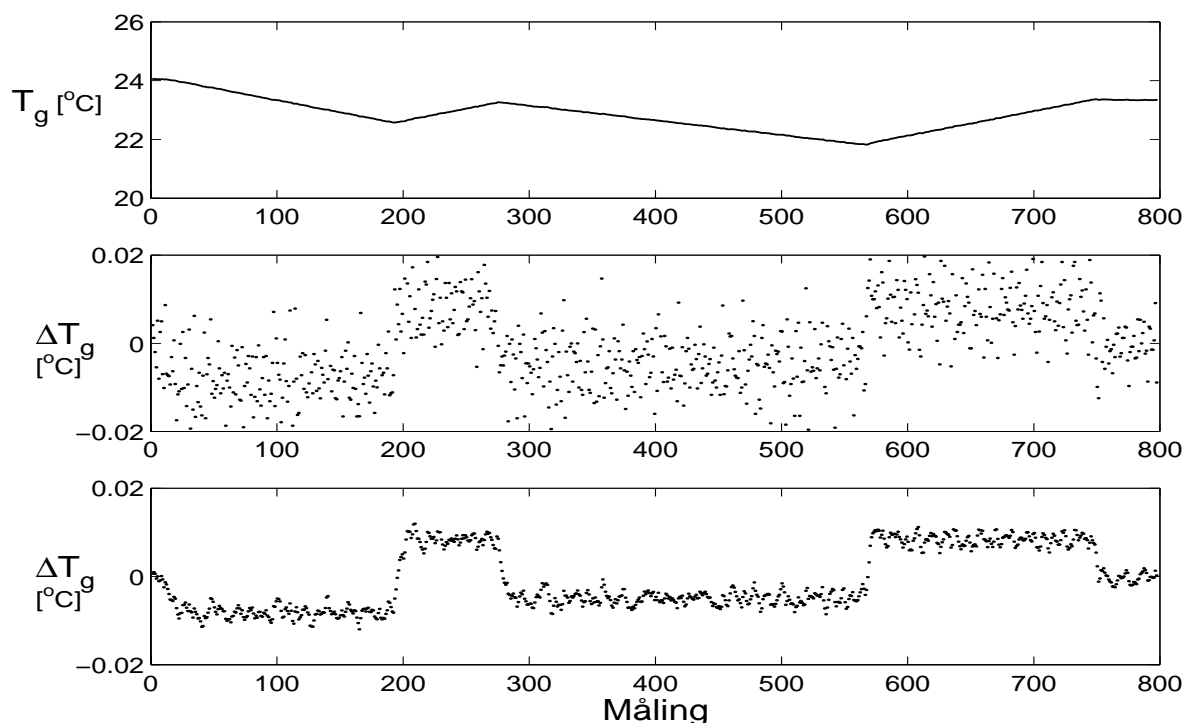
$$S_n^{[1]} = (1 - \lambda)Y_n + \lambda S_{n-1}^{[1]} \quad (7.3)$$

$$S_n^{[2]} = (1 - \lambda)S_n^{[1]} + \lambda S_{n-1}^{[2]} \quad (7.4)$$

På figur 7.2 ses en serie temperaturmålinger, hvor den 2. ordens eksponentielle udjævning anvendes med en glemselsfaktor på $\lambda = 0.6$. Det nederste plot viser klart mindre fluktuationer, hvilket giver en mere robust estimering af hysteresekraften. Størrelsen af glemselsfaktoren er et kompromis mellem at have et jævnt input og at kunne detektere en ændring hurtig. En værdi for glemselsfaktoren på $\lambda = 0.6$ er således valgt heraf.

Parameterestimering i statisk ventilmodel

Som før nævnt er det ikke muligt at estimere alle parametrene, der indgår i ventilmodellen pga. korrelation mellem disse. Nogle af konstanterne kan med relativ stor sikkerhed bestemmes ud fra den fysiske konstruktion af termostatventilen. På denne måde vælges fjederkonstanterne og arealet af



Figur 7.2: Øverst ses en afbildning af temperaturen T_g i `test2`, midterste og nederste plot viser forskellen mellem to følgende målinger af T_g , hvor-til i det nederste plot er T_g anden ordens eksponentiel udjævnet med en glemselsfaktor på $\lambda = 0.6$.

bælgen bestemt. Det er ligeledes måden disse parameter indgår i modellen og i hvilken sammenhæng med andre parametre, der ligger til grund for udvælgelsen. Værdierne for disse konstanter er samlet i tabel 7.1, sammen med parameterestimerterne fundet i afsnit 7.1.1.

I dataserierne for den statiske karakteristik er omregningen mellem gastemperaturen T_g og bælgetrykket Δp_b foretaget på forhånd, igen vha. udtrykket i (4.15). Således bliver inputtet i CTSM Δp_b . Dette er gjort, fordi atmosfæretrykket p_0 regnes konstant og for at undgå unødvendig komplicering af systemfiler, da omregningen er identisk for hver kørsel.

For estimering af parametre i ventilmodellen med `test1` og `test2` har CTSM følgende input og output:

$$\text{Input: } \begin{cases} v \\ \Delta p_b \\ \Delta p_k \\ \Delta p_s \end{cases} \quad \text{Output: } x$$

Tabel 7.1: Antaget kendte værdier af parametre

parameter	værdi	enhed	beskrivelse
K_f	99.7	mm	flowkraft-konstant
A_k	52.0	mm^2	areal af kegle
A_s	2.45	mm^2	areal af spindel
A_b	1032	mm^2	areal af bælg
C_v	1.8	N/mm	ventilfjeder-konstant
C_i	13.7	N/mm	indstillingsfjeder-konstant
C_b	3.2	N/mm	bælgfjeder-konstant

hvor v er ændringen for den eksponentiel udjævnede T_{bad} , mens omregningen til Δp_b er lavet med de reelle temperaturmålinger. Δp_k og Δp_s er henholdsvis det målte differenstryk og statiske tryk. Desuden er al omregning mellem flow og åbningshøjde foretaget med udtrykket (4.20).

System og observationsligningen i CTSM bliver jf. (4.24-4.25) henholdsvis

$$\frac{dF_h}{dt} = v\sigma \left(1 - \frac{F_h}{F_{h,max}} \operatorname{sgn}(v)\right)^\alpha \quad (7.5)$$

$$x = \frac{A_k(\Delta p_k - \Delta p_{k,SP}) + A_s(\Delta p_s - \Delta p_{s,SP}) - A_b(\Delta p_b - \Delta p_{b,SP}) + F_h}{C_v + C_i + C_b + K_f \Delta p_k} \quad (7.6)$$

På x er oveni lagt begrænsningen $x \geq 0$. Desuden er ved dataopsamlingen opgivet $\Delta p_{k,SP} = 0.01 \frac{N}{mm^2}$ og $\Delta p_{s,SP} = 0.1 \frac{N}{mm^2}$.

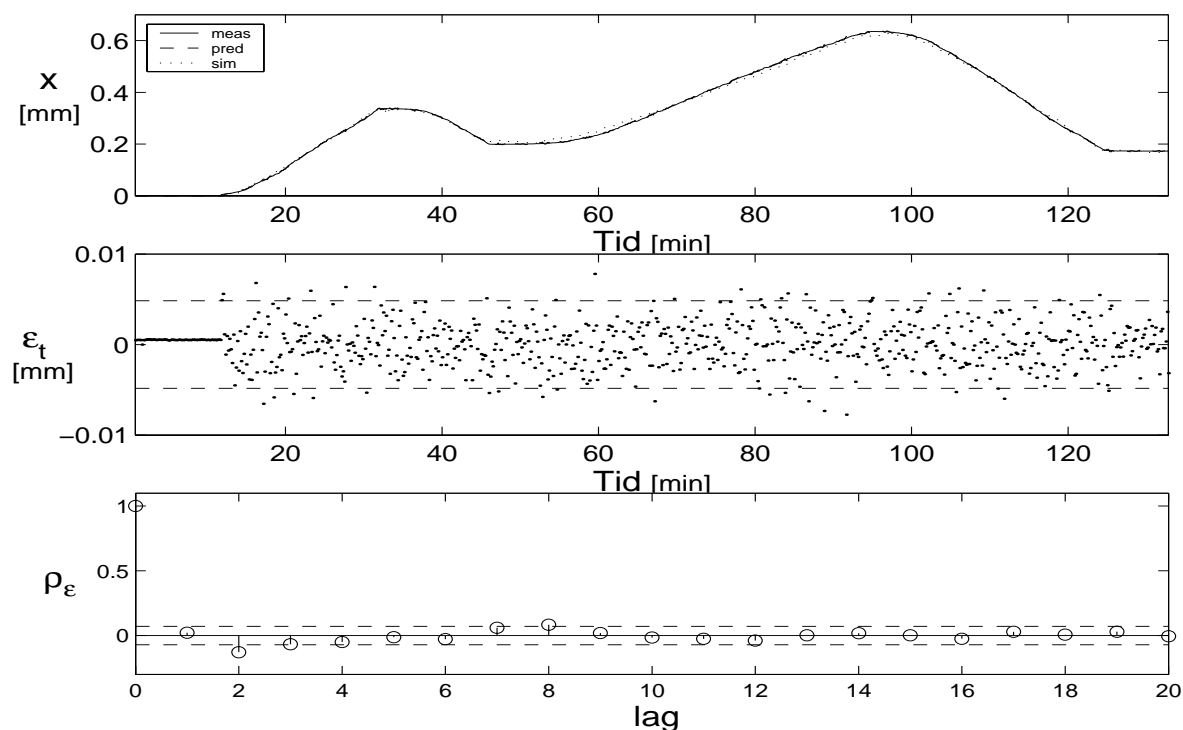
Ved en estimering af modellen (7.5-7.6) med dataserien `test2` i CTSM er i tabel 7.2 angivet de estimerede signifikante parametre.

Tabel 7.2: Parameterestimer for statistisk model

parameter	estimat	std.dev.	enhed
σ	6.44	0.27	N/K
$F_{h,max}$	1.44	0.065	N
$\Delta p_{b,SP}$	0.1419	$0.476 \cdot 10^{-4}$	N/mm^2
σ_1^2	$0.177 \cdot 10^{-3}$	$0.193 \cdot 10^{-4}$	N^2
σ_2^2	$0.692 \cdot 10^{-6}$	$0.247 \cdot 10^{-6}$	mm^2

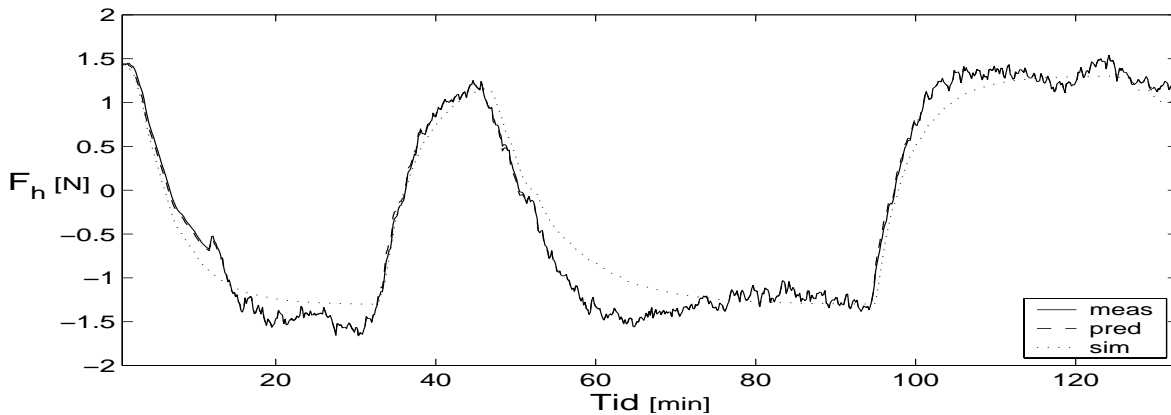
Eksponenten α er ved alle estimeringer fastholdt ved $\alpha = 1$. Dette skyldes, at for andre indstillinger end denne, vil CTSM under optimeringen estimere en kovariansmatrice, der ikke er positiv definit, hvormed kørslen stopper.

Plot af modellen med parameterestimerterne er afbildet i figur 7.3. Det øverste plot viser ikke nogen større grafisk forskel mellem de målte data fra `test2` og den fysiske ventilmodel (7.5-7.6). Forskellen mellem den prædikterede og målte værdi er afbildet i residualplottet. Spredningen på denne prædiktionsfejl er $\hat{\sigma}_\epsilon = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, hvilket er 2-3 gange mindre end for play modellen. Derudover er residualerne jævnt spredt over hele tidsrummet, så ingen umiddelbare systematiske fejl. Autokorrelationen bekræfter dette, da den ikke er signifikant forskellig fra hvid støj.



Figur 7.3: Øverste plot viser den målte, prædikterede og simulerede tidsrække fra `test2` og den statiske model (7.5-7.6). I det midterste plot er residualerne afbildet som funktion af tiden. Spredningen af residualerne er $\hat{\sigma}_\epsilon = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, de stiplede linier giver $\pm 2\hat{\sigma}_\epsilon$. Nederst plottes autokorrelationen af ϵ_t , hvor et approx. 95% konfidensinterval igen er markeret.

Ud fra den statiske model (7.5-7.6) estimeret på `test2`, er ligeledes den ene tilstand, friktionskraften F_h , estimeret. Estimatet for F_h er plottet i figur 7.4 som funktion af tiden. På figuren ses tydelig, hvordan friktionskraften ændre sit forløb, når ventilkeglen skifter retning, se evt. figur 7.3 øverst. Friktionskraften bevæger sig herefter mod et maksimum ca. $\pm 1.44 \text{ N}$, hvilket derved giver hysteresen nøjagtig som anført i Dahl's model. Hysteresefriktionskraften er et godt eksempel på, hvordan det med



Figur 7.4: Figuren viser, hvordan friktionskraften og heraf hysteresen forløber med Dahl's model. Det korresponderende forløb af ventilen er vist øverst i figur 7.3.

tilstandsmodeller er muligt at definere ikke nødvendigvis målbare tilstande, og derigennem forbedre den totale fysiske model.

Variansen på prædiktionsfejlen kan ud fra modellen opskrives som en kombination af variansen på systemfejlen (Wienerprocessen) og variansen på måleusikkerheden, opgivet som hhv. σ_1^2 og σ_2^2 i tabel 7.2. Dette kan skrives som, [26]

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{1,system}^2 + \sigma_{2,measure}^2 \quad (7.7)$$

$$= \left(\frac{1}{C_v + C_i + C_b + K_f \Delta p_k} \right)^2 \sigma_{1,system}^2 + \sigma_{2,measure}^2 \quad (7.8)$$

$$= \left(\frac{1}{19.7 \text{ N/mm}} \right)^2 \cdot 0.177 \cdot 10^{-3} \text{ N}^2 + 0.692 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2 \quad (7.9)$$

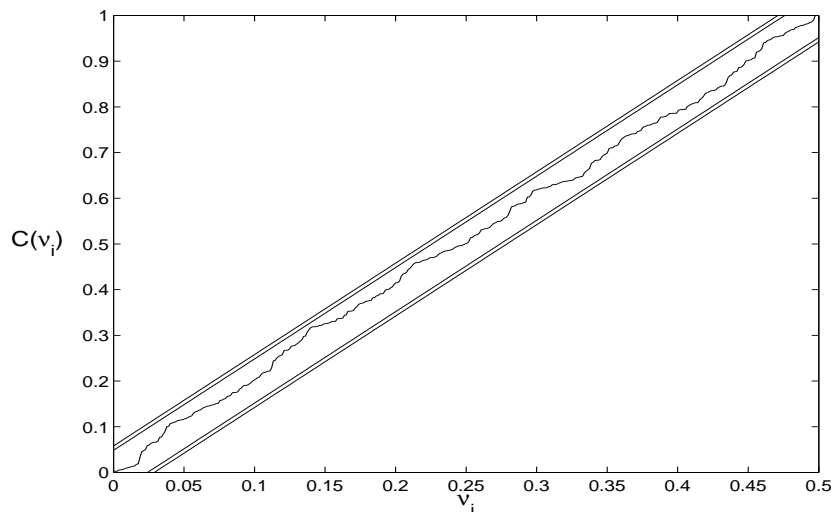
$$= (1.07 \cdot 10^{-3})^2 \text{ mm}^2 \quad (7.10)$$

hvor fejlafhobningsloven givet i (7.24) og [22] er anvendt. Ved ovenstående udregning kommer det største bidrag til prædiktionsfejlen fra måleusikkerheden. Størrelsen $1.07 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ er mindre end den estimerede prædiktionsfejl på $\hat{\sigma}_\epsilon = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, hvilket kan skyldes usikkerheden på parameterestimaterne, approksimationen ved fejlafhobningsloven, samt at variansen på prædiktionsfejlen varierer pga. hysteresens ikke-linearitet. Derfor kan de to bidrag ikke direkte sammenlignes med den samlede varians på prædiktionsfejlen, udregningen viser dog, at de er i samme størrelsesorden.

En mere detaljeret vurdering af måleusikkerheden på data er givet i af-

snit 7.2.5, hvor skønnet på måleusikkerheden sammenlignes med prædiktionsfejlen.

I figur 7.5 afbildes det kumulerede periodogram af prædiktionsfejlen. Deromkring er beregnet et hhv. 95% og 99% konfidensinterval ved et Kolmogorov-Smirnov test for antagelse om normalfordeling. Det ses på figuren, at fordelingen af residualerne ikke er signifikant forskellig fra en normalfordeling.



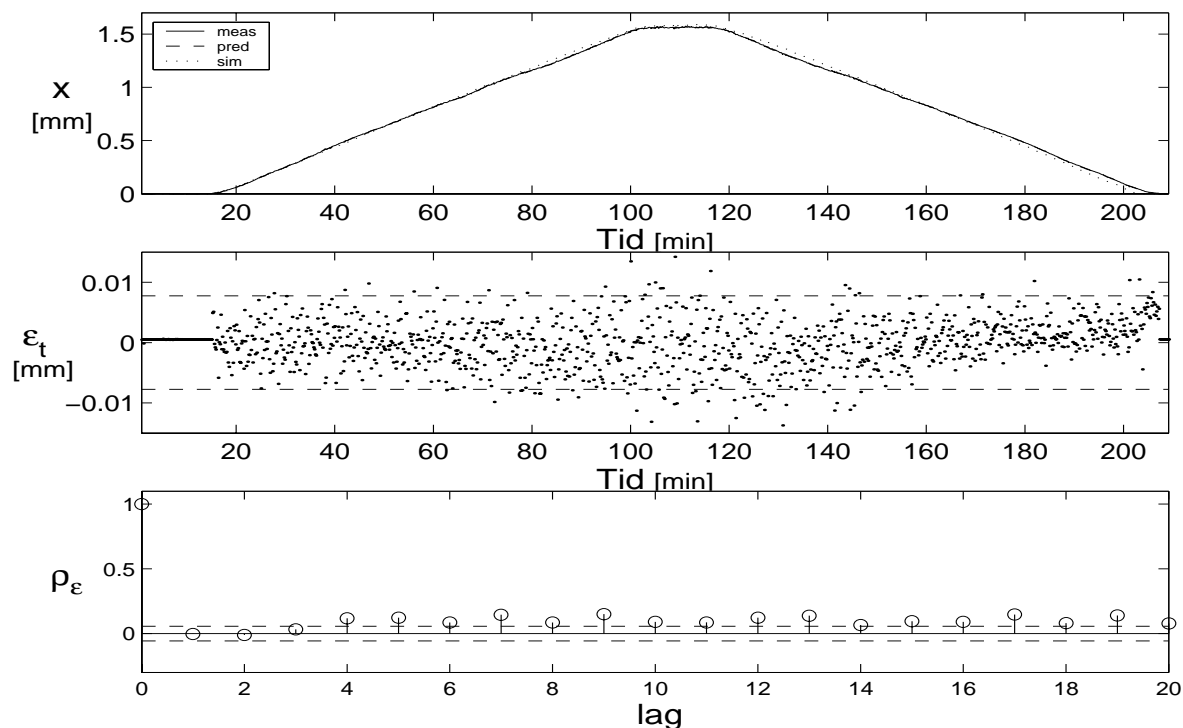
Figur 7.5: Figuren viser det kumulerede periodogram for residualerne afbildet i figur 7.3. De to linier på hver side af grafen indikerer hhv. 95% og 99% konfidensinterval ved et Kolmogorov-Smirnov test for normalfordeling.

7.1.3 Krydsvalidering af statisk ventilmodel

Modellen med de i `test2` estimerede parameter forsøges nu indsat i `test1`. Resultatet ses i figur 7.6. Indstillingsparameteren er nu blevet estimeret til $\Delta p_{b,SP} = 0.1406 \text{ N/mm}^2$. Krydsvalideringen viser, at modellen godt kan simulere `test1`, selvom åbningshøjden er over dobbelt så stor i `test1` end `test2`. Dette betyder ligeledes, at en spredning på $\hat{\sigma}_\epsilon = 3.9 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ ikke er mere med åbningshøjden in mente, jf. varianskoeficienten.

Ved krydsvalideringen er residualerne ikke helt hvid støj, hvilket antydes af autokorrelation i figur 7.6 samt af det kumulerede periodogram afbildet i figur 7.7. Taget i betragtning, at krydsvalidering er på uafhængigt datasæt, er de opnåede residualer bestemt ikke kritiske. Residualplottet i figur 7.6

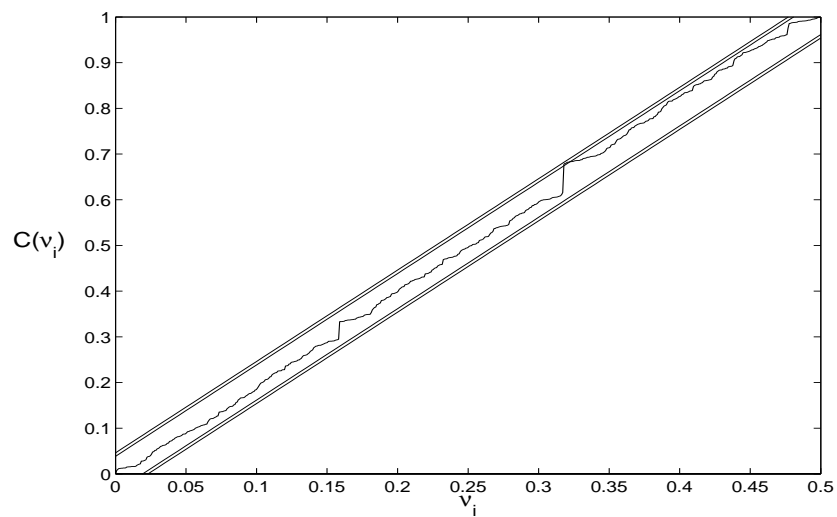
antyder da også, at variansen er konstant, samt at residualerne er jævnt spredt. Desuden kan en estimering af parametre udelukkende på `test1` ligeledes give ukorreleret hvid støj, som resultatet ved `test2`.



Figur 7.6: Figuren viser modellen estimeret på `test2` indsat i `test1`. Spredningen af residualerne er $\hat{\sigma}_\varepsilon = 3.9 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, de stiplede linier angiver $\pm 2\hat{\sigma}_\varepsilon$.

Resultaterne for den statiske model for termostatventilen viser, at den til fulde kan simulere/prædiktere systemet. Heri ligger, at friktionen i ventilen er tilstrækkelig modelleret ved Dahl's hysteresemodel, hvilket er hovedmålet for den statiske model.

I denne henseende er dataserierne, der er til rådighed meget taknemmelige, da der generelt ikke er meget dynamik i termostatventilen, udover hysteresen. Begrænsningen ligger i selve forsøget, hvor temperaturen i vandbadet ikke kan ændres hurtig pga. vandets varmekapacitet. Med den statiske model som udgangspunkt forsøges den udvidet til en dynamisk model, hvor gastemperaturen ikke længere er i ligevægt med omgivelserne.



Figur 7.7: Figuren viser det kumulerede periodogram for residualerne afbildet i figur 7.6. De to linier på hver side af grafen indikerer hhv. 95% og 99% konfidensinterval ved et Kolmogorov-Smirnov test for normalfordeling.

7.2 Dynamisk ventilmodel

Ved målinger af den dynamiske karakteristik af termostatventilen er temperaturen af omgivelserne blevet varieret. Herved kendes ikke den aktuelle gastemperatur T_g og heraf gastrykket $p_g(T_g)$. Gastemperaturen forsøges estimeret ud fra temperaturene af omgivelserne, der i dette tilfælde består af luften T_{air} og mediet T_{med} .

Den dynamiske ventilmodel skal derved inkludere, hvordan gastemperaturen modelleres ud fra de målte temperaturer. Samtidig antages den resterende model, at være ækvivalent med den statiske model, der blev udledt og estimeret i forrige afsnit.

7.2.1 Dynamisk model af gastemperatur

Som udgangspunkt kunne gastemperaturen tænkes modelleret ved temperaturen af luften og mediet. Til dette formål forsøges med en første ordens varmeledning ligning, udledt vha. energibalance og beskrevet i [27] og [6]. Udtrykket for gastemperaturen bliver differentialligningen

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{T_{air} - T_g}{R_{air}} + \frac{T_{med} - T_g}{R_{med}} \right) \quad (7.11)$$

hvor C_1 er varmekapaciteten, R_{air} og R_{med} er den termiske ledningsevne (også kaldet *isolansen*) mellem gassen og henholdsvis luften og mediet.

Modellen indeholder herved følgende input og output

$$\text{Input: } \begin{cases} T_{air} \\ T_{med} \\ \Delta p_k \\ \Delta p_s \end{cases} \quad \text{Output: } x$$

Ligningsystemet fra den statiske ventilmodel er udvidet med ovennævnte tilstandsligning for gastemperaturen

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{T_{air} - T_g}{R_{air}} + \frac{T_{med} - T_g}{R_{med}} \right) \quad (7.12)$$

$$\frac{dF_h}{dt} = \frac{dT_g}{dt} \sigma \left(1 - \frac{F_h}{F_{h,max}} \text{sgn} \left(\frac{dT_g}{dt} \right) \right)^\alpha \quad (7.13)$$

$$x = \frac{A_k(\Delta p_k - \Delta p_{k,SP}) + A_s(\Delta p_s - \Delta p_{s,SP}) - A_b(k_1 T_g^2 + k_2 T_g + k_3 - \Delta p_{b,SP}) + F_h}{C_v + C_i + C_b + K_f \Delta p_k} \quad (7.14)$$

hvor k_1 , k_2 og k_3 er konstanterne fra (4.15), idet omregningen mellem gastemperatur T_g og gastrykket $p_g(T_g)$ skal gøres efterhånden som gastemperaturen estimeres. Parametrene i den dynamiske ventilmodel forsøges igen estimeret ved CTSM.

7.2.2 Estimering af dynamisk ventilmodel

Estimering af parametre i dynamisk ventilmodel laves på dataserien `test6`, hvor flowet under hensyn til differenstrykket ikke er større end, hvad der ifølge tabel 4.1 svarer til maksimal åbningshøjde.

Gastemperaturens ændring per tid, $v = \frac{dT_g}{dt}$, er anderledes defineret end ved den statiske ventilmodel. Derfor kan parameteren σ ikke forventes at have samme værdi for den dynamiske model som i den statiske model.

De termodynamiske størrelser C_1 , R_{air} og R_{med} er tydeligvis korrelerede. Derfor vælges varmekapaciteten til $C_1 = 760 \text{ J/K}$, hvorefter de termiske modstande kan estimeres herefter. De estimerede parametre er givet i tabel 7.3, hvor estimatet på variansen for de stokastiske led er udeladt.

Indstillingsparameteren er fundet til $\Delta p_{b,SP} = 0.1427 \text{ N/mm}^2$, denne værdi er estimeret separat og holdes konstant ved estimeringen af R_{air} og R_{med} . I CTSM vil værdien σ blive estimeret meget lav, så hysteresekraften derved antager værdier og forløb, som er fysisk urealistiske. Værdien af σ sættes til 4.0 N/K , hvilket er en størrelse, hvor modellen stadig giver et fysisk plausibelt resultat. Et plot af modellen med de estimerede parameter er vist i figur 7.8.

Tabel 7.3: Parameterestimerer for dynamisk model

parameter	estimat	std.dev.	enhed
* σ	4.0	–	N/K
* $\Delta p_{b,SP}$	0.1427	–	N/mm^2
* C_1	760	–	J/K
R_{air}	1.13	0.017	K/W
R_{med}	41.27	0.91	K/W

*Ikke estimeret ved maks.likelihood

De estimerede parametre for de termiske modstande er af ovennævnte årsager specifik for den valgte kapacitet. Det ses desuden, at når kapaciteten

er fastholdt, bliver de resterende estimater ikke korrelerede og har en lille spredning. Tidskonstanten mellem luft og gas, $\tau = (R_{air} \cdot C_1)$, kan beregnes til 14.3 min , hvilket stemmer godt overens med de $10-12 \text{ min}$ opnået i [6]. For de resterende parametre er værdierne fastholdt på de estimerede værdier fundet ved den statiske model og angivet i tabel 7.2.

I [6] er ligeledes som kvalitetskrav godtgjort, at en ændring af medietemperaturen på 30 K ikke må ændre gastemperaturen med mere end 1.5 K . Antages at ligevægt er opnået efter ændringen af medietemperaturen, dvs. $\frac{dT_g}{dt} = 0$, kan den resulterende ændring i gastemperaturen beregnes som

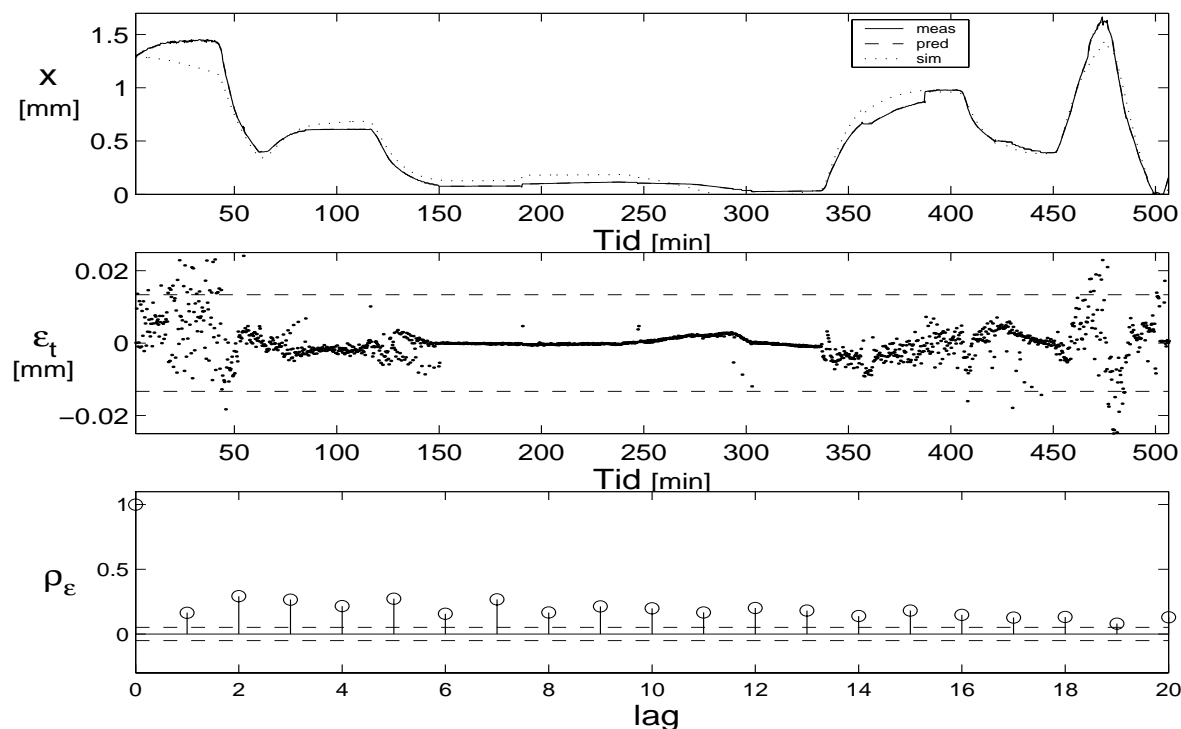
$$\Delta T_g = \frac{\Delta T_{med} \cdot R_{air}}{R_{air} + R_{med}} = \frac{30 \text{ K} \cdot 1.13 \text{ K/W}}{1.13 \text{ K/W} + 41.27 \text{ K/W}} = \underline{0.8 \text{ K}} < 1.5 \text{ K} \quad (7.15)$$

hvoraf det ses, at termostaten iht. estimerede værdier overholder kvalitetskravene. I afsnit 7.2.3 undersøges, om modellen kan antages at være helt uafhængig af medietemperaturen.

Det ses på figur 7.8, at de prædikterede værdier følger de målte, mens de simulerede værdier på nogle tidspunkter er meget afvigende. Prædiktionsfejlen ses tydelig i residualplottet, hvor spredningen er meget varierende. Især omkring toppene af ventilåbningen er der stor spredning på residualerne, hvilket undersøges nærmere i afsnit 7.2.5. Det pludselige fald i åbningshøjden ved tiden ca. 350 min til ca. 390 min skyldes ændringer i hhv. det statiske tryk og differenstrykket, se evt. figur A.6. Tilsvarende var gældende for `test3` i figur 7.1.

Plottet af autokorrelationen for residualerne viser igen, at den er signifikant forskellig fra hvid støj. Autokorrelationen er omtrent 0.25 for lag op til 10. Dette er ikke helt perfekt, men tages modellens kompleksitet i betragtning, bl.a. hysteres, varmeledning og statisk/differenstryk, er det vanskeligt at opnå ukorrelerede residualer, idet de ovennævnte faktorer ikke valideres enkeltvis.

I figur 7.9 er plottet det kumulerede periodogram for residualerne, igen sammenlignet med et Kolmogorov-Smirnov test for normalfordeling. Det ses, at residualerne også her viser signifikant forskel fra en normalfordelt hvid støj.



Figur 7.8: Øverste plot viser den målte, prædikterede og simulerede tidsrække fra `test6` og den dynamiske model (7.12-7.14). I det midterste plot er residualerne afbildet som funktion af tiden. Spredningen af residualerne er $\hat{\sigma}_\epsilon = 6.7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, de stiplede linier giver $\pm 2\hat{\sigma}_\epsilon$. Nederst plottes auto-korrelationen af ϵ_t , hvor et approx. 95% konfidensinterval igen er markeret.

7.2.3 Test for modelreduktion

Det kan ud fra `test6` i figur A.6 ikke umiddelbart ses nogen indflydelse fra medie temperaturen på flowet. Det vil derfor være naturligt at forsøge med en dynamisk model, hvor gastemperaturen udelukkende afhænger af lufttemperaturen T_{air} .

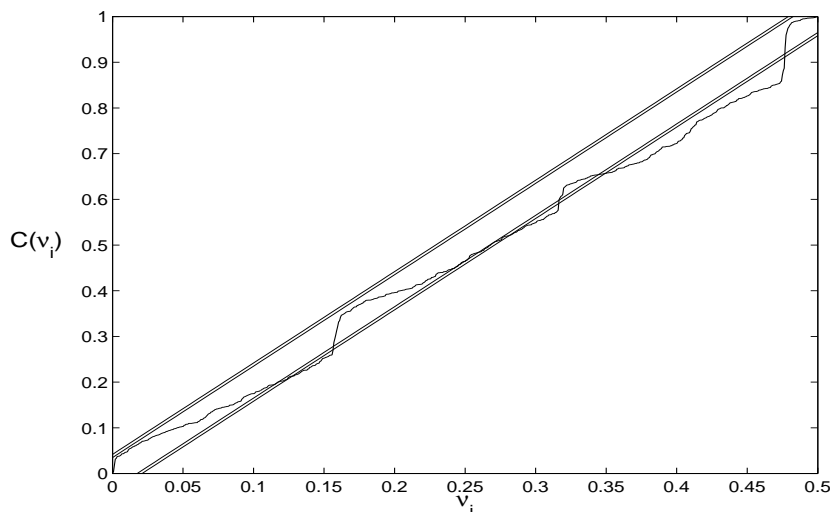
Ligningsystemet for den dynamiske model (7.12-7.14) reduceres til

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{1}{\tau} (T_{air} - T_g) \quad (7.16)$$

$$\frac{dF_h}{dt} = \frac{dT_g}{dt} \sigma \left(1 - \frac{F_h}{F_{h,max}} \text{sgn} \left(\frac{dT_g}{dt} \right) \right)^\alpha \quad (7.17)$$

$$x = \frac{A_k (\Delta p_k - \Delta p_{k,SP}) + A_s (\Delta p_s - \Delta p_{s,SP}) - A_b (k_1 T_g^2 + k_2 T_g + k_3 - \Delta p_{b,SP}) + F_h}{C_v + C_i + C_b + K_f \Delta p_k} \quad (7.18)$$

hvor k_1 , k_2 og k_3 igen er konstanterne fra (4.15). Varmekapaciteten C_1 og



Figur 7.9: Figuren viser det kumulerede periodogram for residualerne afbildet i figur 7.8. De to linier på hver side af grafen indikerer hhv. 95% og 99% konfidensinterval ved et Kolmogorov-Smirnov test for normalfordeling.

den termiske modstand R_{air} kan ikke identificeres individuelt og er derfor samlet i tidskonstanten $\tau = (R_{air} \cdot C_1)$. Totalt er den dynamiske model fra forrige afsnit reduceret med én parameter.

Ved parameterestimering med CTSM og `test6` er for τ opnået værdien 24.9 min med en spredning 1.4 min . Estimerne i den hhv. fulde og reducerede model giver en maksimum likelihoodværdierne (negative logaritme)

model	Neg. loglikelihood
fuld	-5613
reduceret	-5094

Teststørrelsen for en likelihood-ratio test kan ud fra (5.46) beregnes som

$$2((-5094) - (-5613)) = 1038 > \chi^2(1)_{0.95} = 3.84 \quad (7.19)$$

hvilket viser, at teststørrelse er stærk signifikant. Den mindre maksimum likelihood værdi i den reducerede model kan ikke retfærdiggøre en enkel parameterreduktion. Heraf konkluderes, at medietemperaturen T_{med} har indflydelse på gastemperaturen, hvilket da også var resultatet ved undersøgelse af kvalitetskravet, (7.15).

7.2.4 Test for modeludvidelse

Når gassen i termostaten opvarmes og nedkøles sker der hhv. fordampning og kondensering. Desuden indgår volumenændringen i bælggen ikke i modellen. Disse to faktorer leder til en undersøgelse af en model med to forskellige varmekapaciteter, dvs. en når gassen opvarmes og en ved nedkøling af gassen. Da varmekapaciteten er energimængden per temperaturændring, vil modeludvidelsen, med bibeholdt isolans, svare til to forskellige tidskonstanter for tiden mellem en temperaturændring af omgivelserne til en temperaturændring af gassen.

Varmeledningligningen for gastemperaturen givet i (7.11) skrives ved modeludvidelsen som følgende

$$\frac{dT_g}{dt} = \left(\frac{T_{air} - T_g}{R_{air}} + \frac{T_{med} - T_g}{R_{med}} \right) \cdot \begin{cases} C_{op}^{-1} & \text{for } \dot{T}_g > 0 \\ C_{ned}^{-1} & \text{for } \dot{T}_g < 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

De termiske modstande R_{air} og R_{med} fastholdes på de estimerede værdier angivet i tabel 7.3. Den udvidede model er implementeret i CTSM og værdierne for estimering på `test6` er opgivet i tabel 7.4. Til sammenligning er derudover i samme tabel repeteret værdierne for den fulde model fra forrige afsnit, hvor spredningen på C_1 er fundet i CTSM, ved udelukkende estimering af denne ene parameter.

Tabel 7.4: Kapacitetestimerer for dynamisk model

model	neg.loglike.	variabel	estimat	std.dev.	enhed
fuld	-5613	C_1	760	12	J/K
udvidet	-5616	C_{op}	734	16	
		C_{ned}	800	21	

Ved vurdering af parameterestimererne i tabel 7.4 kan de to estimater for kapaciteten i den udvidede model testes for, om de kan antage værdien 760. Her benyttes metoden beskrevet i afsnit 5.5.2.

$$C_{op} : \frac{734 - 760}{16} = -1.625 = t(1508)_{\alpha/2} \Rightarrow \alpha = 10\% \quad (7.21)$$

$$C_{ned} : \frac{800 - 760}{21} = 1.905 = t(1508)_{\alpha/2} \Rightarrow \alpha = 6\% \quad (7.22)$$

Heraf ses, at begge estimater kan være kapaciteten for den fulde model med signifikansniveauer mindre en 6%. Det er dog svært at lave en entydig

konklusion ud fra ovenstående, derfor laves et likelihood-ratio test som i forrige afsnit, hvor modelreduktionen svarer til den fulde model.

Teststørrelsen for en likelihood-ratio test (5.46) beregnes med værdierne angivet i tabel 7.4

$$2((-5613) - (-5616)) = 6 = \chi^2(1)_\alpha \Rightarrow \alpha = 1.4\% \quad (7.23)$$

Den reducerede model (i.e. fulde model) er signifikant for niveauer mindre end 1.4%. Umiddelbart er niveauet meget lavt, men tages der hensyn til approksimationerne for at kunne anvende metoden, er forskellen ikke stor. Den største approksimation er, at den udvidede model ikke er fuldt accepteret, før den testes mod en undermodel. Det er derudfra risikabelt at fuldt ud antage χ^2 -fordeling om differensen. Residualerne for de to modeller er tillige meget ens, hvormed forskellen i spredningen er minimal.

Det vurderes samlet, at en varmeledningsmodel med to tidskonstanter ikke er signifikant bedre, derfor kan modeludvidelsen med den ekstra parameter ikke forsvares ud fra data.

7.2.5 Analyse af residualer

Som nævnt i forrige afsnit består variansen af residualerne af to bidrag, et fra systemet og et fra måleusikkerheden. For den enkelte residual kan bidragene ikke adskilles, og oveni varierer variansen af prædiktionsfejlen i den ikke-lineære model. I forbindelse med forsøgene og opsamling af data er angivet et skøn over usikkerheden på de enkelte måleværdier, tabel 3.3. Herudfra vil der kunne udledes et approksimativt skøn over måleusikkerheden på selve ventilhøjden.

Skøn over måleusikkerhed

For at kunne approksimere måleusikkerheden på åbningshøjden x , er det nødvendigt at finde, hvordan usikkerheden på målinger af flowet i forsøgene overføres til åbningshøjden. Hertil anvendes fejlpropagationsloven [23]

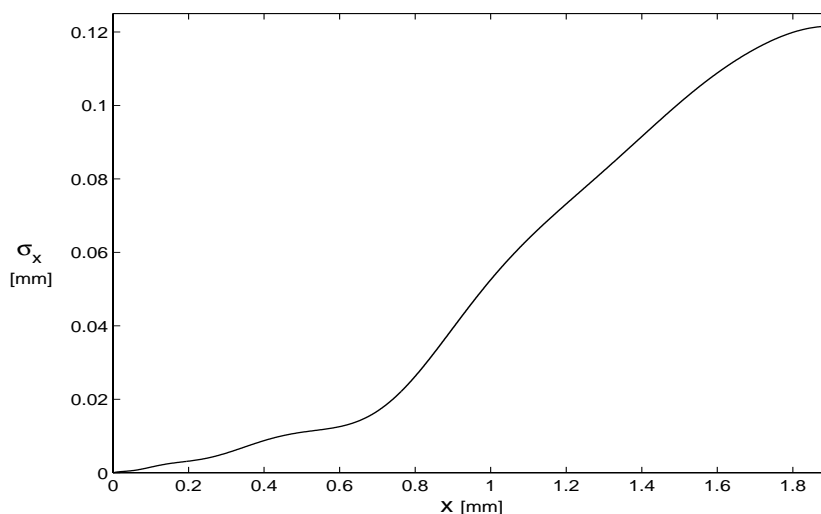
$$V(Y) \simeq \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 V(X_1) + \dots + \left(\frac{\partial h}{\partial x_n}\right)^2 V(X_n) \quad (7.24)$$

hvor $Y = h(X_1, \dots, X_n)$. I denne situation angiver funktionen h sammenhængen mellem flowet q og ventilens åbningshøjde x , i.e. tabel 4.1 og

figur 4.3. Derudover blev måleusikkerheden på flowet i tabel 3.3 opgivet til $\pm 3\%$, dvs. $\sigma_q = 0.015 \cdot q$. Et approksimativt udtryk for spredningen af den målte åbningshøjder bliver

$$\sigma_x \simeq \left(\frac{\partial h}{\partial q} \right) \cdot 0.015q \quad (7.25)$$

hvor gradienten af h kan findes numerisk ud fra tabel 4.1. I figur 7.10 er (7.25) plottet som funktion af åbningshøjden x .



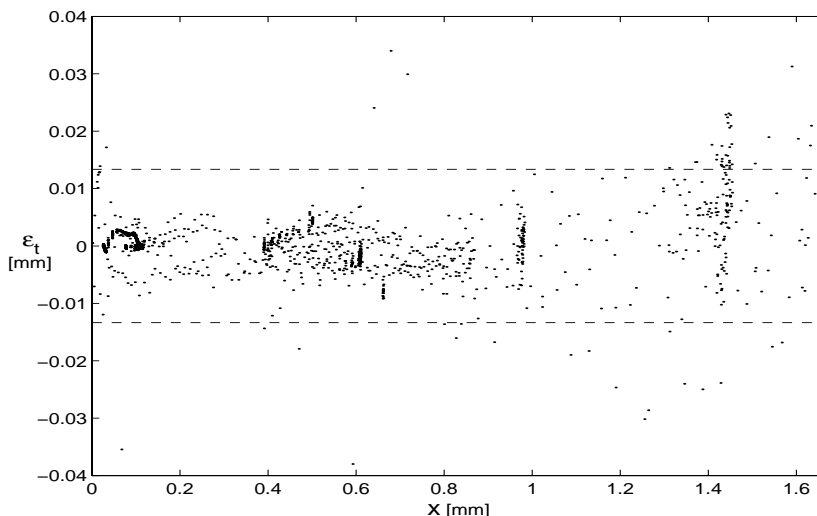
Figur 7.10: Figuren viser den angivne usikkerhed (dvs. spredningen σ) af den målte ventilåbning som funktion af åbningshøjden x , jf. (7.25).

Ud fra figur 7.10 ses, at måleusikkerheden på ventilåbningen x stiger svagt op til ca. $x = 0.7$, mens for større x -værdier stiger måleusikkerheden kraftigt. Denne ikke-linearitet kommer fra gradienten af det ikke-lineære forhold mellem flow q og ventilåbning x , se figur 4.3. Den meget store måleusikkerhed for høje åbningsværdier vil utvivlsomt påvirke estimeringen af selv samme værdier. Desuden giver det heller ingen mening at antage samme varians for alle åbningsværdier.

Det er ikke rimeligt at antage usikkerheden på åbningshøjden går mod nul for x gående mod nul. Ofte vil usikkerheden gå mod et konstant minimum, hvor usikkerheden ikke reduceres yderligere for mindre x -værdier. I området for x mindre end 0.7 mm er måleusikkerheden kun svagt aftagende, derfor antages variansen konstant her, hvilket giver en approksimativ minimum måleusikkerhed på $\sigma_x \approx 0.02 \text{ mm}$. Denne størrelse er langt over den opnåede spredning på prædiktionsfejlen for den statiske model, så skønnet for måleusikkerheden er sandsynligvis i overkanten.

Sammenligning af skøn over måleusikkerhed og residualer

Først undersøges residualerne fra figur 7.8 og model (7.12-7.14) nærmere ved at plotte dem som funktion af åbningshøjden x i figur 7.11.



Figur 7.11: Tilsvarende residualer som i figur 7.8, her plottet som funktion af den målte åbningshøjde x . Spredningen af residualerne er $\hat{\sigma}_\epsilon = 6.7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, de stiplede linier giver $\pm 2\hat{\sigma}_\epsilon$. Det ses, at residualerne er markant større for store åbningshøjder.

Figur 7.11 viser tydeligvis, at for store åbningshøjder ($x > 0.8 \text{ mm}$) spredes residualerne markant og proportionalt med åbningshøjden. De stiplede linier angiver $\pm 2\hat{\sigma}_\epsilon$ ($\hat{\sigma}_\epsilon = 6.7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$), hvilket igen antyder at residualerne for store åbningshøjder ligger uden for det approksimative 95% konfidensinterval. Det er dog tydelig, at spredningen $\hat{\sigma}_\epsilon$ varierer med åbningshøjden, og derfor kan konfidensintervallet reelt ikke benyttes.

Sammenlignes residualerne fra figur 7.11 med skønnet over måleusikkerheden i figur 7.10 ses tydelig et sammenfald i tendensen. For begge figurer stiger variansen betydelig og proportionalt med åbningshøjden. Den præcise forskel i værdierne kan skyldes, at skønnet over måleusikkerheden generelt er estimeret for højt.

Det er således muligt, at stigningen i måleusikkerheden for store åbningshøjder vil gentages, når den forsøges modelleret/estimeret. Det er derved svært at få prædiktionsfejlen bedre end selve usikkerheden på målingerne, idet den netop er defineret ved forskellen.

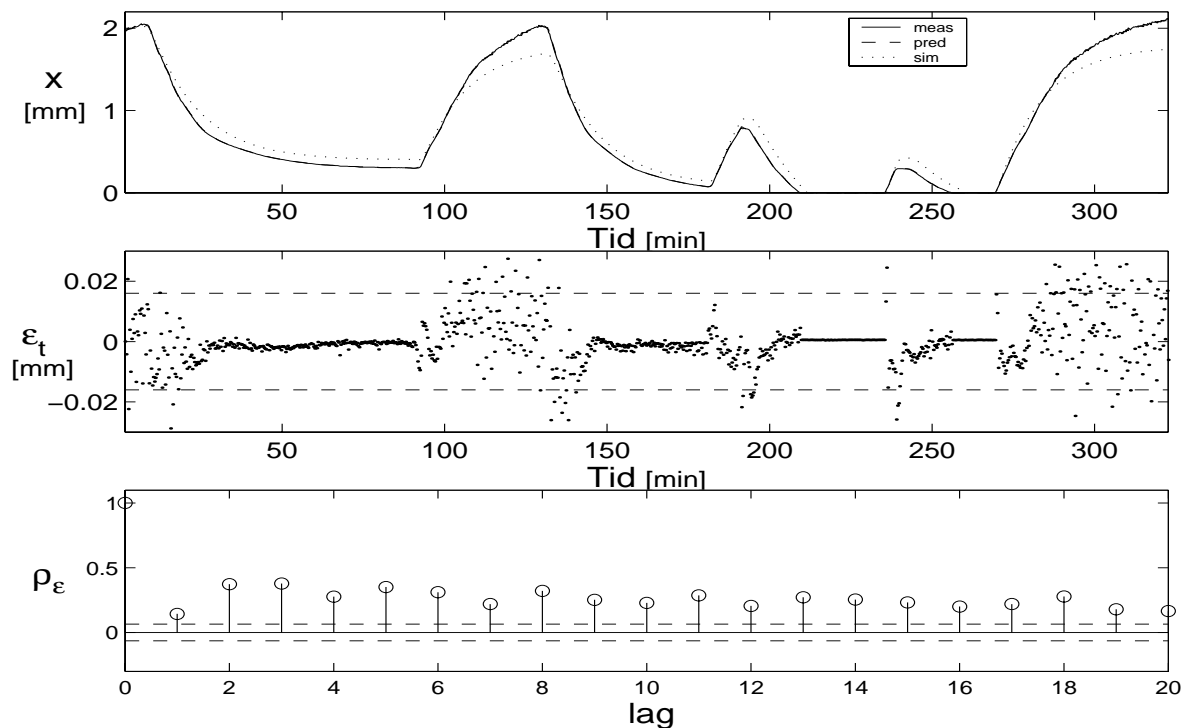
Udregnes spredningen for residualerne i figur 7.8, hvor der kun medtages residualer op til en åbningshøjde på 0.7 mm , giver dette en spredning på $\hat{\sigma}_\epsilon = 3.6 \cdot 10^{-3}\text{ mm}$, hvilket er en reduktion til cirka halvdelen.

I estimeringen ville det selvfølgelig være normalt at vægte sine observationer, med den tilhørende usikkerhed, således observationen indgår i maksimum likelihood estimatet med den betydning usikkerheden tillader. I lineære modeller ville det ligeledes være oplagt at lave en såkaldt variansstabiliserende transformation af sine observationer, [28]. En sådan transformation ville være overordentlig vanskelig at gennemskue i en ikke-lineær model, samtidig vil den fysiske tolkning mistes. Den åbningsafhængige måleusikkerhed bidrager ikke til, at residualerne er korrelerede, jf. autokorrelationsfunktionen, dette er således stadig modellens insufficiens.

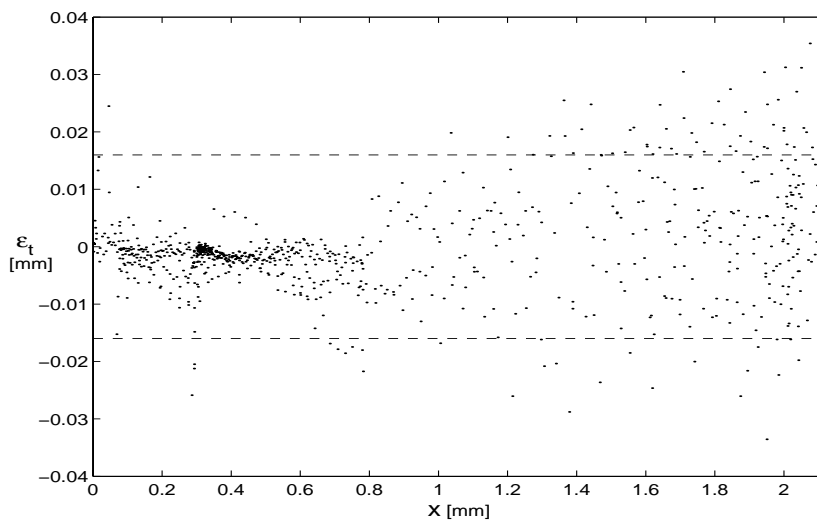
7.2.6 Krydsvalidering af dynamisk ventilmodel

Modellen opnået i afsnit 7.2 forsøges nu indsat i `test4` og `test5` for derefter at undersøge modellens evne på dataserier, hvor parametrene ikke er estimeret. Disse tidsserier har meget høje åbningshøjder, derfor forventes fejltendenserne som ved estimeringen på `test6` og gennemgået i forrige afsnit forstærket yderligere. Da åbningshøjden for disse måleserier til tider er større end x_{max} , er der ikke sat nogen begrænsning på denne størrelse i estimeringsprogrammet.

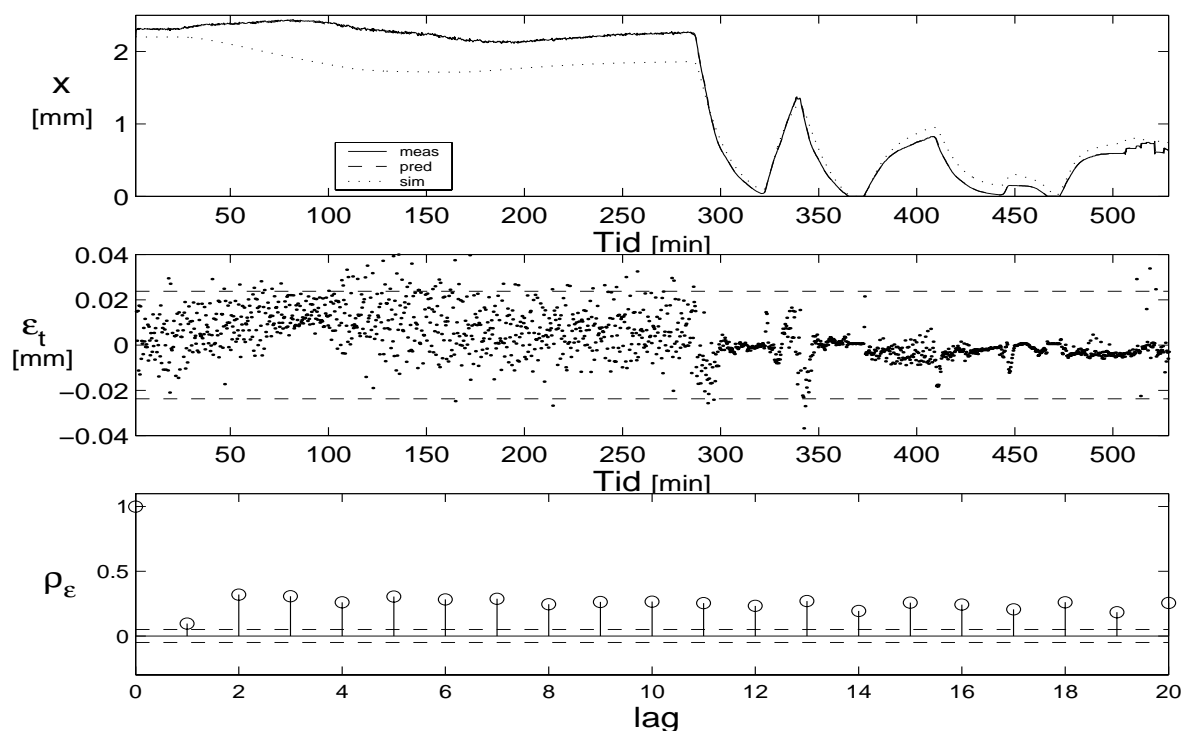
I figur 7.12 forsøges den dynamiske ventilmodel valideret på `test4`. Rent grafisk følges de prædikterede og målte værdier pænt gennem hele tidsserien. Anderledes for de simulerede værdier, der igen især afviger ved stor ventilåbning. I residualplottet ses igen klart tendensen til større varianser ved stor åbningshøjde. Dette er igen afbildet i figur 7.13.



Figur 7.12: Øverste plot viser den målte, prædikterede og simulerede værdier på `test4` fra modellen estimeret på `test6`. I det midterste plot er residualerne afbildet som funktion af tiden. Spredningen af residualerne er $\hat{\sigma}_\epsilon = 8.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, de stiplede linier giver $\pm 2\hat{\sigma}_\epsilon$. Nederst plottes autokorrelationen af ϵ_t , hvor et approx. 95% konfidensinterval igen er markeret.



Figur 7.13: Figuren viser residualerne fra figur 7.12 afbildet som funktion af ventilåbningen. De to linier på hver side af grafen indikerer igen et 95% konfidensinterval.

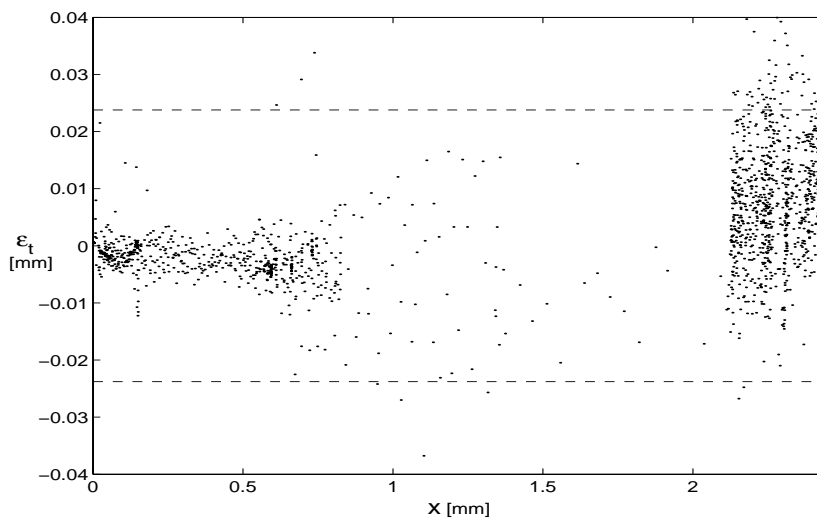


Figur 7.14: Øverste plot viser den målte, prædikterede og simulerede værdier på `test5` fra modellen estimeret på `test6`. I det midterste plot er residualerne afbildet som funktion af tiden. Spredningen af residualerne er $\hat{\sigma}_\epsilon = 11.8 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, de stiplede linier giver $\pm 2\hat{\sigma}_\epsilon$. Nederst plottes autokorrelationen af ϵ_t , hvor et approx. 95% konfidensinterval igen er markeret.

For dataserien `test5` i figur 7.14 haves de første ca. 290 *min* en ekstrem urealistisk stor ventilåbning, hvilket tydelig ses på residualerne. For den resterende tid beskrive modellen, både prædiktio og simulation, de observerede data med meget lille fejl. Forskellen i variansen mellem de store og små x -værdier, og heraf første og sidst del af `test5`, ses i figur 7.15 med prædiktionsfejlen plottet som funktion af den målte x -værdi.

7.2.7 Kommentar

Det har især ved den dynamiske model til tider været yderst vanskelig at estimere parametre med estimeringsprogrammet CTSM. Ofte er modellen optimeret til løsninger, der fysisk ikke har nogen relevans. Dette er forsøgt hindret ved evt. at fastholde enkelte parametre, mens resterende estimeres. Modellens ikke-linearitet bidrager ligeledes til, at estimeringen ikke altid



Figur 7.15: Figuren viser residualerne fra figur 7.14 afbildet som funktion af ventilåbningen. De to linier på hver side af grafen indikerer igen et 95% konfidensinterval.

er gennemskuelig. Desuden stopper CTSM ofte estimeringen, idet dispersionsmatricen er estimeret til ikke at være positive semi-definit.

Ved nogle af forsøgene er opnået uforklarlig store ventilåbninger, $> 1.9 \text{ mm}$ især for `test4` og `test5`, hvilket rent fysisk i ventilen ikke er muligt, jf. tabel 4.1. Dette er grunden til, at den dynamiske model ikke er forsøgt estimeret på disse dataserier.

7.3 Modelresumé

Den fysiske model for termostatventilen, hvor friktionen er modelleret med Dahl's hysteresemodel, opskrives sammen med de estimerede parameter-værdier. I tabel 7.5 er opgivet parametre, der hhv. ikke er estimeret og fundet ved *least square*.

Tabel 7.5: Parametreværdier for ventilmodel

Ikke-estimerede parametre			
parameter	værdi	enhed	beskrivelse
A_b	1032	mm^2	areal af bælg
C_v	1.8	N/mm	ventilfjeder-konst.
C_i	13.7	N/mm	indstillingsfjeder-konst.
C_b	3.2	N/mm	bælgfjeder-konst.
k_1	$90.057 \cdot 10^{-6}$	$N/(mm^2 \cdot ^\circ C^2)$	trykdif.konst.
k_2	$3343.4 \cdot 10^{-6}$	$N/(mm^2 \cdot ^\circ C)$	trykdif.konst.
k_3	$12686 \cdot 10^{-6}$	N/mm^2	trykdif.konst.
<i>least square</i> estimerede parametre			
K_f	99.7	mm	flowkraft-konstant
A_k	52.0	mm^2	areal af kegle
A_s	2.45	mm^2	areal af spindel

Statisk model

$$\text{Input: } \begin{cases} T_g \\ \Delta p_k \\ \Delta p_s \end{cases} \quad \text{Output: } x$$

T_g (el. T_{bad}) er gastemperaturen. Δp_k og Δp_s er henholdsvis det målte differenstryk og statiske tryk. Outputtet x er ventilens åbningshøjde.

Ventilmodellen er defineret som (7.5-7.6)

$$\frac{dF_h}{dt} = v\sigma \left(1 - \frac{F_h}{F_{h,max}} \text{sgn}(v) \right) \quad (7.26)$$

$$x = \frac{A_k(\Delta p_k - \Delta p_{k,SP}) + A_s(\Delta p_s - \Delta p_{s,SP}) - A_b(\Delta p_b(T_g) - \Delta p_{b,SP}) + F_h}{C_v + C_i + C_b + K_f \Delta p_k} \quad (7.27)$$

hvor $v = T_{g,t} - T_{g,t-1}$ og $\Delta p_b(T_g) = k_1 T_g^2 + k_2 T_g + k_3$. Herudfra kan ligeledes den estimerede indstillingstemperatur ($T_{g,set}$) udregnes, da det er temperaturen, der svarer til bælgtrykket $\Delta p_{b,SP}$. F.eks. $\Delta p_{b,SP} = 0.1419 N/mm^2 \sim$

23.62°C, se tabel 7.6 og (7.28).

$$T_{g,set} = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot (k_3 - \Delta p_{b,SP})}}{2 \cdot k_1} \quad (7.28)$$

Tabel 7.6: Parameterestimater for statisk model

parameter	estimat	enhed	beskrivelse
σ	6.44	N/K	elasticitetsmodul
$F_{h,max}$	1.44	N	maks.frik.kraft
$\Delta p_{b,SP}$	0.1419	N/mm^2	\approx indstil.temp.

Dynamisk model

Til den dynamiske model måles lufttemperaturen T_{air} og medietemperaturen T_{med} . Dette giver følgende input og output

$$\text{Input: } \begin{cases} T_{air} \\ T_{med} \\ \Delta p_k \\ \Delta p_s \end{cases} \quad \text{Output: } x$$

Til modellering af gastemperaturen er opstillet en dynamisk varmeledningsligning, (7.11)

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{T_{air} - T_g}{R_{air}} + \frac{T_{med} - T_g}{R_{med}} \right) \quad (7.29)$$

Den resterende model er som den statiske, (7.26-7.27), med $v = \frac{dT_g}{dt}$. Parameterverdierne forskellig fra den statiske model er angivet i tabel 7.7.

Tabel 7.7: Parameterestimater for dynamisk model

parameter	estimat	enhed	beskrivelse
σ	4.0	N/K	elasticitetsmodul
$\Delta p_{b,SP}$	0.1427	N/mm^2	\approx indstil.temp.
C_1	760	J/K	kapacitet
R_{air}	1.13	K/W	luft-isolans
R_{med}	41.27	K/W	medie-isolans

Kapitel 8

Konklusion

I projektet er opbygget en stokastisk model for en termostatventil, der tager udgangspunkt i dens fysiske konstruktion. Desuden er friktionskraften modelleret med adaptiv friktionsmodel formuleret af Dahl i [12].

Parametrene i den stokastiske model er estimeret med programmet CTSM vha. forsøgsdata. Ligeledes er modellen valideret på anden uafhængig dataserie. Det således med modellen muligt at inkludere den observerede hystereseseffekt, jf. friktionskraften.

Modellen for termostatventilen er udvidet til at medtage den dynamiske temperaturkarakteristik af termostaten. Igen er parametre estimeret på forsøgsdata. Resultatet er ikke entydig godt, idet modellen ikke fuldkommen beskriver data. Modellens struktur og kompleksitet er dog af en sådan grad, at dette er svært at opnå med det datamateriale, der er til rådighed.

Gennem hele modelleringsfasen er desuden foretaget en del approksimationer og antagelser. Dette er nødvendig for overhovedet at kunne sammenligne termostatventilens tilstand under forsøgene og dens tilstand i modellen. Da alle antagelserne er nødvendig for at kunne samle enderne, er det derved umuligt at undersøge, hvorvidt disse antagelser holder enkeltvis.

En bedre model ville kunne laves, hvis de enkelte antagelser blev undersøgt og bekræftet/rettet. Konkret for termostatventilen ville det være forholdet mellem

- ventilhøjde og flow

- flow og differenstryk, mht. ventilhøjde
- differenstryk og ventilhøjde
- statisk tryk og ventilhøjde
- gastemperatur og bælghtryk
- gastemperatur og luft- og medie-temperatur

En stor mulighed for at teste og udvikle modellen ville kunne gøres i forsøgene ved tilmed at måle ventilhøjden x og for den dynamiske ventilmodel gastemperaturen T_g . Herved vil modellerede sammenhænge kunne valideres individuelt, hvilket reducere fejlkilderne betydelig.

Her er den statiske ventilmodel et meget godt eksempel. Med kun én ukendt tilstand, hysteresen F_h , kan sammenhænge mellem f.eks. output og forskellige input (eller snarere mangel på samme) hurtig lokaliseres, hvormed modellen nemt kan tilpasses. Modsat er det straks vanskeligere for den dynamiske model, hvor den statiske model er udvidet med en stokastisk differentiaalligning for gastemperaturen. I denne situation er det svært at afgøre om det er modellen for gastemperaturen eller ventilmodellen, der giver anledning til fejl i åbningshøjden.

Ved sammenligning med den angivne måleusikkerhed er både den statiske og dynamiske ventilmodel tilfredsstillende. Jf. ovenstående kunne det måske undersøges, hvor den dynamiske model har begrænsninger for store åbningshøjder, idet der ikke haves samme residualkarakteristik for den statiske model.

I projektforsøget er opnået en større forståelse for to forskellige typer modeller, lineær og ikke-lineær. Mange almindelig kendte metoder og resultater bygger på antagelser om linearitet. Derfor har det gennem hele forløbet været utrolig svært ikke (utilsigtet) at anvende de lineære metoder på ikke-lineære systemer. Der kunne således nemt laves en forkert konklusion, der bygger på nogle metoder, hvor forudsætningerne ikke er opfyldt.

Del II

Optimal styringsstrategi
for
mikrokraftvarmeanlæg

Kapitel 9

Introduktion

Delprojektet omhandler modellering af et gasbaseret mikrokraftvarmeanlæg (MKV-anlæg), der kan anvendes til at forsyne en bolig med varme og el. Først gives en kort gennemgang af baggrunden for projektet og herunder udviklingen af en optimal driftsstrategi til MKV-anlægget. Herefter præciseres formuleringen af projektet, der udføres i denne fremstilling.

9.1 Baggrund

Som en del af PSO (Public Service Obligation) fra elforsyningen er indsat et projekt ang. ‘Demonstration af mikrokraftvarme’. Heri skal udarbejdes et katalog over styringsstrategier, der afdækker de forskellige driftsstrategier i forbindelse med anvendelse af et MKV-anlæg til energiforsyning. Det er hensigten, at kataloget skal danne grundlag for udvikling af et adaptivt styresystem, [29].

Projektet gennemføres med bl.a Danfoss, NESAs, Dansk Gasteknisk Center a/s (DGC) og IMM.

9.2 Projektbeskrivelse

Ved NESAs og DGCs er opstillet et MKV-anlæg i en prøvestand, hvormed det er muligt at lave statiske og dynamiske forsøg. Med baggrund i for-

søgsdata kan opstilles en simpel fysisk model for MKV-anlæggets statiske og dynamiske karakteristik. Data fra testkørslerne benyttes ligeledes til at estimere modellens parametre og nyttevirkninger.

MKV-anlægget indsættes i en fysisk model for et varmesystem til en bolig. Den producerede mængde el kan tillig frit forbruges i boligen, hvilket reducere den købte elmængden over elnettet.

I forbindelse med et ELSAM-projekt¹ er over en længere periode opsamlet en række målinger for 25 boligers energibehov (elforbrug), dvs. el, vand og varme. I samme datasæt er desuden målt ude- og indetemperaturen samt vindhastigheden.

Med de empiriske energi-efterspørgselsdata og kendskabet til MKV-anlæggets driftskaraktistik er det muligt at undersøge, hvordan MKV-anlægget vil kunne dække de empiriske energibehov. Herudfra er det ligeledes muligt at studere den samlede virkning på energiforbruget ved forskellige styringsstrategier.

Omkostningen til at opfylde den pågældene energi-efterspørgslen kan beregnes ud fra gasforbruget. Dette samles til en kriteriefunktion el. tabsfunktion, der angiver produceret energi som ikke kan anvendes til efterspørgslen. Til kriteriefunktionen skal udover karakteristikken af MKV-anlægget medtages en model for et varmelager samt et krav om altid at imødekomme varmebehovet.

I forsøget på at udlede en optimal styringsstrategi for et MKV-anlæg kan den optimale driftsløsning findes ved at minimere tabsfunktionen. Dette kan gøres ved dynamisk programmering. Resultaterne vil kunne danne grundlag for et forslag til en optimal styringstrategi.

¹iht. intern korrespondance

Kapitel 10

Karakteristik af mikrokraftvarmeanlæg

For at kunne simulere et MKV-anlæg indsat i et varmesystem er det først nødvendigt at fastlægge dens karakteristik. Her tænkes specielt på MKV-anlæggets ydelse og forbrug samt eventuelle forsinkelse og tab ved opstart.

10.1 MKV-anlæg

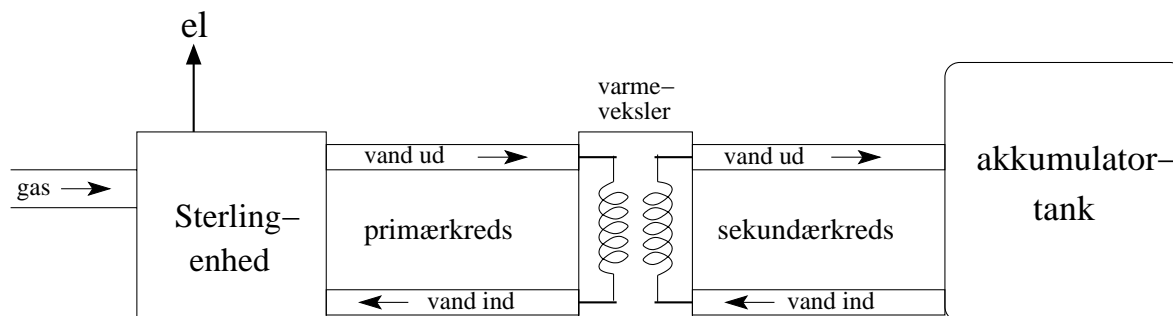
Et gasbaseret kraftvarmeanlæg omsætter energien fra gassen til både varme og mekanisk kraft, heraf elektricitet. MKV-anlægget i dette projekt er en gasfyret sterlingmotor (sterlingenhed), der ved at trække en generator producerer elektricitet samt overskudsvarme. For den anvendte sterlingenhed er opgivet følgende ydeevne

- 5 kW varme
- 750 W elektricitet

Sterlingenheden kan ikke køre med variabel effekt. Den eneste indstillingsmulighed er *on* eller *off*. Der er ikke opgivet nogen værdier på de forskellige virkningsgrader. Disse parameterverdier vil blive estimeret på baggrund af testkørsler med sterlingenheden i en forsøgstand.

10.2 Forsøgsopstilling

DGC har foretaget en række undersøgelser og testkørsler af sterlingenheden. En skitse af forsøgsopstillingen er vist i figur 10.1.



Figur 10.1: Skitse af forsøgsstanden, hvor data af sterlingenheden er opsamlet.

Sterlingenheden sidder således i en forsøgsstand, hvor mængden af forbrændt gas og elproduktionen kan måles direkte. Den producerede varme afledes med vandet i primærkredsen. Fra primærkredsen overføres varmen gennem varmeveksleren til sekundærkredsen, hvor endelig varmemængden opsamles i en akkumulatortank, se evt. figur 10.1.

10.2.1 Måledata

Til udregning af gasforbruget og produktionen af el og varme er målt følgende variable ved forsøg med sterlingenheden

- Gas
 - Temperatur [$^{\circ}C$]
 - Tryk [hPa]
 - Mængde [ltr]
- El [kwh]
- Varme
 - Primærkreds
 - * Temp. ind [$^{\circ}C$]
 - * Temp. ud [$^{\circ}C$]
 - Sekundærkreds
 - * Temp. ind [$^{\circ}C$]
 - * Temp. ud [$^{\circ}C$]
 - * Mængde [ltr]

Med forsøgsopstillingen er lavet to måleserier, en hvor sterlingenheden kører konstant, og en hvor den slukkes og tændes i kortere perioder. De to dataserier behandles i følgende afsnit.

10.3 Databehandling

De opsamlede måledata fra forsøgsstanden analyseres og nyttevirkningerne estimeres. For dataserien med kontinuert testkørsel udregnes nyttevirkninger, mens ved dataserien for periodisk testkørsel undersøges sterlingenhedens startomkostninger.

10.3.1 Undersøgelse ved kontinuert testkørsel

Ved kontinuert testkørsel kører sterlingenheden konstant i hele testperioden. De målte temperaturer og tryk er ligeledes konstante, hvilket betyder, at sterlingenhedens nyttevirkninger kan estimeres direkte ud fra forbruget og produktionen.

Den forbrændte mængde gas i forsøgsperioden er i bilag B.1 omregnet til en energimængde på $Q_i = 11.0 \text{ kWh}$, hvilket angiver den totale mængde indfyret energi.

Den samlede elproduktion ved den kontinuerte testkørsel er målt til 0.85 kWh . Sterlingenhedens elvirkningsgrad kan hermed umiddelbart beregnes til

$$\eta_e = \frac{0.85 \text{ kWh}}{11.0 \text{ kWh}} = \underline{0.077} \quad (10.1)$$

Varmevirkningsgraden kan ud fra den producerede varme, der i bilag B.2 er beregnet til $Q = 7.72 \text{ kWh}$, direkte findes som

$$\eta_v = \frac{7.72 \text{ kWh}}{11.0 \text{ kWh}} = \underline{0.702} \quad (10.2)$$

Den totale virkningsgrad for sterlingenheden er jf. den producerede varme og el

$$\eta_{tot} = \frac{0.85 \text{ kWh} + 7.72 \text{ kWh}}{11.0 \text{ kWh}} = \underline{0.779} \quad (10.3)$$

Den opnåede totale virkningsgrad for kontinuert kørsel er væsentlig mindre end den nyttevirkning på ca. 90% for traditionelle kedler, [30]. Retfærdigvis skal nævnes, at for sterlingtypen øges effektiviteten ved lavere temperatur i returløbet, [32].

Den samlede testtid på $4950\text{ s} \sim 1.375\text{ h}$ giver en empirisk værdi for hhv. forbrug og ydelse ved kontinuert kørsel på

$$P_i = \frac{11.0\text{ kWh}}{1.375\text{ h}} = \underline{8.00\text{ kW}} \quad (10.4)$$

$$P_e = \frac{0.85\text{ kWh}}{1.375\text{ h}} = \underline{0.62\text{ kW}} \quad (10.5)$$

$$P_v = \frac{7.72\text{ kWh}}{1.375\text{ h}} = \underline{5.61\text{ kW}} \quad (10.6)$$

hvor P_i er den indfyrede effekt, mens P_e og P_v er hhv. den producerede el- og varmeeffekt. Ved sammenligning med de opgivne værdier i afsnit 10.1 er elproduktionen en anelse mindre, hvilket kan skyldes, at det er nettoydelsen, der beregnes på. Varmeproduktionen er derimod en smule større end de angivne 5 kW .

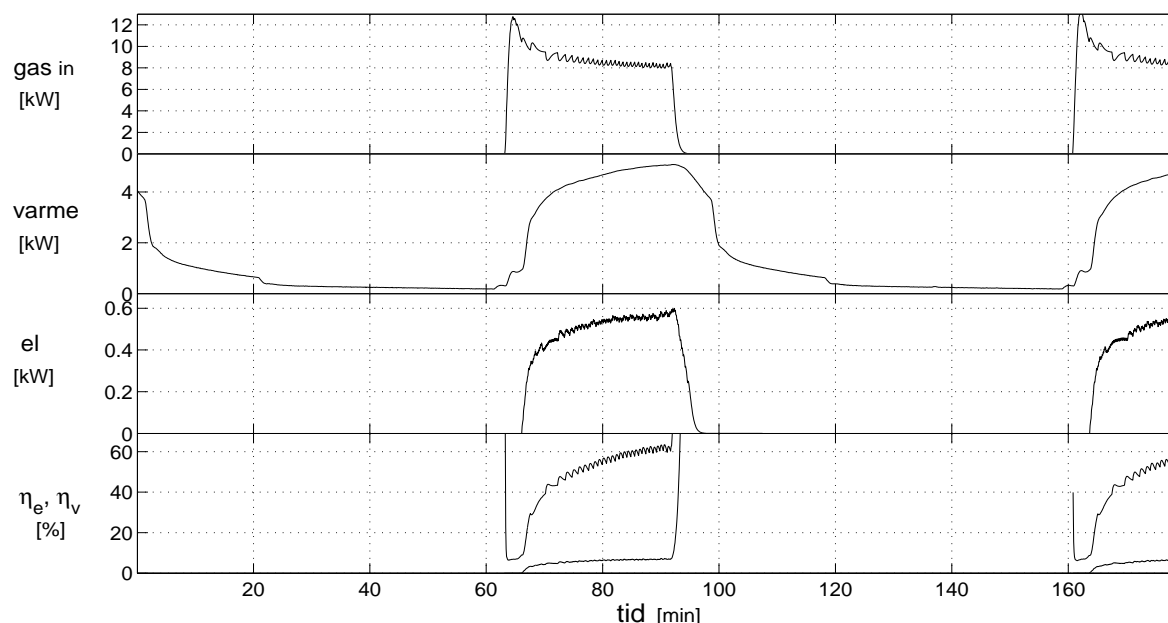
10.3.2 Undersøgelse ved periodisk testkørsel

For den periodiske testkørsel tændes og slukkes sterlingenheden en kort periode, mens der laves dataopsamling både før, under og efter perioden. Dette giver mulighed for en nærmere undersøgelse af opstartsfasen herunder evt. ændring af karakteristika.

De opsamlede data ved en periodisk testkørsel er plottet i figur 10.2. Gasforbruget og elproduktionen er målt kumulativt og differentieres for at give effekten som funktion af tiden. Forinden er data blevet eksponentiel udjævnet, jf. afsnit 7.1.2, herved begrænses fejlen, når de afrundede kumulative målinger differentieres.

Varmeproduktionen er i figur 10.2 estimeret på primærkredsen. Dette gøres, da den afgivne varme fra sterlingenheden registreres med nogen forsinkelse i sekundærkredsen pga. den indirekte forbindelse gennem varmeveksleren. Forsinkelsen har mindre betydning, når sterlingenheden kører kontinuert som i forrige afsnit. Forsinkelse har omvendt stor betydning, når sterlingenhedens aktuelle ydelse skal undersøges, hvilket især er ved en opstartsfase. For den periodiske kørsel ønskes derfor anvendt den afsatte varme i primærkredsen, idet den har meget kortere responstid. Flowet i primærkredsen er ikke målt, men estimeres i bilag B.3. Estimatet har dannet grundlag for udregningen af sterlingenhedens varmeeffekt ved periodisk testkørsel.

Nyttevirkning η_e og η_v for hhv. el og varme er i figur 10.2 nederst ligeledes plottet som funktion af tiden. De udregnes som produktionen divideret med gasforbruget. Derfor vil nyttevirkningerne i nogle perioder, hvor der



Figur 10.2: Figuren viser data for sterlingenheden ved periodisk testkørsel. Den indfyrede gaseffekt samt den producerede varme- og eleffekt er plottet som funktion af tiden. Herudfra er nyttevirkningerne for el og varme afbildet. De har dog kun en mening ved forbrug af gas, idet der ellers divideres med nul.

ingen gasforbrug er, tilsyneladende være over 100%. Denne fejl skyldes, at nævneren i udtrykket her er nul, mens ved forbrug af gas, dvs. reel nævner, har resultatet en fysisk berettigelse.

På figuren ses, at nyttevirkningen ved en opstart er langt under, hvad der måltes i den kontinuerte driftssituation, (10.1) og (10.2). Det tager cirka en halv time inden nyttevirkningen er optimal. Derfor må ved hver opstart af sterlingenheden påregnes en startomkostning.

Ovennævnte startomkostning forsøges estimeret i bilag B.4 ved anvendelse af de to dataserier, kontinuert og periodisk kørsel. Estimatet for startomkostningen er $I_{start} = 0.67 \text{ kr}$. Prisen på omkostningen ved en opstart inkluderer udelukkende tabet i effekten. Andre faktorer, som ekstra slitage og større miljøbelastning, er ikke medtaget i ovenstående estimat.

10.3.3 Estimerede parameterværdier for sterlingenhed

På baggrund af forsøgsdata, der blev beskrevet og behandlet i forrige afsnit, er estimeret en række parameterværdier, som overordnet beskriver

sterlingenhedens funktion. Parameterværdierne er samlet i tabel 10.1. Parameterværdierne kan derved benyttes til at simulere sterlingenheden.

Tabel 10.1: Parameterværdier for sterlingenhed

Parameter	Værdi	Beskrivelse
η_P	0.077	elvirkningsgrad
η_H	0.702	varmevirkningsgrad
η_T	0.779	totalvirkningsgrad
P_i	8.00 kW	indfyringseffekt
P_e	0.62 kW	eleffekt
P_v	5.61 kW	varmeeffekt
I_{start}	0.67 kr.	startomkostning

Kapitel 11

Varmesystem

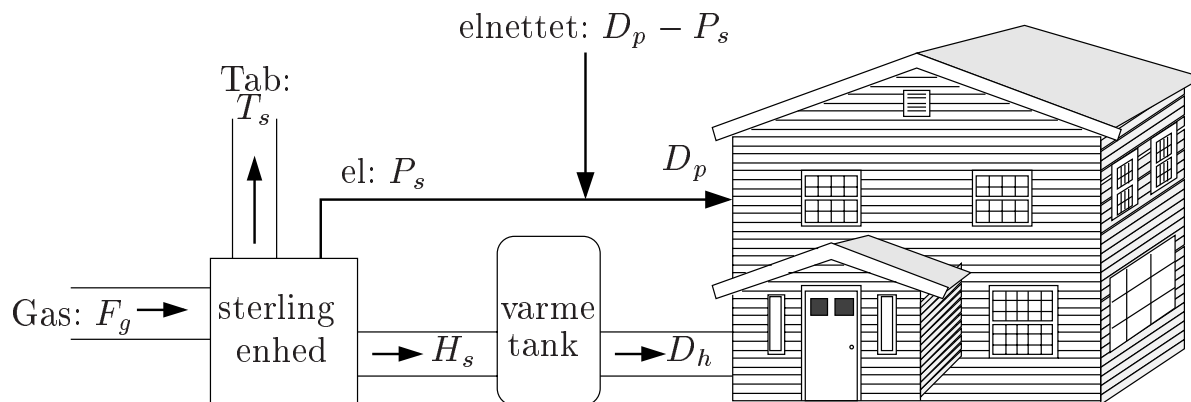
Med henblik på at udvikle en optimal styringsstrategi for et MKV-anlæg i et reelt varmesystem, opstilles en simpel model for et varmesystem med en sterlingenhed. Det vil hermed blive muligt at undersøge de forskellige fordele og ulemper ved optimering på faktorer og styringsstrategier for et varmesystem.

11.1 Model af varmesystem med MKV-anlæg

Her opstilles en model af et system, hvor sterlingenheden og en varmetank sættes til at dække varmebehovet for en bolig. Elproduktionen opfattes udelukkende som et supplement til elforbruget, hvoraf den resterende del skal købes over elnettet.

Figur 11.1 viser en skitse af, hvordan sterlingenheden er placeret i et varmesystem. Mellem sterlingenheden og huset er indsat en varmetank el. akkumulatortank, der skal fungere som en varmebuffer for sterlingenheden. De enkelte variable er defineret ved

sterlingenhed		bolig	
F_s	Gasforbrug	D_p	Elforbrug
T_s	Energitab	D_h	Varmeforbrug
P_s	Elproduktion		
H_s	Varmeproduktion		



Figur 11.1: Skitse af model for varmeanlæg med sterlingenhed.

for sterlingenheden gælder heraf $F_s = T_s + P_s + H_s$. Varmeforbruget D_h dækker tillige over forbruget af varmt brugsvand.

Ved en undersøgelse af dette simplificerede system, lægges i første omgang vægt på, hvordan sterlingenheden forsyner boligens energibehov optimalt ud fra en økonomisk betragtning. Gennem den opnåede løsningen af sterlingenhedens optimale drift vil der kunne udledes nogle relationer, som kan danne det første grundlag for en egentlig optimal driftstrategi.

Ligeledes undersøges prisen for anskaffelse af den tilsvarende energimængde med en traditionel gaskedel og over elnettet. Herudfra kan foretages en sammenligning. Idet sterlingenhedens el- og varme-nyttevirkning er relativ lille, vil det ligeledes give mulighed for en vurdering over hvilke nyttevirkninger, der er nødvendig for, at et MKV-anlæg er økonomisk profitabel.

11.2 Model formulering

I dette afsnit formuleres en model for ovennævnte varmesystem. Det er hensigten at opstille en model, der er formuleret således, at en optimal driftsløsning kan findes ved dynamisk programmering. Problemet analyseres ved dels at beskrive sterlingenhedens kapacitet og dels at angive en empirisk efterspørgsel. Kapacitet og efterspørgsel knyttes sammen i en kriteriefunktion, hvor en optimal styringsstrategi svarer til, at kriteriefunktionen (el. omkostningerne) blive minimeret. I kriteriefunktionen bliver ligeledes lagt forskellig variable faktorer, f.eks. startomkostning og varmetank.

11.2.1 Modellering af kapacitet

Lad f_g betegne den mængde af naturgas pr. tidsenhed, der bruges af sterlingenheden, når den er i drift (stationær tilstand). Der antages, at forbruget pr. tidsenhed er nul, når enheden ikke bruges, således at forbruget kan antage værdierne $F_g \in \{0, f_g\}$.

Sterlingenheden producerer både varme og el. Det antages jf. kap. 10, at udbyttet kan opspaltes i følgende bidrag pr. enhed naturgas (eller tidsenhed)

$$\text{El: } P_s = \eta_P F_g \quad (11.1)$$

$$\text{Varme: } H_s = \eta_H F_g \quad (11.2)$$

$$\text{Tab: } T_s = \eta_T F_g \quad (11.3)$$

hvor η angiver vægte, og $\eta_P + \eta_H + \eta_T = 1$.

11.2.2 Modellering af akkumulatortank

Produceret varme kan lagres i en varmetank. Varmetankens kapacitet A_t til tidspunkt t kan beregnes ved udtrykket

$$A_t = (1 - \eta_\alpha)A_{t-\Delta t} + \Delta t(H_{s,t} - (D_{H,t} - \eta_\alpha A_{t-1}) - D_{V,t}) \quad (11.4)$$

hvor $\eta_\alpha \Delta t$ angiver varmetabet i periode Δt . Da det antages, at varmetanken er placeret inde i boligen, vil akkumulatortankens varmetab bidrage til boligens varmebehov. Varmetabet kan herved subtraheres boligens varmeefterspørgsel, D_H . Sterlingenhedens varmeproduktion er $H_{s,t}$, desuden angiver D_V energiefterspørgslen til varmt brugsvand. Adskillelsen af varmebehovet i hhv. varme og vand gøres både af hensyn til ovennævnte varmetabsbidrag og for en bedre sammenligning med de empiriske efterspørgselsdata. Såfremt varmebehovet er mindre end akkumulatortankens varmetab, må dette regnes som et tab, herved skal det midterste led i (11.4) erstattes med $\max(D_{H,t} - \eta_\alpha A_{t-1}, 0)$.

Den maksimale kapacitet for varmetanken betegnes A_{max} og kan beregnes ud fra tankens størrelse mv. Den nedre grænse for tankens kapacitet er nul. Heraf gælder

$$A_t \in [0 ; A_{max}] \quad (11.5)$$

Den maksimale kapacitet for en varmtvandsbeholder kan beregnes ud fra dens volumen. For en stor varmetank på 300 l kan den maksimale kapacitet udregnes som

$$A_{max} = V \cdot \Delta K \cdot \frac{4.18 \text{ kJ} \cdot \text{kWh}}{3600 \text{ kJ} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}} = 300 \text{ l} \cdot 40 \text{ K} \cdot \frac{4.18 \text{ kWh}}{3600 \text{ kg} \cdot \text{K}} = \underline{13.9 \text{ kWh}} \quad (11.6)$$

hvor vands densitet er en og temperaturforskellen til omgivelserne er sat til 40 K. Umiddelbart er 300 l en stor lagertank, men generelt gælder at for en mindre kedel (sterlingenhed) kræves en større varmetank, [32].

11.2.3 Modellering af efterspørgsel

Til bestemmelse af efterspørgsel efter varme og el, anvendes empiriske data. I alt haves måledata for 25 forskellige huse i perioden 1/2/1991 til 30/4/1993. Der foreligger observationer hvert 15 minut, hvilket betyder at data angiver energiefterspørgslen over en periode på 15 minutter. Varmeforbruget, $D_{H,t}$ er opspaltet på varme og varmt brugsvand. Desuden haves målinger af inde- og udetemperaturer. Månedlige gennemsnit for efterspørgselsdata er vist i figur 11.2. Statistiske nøgletal for efterspørgslen er givet i tabel 11.1-11.2.

Tabel 11.1: Nøgletal for månedsgennemsnit, jf. efterspørgsel pr. kvarter

variable	enhed	middel	std.afvig.	minimum	maksimum
varme	kWh	0.306	0.240	0	1.020
vand	kWh	0.080	0.035	0.014	0.250
el	kWh	0.142	0.069	0.019	0.498
ude temp.	$^{\circ}\text{C}$	8.859	5.940	-3.332	20.548
inde temp.	$^{\circ}\text{C}$	21.522	1.709	16.338	26.850

I figur 11.2 er for hvert hus er udregnet det månedlige gennemsnit. Det er ud fra de 25 huse, der samlet laves et box-plot, hvor hvert hus indgår med sit månedlige gennemsnit. Da det er forskellige huse med vidt forskellig beboere, må der på forhånd forventes en vis spredning pga. de enkelte behov og vaner. Udetemperaturen er dog en forståelig undtagelse, som det ses på figuren, er den ganske præcist bestemt. Den negative korrelation mellem varmforsbruget og udetemperaturen, se evt. tabel 11.2, er tydelig i figuren. Tillige ses en stor spredning i husenes varmebehov, når der især om vinteren er et stort behov.

Tabel 11.2: Korrelationer for empiriske data

variabel	varme	vand	el	ude temp.	inde temp.
varme	1.000				
vand	0.382	1.000			
el	0.275	0.346	1.000		
ude temp.	-0.786	-0.298	-0.335	1.000	
inde temp.	-0.285	-0.306	-0.211	0.460	1.000

Energibehovet til brugsvand er relativt stabilt hen over hele perioden. Igen findes en lille tendens til større spredning om vinteren som tilfældet med varmebehovet. I figur 11.2 ses en lille korrelation mellem ude- og indetemperaturen, hvilket er bekræftet i tabel 11.2. Tilsvarende gælder for elforbruget med lidt større værdier og spredning om vinteren.

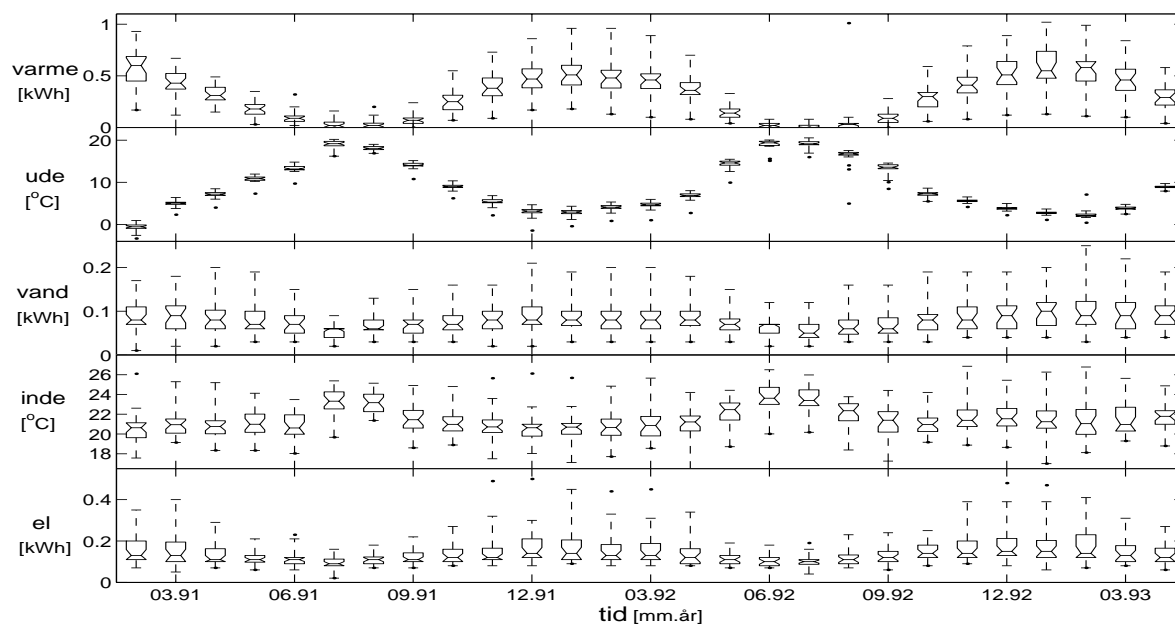
Da plottet i figur 11.2 ikke gav nogen information omkring døgnvariationer for de enkelte huse, er i figur 11.3 plottet døgnværdierne over en hel måned for et enkelt hus. For værdierne på et bestemt tidspunkt i døgnet er lavet box-plot. For hver box indgår heraf ca. 30 værdier jf. en måned. Der er lavet en box for hvert kvarter, idet værdien angiver energibehovet det pågældende kvarter.

Ud fra figur 11.3 ses, at for varmebehovet, ude- og indetemperaturen er døgnrytmen rimelig stabil, mens energien til brugsvandet er meget varieret fra dag til dag på nær nogle få tidspunkter af døgnet. Tilsvarende haves for elforbruget, hvor der kun er en stabil periode om natten samt tydelige stigninger omkring kl. 6 og kl. 18. Heraf ses, at især forbruget af vand og el er meget afhængig af de individuelle beboer i huset.

11.2.4 Kriteriefunktion

De enkelte dele i varmesystemet samles i en kriteriefunktion. Den indholder led, der er forbundet med systemets driftsomkostninger. Det er heraf kriteriefunktionen, der skal minimeres iht. optimal kørsel. De enkelte led er defineret som

1. I_{start} er omkostningen forbundet med opstart af sterlingenheden.
2. $I_t \cdot p_g$ er omkostninger forbundet med forbrug af naturgas. Her betegner I_t indikatorfunktionen til tiden t . Den kan antage værdierne



Figur 11.2: Figuren viser et box-plot af månedlig gennemsnit for efterspørgsel af alle 25 huse, hvor energien er givet som $kWh/15 min$. Boksen markerer hhv. nedre og øvre kvartil. I figuren antagede outliers er markeret med (\cdot).

$\{0, 1\}$ svarende til, at sterlingenheden er off eller on. p_g er prisen pr. enhed naturgas.

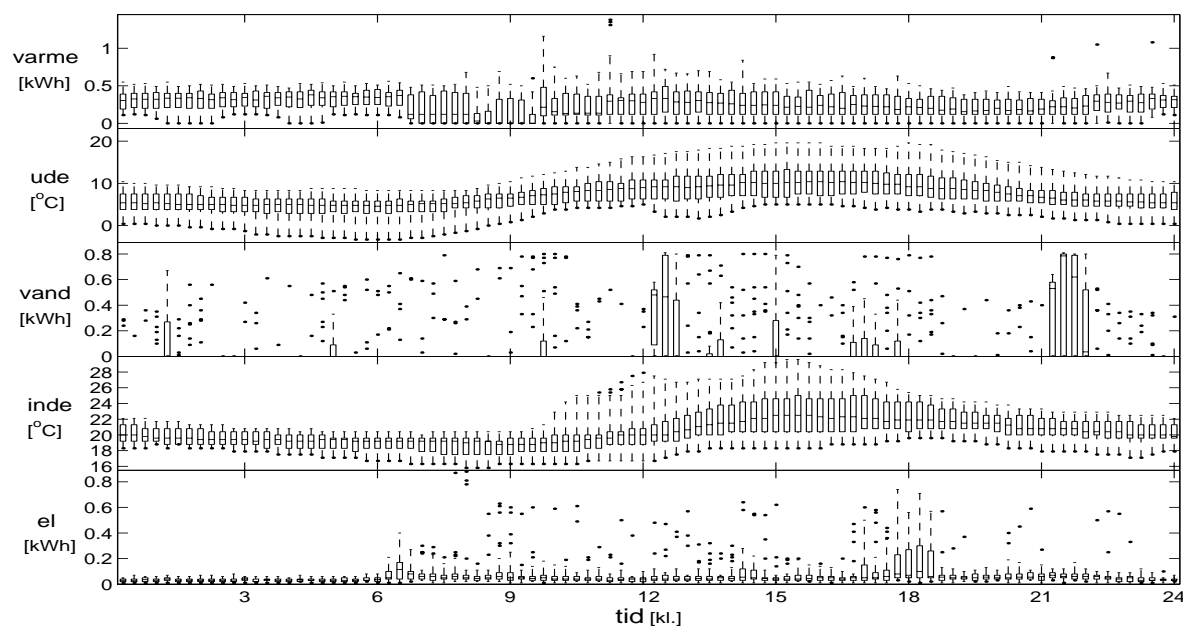
3. $p_e(D_{P,t} - I_t \cdot P_{s,t})$ er omkostningen forbundet med forbrug af el. Her betegner $D_{P,t}$ efterspørgsel efter el til tiden t . $P_{s,t}$ er produktionen fra sterlingenheden og p_e er prisen pr. enhed el. Såfremt overskydende produktion af el ikke kan bruges på efterspørgslen, bliver omkostningerne forbundet med elforbrug $p_e \cdot \max\{D_{P,t} - I_t \cdot P_{s,t}, 0\}$

Kriteriefunktionen kan herefter skrives som en sum af de enkelte bidrag

$$\{I\}_t = \min \sum_{t=1}^N (I_{start} + I_t \cdot p_g + p_e \cdot \max\{D_{P,t} - I_t \cdot P_{s,t}, 0\}) \quad (11.7)$$

hvor minimum af kriteriefunktionen (11.7) er den optimale driftsløsning.

I afsnit 11.2.2 blev opstillet en model for lagertanken. Medtages disse betingelser til kriteriefunktionen, kan en samlet model til driften af et MKV-



Figur 11.3: Figuren viser box-plot af data for efterspørgsel som funktion af tiden på dagen. Data er for et tilfældigt hus i april. Energien er igen udregnet som $kWh/15 \text{ min}$.

anlæg, der dækker en boligs varmebehov, skrives som

$$A_t \geq 0 \quad (11.8)$$

$$A_t \leq A_{max} \quad (11.9)$$

$$A_t = (1 - \eta_\alpha) A_{t-1} + I_t \cdot \eta_H \cdot f_g - \max\{D_{H,t} - \eta_\alpha A_{t-1}, 0\} - D_{V,t} \quad (11.10)$$

$$\{I\}_t = \min \sum_{t=1}^N (I_{start} + I_t \cdot p_g + p_e \cdot \max\{D_{P,t} - I_t \cdot p_e \cdot \eta_P \cdot f_g, 0\}) \quad (11.11)$$

hvor produktion af el nu skrives, $P_{s,t} = I_t \cdot f_g \cdot \eta_P$ og produktionen af varme skrives, $H_{s,t} = I_t \cdot f_g \cdot \eta_H$, jf. (11.1-11.2). Endelig angiver N antallet af målepunkter, der optimeres på.

Kapitel 12

Driftsresultater

Kernen i optimeringen af driften ligger i forholdet mellem at kunne gemme den producerede varme i akkumulatortanken samt ikke at kunne lagre elproduktionen. Dette betyder, at den producerede el skal forbruges med det samme medmindre, den skal registreres som tab. Tilsvarende er gældende for situationer, hvor hele varmetabet i tanken ikke kan bruges til opvarmning.

Den samlede elforbrug er langt større end mængden af el produceret af sterlingenheden, samtidig kan det pga. den lave elvirkningsgrad aldrig betale sig at producere udelukkende for elektriciteten. Tabet for ikke-anvendt el kan heraf kun mindskes på to måder. Enten flyttes elforbruget til produktionstidspunktet, eller produktionstidspunktet flyttes til efterspørgselstidspunktet.

12.1 Anvendte efterspørgselsdata

De anvendte efterspørgselsdata er valgt for et enkelt hus i fire måneder, hvor der er benyttet en måned for hver årstid. Alle de anvendte efterspørgselsdata er plottet i bilag C, figur C.1-C.4, med tilsvarende box-plot som figur 11.3. De totale energimængder for data er opgivet i tabel 12.1.

Til sammenligning udregnes prisen for anskaffelse af energimængden med en traditionel kedel for vand og varme, og elforbrug over elnettet. En tra-

Tabel 12.1: Energimængde for data i kWh

Måned	varme	vand	el	total
Januar	1075.7	256.7	665.4	1997.8
April	442.0	290.0	426.2	1158.1
Juli	60.9	152.0	228.0	440.9
Oktober	427.1	215.3	529.3	1171.8

ditionel kedel har en varmevirkningsgrad på ca. 90%, [30]. Prisen for el er angivet i tabel 12.3 og for januar 2001 er gasprisen 7.251 kr./m^3 , [30]. Den anvendte brændværdi for gas er 39.6 MJ/m^3 . Resultatet ses i tabel 12.2

Tabel 12.2: Traditionel anskaffelsespris i [kr.]

Måned	varme	vand	el	total
Januar	787.9	188.0	879.9	1855.8
April	323.7	212.4	563.6	1099.7
Juli	44.6	111.3	301.5	457.4
Oktober	321.8	157.7	699.9	1170.4

Den høje varmenytttevirksomhed for de traditionelle kedler medfører, at den samlede pris for energimængden stadig er ca. 10% lavere end for sterlingenheden, jf. tabel 12.4. Dette er til trods for den relative dyre rene elpris. Der er ligeledes ikke regnet med nogen startomkostning for kedlen.

12.2 Varmestyret driftsstrategi

Først forsøges med en driftsstrategi, der udelukkende afhænger af varmebehovet. Sterlingenheden sættes til kun at køre efter varmemængden i lagertanken. Der specificeres en nedre og øvre grænse for varme i tanken. Når energimængden i akkumulatortanken kommer under den nedre grænse startes sterlingenheden, hvorefter den stoppes igen, når energimængden kommer over den øvre grænse, se figur 12.1.

Varmesystemet simuleres med systemligningerne (11.10-11.11), hvor værdierne, der er anvendt for modellens parametre, er givet i tabel 10.1 og tabel 12.3.

Tabel 12.3: Værdier for modellens parametre

Parameter	Værdi	Enhed
A_{nedre}	2	kWh
$A_{øvre}$	10	kWh
f_g	2	kWh/15 min
p_g	1.301	kr./15 min
p_e	1.32	kr./kWh
η_α	0.2	% pr. 15 min

Resultatet for simuleringer over en måned er opgivet i tabel 12.4. I figur 12.2 er plottet box-plot af varmemængden i akkumulatortanken på bestemte døgntidspunkter for april måned. Nederst i figuren er andelen af de pågældende tidspunkter, hvor sterlingenheden er tændt afbildet for samme tider som lagerværdierne.

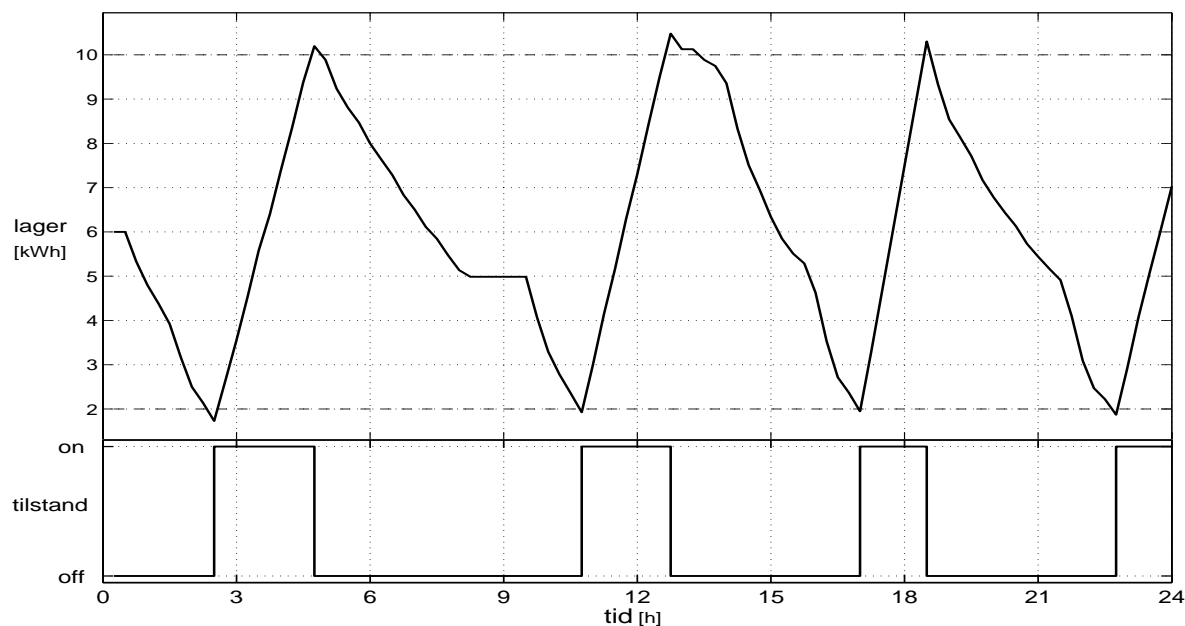
Tabel 12.4: Resultat for varmestyret driftsstrategi

Måned	cost [kr.]	ant.start	varmetab [kr.]	elstab [kr.]
Januar	2064.0	98	4.5	75.0
April	1232.0	67	2.8	46.6
Juli	527.2	25	29.4	20.4
Oktober	1282.3	59	3.0	41.5

I tabel 12.4 er udover den samlede omkostning opgivet det antal starter sterlingenheden laver i den pågældende måned, som hver medføre startomkostningen I_{start} . Derudover er opgivet varmetabet (i kr.), hvilket er den mængde energi akkumulatortanken afgiver gennem dens varmetab, som er større end boligens varmeefterspørgsel det pågældende tidspunkt. Tilsvarende for eltabet i tabellen, som angiver den mængde el sterlingenheden til tidspunkter producerer mere end elefterspørgslen på samme tidspunkt.

I tabellen ses heraf, at om vinteren (januar) med stort varmebehov er eltabet stort, idet sterlingenheden generelt skal køre meget og herved giver større eltab, pga. den varmestyrede driftsstrategi ikke tager hensyn til elefterspørgslen. Modsat om sommeren (juli) med lille varmebehov fyldes tanken helt iht. driftsstrategien, hvilket efterfølgende giver stor varmetab, da huset ikke kan bruge meget af varmen, som lagertanken afgiver.

Figur 12.2 viser simuleringen af varmestyret driftsstrategi til efterspørgslen



Figur 12.1: Plot af varmestyret driftsstrategi de første 24 timer i januar. Øverst ses energimængden i lagertanken, mens nederst er afbildet, hvordan driften er styret herefter.

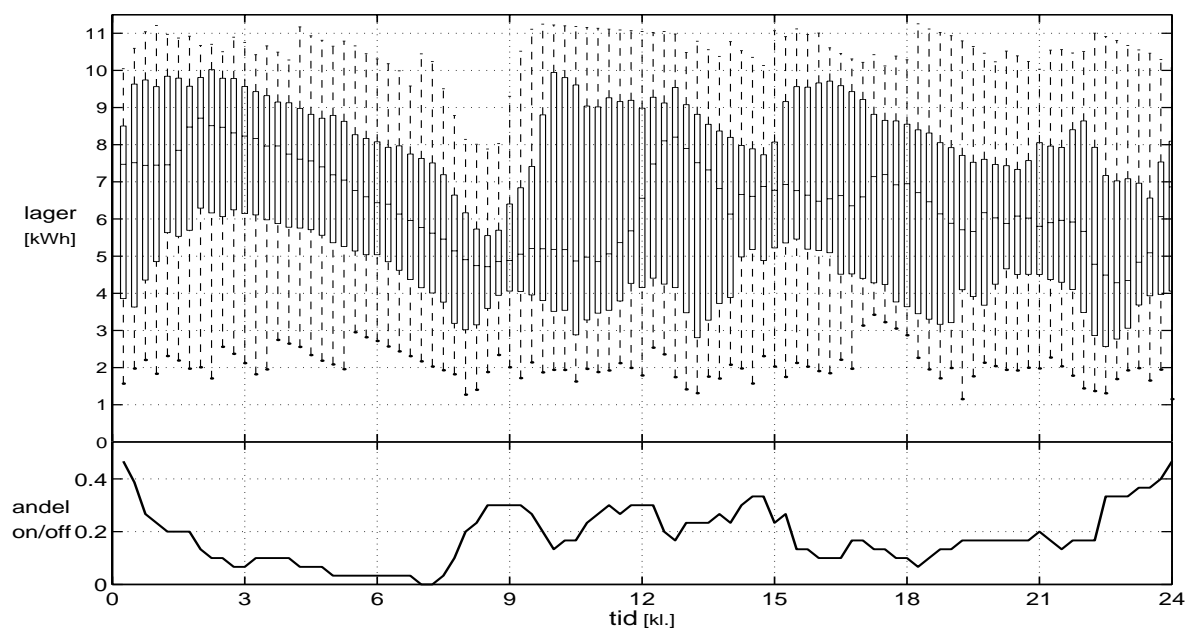
afbildet i figur 12.4. Det ses på figuren, at sterlingenheden har en tendens til at tænde omkring kl. 9 og kl. 24, hvilket passer til at være umiddelbart efter et stort vandforbrug (energimæssig). Dette er i overensstemmelse med driftsstrategien, da sterlingenheden er sat til at tænde efter lagertanken er tappet under 2 kWh .

Samme mønstre er gældende for simuleringerne i de øvrige måneder, men generelt for alle måneder er indholdet af lagertanken og heraf on/off-andelen meget spredt over hele døgnet. Kun de ovennævnte energimønstre til brugsvand bidrager til nogen større dynamik i middelværdien af varmemængden i lagertanken.

Plottene af resultaterne for alle fire måneder med det opstillede varmesystem og en varmestyret driftsstrategi kan ses i bilag D, figur D.1-D.4.

12.3 Optimal driftsløsning

Modellen opstillet i forrige kapitel forsøges i dette kapitel optimeret, hvilket betyder en minimering af kriteriefunktionen (11.11). Optimeringsmetoden,



Figur 12.2: Plot af varmestyrret driftsstrategi af april. Øverst er lagertankens varmeindhold afbildet med box-plot som funktion af tidspunktet på døgnet, mens nederste plot viser andelen af tændte perioder det pågældene tidspunkt.

dynamisk programmering, gennemgås kort, hvorefter resultater fra de optimale løsninger præsenteres. Ud fra nogle gennemgående karakteristika fra disse løsninger forsøges anvist enkelte præliminære relationer til en egentlig optimal driftsstrategi.

12.3.1 Dynamisk programmering

Til optimering af driften anvendes forlæns dynamisk programmering. Metoden gennemgås kun kort, i øvrigt henvises til [33]. Varmemængden i akkumulatortanken diskretiseres til 10000 punkter. For hver af de 10000 mulige varmemængder er opstillet en funktion i lighed med kriteriefunktionen (11.11), der angiver omkostningen for en hhv. tændt og slukket værdi af sterlingenheden samt hvilken lagerværdi on/off-tilstanden medfører. Ved den medførte lagerværdi (diskretværdier) i det næste tidskridt gemmes den mindst opnåede omkostning, on/off-værdien og den forrige lagerværdi (der gav anledning til min. omkostning). Omkostningerne adderes gennem hele tidsforløbet, hvorefter den samlede omkostning kan findes på det sidste tidsskridt. Den mindste værdi på det sidste tidsskridt angiver den optimale

løsning, hvor on/off-værdierne findes ved at gå tilbage langs den optimale løsning.

Under hele forløbet tages ligeledes hensyn til om den pågældende tændt og slukket operation medføre en acceptabel lagerværdi det næste tidsskridt jf. (11.8-11.9).

12.3.2 Optimeringsresultat

Ved hjælp af dynamisk programmering er den optimale løsning fundet i forhold til efterspørgslen. Dette er en deterministiske løsning, idet hele efterspørgslen er kendt på forhånd. Den optimale deterministiske løsning sammenlignes med resultatet for den varmestyrede driftsstrategi for derigennem at lokalisere strategiens ulemper.

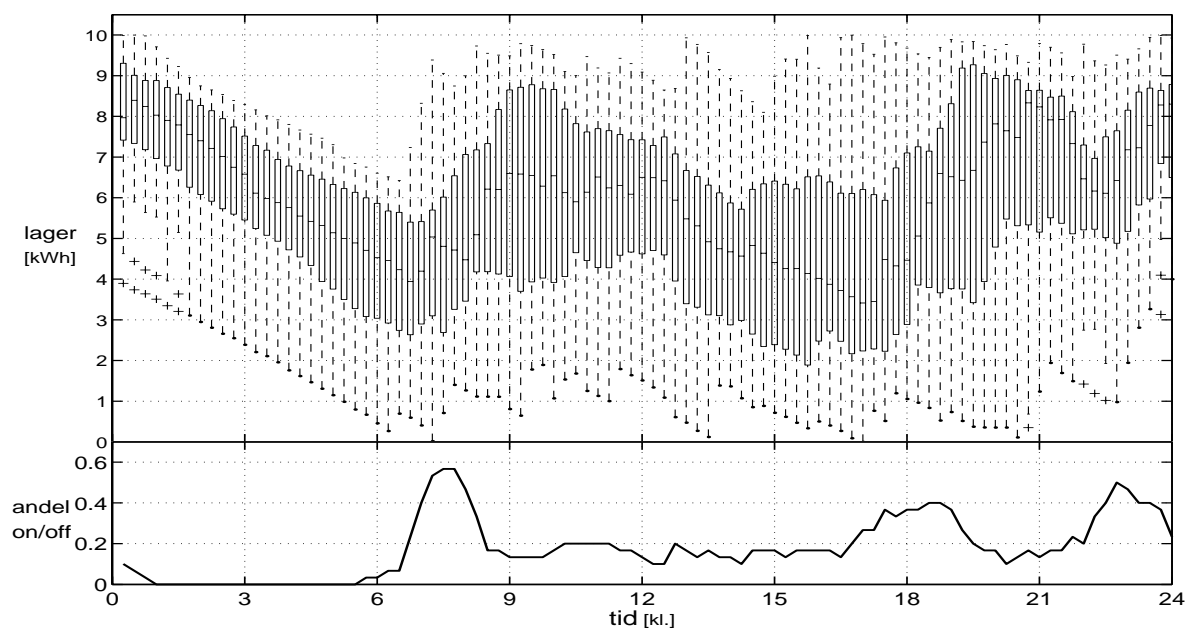
Modellen er som før (11.8-11.11), med parameterverdier i tabel 10.1 og tabel 12.3, dog uden $A_{\text{øvre}}$ og A_{nedre} , men med $A_{\text{max}} = 10 \text{ kWh}$ i (11.9). Resultater for den optimale løsning opnået ved dynamisk programmering er opgivet i tabel 12.5 samt afbildet i bilag E, figur E.1-E.4.

Tabel 12.5: Resultat for optimal løsning

Måned	cost [kr.]	ant.start	varmetab [kr.]	elstab [kr.]
Januar	2041.5	132	2.0	37.4
April	1202.1	82	2.5	17.5
Juli	500.4	33	13.5	6.9
Oktober	1259.6	78	3.3	10.5

Sammenlignes den optimale løsning i tabel 12.5 med resultatet af varmestyret driftsstrategi i tabel 12.4 er der opnået relativ store besparelser. De samlede omkostninger er reduceret med ca. 20 – 30 kr. Dette er til trods for, at antallet af starter i hver måned er steget med cirka en tredjedel. Stigningen i startomkostningerne bliver rigelig kompenseret af både lavere varme- og elstab. Elstab er reduceret mellem 50–75%, hvilket udelukkende skyldes, at sterlingenheden kører på gunstigere tidspunkter end ved den varmestyrede driftsstrategi.

Resterende elstab kan kun fjernes ved at flytte forbruget. Som varmesystemet er opbygget, er det tilsvarende svært at undgå varmetabet om sommeren, da boligens varmebehov vil være lille.



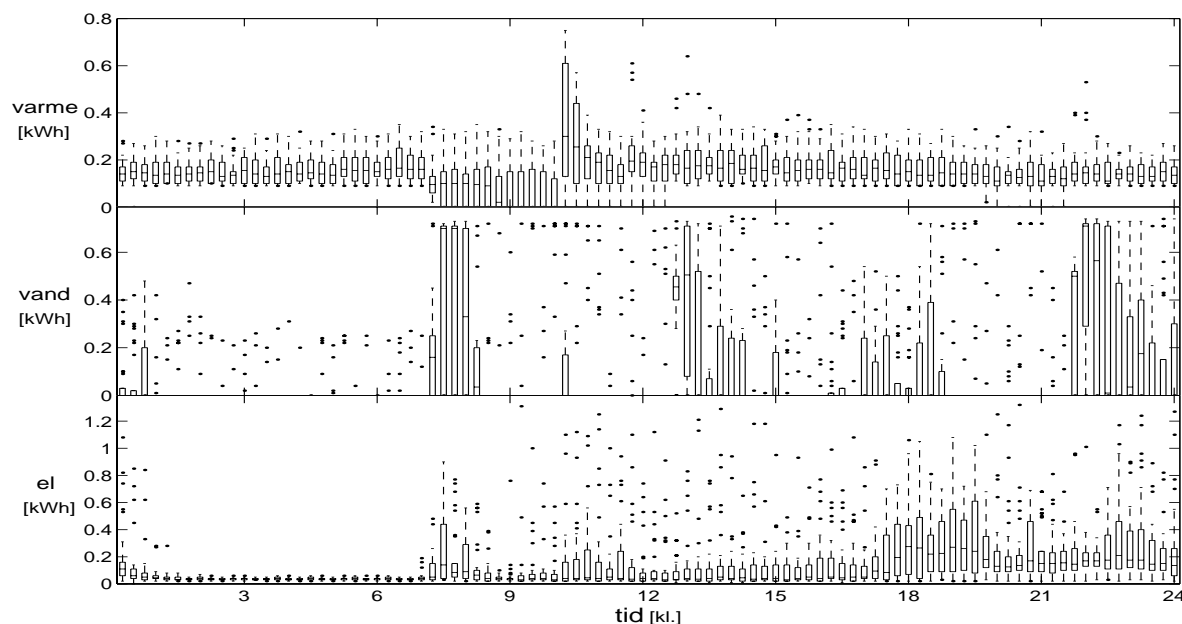
Figur 12.3: Plot af optimal driftsløsning for april. Øverst er lagertankens varmeindhold afbildet som funktion af tidspunktet på døgnet, mens nederste plot viser andelen af tændte perioder det pågældende tidspunkt.

I figur 12.3 er den optimale løsning for april afbildet. Der ses tydelig forskel fra den tilsvarende figur for løsning med varmestyret driftsstrategi, figur 12.2. Ved sammenligning af den optimale løsning med efterspørgslen, bl.a. afbildet i figur 12.4, har on/off-andelen stor korrelation med efterspørgslen, hvilket i sig selv reducerer eltabet. Af samme årsag kører sterlingenheden minimal om natten i perioden kl. 0–6, hvor lagertanken forinden er fyldt op til at dække varmebehovet i perioden.

Det er med denne optimale løsning kun mulig at udlede generelle antagelser, idet for enkelte dage er antagelsen måske ingen fordel, da efterspørgslen viser stor spredning både mellem måneder og år. Samtidig er elbehovet meget individuel mellem beboere, hvilket gør det ekstra vanskelig at angive konkrete karakteristika for typiske kørselsperioder.

Analyseres generelt den optimale løsning til alle månederne, haves i store træk samme tendenser. For tidspunkter med stort elforbrug er en større andel tændte perioder med sterlingenheden. Om natten med lavt strømforbrug undgås kørsel, og varmebehovet tappes fra lagertanken. Tilsvarende ved kl. 6 kan det som regel være profitabel at køre med sterlingenheden.

En undtagelse er dog om sommeren, hvor den største andel tændte pe-



Figur 12.4: Figuren viser efterspørgslen for april. Energi-efterspørgslen hvert kvarter for brugsvand, varme og el er plottet som box-plot ved det tilhørende tidspunkt af døgnet.

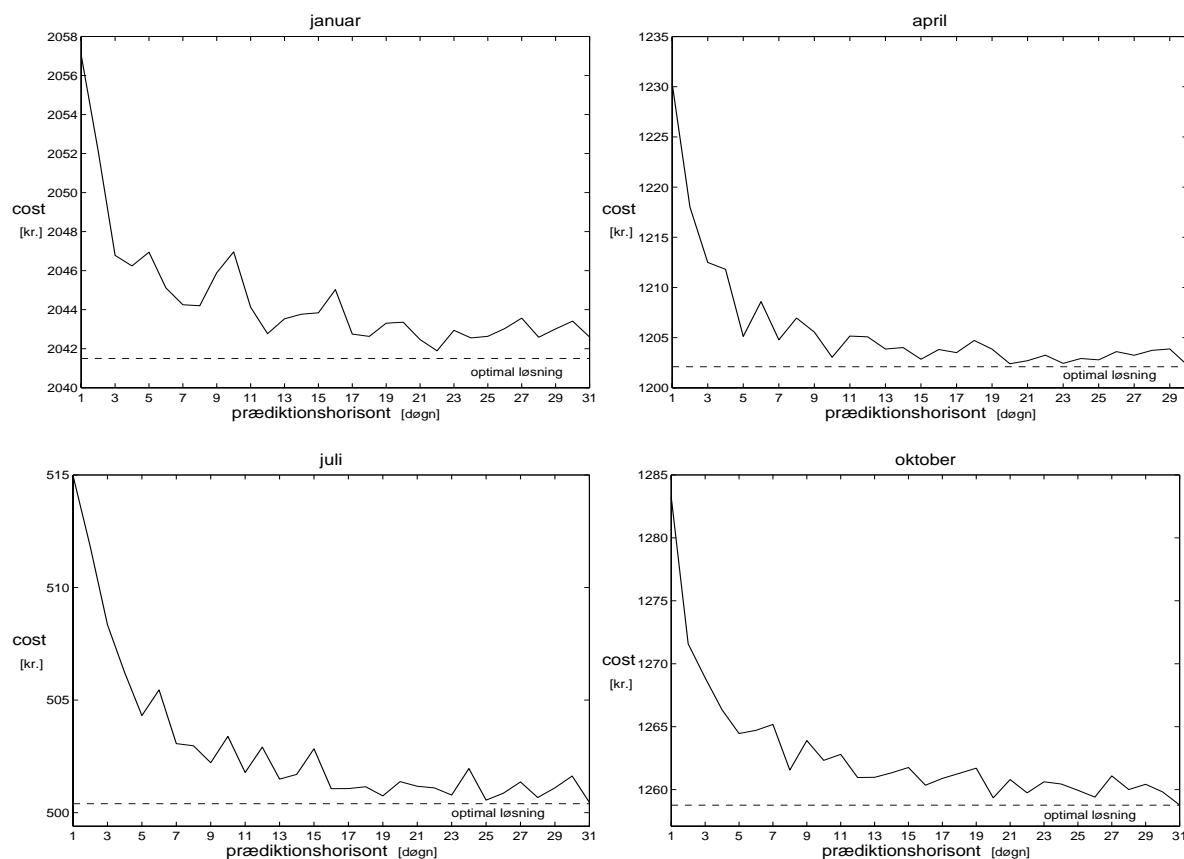
rioder udelukkende er omkring tidspunktet kl. 18. Netop omkring samme tidspunkt er stort elforbrug, det eneste og største i døgnet. Den producerede varme dækker bedst muligt varmebehovet til brugsvand, hvor den dog må tændes nogle ekstra gange for at sikre forsyningen i løbet af dagen.

12.4 Forslag til optimal styringsstrategi

Den optimale løsning blev fundet ud fra kendskab til hele månedens efterspørgselsdata. Antages nu, at efterspørgslen kun kan prædikeret et antal døgn frem. I dette tidsrum kan den optimale løsning til den prædikterede efterspørgsel findes ved dynamisk programmering. MKV-anlægget kan herefter indenfor prædiktionshorisonten køre efter den optimale løsning. Herefter laves en ny prædiktionshorisont, hvortil der beregnes en optimal løsning. Der skal således løbende beregnes en optimal løsning for den pågældende efterspørgslesprædiktionshorisont.

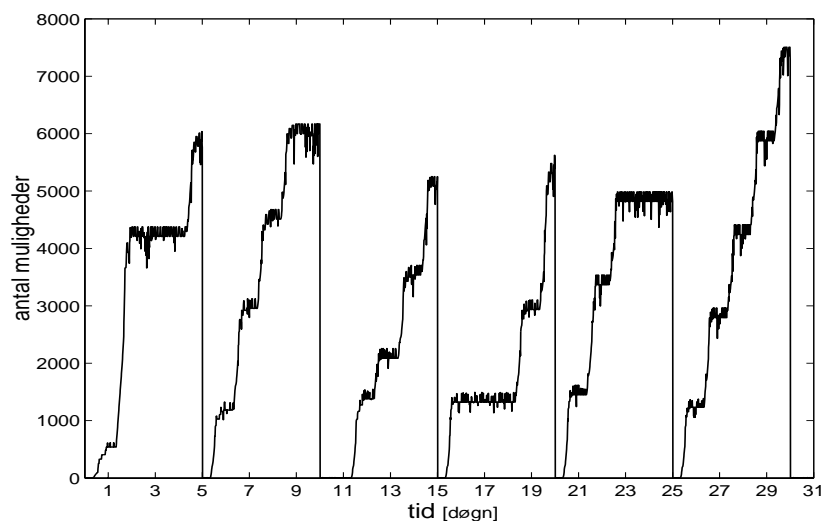
Metoden er forsøgt med samme efterspørgselsdata som forrige afsnit. Disse data indgår nu som både prædiktionshorisont og udfald. Dvs. antages en prædiktionshorisont på 5 døgn, vil de næste 5 dages efterspørgselsdata anvendes

til at finde en optimal løsning på. Derefter bliver efterspørgselsudfaldet som prædikeret, og sterlingenheden kan køre efter den beregnede løsning. Yderligere 5 dage prædikteres, her ækvivalent med efterspørgselsdata, den optimale løsning beregnes, sterlingenheden kører efter den ny løsning. Disse 5 døgns-intervaller fortsætter på samme måde hele måneden igennem.



Figur 12.5: Omkostningen (cost) er afbildet som funktion af det antal døgn, der prædikteres/optimeres over. Den optimale løsning angiver tilfældet, hvor hele efterspørgslen er kendt, se evt. afsnit 12.3.2.

I figur 12.5 er for de 4 måneder plottet den totale omkostning (cost) som funktion af den antagede prædiktionshorisont, hvilket svarer til perioden den optimale løsning beregnes på. Når MKV-anlægget har kørt den beregnede periode, startes en ny periode netop der, hvor den forrige sluttede. På figuren ses tydelig, at optimering på en 3–5 dages prædiktionshorisont giver langt den største reduktion af omkostningerne, mens en længere prædiktionshorisont kun bidrager relativt lidt til minimering af omkostningerne. Endelig ses, at en prædiktionshorisont på hele måneden svarer til det deterministiske tilfælde for optimal løsning som tilfældet i forrige afsnit.



Figur 12.6: Figuren viser antallet af mulige lagerværdier (diskrete), ved en prædiktionshorisont på 5 dage. Efterspørgselsdata er for oktober.

Med en valgt prædiktionshorisont på 5 dage er ovennævnte forslag til optimal driftsstrategi afprøvet for oktober måned. For at give en indikation af beregningsomfanget er i figur 12.6 plottet antallet af mulige lagerværdier (diskretiseret) som funktion af tiden. Efter hvert femte døgn vælges således den optimale (billigste) løsning ud af de ca. 6000 muligheder, jf. dynamisk programmering. Det skal dog her pointeres, at de 10000 diskretiseringspunkter udelukkende er valgt efter forholdet mellem afrundingsfejl/beregningstid. En tilfredsstillende løsning ville kunne opnås med langt færre diskretiseringspunkter og derved samtidig reducere beregningstiden.

Ovenstående forslag til optimale driftsstrategi afhænger således af, om det er muligt at prædiktere energiefterspørgslen ca. 3–5 dage frem. Det skal dog pointeres, at i eksemplet med figur 12.5 og figur 12.6 udgør de empiriske efterspørgselsdata både prædiktions og udfald. Det er således i dette perspektiv de 3–5 døgns prædiktionshorisont skal ses. Samtidig er efterspørgselsværdier hvert kvarter heller ikke nødvendigvis fastlagt for metoden.

Strategien er derudover baseret på den opstillede model for et varmesystem. Den eksakte udformning en optimal driftsstrategi må i sidste ende afhænge af den endelige udformning af varmesystemet samt de tilhørende prædiktionsmuligheder. Desuden skal i strategien udvikles en række sikringer mod f.eks. at efterspørgslen ændres fra det prædikterede, e.g. modellere efterspørgslen som en stokastisk proces.

12.5 Forslag til videre arbejde

Til forslaget om optimal styringsstrategi i forrige afsnit skal anvendes modeller til prædiktion af el- og varmeefterspørgslen ca. 3–5 døgn frem. Ved en større undersøgelse af de mange øvrige efterspørgselsdata ville der muligvis kunne udvikles modeller til den ønskede prædiktion af efterspørgslen.

Kapitel 13

Konklusion

På baggrund af empiriske forsøgsdata er blevet estimeret nyttevirkninger og startomkostninger for sterlingenheden. Den totale nyttevirkningen for et MKV-anlæg af denne type ligger ca. 12% under, hvad der kan forventes af traditionelle gaskedler. Heraf er elvirkningsgraden estimeret til ca. 8%, hvilket svarer til en nettoeffekt på 0.62 kW.

Med den undersøgte sterlingenhed er opstillet en model af et varmesystem til en bolig. Til boligens energibehov er analyseret en række empiriske efterspørgslesdata, der angiver målinger af 25 forskellige huses el, varme og brugsvands forbrug. Varmeforbruget er for alle husene med relativ stor sikkerhed givet ud fra udetemperaturen, mens vand og elforbruget i højere grad afhænger af de enkelte beboeres individuelle forbrugsmønstre.

Der er opstillet en simplificeret model for et varmesystem til en bolig. Med kendskabet til sterlingenhedens karakteristik og empiriske efterspørgslesdata er varmesystemet simuleret efter en varmestyret driftstrategi, der ikke tager hensyn til elforbruget. Resultatet af den varmestyrede driftstrategi blev et forholdsmæssig stort eltab, dvs. el produceret på tidspunkter med lille elforbrug. Ved sammenligning af energiprisen med traditionel anskaffelse er MKV-anlægget ca. 10% dyrere pga. den mindre nyttevirkningen.

Ved hjælp af dynamisk programmering findes den optimale løsning for driften af MKV-anlægget til den pågældende efterspørgsel. Den optimale driftsløsning reducerer eltabet mellem 50 – 75% i forhold til den varmestyrede

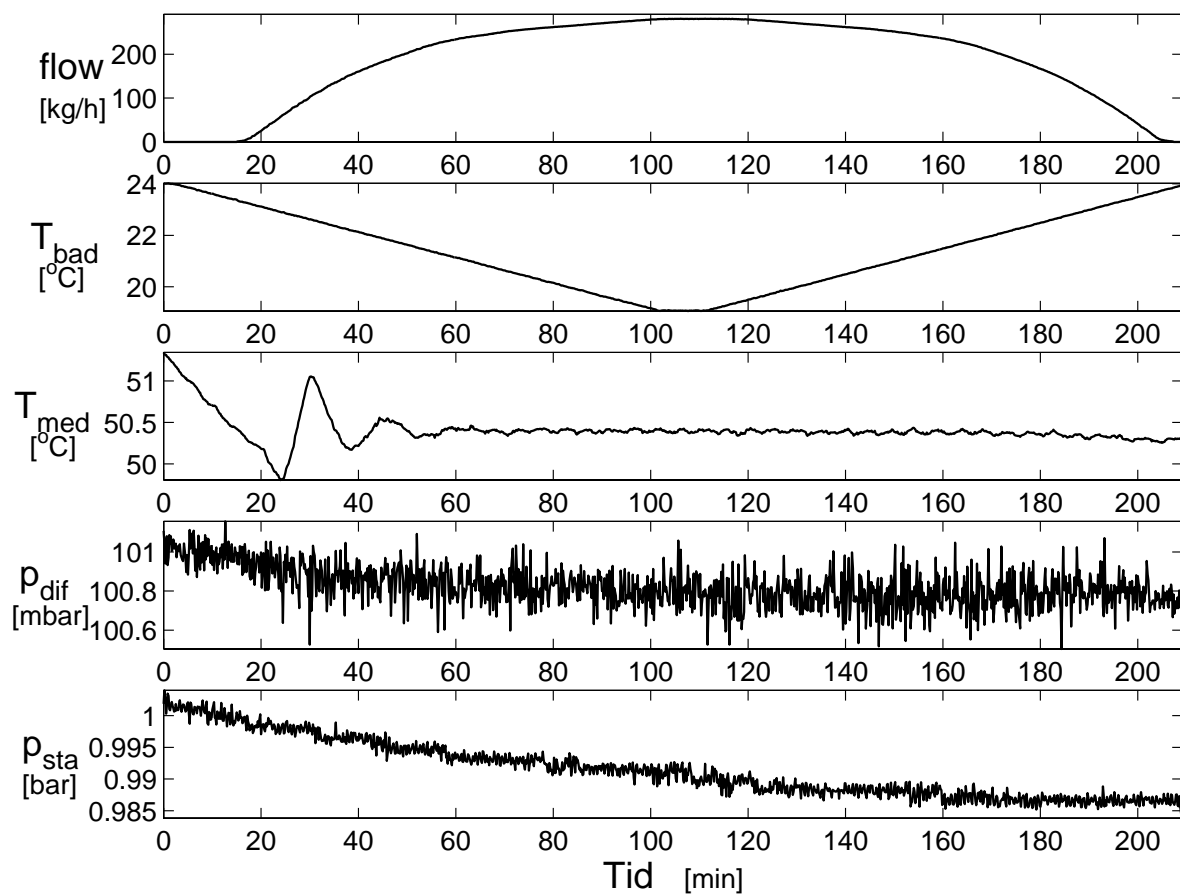
driftstrategi. Sterlingenheden kører derved mest muligt i perioder med stort elforbrug, hvilket medfører reduktionen i eltabet.

En optimal styringstrategi for et MKV-anlæg er foreslået på grundlag af den optimale løsning fundet ved dynamisk programmering. Metoden er betinget af at kunne prædiktere efterspørgslen ca. 3–5 døgn frem. Ud fra prædiktionen beregnes den optimale driftsløsning ved dynamisk programmering, hvorefter driften af MKV-anlægget styres efter den optimale driftsløsning.

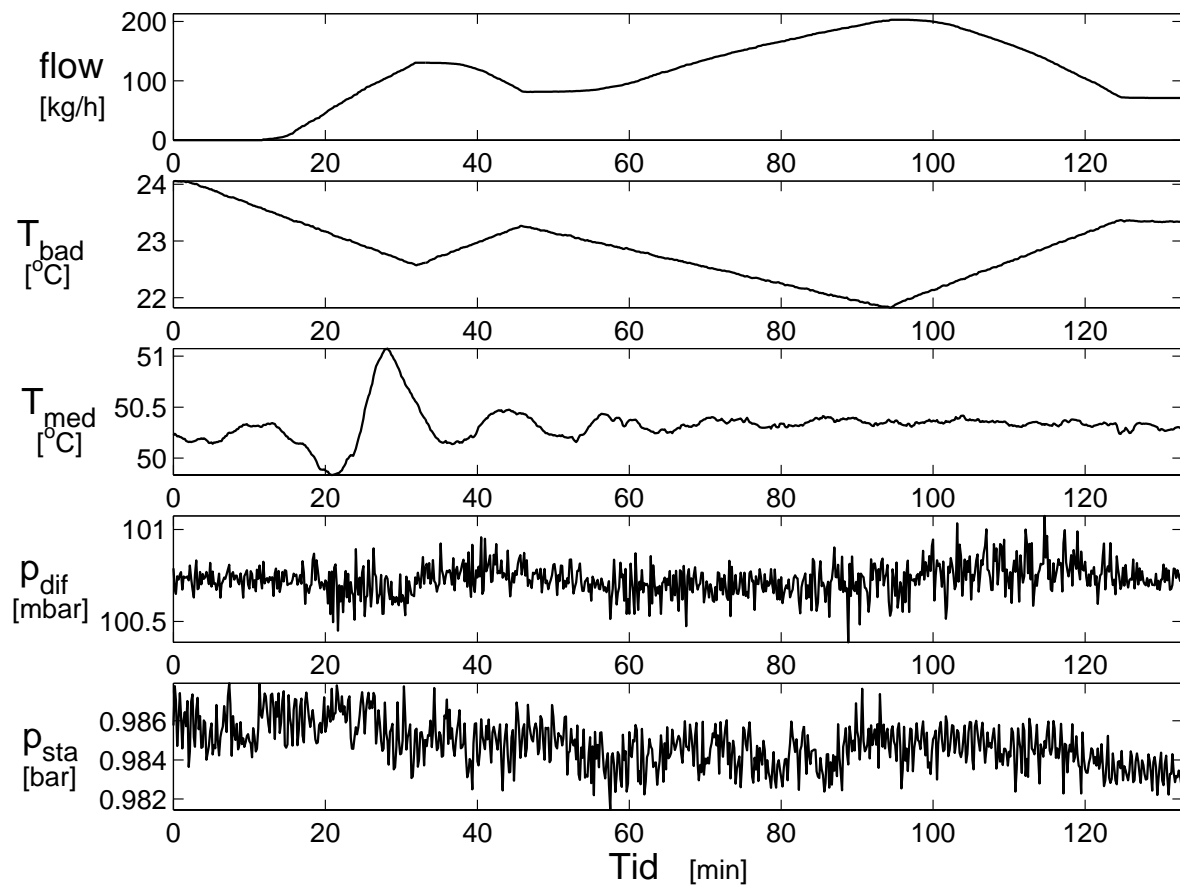
Den optimale styringsstrategien for MKV-anlægget er derved løbende at lave hhv. prædiktion af efterspørgsel og beregning af optimal løsning.

Bilag A

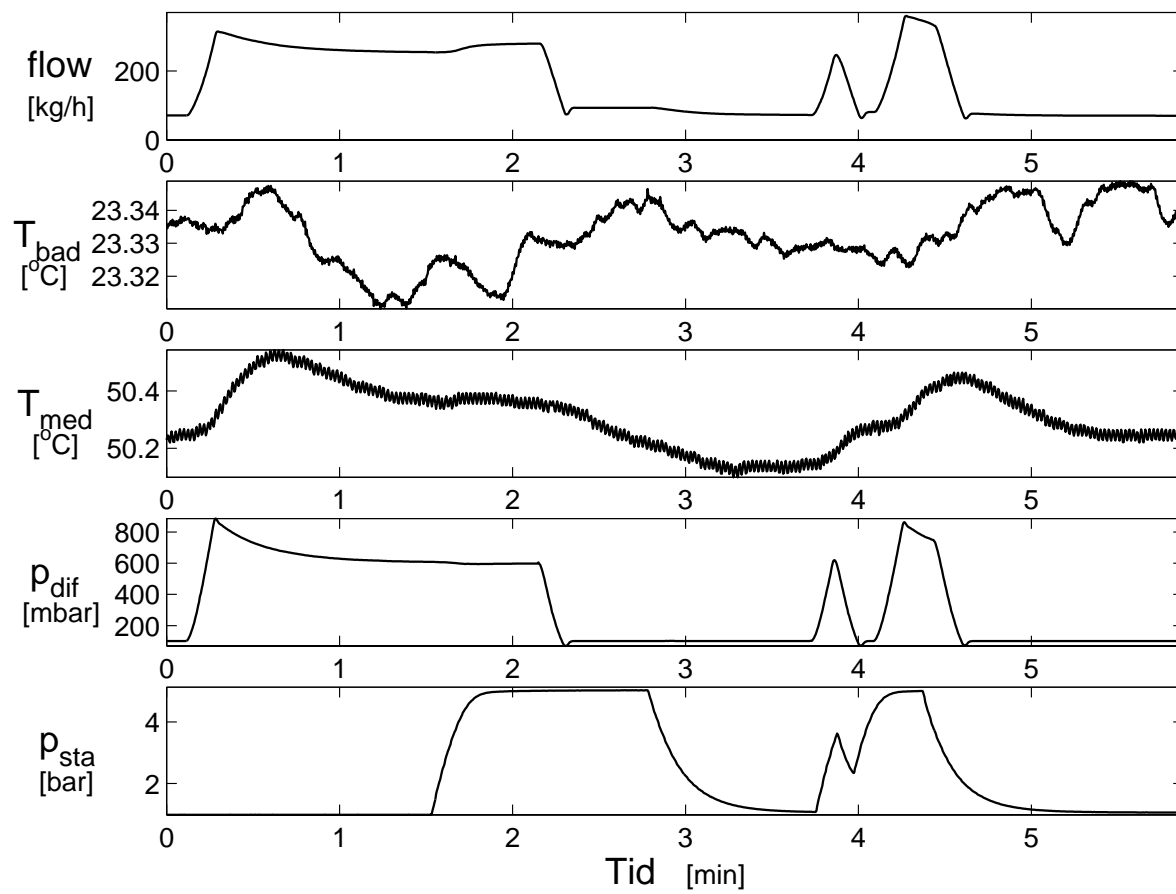
Dataserier



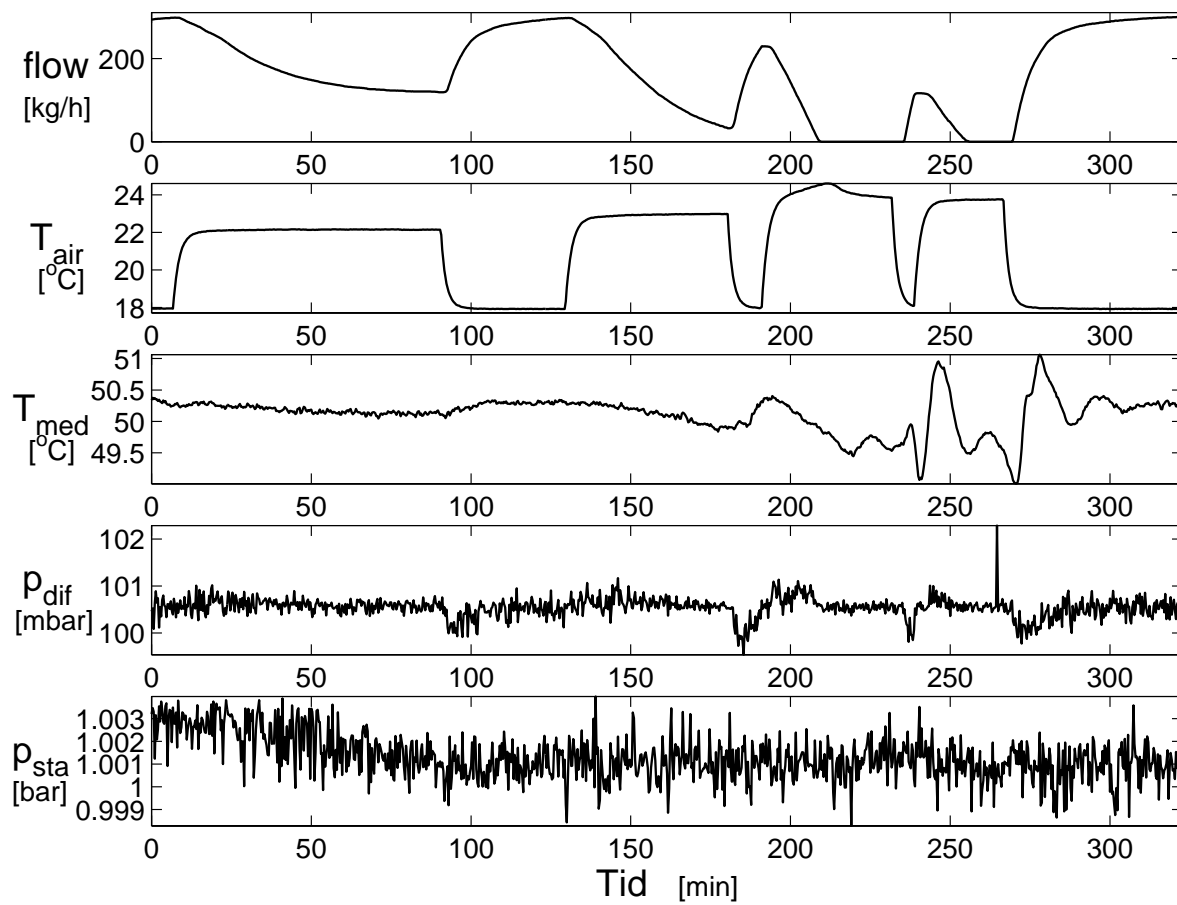
Figur A.1: Plot af test1, statistisk karakteristik



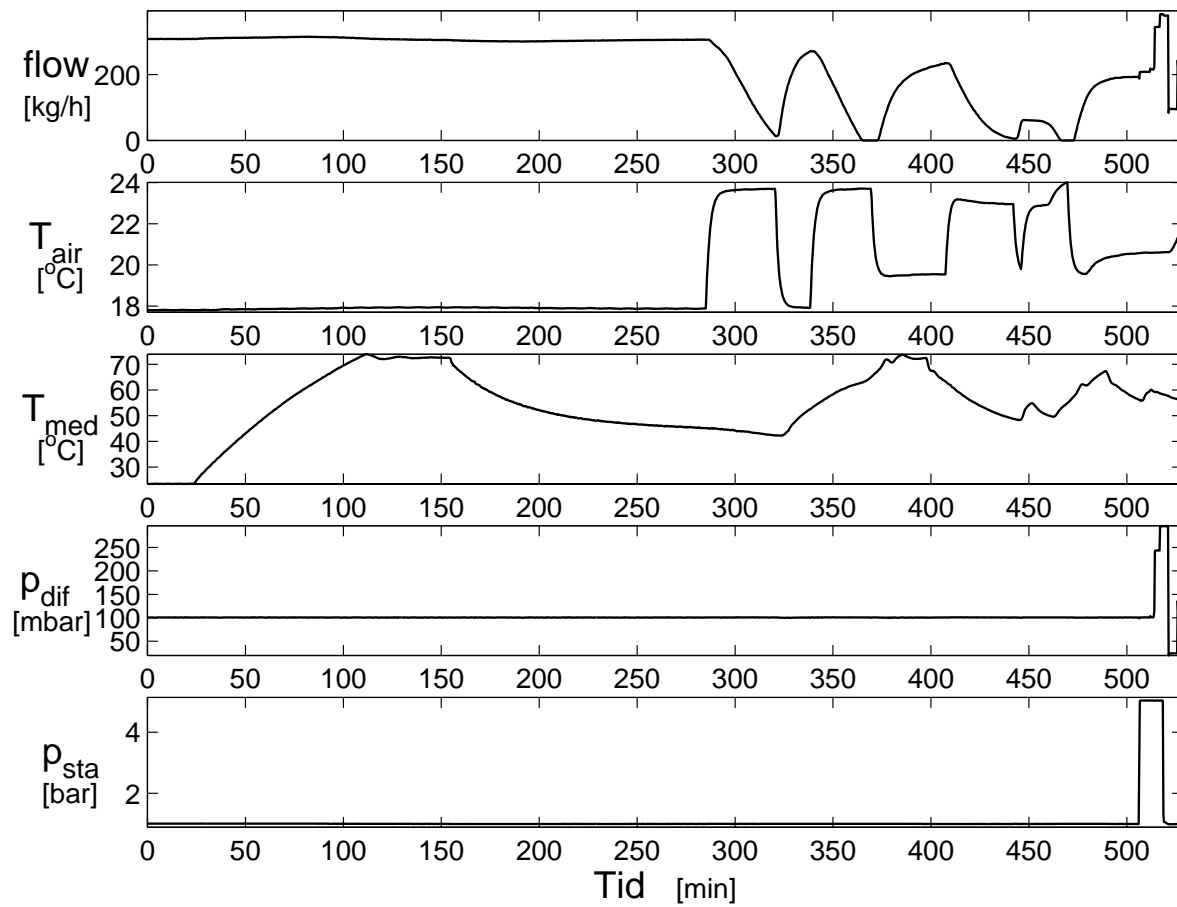
Figur A.2: Plot af test2, statistisk karakteristik



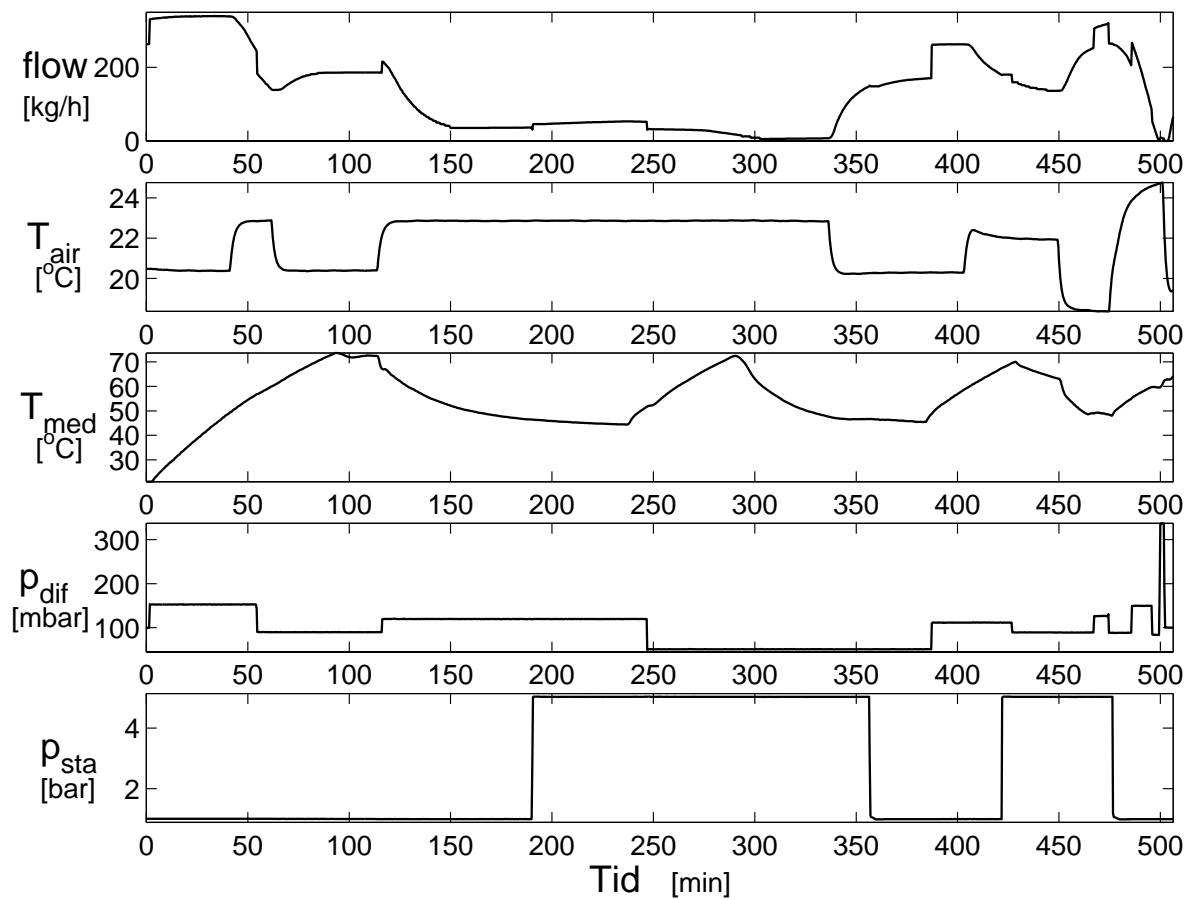
Figur A.3: Plot af test3, statistisk karakteristik



Figur A.4: Plot af test4, dynamisk karakteristik



Figur A.5: Plot af test5, dynamisk karakteristik



Figur A.6: Plot af test6, dynamisk karakteristik

Bilag B

Udregning af forsøgsvariable

B.1 Indfyret energi

Til beregning af den indfyrede energi findes først brændværdien af den anvendte gas fra [30]

$$\text{nedre brændværdi: } H_n = 40.2 \frac{MJ}{m^3} \quad (\text{B.1})$$

Da gassen er under tryk, når mængden måles, omregnes mængden til en *normaltilstand*, hvorefter denne korrigerede mængde kan multipliceres brændværdien og give den indfyrede energi.

Den målte mængde omregnes til mængden ved normaltilstanden ved følgende korrektionsligning [31]

$$V_n = V_m \cdot \frac{288.15 K}{T_m + 273.15} \cdot \frac{p_m}{1013.25 hPa} \quad (\text{B.2})$$

hvor V_n er normalmængden, V_m er den målte mængde, T_m er den målte gastemperatur og p_m er det målte gastryk.

Ved den kontinuerede kørsel har gasforbruget været 987.1 l, ved 1040.24 hPa og 23.09 °C. Den samlede indfyrede energi kan vha. (B.1) og (B.2), beregnes som

$$Q_i = 40.2 \frac{MJ}{m^3} \cdot 0.9871 m^3 \cdot \frac{288.15 K}{23.09 + 273.15 K} \cdot \frac{1040.24 hPa}{1013.25 hPa} = 39.6 MJ = \underline{\underline{11.0 kWh}} \quad (\text{B.3})$$

B.2 Produceret varme

Den producerede varme kan ved kontinuert kørsel direkte regnes ud fra sekundærkredsen. Energien beregnes som forskellen i temperaturen af vandet, der hhv. løber ud og ind af varmeveksleren gange vandmængden og vandets varmekapacitet.

$$Q = M_{vand} \cdot (T_{ud,sek} - T_{ind,sek}) \cdot 4.18 \cdot 10^{-3} \frac{MJ}{kg \cdot K} \quad (B.4)$$

hvor M_{vand} er vandmængden, $T_{ud,sek}$ og $T_{ind,sek}$ er temperaturen af vandet ud og ind af sekundærkredsen.

Forsøgsværdierne angivet i tabel B.1 indsættes i udtrykket (B.4), hvormed mængden af produceret varme i forsøget fås som

$$Q = 229.89 l \cdot (58.09^{\circ}C - 29.20^{\circ}C) \cdot 4.18 \cdot 10^{-3} \frac{MJ}{kg \cdot K} = 27.8 MJ = \underline{7.72 kWh} \quad (B.5)$$

hvor vandets densitet er regnet som $1.00 g/cm^3$.

B.3 Flow i primærkreds

Flowet i primærkredsen er ikke målt. Den kan beregnes ud fra data opsamlet ved den kontinuerede kørsel. Negligeres varmetabet i varmeveksleren er energien, der tilføres varmeveksleren i primærkredsen den samme mængde, som afgives i sekundærkredsen. Energien afsat i sekundærkredsen kendes, da her både er målt temperaturen (vand ind og ud) og vandmængden.

Med antagelsen om negligerbar varmetab i varmeveksleren vil i det kontinuerede forsøg gælde følgende sammenhæng for effekten

$$P_{ind,primær} = P_{ud,sekundær} \quad (B.6)$$

$$q_p \cdot (T_{ud,p} - T_{ind,p}) \cdot c = q_s \cdot (T_{ud,s} - T_{ind,s}) \cdot c \quad (B.7)$$

$$q_p = q_s \cdot \frac{T_{ud,s} - T_{ind,s}}{T_{ud,p} - T_{ind,p}} \quad (B.8)$$

hvor q_p er flowet, $T_{ud,p}$ og $T_{ind,p}$ er hhv. fra- og tilløbs temperaturen i primærkredsen. c er den specifikke varmekapacitet. q_s er flowet, $T_{ud,s}$ og $T_{ind,s}$ er hhv. fra- og tilløbs temperaturen i sekundærkredsen.

Tabel B.1: Varmedata fra kontinuert testkørsel

variabel	værdi	enhed
forsøgstid	4950	<i>s</i>
vandmængde sekundærkreds	229.89	<i>l</i>
$T_{ud,pri.}$	63.02	$^{\circ}C$
$T_{ind,pri.}$	47.94	$^{\circ}C$
$T_{ud,sek.}$	58.09	$^{\circ}C$
$T_{ind,sek.}$	29.20	$^{\circ}C$

I tabel B.1 er opgivet data fra sterlingenhedens varmeoutput ved den kontinuerte testkørsel. Indsættes data i udtrykket for flowet i primærkredsen (B.8), fås følgende estimat af q_p

$$q_p = \frac{229.89 \text{ ltr}}{4950 \text{ s}} \cdot \frac{58.09 \text{ }^{\circ}C - 29.20 \text{ }^{\circ}C}{63.02 \text{ }^{\circ}C - 47.94 \text{ }^{\circ}C} = \underline{0.089 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}} \quad (\text{B.9})$$

Resultatet kan benyttes til at estimere sterlingenhedens varmeeffekt afgivet i primærkredsen ved periodisk kørsel.

B.4 Startomkostning

For opstartsperioden mellem ca. 62 *min* og ca. 95 *min* på figur 10.2 beregnes omkostningen ved starten i forhold til den optimale kontinuerte kørsel. Gasforbruget er tidsrummet fundet til 387 *ltr*, hvilket giver den indfyrede energi som

$$Q_{i,per} = 0.387 \text{ m}^3 \cdot 40.2 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3} = 15.56 \text{ MJ} = \underline{4.32 \text{ kWh}} \quad (\text{B.10})$$

Elproduktionen er i samme tidsrum målt til 0.2363 *kWh*.

Varmeproduktionen i primærkredsen er udregnet, hvor varmen sterlingenheden afgiver efter ca. 100 *min* er negligeret, hvilket skulle være nok til at medtage den smule forsinkelse for varmen i primærkredsen. Varmen afgivet senere end de 100 *min* vil ligeledes ikke kunne indgå i det akutte varmebe-

hov for evt. et hus. Den producerede varme er beregnet til

$$Q_{v,per} = q_p \cdot t \cdot (T_{ud} - T_{ind}) \cdot c \quad (\text{B.11})$$

$$= 0.089 \frac{\text{ltr}}{\text{s}} \cdot 1720 \text{ s} \cdot (58.65^\circ\text{C} - 47.80^\circ\text{C}) \cdot 4.18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{MJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad (\text{B.12})$$

$$= 7.97 \text{ MJ} = \underline{2.21 \text{ kWh}} \quad (\text{B.13})$$

hvor der som temperaturer anvendes middeltemperaturen over tidsrummet, idet flowet antages konstant.

I forhold til kontinuert kørslen kan tabet/omkostningen ved en opstart nu beregnes direkte. Den indfyrede energi, 4.32 kWh , skulle ved kontinuert kørsel have produceret følgende

$$\text{el} : Q_{e,opt} = 4.32 \text{ kWh} \cdot 0.077 = 0.333 \text{ kWh} \quad (\text{B.14})$$

$$\text{varme} : Q_{v,opt} = 4.32 \text{ kWh} \cdot 0.702 = 3.033 \text{ kWh} \quad (\text{B.15})$$

Den samlede omkostning ved opstart kan udregnes som

$$I_{start} = (0.333 \text{ kWh} + 3.033 \text{ kWh}) - (0.24 \text{ kWh} + 2.21 \text{ kWh}) = \underline{0.92 \text{ kWh}} \quad (\text{B.16})$$

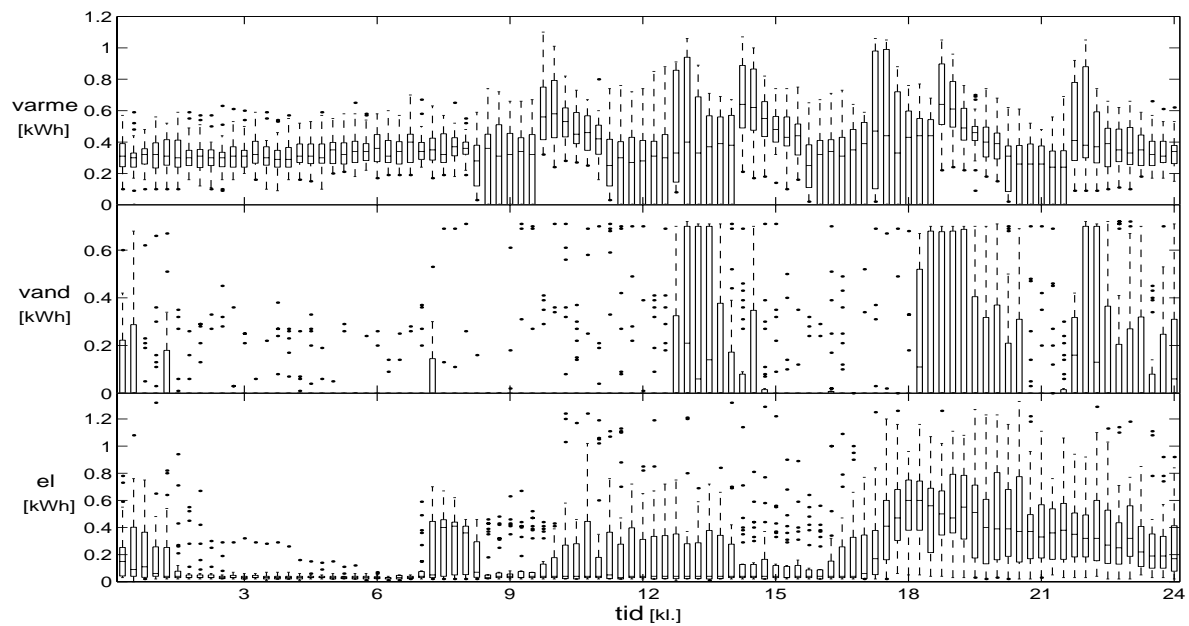
Omkostningen kan omregnes til

$$I_{start} = \frac{0.92 \text{ kWh}}{0.779} \simeq 105.8 \text{ ltr gas} \simeq \underline{0.67 \text{ kr.}} \quad (\text{B.17})$$

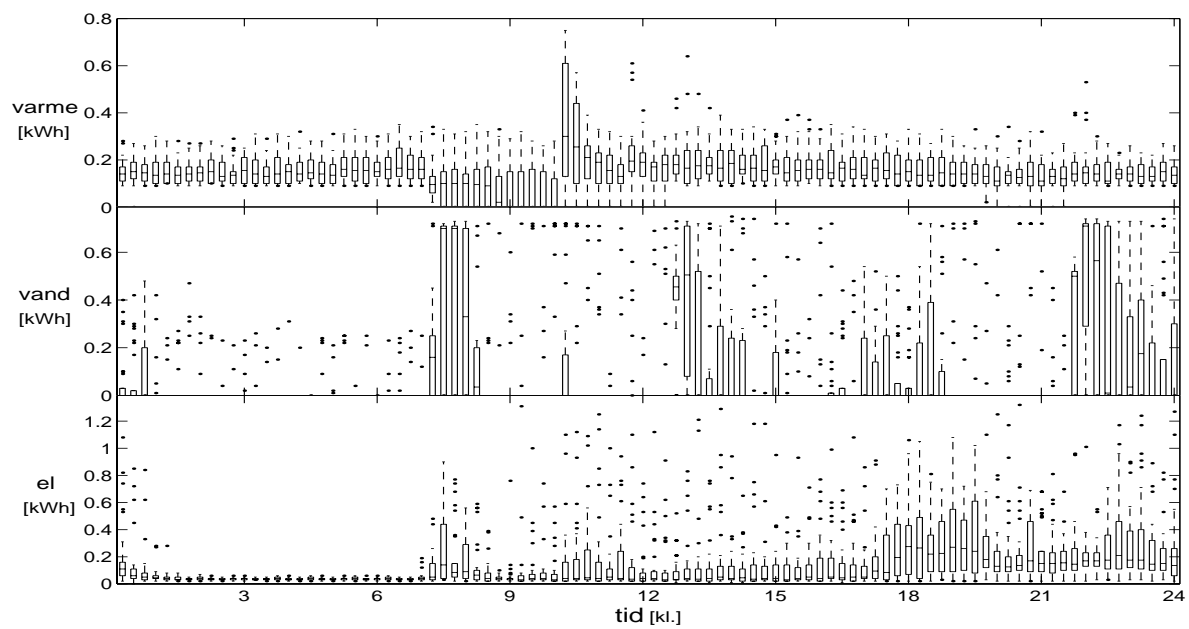
hvor prisen for gas er sat til 6.389 kr/m^3 , [30].

Bilag C

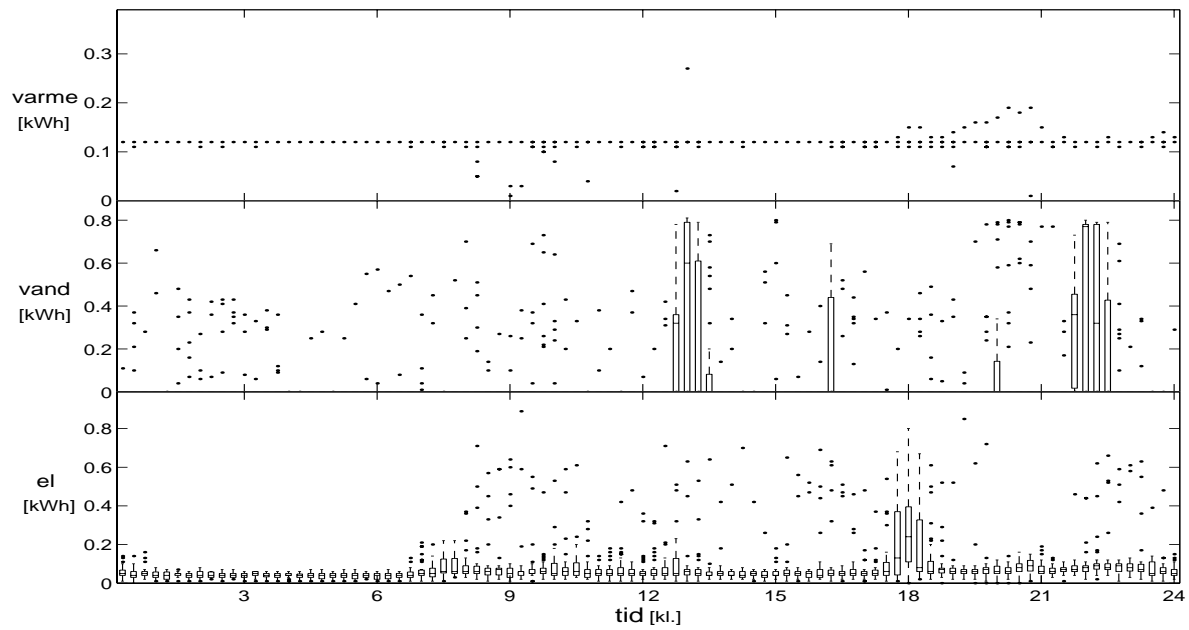
Efterspørgselsdata



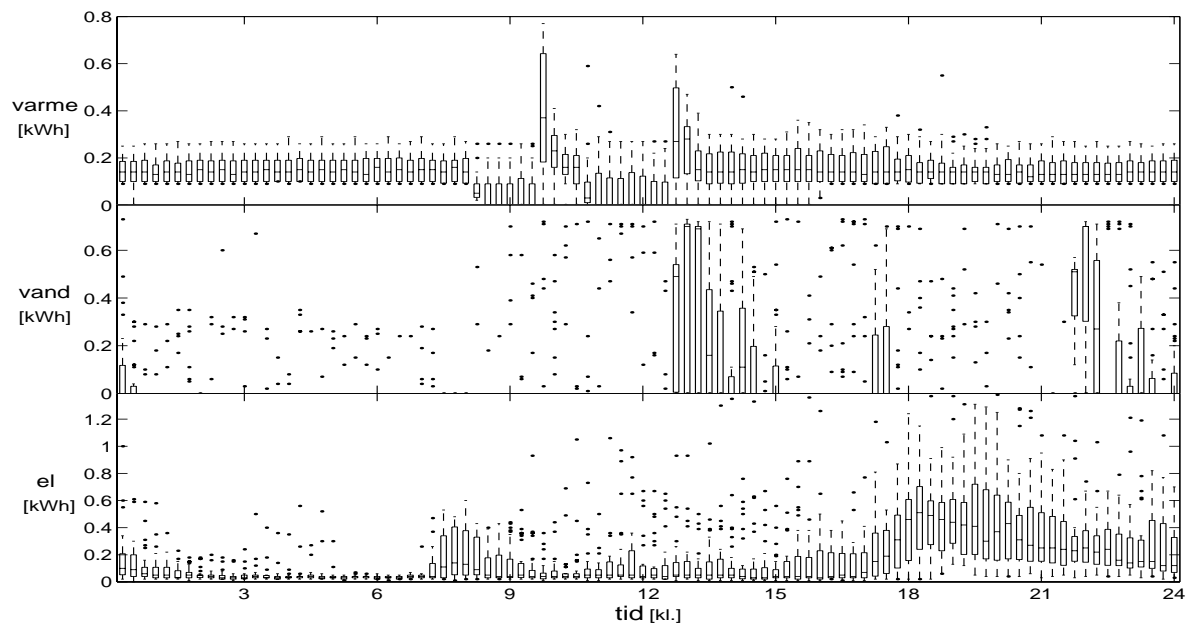
Figur C.1: Plot af energieferspørgsel i januar



Figur C.2: Plot af energieferspørgsel i april



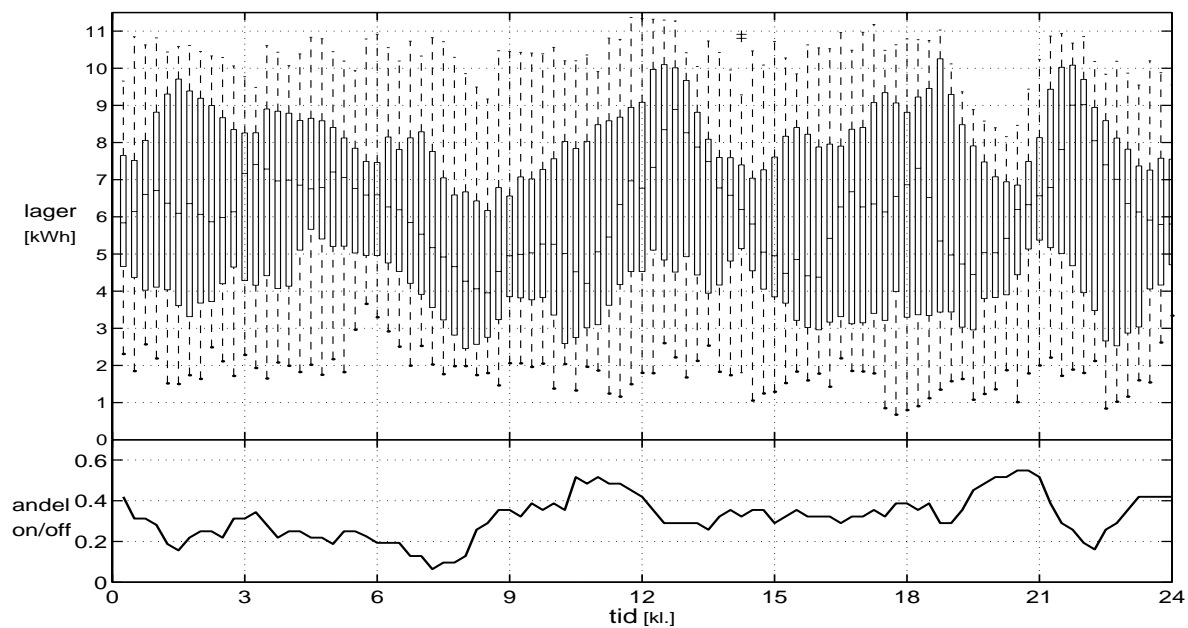
Figur C.3: Plot af energif efterspørgsel i juli



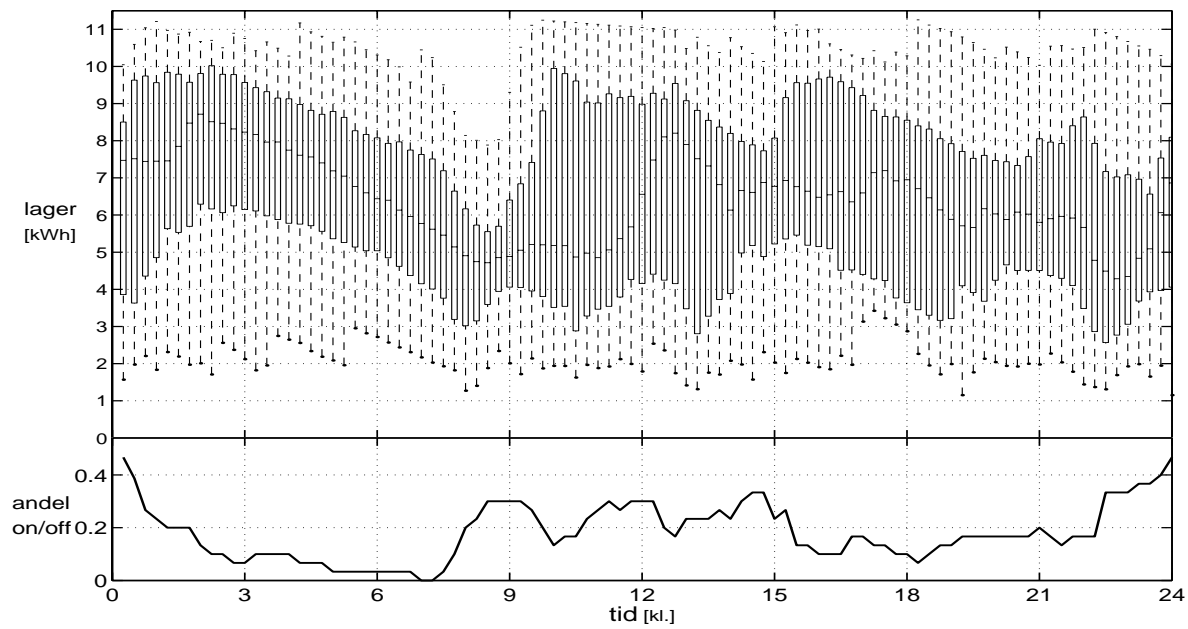
Figur C.4: Plot af energif efterspørgsel i oktober

Bilag D

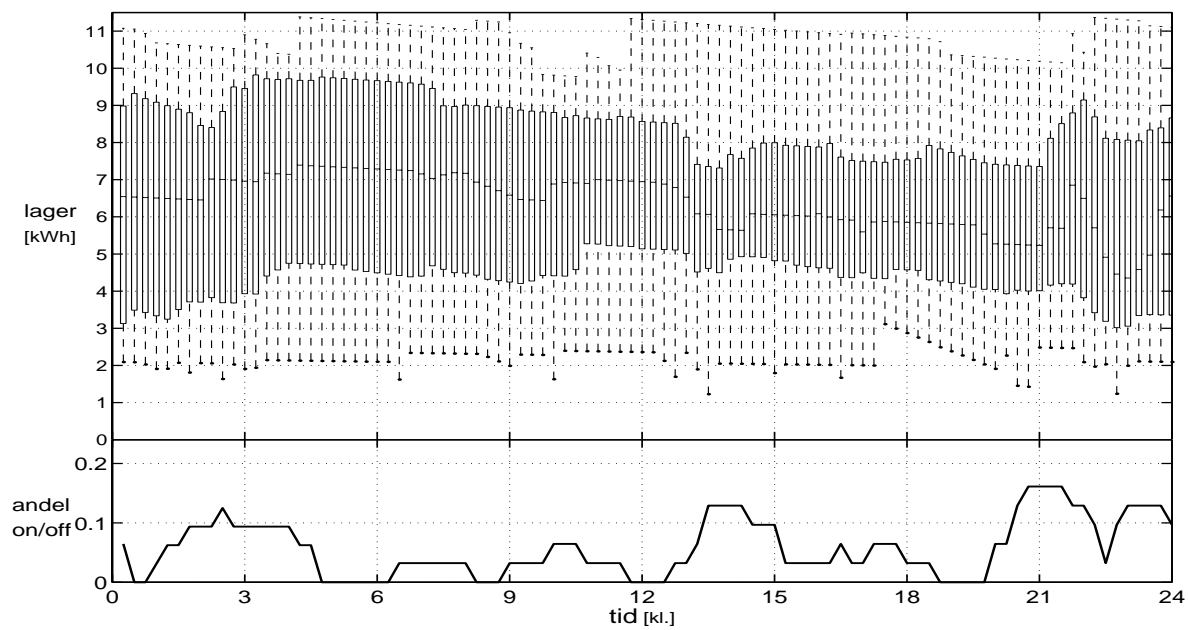
Resultater af varmestyret driftsstrategi



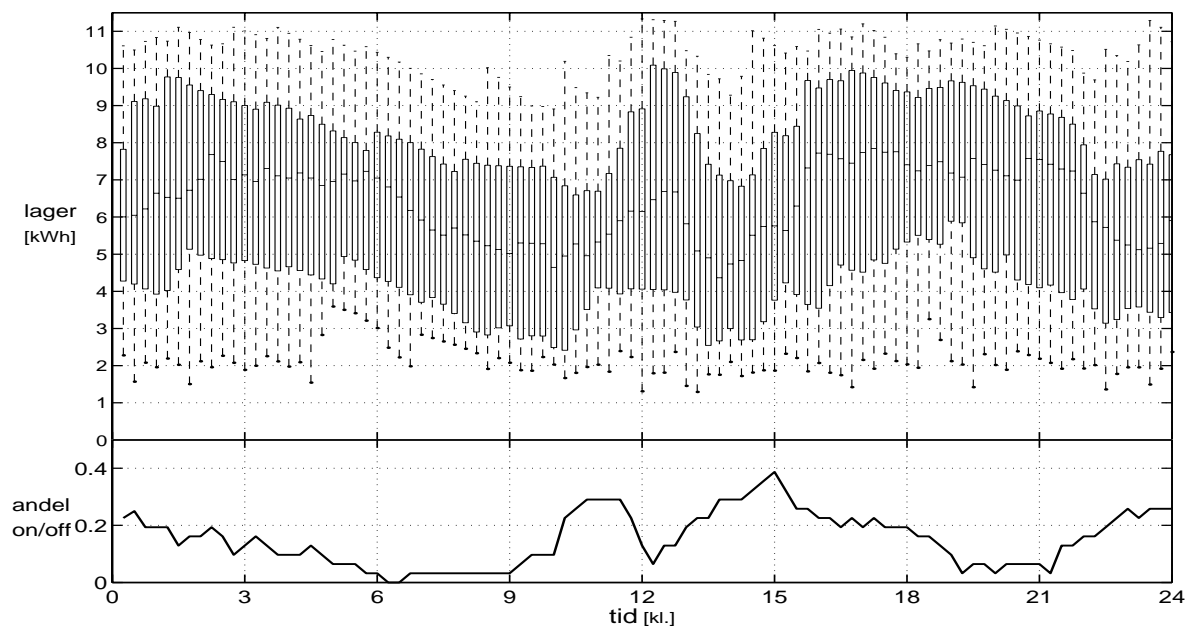
Figur D.1: Plot af varmestyrret driftsstrategi af januar.



Figur D.2: Plot af varmestyrret driftsstrategi af april.



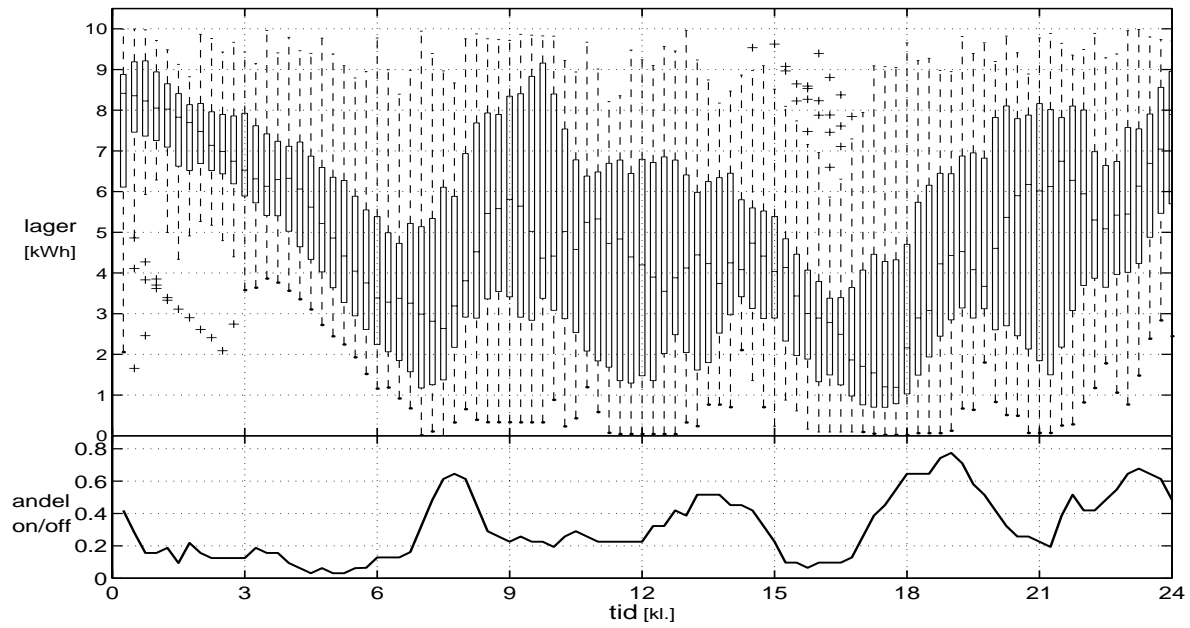
Figur D.3: Plot af varmestyret driftsstrategi af juli.



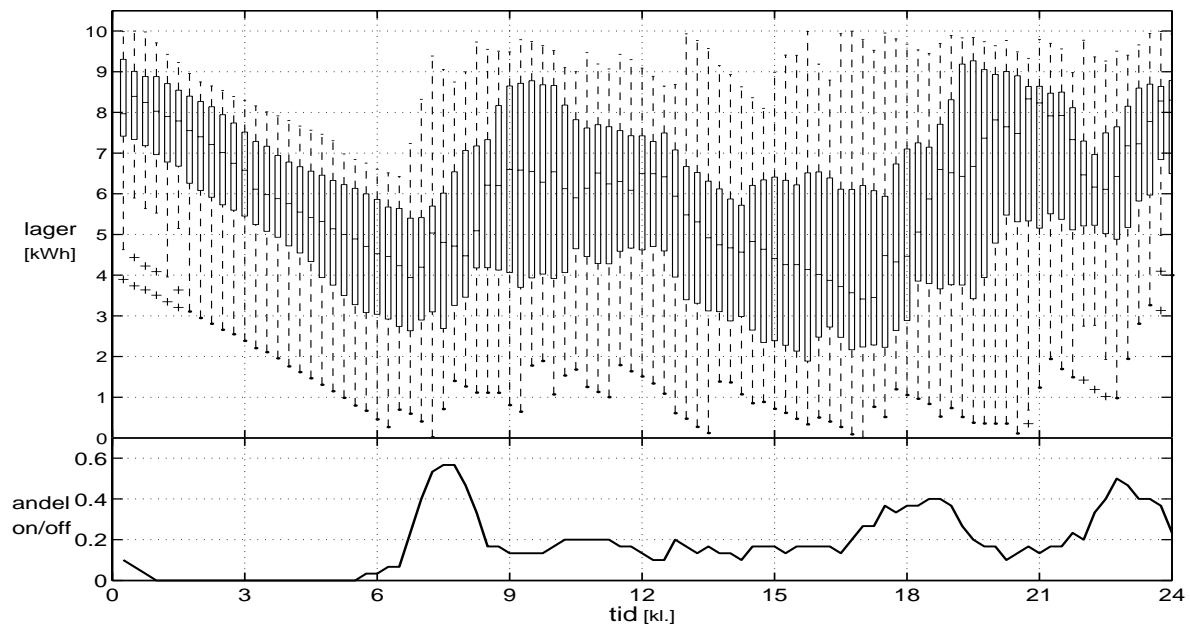
Figur D.4: Plot af varmestyret driftsstrategi af oktober.

Bilag E

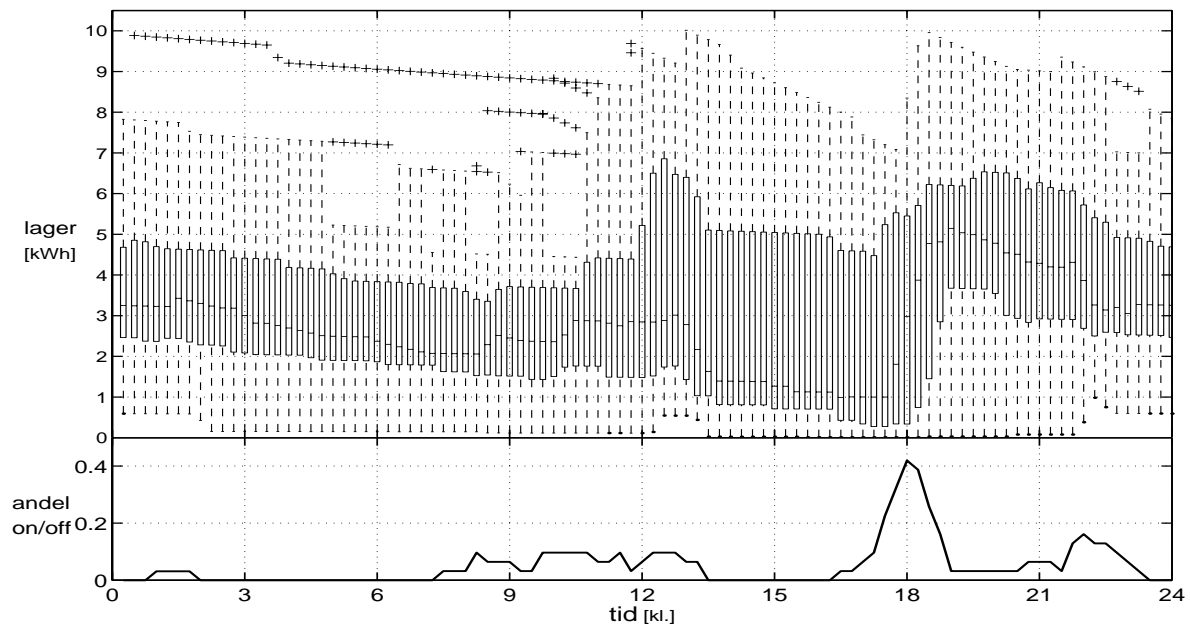
Resultater af optimal drift



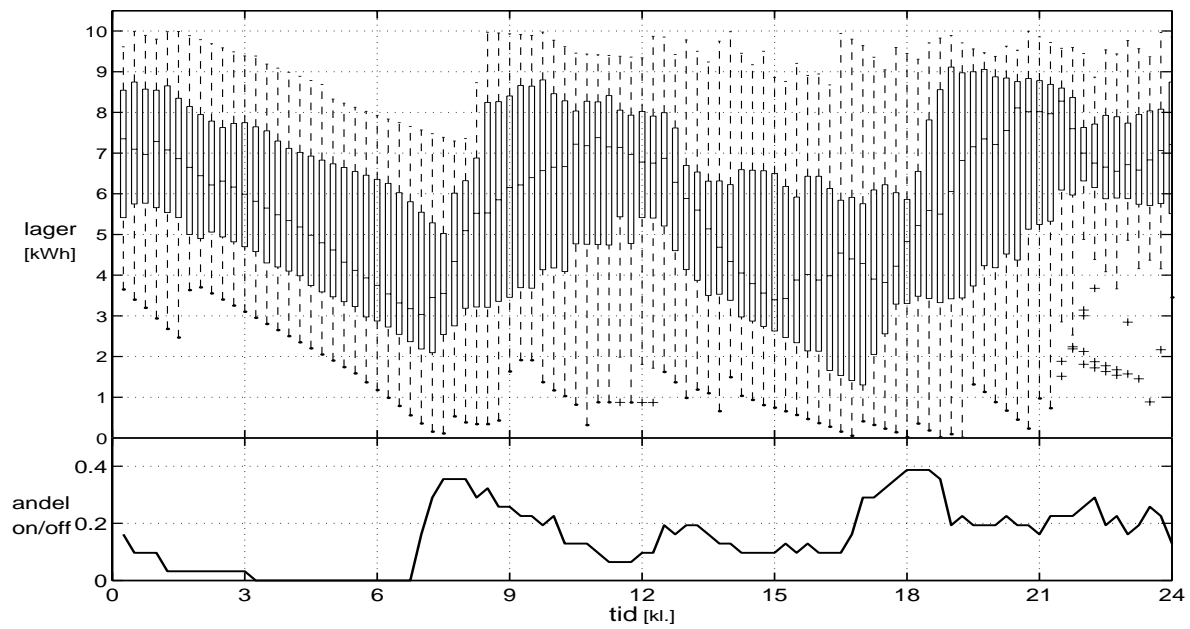
Figur E.1: Plot af optimal driftsløsning for januar.



Figur E.2: Plot af optimal driftsløsning for april.



Figur E.3: Plot af optimal driftsløsning for juli.



Figur E.4: Plot af optimal driftsløsning for oktober.

Litteratur

- [1] Datablad. *Følerelementer RA 2000*. Danfoss 5/97
- [2] Datablad. *Ventilhuse type RA-FN og RA-G til radiatortermostat RA 2000*. Danfoss 8/94
- [3] X. Zou, J.A. Jordan and M. Shillor. *A dynamical model for a thermostat*. Journal of Engineering Mathematics **36**: 291-310, 1999
- [4] Arkan Kayihan, Francis J. Doyle III. *Friction compensation for a process control valve*. Control Engineering Practice 8 (2000) 799-812
- [5] Jean-Pascal Bourdouxhe, Marc Grodent, Jean Lebrun. *Reference Guide for Dynamic Models of HVAC Equipment*. American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc, 1998
- [6] L. H. Hansen. *Stochastic modelling of central heating systems*. PhD thesis, IMM, DTU, 1997
- [7] Niels H. Gregersen. *Model af gasfyldt termostatventil*. Intern notat. Danfoss, Silkeborg
- [8] E. Trostmann. *Kursus i hydraulisk styring*. Laboratoriet for styreteknik, DTH, 1980
- [9] F.A Engelund og Fl. Bo Pedersen. *Hydraulik* 3. udgave, Den private ingeniørfond, Lyngby, 1978
- [10] Augusto Visintin. *Differential Models of Hysteresis*. Springer-Verlag, 1994
- [11] B. Cahlon, D. Schmidt, M. Shillor and X. Zou. *Analysis of thermostat models*. Euro. Jnl of Applied Mathematics(1997), vol. 8, pp. 437-457
- [12] P. Dahl. *A solid friction model*. Tech. Rep. TOR-0158(3107-18)-1, Aerospace Corp., El Segundo, Ca, 1968
- [13] H. Olsson, K.J. Åström, C. Canudas de Wit, M. Gäfvert, P. Lischinsky. *Friction Models and Friction Compensation*. Report, 1997
- [14] P. Harremoës and H. Madsen. *Fiction and reality in the modelling world-balance between simplicity and complexity, calibration and iden-*

- tifiability, verification and falsification. Wat. Sci. Tech. Vol. 39, pp.1-8, 1999*
- [15] H. Melgaard. *Identifikation of Physical Models*. PhD thesis, IMM, DTU, 1994
 - [16] J.N. Nielsen. *Nonlinear Dynamics and Time Series Analysis*. M.Sc. thesis, IMM, DTU, 1996
 - [17] H. Madsen and J. Holst. *Modelling Non-Linear and Non-Stationary Time Series*. IMM, DTU, december 1999
 - [18] H. Madsen. *Tidsrækkeanalyse*. IMM, DTU, 3. udgave, 1998
 - [19] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*. Fourth Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1995
 - [20] H. Madsen, N.R. Kristensen. *CTSM, Continuous Time Stochastic Modelling*. Version 1.0, DTU, Lyngby, November 2000
 - [21] P. Thyregod. *En introduktion til statistik, bind 3c*. IMM, DTU, Lyngby, 1998
 - [22] K. Conradsen. *En introduktion til statistik, bind 1a*. IMM, DTU, 6. udgave, 1995
 - [23] K. Conradsen. *En introduktion til statistik, bind 1b*. IMM, DTU, 6. udgave, 1995
 - [24] J. Holst,U. Holst,H. Madsen og H. Melgaard. *Validation of Grey-Box Models*. IFAC, Adaptive Systems in Control and Signal Processing, Grenoble, France, 1992
 - [25] MATLAB. *Optimization Toolbox User's Guide*. The MathWorks Inc., 1999
 - [26] H. Madsen og J. Holst. *Estimation of continuous-time models for the heat dynamics of a building*. Energy and Buildings 22, (1995), 67-79
 - [27] E. Both og G. Christiansen. *Termodynamik*. 2. oplag. DTH, Lyngby, 1993
 - [28] D. C. Montgomery. *Design and analysis of experiments*. Fourth Edition, 1997
 - [29] Morten P. Rasmussen. *Katalog over styringsstrategier*. Demonstration af mikrokraftvarme. NES A/S, Hellerup. November,2000
 - [30] DONG. <http://www.dong.dk/>. Juni, 1999
 - [31] Bernt Hansen. *Gas Ståbi*. Teknisk Forlag A/S, 1993
 - [32] Karsten V. Frederiksen. *Katalog over behovsprofiler*. Demonstration af mikrokraftvarme. Dansk Gasteknisk Center a/s. November,2000
 - [33] Hans Ravn. *Noter til statisk og dynamisk optimering*. Forlæsningsnote. Lyngby, 1996

