Skemalægningsproblemet

ERIK JACOB HANSEN

Censurering

		Dato
Læst af:	Aksel Olsen	29/1 -68
	[illegible signature]	
	[illegible signature]	

INSTITUTTET FOR MATEMATISK STATISTIK
OG OPERATIONSANALYSE
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

EKSAMENSPROJEKT 1967

SKEMAPROBLEMET

for

skoler med klasseundervisning.

Udført af:

Erik Jacob Hansen.

M 62123.

Dette projekt er et led i den afsluttende eksamen ved Danmarks Tekniske Højskole. Projektet er udført som hovedopgave i "Matematisk Statistik og Operationsanalyse" under lektor P.M.Pruzan's vejledning.

Opgavens ordlyd er: Studie af skemaproblemet for en højere læreanstalt med allokering af lokaler, lærere, studenter og studenterhold indenfor studieplanens rammer.

På grund af større aktuel interesse er opgaven i overensstemmelse med opgavestillerne reformuleret til: Et studie af skemaproblemet for skoler med klasseundervisning (eksempelvis den danske folkeskole). Der kan her takkes for friheden til reformulering af ordlyd og målsætning således, at en opgave kan udføres indenfor aktuelle og egne interesseområder.

En tak for værdifuld hjælp under udarbejdelse af projektet tilstiles skoleinspektør N.G.Svendstorp, Kerteminde, (orientering om den manuelle skemalægningsproces), ing. Indslev Jensen, IBM (orientering om tidligere arbejder med skemalægning i Danmark), professor C.C.Gotlieb, University of Toronto, Canada (fremskaffelse af teoretisk afhandling og orientering om muligheder for anskaffelse af datamatprogrammet OSSP), og Dr. L.D McLean og H J.Schwartz, The Ontario Institute for Studies in Education, Canada (orientering om resultater fra forsøg med datamatprogrammet OSSP). Endvidere en tak til A/S Regnecentralen og IBM for velvillig udlån af litteratur.

Endelige oplysninger om muligheder for erhvervelse af datamatprogrammet OSSP er først fremkommet sidst i oktober. Programmet kan rekvireres fra The Ontario Institute for Studies in Education, 1o2 Bloor Street West, Toronto 5, Ontario, Canada for en udgift på $1oo.oo plus transportomkostninger.

Hellerup d. 8/11-1967

Erik J Hansen.

Indholdsfortegnelse.

Indledning

Formålet med dette projekt er at bidrage til udvikling af en skemalægningsteori, som kan danne baggrund for udvikling af en systemarbejdsmetodik anvendelig for skemalægningssystemer (herunder især EDB-systemer). Der er således to opgaver:

1. Udvikling af en teori.
2. Udvikling af en metodik.

Formålet med udvikling af en metodik er at muliggøre konstruktion af et konkret skemalægningssystem på en sådan måde, at en effektiv udnyttelse af EDB kan opnås. Dette sidste formål er således den egentlige begrundelse for udvikling af teorien. Projektets mål er hermed i overensstemmelse med operationsanalysens målsætning: At udarbejde en matematisk model for et stillet problem.

Som ønsket i projektets opgaveformulering er omtalt flere metoder til løsning af skemaproblemet. Imidlertid er skemaproblemet et heraki af problemer, og for dette projekt er som objekt valgt det problem, som er betegnende for det danske skolesystem. Projektet opfylder således ikke opgavens oprindelige formål: Et studie af skemaproblemet for en højere læreanstalt. For dette problem er problemstillingen en ganske anden, og løsning af problemet er også betydelig lettere. Der findes utallige EDB-systemer til udfærdigelse af skemaer og holdopdelinger m.m. anvendelige på amerikanske universiteter. Som anført af Barraclough (4) er disse procedurer ikke anvendelige på skolesystemer som den danske folkeskole. Da der fra undervisningssektoren er stor interesse for EDB-produktion af skemaer, er de procedurer og teorier, som er omtalt i nærværende projekt, af en sådan art, at de kan anvendes på det danske skolesystem.

Undervisning kan organiseres på mange måder: Indbyrdes undervisning, individuel undervisning, gruppearbejde, emneundervisning og klasseundervisning. Den undervisningsform, som er karakteristisk for det danske skolesystem er klasseundervisning.

Klasseundervisning kan defineres som en organisationsform, hvor samtlige elever (klassen) undervises på samme tid i samme fag med samme metode og med samme mål i sigte.

Det skolesystem, som er objekt for dette projekt, kan derfor karakteriseres ved: Der findes et bestemt antal lærere, klasser og perioder. Undervisningen (hvor mange timer klasse c_j skal undervises af lærer t_i) er bestemt på forhånd. Undervisningen formidles i et bestemt antal lokaler. Der skal nu udarbejdes en plan, der muliggør denne undervisning samtidig med, at der ikke findes fritimer mellem undervisningstimerne.

Et skema kan herefter defineres som en plan, som angiver tid og sted for møder mellem lærere og klasser. Det er almindelig praksis for skoler at følge den samme plan hver uge. Derfor er et skema udarbejdet for en enkelt uge tilstrækkeligt til at definere skemaet for et helt år.

At samordne lærere, klasser og lokaler i et skema er et allokeringsproblem af en vis interesse. At problemet har lokket autoriteter som Professor Gotlieb (Canada) og Professor Kosten (Holland) til at arbejde dermed kan nok tilskrives den omstændighed, at skemaproblemet ikke er et selvstændigt problem, men et analogt problem til mange andre allokeringsproblemer. Af processer, som kan tilskrives en lignende karakteristik kan nævnes samordning af produkter, produktionsenheder og arbejdskraft på en fabrik og udarbejdelse af køreplaner for transportsystemer.

Det er blevet betragtet som en væsentlig opgave at uddybe den teoretiske baggrund for skemaproblemet frem for at forsøge at anvende middelgode heuristiske skemalægningsorocedurer på et virkeligt problem. Dette nævnt, da undertegnede er af den opfattelse, at et fremtidigt EDB-system til skemalægning må bygge på en matematisk formuleret metodik. Det er forsøgt at gøre den teoretiske fremstilling let forståelig ved anføring af simple eksempler.

Resume.

I kapitel 1 omtales skemalægningsprocessen (den totale proces ved udarbejdelse af et skema). Denne proces omfatter bestemmelse af skematimer, lærernormering, opstilling af fagfordelingsskema, opfyldelse af lærerønsker og korrigerende beregninger inden selve skemalægningen kan iværksættes.

Kapitel 2 beskæftiger sig med planlægningsproblemer, som har visse ligheder med skemaproblemet. Det gælder allokeringsproblemer (især assignment problemet), sekvensproblemer og ruteproblemer. Skemaproblemet placeres som et planlægningsproblem og i den forbindelse defineres begrebet "optimalt skema".

I kapitel 3 omtales teoretiske begreber med relevans til skemaproblemet. Det gælder mængdeteori og matrixbegreber. I den forbindelse omtales et for skemaproblemet væsentligt teorem (Halls teorem). Med særlig henblik på næste kapitels formulering af skemaproblemet defineres "feasibility af booleske matricer" og operationen "matrixreduktion" uddybes nærmere.

I kapitel 4 gennemgås den af Gotlieb udarbejdede formulering af skemaproblemet. Denne omfatter definition af behovmatrix og initiale tildelinger. En metode til undersøgelse af problemets feasibility (mulighed for løsning) anføres. Løsningsmetodikken er en søgning efter tætte kombinationer med efterfølgende matrixreduktion.

I kapitel 5 omtales the Hungarian Method til matrixreduktion. Denne metode er bedre ned Gotliebs matrixreduktion. For metoden er udviklet et datamatprogram "EXPAND", som er anvendeligt på skemaproblemet.

Kapitel 6 indeholder en omtale af forskellige mere eller mindre relevante specielle skemaproblemer. Det tætte skemaproblem er lettere at løse end det normale skemaproblem, og en metode til

transformering af et skemaproblem til et tæt do angives. Det symmetriske skemaproblem er analogt til teorien om partielle og latinske kvadrater. For skemaproblemet uden initiale tildelinger vises, at dette altid har en løsning og endelig bestemmes den fuldstændige løsning for et problem med 3 lærere og 3 klasser.

Kapitel 7 beskæftiger sig med skemaproblemets løsningsvolumen. Antallet af løsninger for et simpelt problem angives, og det undersøges hvilken indvirkning forskellige begrænsninger har på løsningsvolumenet.

I kapitel 8 omtales faktorer, som helst skal involveres i en skemalægningsprocedure, men som det endnu ikke har været muligt at involvere med større sukces. Især er der store vanskeligheder ved involvering af fagrækkefølge og intern trafik, hvorimod hensyn til fagfordeling og til lokaler kan løses ved hjælp af mere eller mindre approksimative metoder.

I kapitel 9 omtales 4 skemalægningsprocedurer. Som en variant til det ellers omhandlede skolesystem omtales Coles metode til skemalægning for undervisningssystemer som DtH. For Gotliebs metode angives de opnåede resultater med det udviklede datamatprogram OSSP. Appleby's og Berghuis' metoder gennemgås nøje selv om de i sammenligning med Gotliebs må betragtes som værende "forældede".

I kapitel 1o omtales de forhold, som skal tages i betragtning ved overgang til EDB-produktion af skemaer og i den forbindelse omtales de væsentlige fordele en sådan produktion kan tilbyde.

Sidst i projektet findes en litteraturliste, som stort set omfatter al eksisterende litteratur om Skemalægningsproblemet inklusiv litteratur for skemalægningsprocedurer ved amerikanske universiteter, et skemaproblem som ellers ikke er behandlet i projektet. Litteraturlisten, som er opstillet i alfabetisk rækkefølge, afsluttes med angivelse af 3 artikler, som forventes at udkomme i den nærmeste fremtid.

Konklusion.

Anvendelse af datamater til skemalægning er et område, som der er forsket på siden sidst i 5o-erne. Det er således blevet "en lang rejse", idet udfærdigelse af en skemalægningsprocedure, som kan anvende EDB, endnu ikke kan betragtes som et fuldendt arbejde. Selv den længste rejse starter med et skridt, og de første skridt i denne forbindelse repræsenteres af de af Appleby og Berghuis udviklede heuristiske metoder. Gotlieb har imidlertid ført os et godt stykke frem mod målet ved at betragte skemaproblemet som et matematisk problem.

Ved hjælp af Gotliebs metode er det i dag muligt at bestemme alle løsningerne til et skemaproblem, og det er også muligt initialt at undersøge, hvor vidt et problem i det hele taget har en løsning, en ting, som er meget vigtig for skemaproblemet. Det er muligt at udfærdige et skema, som foruden hensyn til undervisningsbehov og eventuelle initiale tildelinger kan foretage en tilfredsstillende fagfordeling og lokaletildeling. Hensynet til fagrækkefølgen og den interne trafik er endnu ting, der skal løses, før målet er nået.

Forsøgene i Canada med datamatprogrammet OSSP, som delvis bygger på Gotliebs metode, har åbenbaret, at på nuværende tidspunkt kan produceres skemaer på datamater af samme kvalitet og pris som de manuelt udførte. Dette i forbindelse med andre fordele og eventuelle fremtidige forbedringer har bevirket, at man i Canada regner med at OSSP kan udfærdige skemaer for alle landets skoler om 3 år. Desværre har det ikke været muligt at fremskaffe programmet i løbet af kursusperioden, men et eventuelt fortsat arbejde med skemaproblemet må i første række bero på fremskaffelse af programmet og derefter undersøgelse af dets muligheder som skemalægger for danske skoler.

Kapitel 1: Skemalægningsprocessen.

Skemalægningsprocessen kan kort karakteriseres som den totale proces til udfærdigelse af en timeplan. For skolesystemer med klasseundervisning indeholder processen foruden allokeringen af lærere, klasser og lokaler processer til koordinering af undervisningens formål og lærernes ønsker. Til belysning af allokeringsprocessens placering i den totale proces skal redegøres for de delprocesser, der ifølge en skemalægningsprocedure fra en middelstor dansk kommuneskole, udgør den totale skemalægningsproces.

Processen kan principielt deles i 5 hovedpunkter:

1. Bestemmelse af skematimer og lærernormering.
2. Opstilling af fagfordelingsskema.
3. Opfyldelse af lærerønsker.
4. Korrigerende beregninger.
5. Skemalægning (timeplanlægning).

<u>Bestemmelse af skematimer og lærernormering:</u> Ved skematimer forstås det totale antal undervisningstimer (alle klasser) pr. uge. For at bestemme dette antal udregnes antallet af klasser på basis af tilmeldinger, oprykninger, indstillinger til gymnasier, fordelinger efter 5. og 7. klassetrin m.m. Endvidere bestemmes de sandsynlige elevtal (drenge og piger) og i en række særfag bestemmes holdopdelingen. Disse oplysninger anføres i skema 1 (side 1.2), og dette skema danner grundlag for beregningen af skematimer. Hertil adderes antallet af reduktionstimer og rettetimer, og som resultat fås antallet af løntimer. Dette er basis for bestemmelsen af lærernormeringen.

<u>Opstilling af fagfordelingsskema:</u> På basis af skema 1 opstilles fagfordelingsskemaet (skema 2, side 1.2), hvor timeantal påføres efter gældende undervisningsplan, idet dog holdopdelingen fra skema 1 også påføres. I hver rubrik anføres det antal timer den pågældende klasse skal have i det pågældende fag. Senere tilføjes hvilke lærere, der skal undervise de pågældende fag.

Skema 1: Klasser, elevtal, opdeling i hold.

klasse	elevtal dr	pi	ialt	antal timer i alm.fag	valgfri fag	andre	særfag ialt	timer ialt
1	1o	1o	2o	18	o	o	o	18
2	12	9	21	19	o	6	6	25
3	13	11	24	22	4	4	8	3o
sum								73

Skematimer:	73
Reduktionstimer:	4
Rettelsestimer:	6
Løntimer:	83

Skema 2: Fagfordelingsskema.

Klasselærer	klasse	rel.	dansk	regning	skrivn.	gymnast.
A	1	1	1o	5	2	o
B	2	1	9	6	2	6
C	3	1	7	6	1	3
Læste timer		3	26	17	5	9

Opfyldelse af lærerønsker: Efter bestemmelse af skematimer og fagfordelingsskema påføres lærerønsker skema 2. Derved bliver ca. 90% af timerne besat. For de resterende timer er der tale om, at enten to eller flere lærere ønsker dem, eller at ingen ønsker dem. Efter forhandlinger, som kræver både pædagogik og menneskekundskab, er skolelederen i stand til at besætte de resterende timer med ledige lærerkræfter. Det skal her nævnes, at der netop for denne delproces fra skoleside næres en vis skepsis ved overgang til EDB.

Korrigerende beregninger: Inden selve timeplanlægningen kan foretages, udføres en række beregninger. Visse lokaler skal belægges 100%, holdopdelingen mellem piger og drenge kan give problemer, og forholdet mellem antallet af lærere og antallet af hold må undersøges.

Skemalægning: Denne delproces kan betegnes som skemalægningsprocessens vanskeligste at udføre. Her skal allokeringen af klasser, lærere og lokaler foretages således, at alle (eller så mange som muligt) krav opfyldes. Endvidere skal tages hensyn til lærernes og klassernes indbyrdes implikationer. Er klasse c_j og lærer t_i placeret sammen i time h_k, så indebærer dette, at lærer t_i ikke kan undervise andre klasser i time h_k, og at klasse c_j ikke kan blive undervist af andre lærere i time h_k. Ved enhver placering af et møde mellem en lærer og en klasse vanskeliggøres processen idet antallet af ledige timer for den pågældende lærer og klasse formindskes. Ved den manuelle udarbejdelse af et skema haves et vigtigt udgangspunkt i det foregående års skema. En systematisk fremgangsmåde for manuel skemalægning angives af Lewis (38). Metoden egner sig imidlertid ikke til datamatanvendelse og er derfor ikke omtalt i nærværende projekt. I stedet henvises til kapitlet om udviklede datamatbaserede skemalægningsprocedurer. Flere af disse er velegnede til manuel anvendelse.

Den aktuelle interesse for anvendelse af datamater til udarbejdelse af skemaer er primært rettet mod denne afsluttende delproces. Det skal indrømmes, at andre af delprocesserne muligvis kan automatiseres. Dette projekt omhandler dog kun den del af skemalægningsprocessen, som her er omtalt som skemalægning.

Kapitel 2: Skemalægningsproblemets lighed med andre planlægningsproblemer.

2.1 Indledning.

Ved et studie af skemalægningsproblemet (i det følgende betegnet SL-problemet) åbenbares tydeligt dette problems lighed med andre planlægningsproblemer. Denne lighed er særlig markant til allokeringsproblemer, sekvensproblemer og ruteproblemer. Hensigten med omtalen af disse problemer er dels at placere SL-problemet som et planlægningsproblem og dels at give impulser til en eventuel udvikling af en SL-procedure i lighed med operationanalytiske procedurer som Simplex og Branch and Bound. Inden en nærmere præcisering af SL-problemets ligheder med planlægningsproblemer, for hvilke der findes procedurer til bestemmelse af optimale løsninger, vil det nok være formålstjenligt at definere begrebet "optimalt" skema.

2.2 Optimalt skema.

For at definere begrebet optimal i forbindelse med SL-problemet, må der opstilles en målsætning for undervisninger og dermed for skemaet. Folkeskolens formål er ifølge undervisningsministeriets bekendtgørelse nr. 332 af 31. aug. 1963, at fremme og udvikle børnenes anlæg og evner, at styrke deres karakter og give dem nyttige kundskaber. I forbindelse med opfyldelse af dette primære mål, kan den enkelte skole opstille en række delmål (tilfredsstillelse af lærerønsker, bestemt undervisningspolitik, minimering af intern trafik m.m.). Mange af de opstillede delmål vil have direkte sigte på skemaet, idet en fornuftig fagdeling og fagrækkefølge, en effektiv udnyttelse af specielle faciliteter m.m., alle er faktorer hvis "værdi" afhænger af det udarbejdede skema. Det vil således være muligt at opstille en målsætning for et skema. Skemaet kan da siges at være optimalt, hvis der opnås størst sandsynlighed for opfyldelse af den samlede målsætning, altså:

$$K=M_1+M_2+\ldots+M_n=\text{Optimum}$$

hvor K står for kriterium og M_i for delmål i. Skal denne ligning have mening må de forskellige delmål gøres ensbenævnte, og denne omformulering af målsætninger må bygge på nye kriterier. Delmålene kan opnås med en vis sandsynlighed p, og ovenstående ligning ændres til:

$$K=p_1M_1+p_2M_2+\ldots+p_nM_n=\text{Optimum}$$

hvor p_iM_i betyder, at delmålet M_i opfyldes med sandsynligheden p_i.

Det synes næsten umuligt at forsøge at optimere et skema. I første række vil det dog nok være tilstrækkeligt at optimere visse delmål. Men en suboptimering af forskellige delmål vil næppe bevirke, at den samlede målsætning optimeres. En målsætning kan være formuleret således, at det at finde en løsning i sig selv er en optimering af skemaet. Først når faktorer som fagfordeling, fagspredning og intern trafik antages at have betydning (indgår som led i forskellige delmål), bliver det vanskeligt at optimere skemaet.

2.3 Allokeringsproblemer.

Allokeringsproblemer opstår, når der ved udførelse af en række aktiviteter enten er begrænsede mængder af resourcer til rådighed, eller når den måde, hvorpå resourcerne kan anvendes, forhindrer udførelse af de separate aktiviteter, som giver størst "udbytte". I sådanne situationer er det ønskeligt at tildele resourcer til aktiviteterne på en sådan måde, at det totale udbytte maximeres. Antallet af mulige måder for allokeringer kan være endeligt eller uendeligt. I problemer, hvor antallet af muligheder er endeligt, kan teoretisk undersøges virkningen(udbyttet) af alle muligheder. Denne fremgangsmåde vil imidlertid selv ved små problemer være ganske tidsrøvende, og en algoritme til bestemmelse af den optimale løsning er derfor ønskelig.

Analysering af allokeringssituationer har optaget sindene stærkt i de senere år. De forekommende problemstillinger kan deles i 3 grupper i overensstemmelse med den anvendte løsningsmetodik:

1. Assignmentproblemer (tildelinger).
2. Transportproblemer.
3. Simplexproblemer.

Både assignmentproblemet og transportproblemet har visse ligheder med SL-problemet, men kun assignmentproblemet skal omtales nærmere.

2.3.1 Assignmentproblemet.

Problemet kan formuleres som: n mænd skal tildeles m maskiner, således at det totale udbytte maximeres. Eller: n ansøgere skal besætte m stillinger (Personel Assignment) på en sådan måde, at summen af kvalifikationerne for de udvalgte ansøgere maximeres. Eller: n lærere skal undervise m klasser i fag p således, at "undervisningseffekten" maximeres. I denne sidste formulering falder assignmentproblemet indenfor den del af SL-processen, som omtales under punkt 3 i kapitel 1 (Opfyldelse af lærerønsker). Som det tidligere er nævnt, er dette et punkt, hvor kendskab til lærerne har stor betydning, og anvendelse af en matematisk optimeringsmetode til denne delproces vil næppe accepteres fra skoleside.

SL-problemet er dog relevant til assignmentproblemet i en anden formulering: n lærere skal tildeles m klasser i time k således, at chancen for at nå en løsning maksimeres. Ved en senere gennemgang af SL-procedurer vil det ses, at netop denne fremgangsmåde er anvendt med beskeden succes. Dog anvendes ikke assignmentproblemets løsningsmetodik, selv om denne tilsyneladende er mindst lige så godt kvalificeret som de kriteriefunktioner, der anvendes. Dette kan belyses ved følgende eksempel:

Givet et skemaproblem, hvor lærer t_i skal møde klasse c_j i a_{ij} timer, hvor a_{ij} fremgår af flg. matrix:

$$\{a_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 3 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \\ 7 & 6 & 1 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & 6 \end{Bmatrix}$$

Ved Appleby's metode (3) udtages til placering den lærer-klasse kombination, hvor funktionen $K=p_{ij}-a_{ij}$ antager sin mindste værdi. Her betegner p_{ij} antallet af ledige perioder for kombinationen t_i-c_j. I stedet for kun at betragte en enkelt kombination kan undersøges hvilket sæt af kombinationer, der ved placering på en given time minimerer summen af de enkelte kombinationers værdi af kriteriefunktionen. Dette problem er analogt til følgende: Minimer værdien af:

$$\sum_{i,j} (p_{ij}-a_{ij})\ x_{ij}$$

hvor x_{ij} antager følgende værdier:

$$x_{ij}=o, \text{ hvis } t_i \text{ ikke tildeles } c_j \text{ og}$$
$$x_{ij}=1, \text{ hvis } t_i \text{ tildeles } c_j.$$

Problemet er altså at finde en permutation $(j_1, j_2, \dots j_n)$ af de første n heltal således, at hvis t_i tildeles c_j, så er den samlede værdi af kriteriefunktionen minimal. Problemet kan formuleres som et Lineært Programmeringsproblem og derved løses ved Simplexproceduren, men en lettere metode for dette problem kan anvendes, og den skal kort gennemgås for det anførte eksempel.

Sættes $p_{ij}=9$ for alle i og j skal findes det sæt af allokeringer, der minimerer kriteriefunktionen. For hver enkelt kombination antager kriteriefunktionen følgende værdier:

$$\{k_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 6 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & o \\ 6 & 1 & 7 & 3 \end{Bmatrix}$$

Der er 4!=24 løsninger på problemet. For at finde den bedste løsning bestemmes først det største undertal for hver række (mindste element). Dette tal subtraheres alle elementer i rækken. Dette giver:

$$\{k'_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 3 & 1 & 4 & o \\ 4 & 7 & 5 & o \\ 2 & 3 & 8 & o \\ 5 & o & 6 & 2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ o \\ 1 \end{matrix}$$

$$\text{sum} = 5$$

Dernæst bestemmes største undertal i hver søjle. Dette tal subtraheres alle elementer i søjlen:

$$\{k''_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \boxed{o} & o \\ 2 & 7 & 1 & \boxed{o} \\ \boxed{o} & 3 & 4 & o \\ 3 & \boxed{o} & 2 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$2 \quad o \quad 4 \quad o \qquad \text{sum} = 6$$

Hvis det nu er muligt at vælge en tildeling hvis totalsum i den sidste matrix (k''_{ij}) er nul, så er det den bedste tildeling, der kan foretages. For det givne eksempel ses, at $k''_{13}+k''_{24}+k''_{31}+k''_{42}=o$ og løsningen på problemet er derfor:

$$x_{13}=x_{24}=x_{31}=x_{42}=1, \text{ øvrige } x_{ij}=o.$$

Den optimale løsningssum bliver:

$$k_{13}+k_{24}+k_{31}+k_{42}=5+6 \text{ (Summen af undertal)} = 11$$

Kontrol: $2 + 1 + 7 + 1 = 11$

Imidlertid er det ikke altid, at denne simple række- og søjlereduktion vil give en løsning på problemet. Vedrørende den fuldstændige løsningsmetodik for assignmentproblemet henvises til speciallitteraturen.

2.4 Sekvensproblemer.

Sekvensproblemer omhandler situationer, hvor effektivitetsmålet er en funktion af sekvensen (rækkefølgen) af en række aktiviteter. Der findes to forskellige formuleringer af problemet:

1. n aktiviteter skal udføres, hver aktivitet kræver anvendelse af en eller flere eller alle af m maskiner. Effektiviteten af enhver rækkefølge af aktiviteter på maskinerne kan måles. Fra de $(n!)^m$ teoretisk mulige rækkefølger, skal vælges den rækkefølge, der er a) teknologisk mulig og b) som optimerer effektivitetsmålet.
2. Der findes et antal maskiner og et antal aktiviteter

skal udføres. Hver gang en maskine fuldender en aktivitet, skal det afgøres hvilken aktivitet, der nu skal påbegyndes. Denne situation kaldes et job-shop-problem.

Begge problemtyper er umådelig vanskelige at løse. Det første problem har visse ligheder med SL-problemet. Analogiseres en aktivitet med en undervisningsdag, så kan SL-problemet formuleres i overensstemmelse med ovenstående sekvensproblem: n klasser skal undervises. Hver klasse har behov for undervisning af en eller flere eller alle af m lærere. Effektiviteten af fagrækkefølgen kan måles. Tildel lærere til klasser, således at tildelingerne er a) kombinatorisk mulige og b)effektiviteten af fagrækkefølgen maximeres.

Desværre er sekvensproblemer rent løsningsmæssigt ikke nået videre end SL-problemet. Simple eksempler kan behandles rent matematisk, men en fuldstændig løsningsmetodik findes ikke. En anvendelig SL-procedure vil således også kunne anvendes på sekvensproblemer og omvendt.

2.5 Ruteproblemer.

Dette problem kan karakteriseres ved "Travelling Salesman"-problemet: En handelsrejsende ønsker med udgangspunkt i sin hjemby at besøge n-1 andre byer for derefter at returnere til sit udgangspunkt. Afstanden fra enhver by til de øvrige n-1 byer er givet og ruten ønskes bestemt således, at den totale rejselængde minimeres.

Afstanden mellem by i og by j angives i en matrix c_{ij}. c_{ii} er således lig nul. Problemet er næsten analogt til assignmentproblemet, men to yderligere begrænsninger hersker her. Der kan ikke vælges elementer langs diagonalen. Dette undgås ved at sætte diagonalelementerne til uendeligt, altså $c_{ii} = \infty$. Den anden begrænsning er, at når den handelsrejsende har besøgt by i, så ønsker han ikke at besøge denne by mere. Problemet kan imidlertid løses som assignmentproblemet, og hvis en opnået løsning ikke tilfredsstiller begrænsningerne, kan en løsning findes ved anvendelse af forskellige procedurer.

Problemet formuleres altså som assignmentproblemet med følgende ekstra begrænsning:

$$x_{i1i2}+x_{i2i3}+\ldots\ldots+x_{iki1} \leqslant k-1$$

hvor i1,i2,....ik er en vilkårlig permutation af tallene 1,2,..k, hvor $2 \leqslant k < n$.

Ved SL-problemet er bestemmelsen af en optimal fagrækkefølge analog til ruteproblemet. I modsætning til sekvensproblemer vil der ikke kunne tages hensyn til, om eventuelle kombinationer er mulige. Løsningsmetodikken for ruteproblemet kan derfor kun anvendes til bestemmelse af den teoretisk bedste fagrækkefølge for en enkelt klasses daglige fag (se afsnit om fagrækkefølge).

Kapitel 3: Fundamentale teoretiske begreber med relevans til skemalægningsproblemet.

3.1 Indledning.

Betragtes SL-problemet som et rent matematisk problem udgør grene af matematiken som mængdeteori, boolesk algebra, graph-teori og teorien om matricer en naturlig grundpille til udbygning af en SL-procedure. I dette kapitel omtales de vigtigste teoretiske begreber som ligger til grund for den matemati ke behandling af SL-problemet i næste kapitel. Af de ovenfor nævnte matematiske grene er kun teorien om grapher blevet "forsømt".

3.2 Mængdeteori (42).

Ved en mængde forstås en veldefineret samling af vilkårlige, forskellige objekter, opfattet som en helhed. Objekterne er mængdens elementer. Denne definition indeholder begrebet samling, som ikke kan defineres eksakt. Definitionen af en mængde bliver derfor analog til "Euklids definitioner" på begreberne ret linie, punkt etc. Mængder betegnes almindeligvis ved store bogstaver og elementerne ved små bogstaver. En mængde kan f. eks. betegnes ved:

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$$

At et element a_i tilhører mængden A betegnes ved: $a_i \in A$.
En mængde, som ikke indeholder nogle elementer, kaldes den tomme mængde (nulmængden) og den betegnes som Ø.

Definition af delmængde: Hvis ethvert element i en mængde A også er et element i en mængde B, kaldes A en delmængde af B og dette betegnes som: $A \subseteq B$.
$x \in A$ medfører således $x \in B$.
Den her definerede relation mellem mængder kaldes inklusionen.
Ved enhver anvendelse af teorien om mængder, vil alle mængder, som betragtes, være delmængder af en fast mængde, Universet, som betegnes ved U.

Definition af fællesmængde: Fællesmængden af mængderne A og B er mængden af elementer, som tilhører både A og B. Fællesmængden betegnes ved: $A \cap B$.

Definition af foreningsmængde: Foreningsmængden af mængderne A og B er mængden af elementer, som tilhører A eller B eller begge. Foreningsmængden betegnes ved: $A \cup B$.

For mængdelæren gælder en række af love. Af betydning ved forståelsen af den anvendte mængdeteori i næste kapitel er følgende love:

1. Den idempotente lov: $A \cup A = A$ og $A \cap A = A$
2. Den associative lov: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ og $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. Den kommutative lov: $A \cup B = B \cup A$ og $A \cap B = B \cap A$.
4. Absorbsionsloven: $A \ni B \Leftrightarrow A \cup B = A$ og $A \ni B \Leftrightarrow A \cap B = B$
5. Den identitative lov: $A \cup \emptyset = A$ og $A \cup U = U$ og $A \cap U = A$ og $A \cap \emptyset = \emptyset$

Endelig skal nævnes, at for mængdelæren gælder dualitetsprincippet.

3.3 Halls teorem (26).

Følgende klassiske teorem har betydelig anvendelse indenfor mange områder og det er især relevant til SL-problemet:

Lad $S = [S_1, S_2, S_3, \ldots S_n]$ være en endelig familie af delmængder til mængden W. En mængde $R = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$ med n forskellige elementer af W således, at $a_i \in S_i$ for $i=1,2,3,\ldots n$ kaldes et system af forskellige repræsentanter (distinct representatives) for S.

Som betingelse for, at S har et system af forskellige repræsentanter kan angives følgende nødvendige og tilstrækkelige betingelse: For hvert $k=1,2,3,\ldots n$ skal foreningsmængden af enhver af k forskellige mængder fra S indeholde mindst k forskellige elementer. Til belysning af teoremet skal anføres et eksempel:

$W=\{1,2,3,4,5,6\}$

$S_1=\{\underline{1},2,3,5\}$ $\quad S_1 \in W$

$S_2=\{1,\underline{2}\}$ $\quad S_2 \in W$

$S_3=\{1,\underline{3},4\}$ $\quad S_3 \in W$

$S_4=\{2,3,\underline{4}\}$ $\quad S_4 \in W$

$S=[S_1,S_2,S_3,S_4]$ er således en familie af delmængder til W. Det ses, at $R=\{1,2,3,4\}$ er et system af forskellige repræsentanter for S idet $1 \in S_1$, $2 \in S_2$, $3 \in S_3$, $4 \in S_4$.

Af Marchall Hall (25) er udviklet en algoritme, der kan konstruere et system af forskellige repræsentanter for en endelig familie af delmængder (hvis et sådant eksisterer).

Halls teorem er en følge af et tidligere teorem af König (36). König angav sit teorem for grapher, men det vil føre for vidt også at omtale dette teorem, da det vil kræve en grundig beskrivelse af teorien for grapher.

Derimod skal omtales et kendt matematisk problem, som bygger på Halls teorem, og som derved er relevant til SL-problemet.

3.3.1 <u>The Marriage Problem.</u>

Dette problem omhandler en mængde af munke og en mængde af piger. Hver munk kender et antal af pigerne og han ønsker at blive gift med et vist antal af disse (forskelligt for hver munk). Problemet er så at finde piger til hver munk indenfor hans bekendtskabskreds. Halmos og Vaughan (27) behandler problemet og angiver følgende teorem (generalisering af Halls teorem) for nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at the marriage problem har en løsning:

Lad $S=[S_1,S_2,S_3,\ldots S_n]$ være en (endelig eller uendelig) familie af delmængder til en mængde W og lad $(r_1,r_2,r_3,\ldots r_n)$ være ikke-negative heltal kaldet behovene. Der eksisterer da et generaliseret system af forskellige repræsentanter i hvilket S_i er repræsenteret nøjagtig r_i gange, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt: For k=1,2,3,...n skal antallet af forskellige elementer i foreningsmængden af ethvert af k delmængder fra S være større end eller lig med de korresponderende behov.

Anvendes ovenstående teorem på the marriage problem er S_i mængden af piger, som kendes af den i-te munk og r_i er antallet af piger den i-te munk ønsker at gifte sig med.

3.4 Matrixbegreber.

Her skal omtales en række vigtige teoremer for matricer. For at forstå disse, defineres først følgende begreber (10):

1. Matricens <u>cover</u> er en mængde af rækker og søjler som indeholder alle nul-elementer.
2. Matricens <u>minimum-cover</u> er den cover, hvor antallet af rækker og søjler er minimum.
3. Matricens <u>coverance</u> er antallet af rækker og søjler i en minimum-cover.
4. En <u>transversal</u> er en mængde af ikke-nul-elementer, et element fra hver række og søjle.
5. En <u>maximum-transversal</u> er en transversal, hvor antallet af elementer er maximalt.
6. Matricens <u>term-rank</u> er antallet af elementer i en maximum-transversal.

Teorem 1: En matrices coverance er lig dens term-rank.

Teorem 2: Fra en matrix M er det muligt at udvælge et ikke-nul-element fra hver række og søjle, hvis og kun hvis det minimale antal af søjler indeholdende alle ikke-nul-elementer for en given mængde af k rækker, mindst er k.

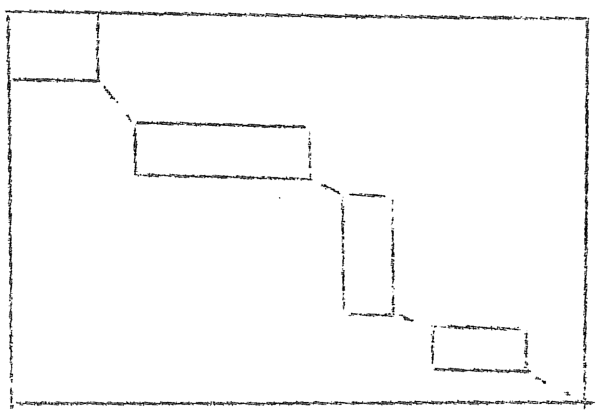
Teorem 3: Hvis mindre end k søjler i en nxm-matrix indeholder ikke-nul-elementer i k rækker, så vil disse søjler og de resterende n-k rækker udgøre en cover i hvilken det totale antal af rækker og søjler er mindre end m.

Beviserne for disse teoremer angives af König (36). Hvis matricen M er kvadratisk (m=n) er teorem 2 ækvivalent til et teorem af Frobenius om determinanter (19).

Dulmage og Mendelsohn har udviddet M. Halls algoritme til at finde maximum-transversalen i en matrix (12). Proceduren for assignmentproblemet kan imidlertid også anvendes. Repræsenterer $C=\{c_{ij}\}$ assignmentproblemet og er $(j_1, j_2, j_3, \ldots j_n)$ en løsning til dette problem, da vil opnåelsen af denne løsning være analog til bestemmelse af matricen C's maximumtransversal. En effektiv metode til løsning af assignmentproblemet er også udviklet af Egervary (16) og Kuhn (35). Metoden, som er kendt som "The Hungarian Method" gennemgås senere i projektet. En direkte anvendelse af metoden til konstruktion af en maximum-transversal er beskrevet af Berge(5), hvor problemet analogiseres med problemet at finde det maximale flow i et netværk.

3.4.1 Matricers struktur.

En matrix er irreducibel, hvis den har to minimum-covers, en bestående af dens søjler, og en bestående af dens rækker. En matrix er semi-irreducibel, hvis den har en enkelt minimum-cover bestående af enten dens rækker eller dens søjler. En semi-irreducibel matrix er minimal semi-irreducibel, hvis den tilhørende todelte graph er forbundet (connect). Vedrørende struktur-teorien for grapher henvises til Dulmage og Mendelsohn (13) hvor teorien ækvivaleres med teorien for booleske matricer. Dulmage og Mendelsohn har vist, at hvis M er en matrix med både nul-elementer og ikke-nul-elementer, så vil en ordning af rækker og søjler bringe M på følgende form:



Her repræsenterer kvadraterne irreducible og rektanglerne minimale semi-irreducible matricer. Til højre for og ovenover kvadrater og rektangler findes kun nul-elementer. Elementerne til en maximum-transversal må tages fra rektanglerne og kvadraterne og ethvert ikke-nul-element i disse tilhører en maximum-transversal.

3.4.2 <u>Feasibility af booleske matricer.</u>

I den videre udvikling af de i dette afsnit nævnte grundliggende matrixbegreber forbindes booleske matricer (matricer med nul-elementer og 1-elementer) med behovvektorer (vektorer med ikke-negative heltalselementer). Antallet af komponenter i den forbundne behovvektor er lig antallet af rækker i matricen. Den i-te komponent i behovvektoren kaldes behovet korresponderende til matricens i-te række.

Definition af <u>feasibility</u>: M er en boolesk matrix med behovvektor $\tilde{r}$. M er feasibel med hensyn til $\tilde{r}$, hvis der eksisterer en boolesk matrix således, at:

1. $S \leqq M$ ($S \leqq M$ betyder, at S og M har samme dimension, og elementerne i S er ikke større end de tilsvarende elementer i M).
2. S har højst et 1-tal i hver søjle.
3. S har nøjagtig r_i 1-taller i den i-te række.

Opfylder en matrix S således ovenstående betingelser, kaldes S en <u>scheduling</u> i M.

<u>Eksempel</u>: For M og $\tilde{r}$ haves følgende værdier:

$$\begin{array}{ccccccc} & & M & & & & \tilde{r} \\ 1 & 1 & 1 & o & 1 & & 2 \\ o & 1 & o & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & o & 1 & & 2 \end{array}$$

For denne kombination kan findes følgende scheduling S:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & o & o & o & & 2 \\ o & o & o & 1 & o & & 1 \\ o & o & 1 & o & 1 & & 2 \end{array}$$

Da S tilfredsstiller de tre anførte betingelser for feasibility, er M feasibel med hensyn til r.

Rækker og søjler i booleske matricer betragtes som booleske vektorer. Foreningsmængde og fællesmængde af booleske matricer er også booleske matricer. Hvis $U= u_1,u_2,u_3,\ldots u_n$ og $V= v_1,v_2,v_3,\ldots v_n$ er booleske vektorer af samme dimension, så bliver den i-te komponent i

1) fællesmængden $U\cap V$: $u_i v_i$ og i
2) foreningsmængden $U\cup V$: $u_i+v_i-u_i v_i$

<u>Eksempel:</u> Haves to booleske vektorer U og V, hvor

$U=\{1,1,o,o\}$ og
$V=\{1,o,1,o\}$

bliver $U\cup V=\{1,1,1,o\}$ og
$U\cap V=\{1,o,o,o\}$

Den i-te række og den j-te søjle i en matrix er <u>tilsluttet</u> hinanden, hvis det pågældende element m_{ij} er lig 1. Hvis T er en mængde af rækker (søjler) i M, så er en søjle (række) tilsluttet T, hvis den er tilsluttet en række (søjle) i T. Antallet af søjler (rækker), der er tilsluttet T betegnes ved u(T). Dette antal fås ved at optælle antallet af 1-taller i foreningsmængden af rækkerne (søjlerne) i T. Summen af behovene svarende til rækkerne i T betegnes ved r(T). Ækvivalent til teoremet omtalt i forbindelse "The Marriage Problem" kan her anføres:

Idet M er en boolesk matrix med behovvektor $\tilde{r}$ er M feasibel med hensyn til $\tilde{r}$, hvis og kun hvis der for hver delmængde S af mængden af rækker i M gælder, at $u(S)\geqslant r(S)$.

3.4.3 <u>Matrixreduktion.</u>

Et ikke-nul-element $m_{i_oj_o}$ i M kaldes <u>brugbart</u>, hvis der eksisterer en scheduling S i M hvor $s_{i_oj_o}=1$. Ethvert element (ikke-nul), der kan optræde i en scheduling, er derfor brugbart.. En <u>reduktion</u> af en matrix M (betegnes R(M)) afledes fra M ved at ændre de <u>ikke-brugbare</u> elementer, d.v.s elementer der ikke kan optræde i en scheduling. Elementerne ændres til nul. Af dette fås, at reduktionen af en infeasibel matrix er en nul-matrix. En matrix M er først reduceret når R(M)=M.

Afledt af ovenstående definitioner kan anføres tre teoremer:

Teorem 1: M er en boolesk matrix med behovvektor $\tilde{r}$. Et ikke-nul-element m_{ij} i M er brugbart hvis og kun hvis to betingelser er opfyldt:

a) $r_i > 0$ og

b) M' er feasibel med hensyn til $\tilde{r}'$, hvor M' opstår ved ændring af den j-te søjle i M til nuller, og $\tilde{r}'$ opstår ved ændring af r_i i $\tilde{r}$ til $r_i - 1$.

Teorem 2: Hvis L og M er booleske matricer med samme behovvektor, og $L \leq M$, så er $R(L) \leq R(M)$.

Teorem 3: M er en boolesk matrix med behovvektor $\tilde{r}$. Hvis M' opstår fra M ved ændring af nogle rækker i M til nuller og $\tilde{r}'$ opstår fra $\tilde{r}$ ved ændring af de korresponderende behov til nul, så er et ikke-brugbart element i M' ikke-brugbart i M.

Da matrixreduktion er en vigtig foreteelse ved SL-problemets løsning, skal disse tre teoremer kort belyses ved tre eksempler:

<u>Eksempel 1:</u>

M	$\tilde{r}$
1 o 1	1
o 1 o	1
1 1 o	1

Undersøges det 1. element i 3. række i henhold til teorem 1 er den 1. betingelse opfyldt (r_3=1). Ændres nu den 1. søjle til nuller fås:

M'	$\tilde{r}'$	S'
o o 1	1	o o 1
o 1 o	1	o 1 o
o 1 o	o	o o o

Da M' er feasibel med hensyn til r' (S' fremstiller en scheduling) er også teoremets anden betingelse opfyldt, og det undersøgte element er derfor brugbart.

Eksempel 2:

M	L	$\tilde{r}$
1 0 1	1 0 1	1
1 1 0	1 1 0	1
1 0 1	0 0 1	1

For de to booleske matricer M og L gælder, at L$\leqslant$M og de har fælles behovvektor. Ved reduktion fås:

R(M)	R(L)	$\tilde{r}$
1 0 1	1 0 0	1
0 1 0	0 1 0	1
1 0 1	0 0 1	1

Det fremgår heraf, at R(L)$\leqslant$R(M) i overensstemmelse med teorem 2.

Eksempel 3:

M	$\tilde{r}$	M'	$\tilde{r}'$
1 0 1	1	0 0 0	0
1 0 0	1	1 0 0	1
1 1 1	1	1 1 1	1

M' er dannet af M ved at sætte den første række til nuller. I M' er 3. rækkes 1. element ikke-brugbart (der kan ikke dannes en scheduling indeholdende dette element). Ifølge teorem 3 er dette element også ikke-brugbart i M, hvilket da også fremgår af eksemplet.

3.4.4 Kvadratiske og slække matricer.

En mængde S af rækker er kvadratisk hvis u(S)=r(S), og hvis der for enhver delmængde T til S gælder, at u(T)$\geqslant$r(T). En mængde S af rækker er slæk , hvis u(S)$>$r(S) og hvis der for enhver delmængde T til S gælder, at u(T)$>$r(T). En mængde S af rækker er tæt kvadratisk, hvis S er kvadratisk og enhver delmængde til S er slæk. Udfra disse definitioner kan anføres et vigtigt teorem:

Teorem: M er en feasibel boolesk matrix med behovvektor $\tilde{r}$. Et ikke-nul-element m_{ij} i M er ikke-brugbart, hvis og kun hvis en af følgende betingelser er opfyldt:

1. r_i=o
2. Der eksisterer en kvadratisk mængde S i M således, at den j-te søjle er tilsluttet S, men den i-te række ikke er tilsluttet S.

Beviserne fremføres af Csima (1o).

<u>Eksempel</u>:

M			$\tilde{r}$
1	o	1	1
1	o	o	1
1	1	1	1

I denne matrix udgør 1. og 2. række en kvadratisk mængde. I denne mængde er 1. søjle repræsenteret og derfor er elementet i 1. søjle og 3. række ikke-brugbart.

Fra teoremet kan afledes:

M er en boolesk matrix og m_{ij} er et ikke-nul-element i M. Hvis den j-te søjle i M er tilsluttet en kvadratisk mængde S og den i-te række ikke er tilsluttet S, så er m_{ij} ikke-brugbart.

Betingelserne for, at en matrix er reduceret, er:

1. De rækker, for hvilke de korresponderende behov er nul, er alle nulrækker (indeholder kun nul-elementer).
2. Rækkerne i M kan deles i tætte kvadratiske mængder og slække mængder således, at fællesmængden af to rækker er nul, når disse rækker tages fra hendholdsvis en tæt kvadratisk og en slæk mængde.

<u>Eksempel</u>:

M						$\tilde{r}$
1	1	o	o	o	o	1
1	1	o	o	o	o	1
o	o	1	1	1	o	1
o	o	1	1	1	o	1
o	o	o	o	o	1	1

Række 1 og 2 er tæt kvadratisk. Række 3 og 4 er slæk og række 5 er tæt kvadratisk. Enhver kombination af en tæt kvadratisk og en slæk mængde giver fællesmængden nul. M er derfor reduceret.

En mængde af rækker og søjler i en matrix M (feasibel) er en tæt kombination, hvis de korresponderende rækker og søjler i R(M) er tilsluttet tætte kvadratiske mængder. Rækker og søjler i M svarende til slække mængder i R(M) udgør løse kombinationer.

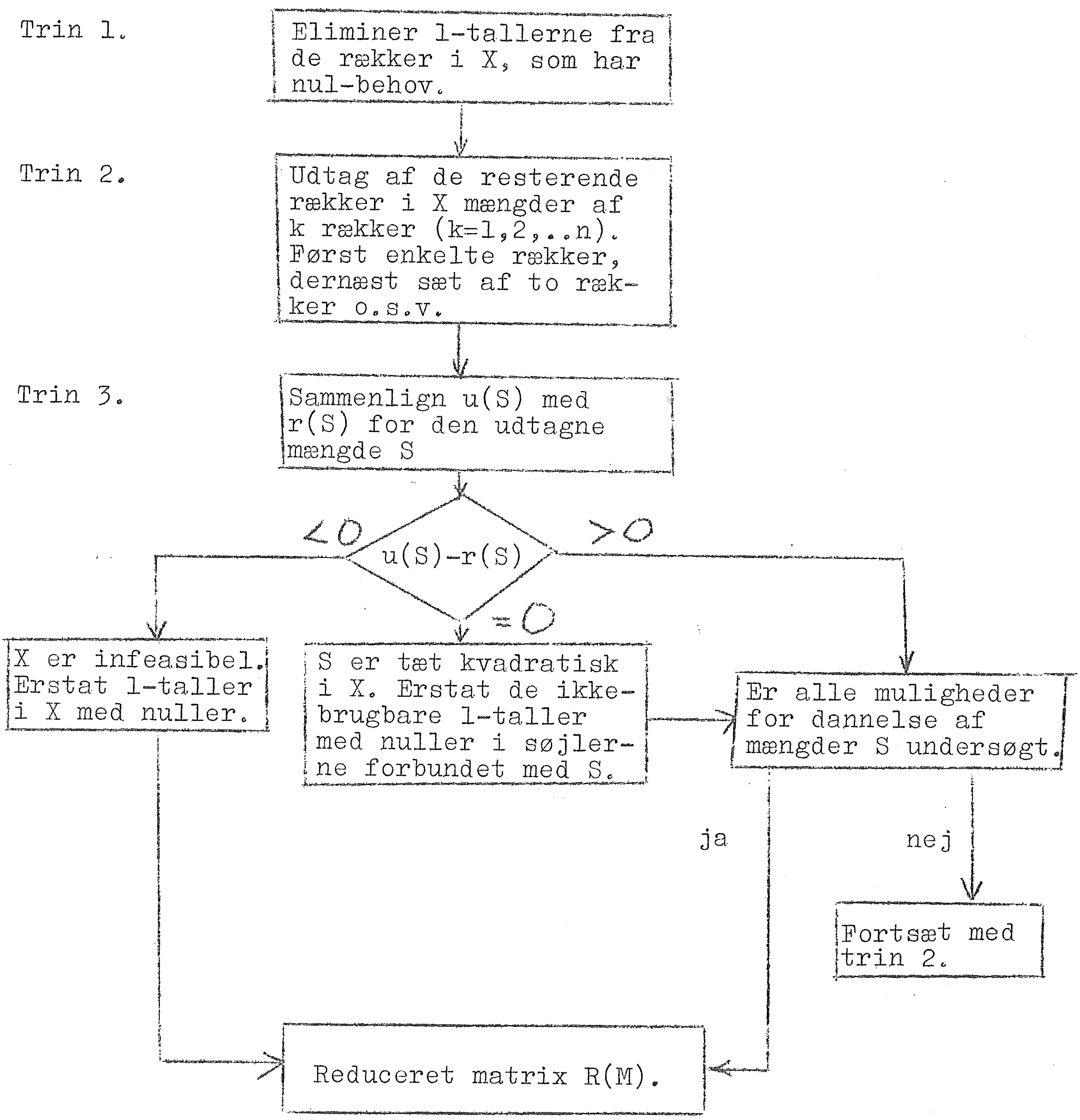
Opdelingen af en matrix består i at finde dens løse og tætte kombinationer. Medens enhver række i en feasibel matrix tilhører en tæt eller løs kombination, er dette ikke tilfældet for de søjler, som ikke indeholder brugbare elementer. Hvis en søjle i M tilhører en tæt kombination, så vil enhver scheduling i M have et ikke-nul-element fra denne søjle. På den anden side, hvis en søjle, som tilhører en løs kombination, elimineres, så forbliver M feasibel. Af dette følger:

> Er A og B booleske matricer med samme behovvektor, og er A feasibel, samt gælder ligningen $A \leqq B$, da vil en søjle i A tilhøre en tæt kombination, hvis dette er tilfældet for den korresponderende søjle i B.

3.4.5 Algoritme til reduktion af matricer.

Da der ved løsning af et SL-problem indgår reduktion af matricer, skal her anføres en simpel algoritme til udførelse af dette:

M er en boolesk matrix med behovvektor $\tilde{r}$. I algoritmen er X en variabel matrix med $\tilde{r}$ som en fast behovvektor. Initialt sættes M=X. De ikke-brugbare elementer i X elimineres trin for trin. Den endelige form af X vil være R(M). Algoritmen er anskueliggjort ved et blokdiagram på næste side.


Trin 1.
Eliminer 1-tallerne fra de rækker i X, som har nul-behov.
Trin 2.
Udtag af de resterende rækker i X mængder af k rækker (k=1,2,..n). Først enkelte rækker, dernæst sæt af to rækker o.s.v.
Trin 3.
Sammenlign u(S) med r(S) for den udtagne mængde S
u(S)-r(S)
<0
>0
=0
X er infeasibel. Erstat 1-taller i X med nuller.
S er tæt kvadratisk i X. Erstat de ikke-brugbare 1-taller med nuller i søjlerne forbundet med S.
Er alle muligheder for dannelse af mængder S undersøgt.
ja
nej
Fortsæt med trin 2.
Reduceret matrix R(M).

Kapitel 4: Skemaproblemets formulering, feasibility og løsningsmetodik.

4.1 Indledning.

I dette kapitel behandles SL-problemet matematisk i overensstemmelse med definitioner og teoremer i kapitel 3. Behandlingen bygger væsentligst på Gotliebs (2o) fremstilling af problemet og den udviklede metodik er grundpille i et datamat-program, som har succes i Canada (OSSP, omtales senere i projektet).

4.2 Definitioner.

Med henblik på denne fremstilling af SL-problemet skal defineres en række udtryksmåder. Problemet behandles som værende 3-dimensionalt, idet der som variable haves: Lærere, klasser og perioder. Der tages ikke hensyn til den 4. væsentlige dimension: Lokaler. Enhver komponent kan fastlægges ved 3 indices (lærer, klasse, periode). Er en af indices en løbende variabel og de andre parametre betragtes komponenterne som sæt af vektorer:

A^{ij} med komponenter a_k^{ij}

eller A^{i} med komponenter a_k^{i}

Når to af indices er løbende variable betragtes komponenterne som sæt af matricer:

S^{k} med komponenter s_{ij}^{k}

Herefter defineres følgende kvantiteter:

1. Foreningsmængden af to vektorer:

$$B = A^{j1} \cup A^{j2} = \bigcup_{j1,j2} A^{j}$$

hvor $b_k = a_k^{j1} + a_k^{j2} - a_k^{j1} a_k^{j2}$

2. Fællesmængden af to vektorer:

$$C=A^{j1}\cap A^{j2}=\bigcap_{j1,j2} A^{j}$$

hvor $c_k=a_k^{j1}a_k^{j2}$

Endelig defineres:

$$\|A\|=\sum_k a_k$$

4.3 Formulering af skemalægningsproblemet.

$(\tilde{R};\ S^1,S^2,\ldots,S^w)$ er et skemaproblem, hvis $\tilde{R}$ er en matrix med ikke-negative heltalselementer og $S=S^1,S^2,\ldots,S^w$ er matricer, hvor w er større end eller lig med rækkesum og søjlesum i $\tilde{R}$ og

$$\sum_{k=1}^{w} S^k \leq \tilde{R}.$$

Matricerne $\tilde{S}^1,\tilde{S}^2,\ldots,\tilde{S}^w$ udgør en løsning (scheduling) for $(\tilde{R};\ S^1,S^2,\ldots,S^w)$ hvis:

$$\sum_{k=1}^{w} \tilde{S}^k=\tilde{R} \qquad \text{og}$$

$$S^k \leq \tilde{S}^k \quad \text{for } k=1,2,\ldots,w$$

Som det i det følgende skal vises, betyder $\tilde{R}$ den initiale behovmatrix, R den residuale behovmatrix, S de initiale tildelinger og $\tilde{S}$ er det endelige skema.

Tre ordnede endelige mængder introduceres:

1. En mængde af lærere: $T=\{t_i\}$, $i=1,2,\ldots,u$
2. En mængde af klasser: $C=\{c_j\}$, $j=1,2,\ldots,v$
3. En mængde af timer: $H=\{h_k\}$, $k=1,2,\ldots,w$

Disse mængder er disjunkte (ingen fælles elementer). u er antallet af rækker i R og v er antallet af søjler.

$\tilde{R}$ betegnes som den initiale behovmatrix. Elementerne $\tilde{r}_{ij}$ angiver antallet af timer t_i skal undervise c_j. $\tilde{r}_{io}$ defineres som det antal timer t_i er beskæftiget udenfor undervisning (frokost, lærermøde m.m.) og analogt hertil defineres $\tilde{r}_{oj}$ som det antal timer, c_j er beskæftiget uden involvering af lærere.

For $\tilde{r}_{ij}$ gælder:

$$\sum_i \tilde{r}_{ij} \leq w \quad \text{og} \qquad (4.1)$$

$$\sum_j \tilde{r}_{ij} \leq w \qquad (4.2)$$

Skemaet udvikles som en sekvens af scheduling-matricer $\tilde{S}^1,..\tilde{S}^k,.\tilde{S}^w$ med elementer $\tilde{s}^k_{ij}$, som er 1 eller o når t_i møder henholdsvis ikke møder c_j i time h_k.

<u>Eksempel</u>: For time h_k haves følgende scheduling-matrix $\tilde{S}^k$:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & o & o \\ o & o & 1 \\ o & 1 & o \end{matrix}\right\}$$

Matricen angiver, at i time h_k skal t_1 møde c_1, t_2 skal møde c_3 og t_3 skal møde c_2.

Der skal udvikles en scheduling-matrix for hver time, og for disse matricer gælder følgende ligning:

$$\sum_k \tilde{s}^k_{ij} = \tilde{r}_{ij} \quad , \ i=1,2,..,u \text{ og } j=1,2,..,v \qquad (4.3)$$

(Det totale antal timer, der er placeret for et møde mellem t_i og c_j skal være lig behovet).

Da en lærer eller klasse kun kan være på et sted hver time, kan opstilles endnu to begrænsningsligninger:

$$\sum_i \tilde{s}^k_{ij} \leq 1 \quad \text{og} \qquad (4.4)$$

$$\sum_j \tilde{s}^k_{ij} \leq 1 \qquad (4.5)$$

(se også afsnit om booleske matricer).

Initiale tildelinger.;

For at sikre, at skemaet danner et vist ønskeligt mønster, og for at opnå optimal udnyttelse af kritiske faciliteter, forudsættes, at nogle tildelinger foretages ved hjælp af en initial tildelingsmatrix S^k, for hvis elementer s_{ij}^k det gælder:

$$s_{ij}^k \leq \tilde{s}_{ij}^k \tag{4.6}$$

Hvis $s_{ij}^k=1$ betyder dette, at t_i initialt tildeles c_j i time h_k.

Ved opbygningen af et skema kan der optræde specielle krav som:

1. Lærer A skal møde klasse B i 2 på hinanden følgende timer.
2. Lærer C skal møde klasse D i 1 time.
3. Lærer E og lærer F skal møde henholdsvis klasse G og klasse H på samme tid.

Der kan optræde andre og mere specielle krav end de her nævnte. Disse krav må udformes således, at de enten tildeles initialt, eller indførte rutiner i SL-proceduren kan behandle dem.

Den her beskrevne formulering af SL-problemet bygger på en behovmatrix og en initial tildelingsmatrix. De initiale tildelinger må opstilles i en bestemt orden (prioritetsrækkefølge), da det ofte vil være umuligt at konstruere et skema, som indeholder dem alle. De initiale tildelinger må derfor testes, idet de kun akcepteres, hvis de ikke gør skemaet infeasibel (forhindre løsning).

Den residuale behovmatrix defineres ved:

$$R=\tilde{R}-\sum_k S^k \tag{4.7}$$

idet der ved den resterende SL-procedure kun skal placeres et antal timer, svarende til det totale behov reduceret med det antal timer, der er placeret initialt.

4.4 Feasibility.

Ved løsning af et SL-problem vil det være af stor betydning, hvis problemets feasibility kan undersøges på et initialt stade. Dette vil hindre forsøg på at udfærdige skemaer for problemer, som ingen løsning har. En sådan undersøgelse vil samtidig i fald af påvist mulighed for løsning, angive hvorledes løsningen kan findes. I et forsøg på at udfærdige en kombineret feasibility- og løsningsprocedure, udviklede Gotlieb oprindeligt next stage feasibility-metoden, hvor schedulingen foretages trin for trin. Denne metode skal ikke omtales nærmere her, men det skal dog nævnes, at en tilstrækkelig betingelse for metodens udførelse er, at alle lærere og klasser tilfredsstiller Hall-betingelserne (se kapitel 3).

Senere udvikledes af Csima long-range feasibility-metoden. Denne metode kan betragtes som en udvidelse af next-stage metoden. Til sammenligning kan nævnes, at begge metoder er baseret på Gotliebs formulering af problemet samt på Halls teorem. Next-stage metoden er en heuristisk metode, hvor back-tracking kan blive nødvendigt (med back-tracking menes, at nogle af de tidligere tildelinger skal ændres for at nå til en løsning). Long-range metoden er systematisk og ingen back-tracking er nødvendig. Metoden undersøger problemets feasibility på et initialt stade, og er problemet feasibel findes nemt en løsning.

4.4.1 Long-range feasibility metoden.

For at finde timer, hvor t_i kan placeres, er vi interesseret i timer, hvor t_i ikke er optaget, d.v.s. timer, for hvilke gælder

$$\sum_j s^k_{ij}=o \qquad (4.8)$$

eller alternativt, hvis

$$\prod_j \bar{s}^k_{ij}=1 \qquad (4.9)$$

hvor

$$\bar{s}^k_{ij}=1-s^k_{ij} \qquad (4.1o)$$

<u>Rådighedsvektoren</u> for t_i definers som: $A^i=\{a_k^i\}$ hvor

$$a_k^i = \prod_j \bar{s}_{ij}^k \qquad (4.11)$$

a_k^i har værdien 1, hvis t_i er til rådighed i time h_k, og værdien o, hvis t_i ikke er til rådighed i time h_k.

$\sum_k a_k^i$ angiver antallet af timer t_i er til rådighed.

$\sum_i a_k^i$ angiver antallet af lærere, der er til rådighed i time h_k.

Analogt findes rådighedsvektoren A^j for c_j, hvor

$$a_k^j = \prod_i \bar{s}_{ij}^k \qquad (4.12)$$

For at t_i kan møde c_j skal begges rådighedsvektorer have værdien 1 (begge skal være til rådighed), og man får følgende værdier for fællesmængden $A^i \cap A^j$:

		A^i	
$\cap A^{ij}$		o	1
	o	o	o
A^j	1	o	1

For at sikre, at der initialt er tilstrækkeligt med timer til rådighed for et møde mellem t_i og c_j må gælde:

$$\| \cap A^{ij} \| \geq r_{ij} \text{ for alle i og j.} \qquad (4.13)$$

hvor $\|A^{ij}\|$ ifølge definitionen er lig $\sum_k a_k^{ij}$.

Ligning (4.13) udtrykker, at det antal timer, hvor det er muligt at sammenstille t_i og c_j (d.v.s det antal timer, for hvilke $a_k^{ij}=1$), må være større end eller lig med behovet for t_i og c_j.

<u>Eksempel</u>: Betragtes en periode på 5 timer (w=5) og er rådighedsvektorerne for t_i og c_j:

$$A^i=(o,1,1,o,1)$$
$$A^j=(1,o,1,1,1)$$

fås $A^i \cap A^j=(o,o,1,o,1)$

t_i er til rådighed for c_j i time 3 og 5, d.v.s. $\|\cap A^{ij}\| = 2$. Det er derfor kun muligt at lave et skema for t_i og c_j såfremt r_{ij} er mindre end eller lig med 2.

!

Betegner C^i mængden af klasser, som skal undervises af t_i og er to af disse klasser c_{j1} og c_{j2}, da skal antallet af timer, hvor t_i er til rådighed for c_{j1} forøget med de særskilte timer, hvor t_i er til rådighed for c_{j2}, være mindst lig med summen af behovene for t_i, c_{j1} og t_i, c_{j2}. For feasibility i dette tilfælde gælder derfor:

$$\Big\| \bigcup_{j1,j2} A^{ij} \Big\| \geq r_{ij1} + r_{ij2} \qquad (4.14)$$

Udtrykket $\Big\| \bigcup_{j1,j2} A^{ij} \Big\|$ fortolkes som følgende:

Haves to rådighedsvektorer for kombinationerne t_i, c_{j1} og t_i, c_{j2} (A^{ij1} og A^{ij2}), angivende på hvilke tidspunkter disse kombinationer er mulige, da bestemmes vektoren $A^{ij1} \cup A^{ij2}$ efter følgende skema:

		A^{ij1}	
		o	1
	o	o	1
A^{ij2}	1	1	1

d.v.s. at foreningsmængden er 1, blot en af objekterne (lærer, klasse) er til rådighed.

<u>Eksempel</u>: For t_i, c_{j1} og c_{j2} haves flg. rådighedsvektorer:

$$A^i = (1,1,1,o,1)$$
$$A^{j1} = (1,o,1,1,o)$$
$$A^{j2} = (1,1,o,1,1)$$

For kombinationerne t_i, c_{j1} og t_i, c_{j2} fås:

$$A^{ij1} = (1,o,1,o,o)$$
$$A^{ij2} = (1,1,o,o,1)$$

Foreningsmængden bliver:

$$A^{ij1} \cup A^{ij2} = (1,1,1,o,1)$$

Heraf fås: $\|\bigcup_{j1,j2} A^{ij}\|=4$

Om behovene forudsættes (ligning 4.13):

$$r_{ij1} \leq \|A^{ij1}\|=2 \quad \text{og}$$

$$r_{ij2} \leq \|A^{ij2}\|=3$$

Som yderligere restriktion fås nu (ligning 4.14):

$$r_{ij1}+r_{ij2} \leq \|\bigcup_{j1,j2} A^{ij}\|=4$$

d.v.s. restriktionerne for henholdsvis r_{ij1} og r_{ij2} ikke er tilstrækkelige (de ledige perioder implicerer hinanden).

Er $r_{ij1}=r_{ij2}=2$ bliver den eneste løsning: t_i møder c_{j1} i timerne 1 og 3, og t_i møder c_{j2} i timerne 2 og 5.

For at et system er feasibelt, skal ligningerne (4.13) og (4.14) være opfyldt. Ligningerne angiver feasibility for 1 lærer og henholdsvis en og to klasser. Feasibilityligningerne skal nu udviddes til at omfatte alle kombinationer af lærere (klasser) og de dertil hørende mængder af klasser C^i (lærere T^j).

Er S en delmængde af C^i ($S \subseteq C^i$) kan en <u>nødvendig betingelse</u> for feasibility udtrykkes som

$$\|\bigcup_{c_j \in S} A^{ij}\| \geq \sum_{c_j \in S} r_{ij} \quad \text{for alle } i \text{ og alle } S \in C^i. \qquad (4.15)$$

Analogt fås:

$$\|\bigcup_{t_i \in S} A^{ij}\| \geq \sum_{t_i \in S} r_{ij} \quad \text{for alle } j \text{ og alle } S \in T^j. \qquad (4.16)$$

T^j angiver mængden af lærere, der skal undervise c_j.

Er ligning (4.15) tilfredsstillet for lærer t_i, kan der konstrueres et skema, hvor t_i møder alle sine klasser i det ønskede antal timer (behovet tilfredsstillet). Analogt kan konkluderes for ligning (4.16) og klasse c_j.

4.4.2 Eksempel på anvendelse af feasibility-test.

Givet en skole med 3 lærere og 3 klasser. Der skal udarbejdes et skema for 4 perioder, tilfredsstillende følgende behov og krav:

Normale krav (behovet):

$$\{\tilde{r}_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{Bmatrix}$$

Specielle krav:

1. c_1 og t_2 skal mødes i time 1 og time 2.
2. c_3 og t_3 skal mødes i time 2 og time 4.
3. c_1 og t_1 skal mødes i time 3.
4. c_2 og t_1 skal mødes i time 4.

Først undersøges, om disse initiale tildelinger er mulige. Det er tilfældet for dette eksempel, og der kan udformes følgende initiale tildelingsmatrix S^k:

$$S^1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad S^2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad S^3 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad S^4 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Når disse timer er placeret, fås følgende rådighedsvektorer for klasser og lærere:

$$A^{c}1 = (0,0,0,1)$$
$$A^{c}2 = (1,1,1,0)$$
$$A^{c}3 = (1,0,1,0)$$

$$A^{t}1 = (1,1,0,0)$$
$$A^{t}2 = (0,0,1,1)$$
$$A^{t}3 = (1,0,1,0)$$

Den residuale behovmatrix bliver: $R = \tilde{R} - \sum_k S^k$

$$\{r_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

For at undersøge, om systemet er feasibelt, dannes rådigheds-vektorer for mulige møder mellem lærere og klasser:

$A^{t}{}_{i} \cap A^{c}{}_{j}$ betegnes ved A^{ij}.

$$A^{11}=(o,o,o,o)$$
$$A^{12}=(1,1,o,o) \quad x)$$
$$A^{13}=(1,o,o,o)$$

$$A^{21}=(o,o,o,1)$$
$$A^{22}=(o,o,1,o) \quad x)$$
$$A^{23}=(o,o,1,o)$$

$$A^{31}=(o,o,o,o)$$
$$A^{32}=(1,o,1,o) \quad x)$$
$$A^{33}=(1,o,1,o)$$

For hver lærer-klasse kombination bestemmes antallet af mulige møder ($\|A^{ij}\|$). Her skal kun vises udførelsen af feasibility-testen for alle kombinationer involverende c_2, anført ved x):

$\|A^{12}\|=2$	(periode 1 og 2)	$r_{12}=1$	$\|A^{12}\| > r_{12}$
$\|A^{22}\|=1$	(periode 3)	$r_{22}=1$	$\|A^{22}\| = r_{22}$
$\|A^{32}\|=2$	(periode 1 og 3)	$r_{32}=1$	$\|A^{32}\| > r_{32}$

Feasibilityligningen (4.13) er opfyldt for klasse c_2 ($\|A^{i2}\| \geq r_{i2}$ for alle i).Herefter undersøges feasibiliteten for hver kombination af c_2 og to lærere:

$\|\bigcup_{1,2} A^{i2}\|=3$	(per. 1,2 og 3)	$\sum_{1,2} r_{i2}=2$
$\|\bigcup_{1,3} A^{i2}\|=3$	(per. 1,2 og 3)	$\sum_{1,3} r_{i2}=2$
$\|\bigcup_{2,3} A^{i2}\|=2$	(per. 1 og 3)	$\sum_{2,3} r_{i2}=2$

Feasibility-ligningen (4.14) er opfyldt, da:

$$\|\bigcup A^{i2}\| \geq \sum r_{i2} \text{ for } i=\begin{cases} 1,2 \\ 1,3 \\ 2,3 \end{cases}$$

Endelig undersøges feasibiliteten af klasse c_2 i kombination med 3 lærere:

$$\left\| \bigcup_{1,2,3} A^{i2} \right\| = 3 \quad \text{(per. 1,2 og 3)} \qquad \sum_{1,2,3} r_{i2} = 3$$

Feasibilityligningen (4.16) er også opfyldt, da:

$$\left\| \bigcup A^{i2} \right\| = \sum r_{i2} \quad \text{hvor } i=1,2,3$$

Det er hermed fastslået, at systemet er feasibelt med hensyn til klasse c_2. Fortsættes med undersøgelse af andre lærere og klasser viser det sig, at systemet er feasibel med hensyn til alle lærere og klasser.

For fuldstændighedens skyld skal her anføres problemets eneste løsning:

$$\tilde{S}^1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \tilde{S}^2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \tilde{S}^3 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \tilde{S}^4 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

I kapitel 6 er bestemt den fuldstændige løsning for SL-problemer med 3 lærere og 3 klasser. Det her anførte eksempel er løst, og det er fra beregningerne i kapitel 6 ovenstående løsning er hentet. Det skal dog straks tilføjes, at efter gennemgangen af løsningsmetodikken i næste afsnit, vil ovenstående problem også nemt kunne løses ved anvendelse af den benyttede procedure, som væsentligst bygger på matrixreduktion.

4.5 Løsningsmetodik.

Lad os formode, at der eksisterer en kombination af en lærer og klasse ($\exists t_i, c_j$), for hvilken gælder:

$$\left\| A^{ij} \right\| = r_{ij}$$

Det antal timer, der er til rådighed for et møde mellem t_i og c_j er lig behovet. Det er da nødvendigt at placere t_i og c_j i det sæt af timer $P=\{h_k\}$, for hvilke det gælder, at $a_k^{ij}=1$. Et sådant par (t_i, c_j) er da tæt (jævnfør teorien i kapitel 3) og sættet P kaldes <u>reserveret</u>.

En tæt kombination har kun 1 mulighed for placering i skemaet (ingen frihedsgrader). Implicerer andre placeringer nogle af de af en kombination (t_i, c_j) reserverede perioder, da er det ikke muligt at lade t_i og c_j møde hinanden i det nødvendige antal timer (behovet).

Haves følgende rådighedsvektorer for c_j og t_i:

$$A^i = (1,1,o,1,o,1,1,o)$$
$$A^j = (o,1,1,o,1,o,1,1)$$

fås

$$A^i \cap A^j = (o,1,o,o,o,o,1,o)$$

d.v.s. $\|A^{ij}\| = 2$ og er nu $r_{ij} = 2$ er kombinationen (t_i, c_j) tæt, og perioderne 2 og 7 må reserveres til møde mellem t_i og c_j ($P = \{h_2, h_7\}$ er reserveret).

For alle timer $h_k \in P$ må t_i reserveres til c_j. Derfor kan udføres følgende reduktion af rådighedsvektorerne:

$$a_k^{xj} = o \text{ for } h_k \in P \text{ og } x \neq i \qquad (4.17)$$

og

$$a_k^{iy} = o \text{ for } h_k \in P \text{ og } y \neq j \qquad (4.18)$$

Anvendt på ovenstående eksempel betyder dette, at for alle rådighedsmatricer indeholdende enten t_i eller c_j (men ikke begge) ændres rådighedstallet for periode 2 og 7 til o. Der kan da ikke foretages andre placeringer for t_i eller c_j i disse perioder.

Lad os nu formode, at der eksisterer et t_i og $S^i \in C^i$ (C^i er mængden af klasser, der skal undervises af t_i) således, at

$$\Big\| \bigcup_{c_j \in S^i} A^{ij} \Big\| = \sum_{c_j \in S^i} r_{ij} \qquad (4.19)$$

For en delmængde til C^i, er det antal timer, der er til rådighed for et møde mellem t_i og enhver af klasserne i delmængden S^i, lig med det nødvendige antal timer (behovet for t_i og S^i). Forudsættes, at ligning (4.19) ikke gælder for en delmængde til

S^i. Delmængden S^i er således den delmængde til C^i, tilfredsstillende ligning (4.19), som består af færrest elementer (klasser). Eksistensen af denne problemstilling kan belyses ved et eksempel:

Ud fra givne rådighedsvektorer for henholdsvis t_i, c_{j1} og c_{j2} fås følgende rådighedsvektorer for kombinationerne (t_i, c_{j1}) og (t_i, c_{j2}):

$$A^{ij1}=(o,1,o,1)$$
$$A^{ij2}=(o,1,o,1)$$

Er nu $r_{ij1}=r_{ij2}=1$ og er S^i klasserne c_{j1} og c_{j2} fås:

$$\Big\| \bigcup_{j1,j2} A^{ij} \Big\| = \sum_{j1,j2} r_{ij}=2$$

At mængden $S^i=\{c_{j1}, c_{j2}\}$ er den mindste delmængde til til C^i, som tilfredsstiller ligning (4.19) ses ved at betragte de to mulige delmængder til S^i:

1. Delmængde $\{c_{j1}\}$. For denne delmængde fås:

   $\|A^{ij1}\|=2$ og $r_{ij1}=1$

2. Delmængde $\{c_{j2}\}$. For denne delmængde fås:

   $\|A^{ij2}\|=2$ og $r_{ij2}=1$

Ligning (4.19) er ikke tilfredsstillet for nogen delmængde til S^i.

Ifølge definitionen på en tæt kombination i kapitel 3, ses det, at mængderne S^i og t_i udgør en tæt kombination. Til denne må reserveres perioderne $P=\{h_k\}$ således, at

$$\bigcup_{c_j \in S^i} a_k^{ij}=1$$

Fra ovenstående eksempel fås, at kombinationen $(t_i, c_{j1}-c_{j2})$ er tæt, og perioderne 2 og 4 må reserveres til denne kombination. Indenfor en tæt kombination er der så muligheder for at lave ændringer, idet t_i kan undervise c_{j1} enten i periode 2 eller periode 4 og så undervise c_{j2} i den ledige periode (4 eller 2). Derimod kan det ikke tillades, at t_i underviser andre klasser i disse perioder. Hvis c_{j1} i en anden kombination udnytter f.eks. periode 2 opstår en ny og mindre tæt kombination, nemlig (t_i, c_{j2}), idet den eneste mulighed for deres møde nu er periode 4.

Idet $\bar{S}^i$ betegner den mængde af klasser, som ikke tilhører S^i $(\bar{S}^i = C^i - S^i)$ kan følgende reduktion af rådighedsvektorer foretages for den tætte kombination (t_i, S^i):

$$a_k^{iy} = o \text{ for } h_k \in P \text{ og } c_y \in \bar{S}^i \qquad (4.2o)$$

Analogt giver den tætte kombination (c_j, S^j) anledning til følgende reduktion:

$$a_k^{xj} = o \text{ for } h_k \in P \text{ og } t_x \in \bar{S}^j \qquad (4.21)$$

Ovenstående skal fortolkes således, at når det er vist, at en kombination $(t_i 1 S^i)$ er tæt, da skal alle rådighedstal for t_i i de perioder P, der skal reserveres, sættes til o for at undgå, at lærer t_i tildeles en klasse fra mængden $\bar{S}^i$ i en af de reserverede perioder.

For hver lærer grupperes nu klasserne i tætte delmængder $(t_i, S^i \in C^i)$. Det kan vises, at hvis feasibility-ligningen (4.15) er tilfredsstillet, så er hver klasse medlem af mindst en tæt kombination. Dette bevises udfra den kendsgerning, at tætte mængder ikke har tætte delmængder. For klasserne til t_i foretages en opdeling i klasser, der indgår i tætte kombinationer, og klasser, som ikke indgår i tætte kombinationer. Disse sidstnævnte betegnes som slækklasser. En klasse kan være i tæt kombination med en lærer og slæk i kombination med en anden. Anvendes ligningerne (4.2o) og (4.21) for de tætte kombinationer ændres visse rådighedstal fra 1 til o. Dette nødvendiggør en ny opdeling i tætte og slække kombinationer, idet nogle klasser, som før var slække nu bliver tætte, og kombinationer, som før var tætte kan opdeles i mindre tætte kombinationer (jævnfør eksemplet side 4.13)

<u>Eksempel</u>: For t_1 haves følgende rådighedsvektorer for kombinationer med 5 klasser:

$$A^{11}=(1,1,1,1,1)$$
$$A^{12}=(1,o,1,o,o)$$
$$A^{13}=(1,o,1,o,o)$$
$$A^{14}=(o,o,1,1,1)$$
$$A^{15}=(1,o,o,1,1)$$

Behovene er: $r_{11}=r_{12}=r_{13}=r_{14}=r_{15}=1$

t_1 skal møde klasserne c_2 og c_3 hver en time. De eneste timer, hvor dette er muligt, er time 1 og 3. t_1 er derfor tæt i kombination med c_2 og c_3. Rådighedsvektorerne reduceres i overensstemmelse med ligning (4.2o) og nu fås (streg under de elementer, der er blevet ændret):

$$A^{11}=(\underline{o},1,\underline{o},1,1)$$
$$A^{12}=(1,o,1,o,o)$$
$$A^{13}=(1,o,1,o,o)$$
$$A^{14}=(o,o,\underline{o},1,1)$$
$$A^{15}=(\underline{o},o,o,1,1)$$

Nu udgør t_1 en tæt kombination med c_4 og c_5. Ved reduktion fås nu:

$$A^{11}=(o,1,o,\underline{o},\underline{o})$$
$$A^{12}=(1,o,1,o,o)$$
$$A^{13}=(1,o,1,o,o)$$
$$A^{14}=(o,o,o,1,1)$$
$$A^{15}=(o,o,o,1,1)$$

t_1's rådighedsvektorer er nu reduceret og et skema kan udfærdiges for dette problem. Antallet af mulige skemaer bliver $1 \cdot 2 \cdot 2=4$ (t_1 kan kun møde c_1 i time 2 og c_2 enten i time 1 eller 3 (c_3 i time 3 eller 1) og c_4 enten i time 4 eller 5 (c_5 i time 5 eller 4)).

Fremgangsmåden er altså, at der søges efter tætte kombinationer ved at finde kombinationer for lærere og klasser for hvilke ligning (4.19) er gældende. Når der er fundet en tæt kombination reduceres rådighedsvektorerne i overensstemmelse med ligningerne (4.2o) og (4.21). Derved fås en følge af sæt af rådighedsvektorer:

$$ {}_{o}A^{ij}, {}_{1}A^{ij}, \ldots\ldots, {}_{n}A^{ij}. $$

Hvis nogle af disse sæt af rådighedsvektorer ikke tilfredsstiller feasibility-ligningerne (4.15) og (4.16), så har det oprindelige problem ingen løsning. Hvis derimod ethvert sæt af rådighedsvektorerne tilfredsstiller feasibility-betingelserne, vil den fortsatte søgen efter tætte kombinationer og tilsvarende reduktioner konvergere mod et sæt indskrænkede rådighedsvektorer (da der kun findes et endeligt aftagende antal elementer ${}_{n}a_{k}^{ij}$). Dette sker, når restriktionerne ikke "producerer" flere tætte kombinationer.

Imidlertid er denne søgen efter tætte kombinationer ikke indskrænket til blot at undersøge klasse-lære-kombinationer. Både klasser og lærere kan optræde i tætte kombinationer med antallet af perioder. Ved udviklingen af en reduktionsprocedure er kun betragtet rådighedsvektorer af arten A^{ij}, d.v.s. for hver periode er angivet hvilke lærere der er til rådighed for hvilke klasser. Ved at summere over A^{ij} ($\|A^{ij}\|$) bestemmes det antal timer, der er til rådighed for et møde mellem t_i og c_j. Betragtes nu istedet rådighedsvektorer af arten A^{ik}, vil en summering her bestemme det antal klasser, der skal undervises af t_i.

Lad os betragte en given lære t_i. Denne lærer er til rådighed i et sæt af perioder $P=\{h_k\}$. For hver periode $h_k \in P$ kan nu bestemmes er rådighedsvektor A^{ik}, idet denne angiver hvilke klasser t_i er til rådighed for i periode h_k.

<u>Eksempel</u>: Fra eksemplet side 4.15 bliver A^{ik} for lærer t_1 og time h_1:

$$ A^{11}=(1,1,1,o,1) $$

hvilket angiver, at t_1 i periode h_1 er til rådighed for c_1, c_2, c_3 og c_5. Betegnes som tidligere $\sum_j a_j^{ik}$ ved $\|A^{ik}\|$ fås:

$$\|A^{11}\|=4$$

Lad nu P^i betegne en delmængde til P ($P^i \in P$). For hver time $h_k \in P^i$ må man på grund af eksistensen af løsninger være i stand til at finde klasser, som er til rådighed for lærerne. Endvidere må for ethvert par af timer $\{h_{k1}, h_{k2}\} \in P^i$ gælde (hvis systemet er feasible):

$$\Big\| \bigcup_{k1,k2} A^{ik} \Big\| \geq 2 \tag{4.22}$$

Generelt må gælde: For en delmængde $P^i = \{h_{k1}, h_{k2}, \ldots, h_{kM}\}$ skal

$$\Big\| \bigcup_{h_k \in P^i} A^{ik} \Big\| \geq M \tag{4.23}$$

hvis systemet er feasibelt.

Analogt fås for c_j og P^j, hvor $P^j = \{h_{k1}, h_{k2}, \ldots, h_{kN}\} \in P$

$$\Big\| \bigcup_{h_k \in P^j} A^{jk} \Big\| \geq N \tag{4.24}$$

Ligningerne (4.23) og (4.24) kan også betragtes som feasibility-ligninger.

Det kan nu indtræffe, at for en delmængde $P^i = \{h_{k1}, \ldots h_{kM}\}$ tilfredsstilles ligningen:

$$\Big\| \bigcup_{h_k \in P^i} A^{ik} \Big\| = M \tag{4.25}$$

Derved opstår en tæt kombination af t_i og sættet af perioder P^i. Der eksisterer da et sæt af klasser V, for hvilke vi må reservere t_i i perioderne P^i. Betegner $\bar{V}$ komplementærmængden til V med hensyn til C^i ($\bar{V}=C^i-V$), kan anvendes følgende reduktion:

$$a_j^{ik}=o \tag{4.26}$$

når i tilfredsstiller ligning (4.25) og $c_j \in \bar{V}$ og $h_k \in P^i$.

Analogt fås, at når

$$\left\| \bigcup_{h_k \in P^j} A^{jk} \right\| = N \tag{4.27}$$

opstår en tæt kombination af c_j og sættet af perioder P^j, hvorefter c_j må placeres med et sæt af lærere W. Der kan anvendes følgende martixreduktion:

$$a_i^{jk}=o \tag{4.28}$$

når j tilfredsstiller ligning (4.27) og $t_i \in \bar{W}$ og $h_k \in P^j$.

Eksempel: Fra eksemplet side 4.15 fås følgende værdier af A_j^{ik}:

$A_j^{11}=(1,1,1,o,1)$ og $\|A_j^{11}\|=4$
$A_j^{12}=(1,o,o,o,o)$ og $\|A_j^{12}\|=1$
$A_j^{13}=(1,1,1,o,o)$ og $\|A_j^{13}\|=3$
$A_j^{14}=(1,o,o,1,1)$ og $\|A_j^{14}\|=3$
$A_j^{15}=(1,o,o,1,1)$ og $\|A_j^{15}\|=3$

For periode 2 gælder ligning (4.25) og kombinationen (t_1,h_2) er derfor tæt . Reduktion (ligning (4.26)) giver:

$A^{11}=(\underline{o},1,1,o,1)$
$A^{12}=(1,o,o,o,o)$
$A^{13}=(\underline{o},1,1,o,o)$
$A^{14}=(\underline{o},o,o,1,1)$
$A^{15}=(\underline{o},o,o,1,1)$

Nu er kombinationen (t_1,h_4-h_5) tæt og reduktion giver:

$A^{11}=(o,1,1,o,\underline{o})$
$A^{12}=(1,o,o,o,o)$

$A^{13}=(o,1,1,o,o)$
$A^{14}=(o,o,o,1,1)$
$A^{15}=(o,o,o,1,1)$

Vektorerne er nu reduceret, og resultatet er naturligvis identisk med det resultat, der opnåedes ved beregningen på side 4.15. Her angives resultatet som hvilke klasser, der er til rådighed for lærer t_1 i perioderne h_1, h_2, h_3, h_5 og h_5. Klasse c_1 er til rådighed i periode h_1, klasse c_2 og c_3 er til rådighed i perioderne h_1 og h_3 og klasserne c_4 og c_5 er til rådighed i perioderne c_4 og c_5.

Anvendelsen af de vektorreduktioner (matrixreduktioner), der er udviklet her, giver anledning til nye tætte kombinationer af forskellige typer. Ved udførelse af reduktionen bør opstilles 3 sæt af rådighedsmatricer:

1. Et sæt for hver lærer.
2. Et sæt for hver klasse.
3. Et sæt for hver periode.

Sættene undersøges for tætte kombinationer, og det skal nævnes, at findes en tæt kombination i det sæt af rådighedsmatricer, som f. eks. er nævnt under punkt 3 (periode), da vil den efterfølgende reduktion også influere på matricerne nævnt under punkt 1 og 2, idet den samme information er repræsenteret i alle 3 sæt af matricer.

Det kan vises (1o), at den endelige form af rådighedsmatricer ikke afhænger af den rækkefølge, hvorved de ikke-brugbare elementer elimineres. Et sæt af rådighedsmatricer Q kaldes en <u>restriktion</u> af de oprindelige rådighedsmatricer B ($A^i \cap A^j$, $A^i \cap A^k$ og $A^j \cap A^k$), hvis rådighedsmatricerne i Q er reducerede, og der eksisterer en sekvens af eliminering af ikke-brugbare elementer, som resulterer i Q. En restriktion kaldes <u>konsistent</u>, hvis dens rådighedsmatricer er feasible.

Kapitel 5: Forbedret reduktionsmetodik.

5.1 Indledning

Den i foregående kapitel udviklede reduktionsprocedure, som kan udføres i overensstemmelse med den algoritme, som er omtalt i kapitel 3, er ganske effektiv, men det tager lang tid selv at foretage reduktionen for et lille SL-problem. Antallet af kombinationer, der skal undersøges, vokser stærkt med antallet af lærere og klasser. Det har vist sig, at når antallet af lærere og antallet af klasser overstiger 10, så er metoden næsten ubrugelig.

Imidlertid kan anvendes en anden form for reduktion. I stedet for at søge efter tætte kombinationer og derved finde ud af hvilke rådighedstal, der kan ændres til nul, kan det undersøges, om hvert enkelt element kan optræde i en scheduling. Er dette tilfældet, er elementet brugbart, i modsat fald er det ikke-brugbart. Denne fremgangsmåde kendes fra Kuhn's "Hungarian Method" (35)(39). Metoden kan kun anvendes på kvadratiske matricer, men som det skal vises i det følgende, er dette ingen hindring for anvendelsen af "Hungarian Method" på SL-problemet.

5.2 Kvadratiske matricer

Ved Gotliebs metode undersøges i løbet af SL-proceduren plane sektioner af den 3-dimensionale matrix (lærer-klasse-time), som angiver muligheder for et møde mellem t_i og c_j i time h_k. En plan sektion tilhører således enten en lærer, en klasse eller en time og fremstiller som tidligere nævnt og vist en boolesk matrix (elementer 0 og 1). Som sædvanligt betegner et 1-tal, at et møde er muligt, og et 0, at et møde ikke er muligt.

Det skal nu vises, at enhver af disse matricer er effektive kvadratiske, idet enhver overskydende række eller søjle kan elimineres. Betragtes en rådighedsmatrix for klasse c_j, altså

$$A_j^{ik} = \{a_j^{ik}\}, \quad i=1,2, \ldots, u \quad \text{og} \quad k=1,2, \ldots, w$$

og forudsættes det, at $u > w$ (f eks. findes 3o lærere, og der skal lægges skema for lo perioder), da vil denne matrix være rektangulær. Den kan imidlertid reduceres til en kvadratisk matrix ved at undlade et vist antal lærere.

Af behovmatricen fås: $\sum_i r_{ij} \leq w$ (ligning (4.1))

Heraf ses, at behovmatricen for klasse c_j højst indeholder w elementer forskellig fra nul. Det betyder, at c_j højst skal undervises af w lærere. De lærere, som ikke skal undervise c_j, kan derfor udelades i dennes rådighedsmatrix (i dette kapitel betragtes A^{ik} som en matrix, ikke som et sæt af vektorer).

<u>Eksempel</u>: For c_j haves følgende rådighedsmatrix og behov:

$$A_j^{ik} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \qquad \{r_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

For række 2 og 5 er behovene lig nul, og problemet reduceres til:

$$A_j^{ik} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad \{r_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad i=1,3,4$$

Havde behovene istedet været: $r_{1j}=2$ og $r_{2j}=1$ kunne problemet reduceres til:

$$A_j^{ik} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \qquad r_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad i=1,1,2$$

idet t_1 anføres to gange (svarende til behovet 2).

Det er hermed vist, at enhver matrix i SL-problemet kan reduceres til en kvadratisk matrix uden derved at negligere mulige løsninger. Det er her forudsat, at der til den oprindelige behovmatrix er tilføjet dummylærere og dummyklasser (repræsenterende fritimer), således at ligning (4.1) ændres til:

$$\sum_i r_{ij} = \sum_j r_{ij} = w$$

5.3 Hungarian Method.

Et system bestående af en 3-dimensional matrix kan opdeles i (u+v+w) 2-dimensionale matricer. For at SL-problemet skal have en løsning, skal ud fra disse matricer kunne dannes matricer, som indeholder mindst et ikke-nul-element i hver række og søjle.

Betegner A en nxn-matrix defineres en r-partiel løsning til A, som et sæt af r uafhængige elementer forskellig fra nul i A således, at ikke 2 elementer findes i samme række eller søjle. En n-partiel løsning definerer en mulig løsning på SL-problemet.

En undersøgelse af matricen A foregår i 2 trin:

1. Bestemmelse af mindst 1 mulig løsning (feasibility-test).
2. Ethvert ikke-nul-element, som ikke tilhører nogen mulig løsning, ændres til nul (matrixreduktion).

Kuhn's Hungarian Method til matrixreduktion involverer anvendelse af en procedure kaldet EXPAND, hvis funktion er:

Givet en nxn-matrix A:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Givet en r-partiel løsning, hvor $r < n$. For det anførte eksempel kan for r=2 haves følgende partielle løsning:

	1	2
1	1	o
2	o	1

I den r-partielle løsning findes ikke noget element fra række i (eksemplet i=3 eller 4). EXPAND anvendes nu til at generere en (r+1)-partiel løsning ved at vælge et element fra den i-te række samt ændre (helt eller delvist) den r-partielle løsning. Den (r+1)-partielle løsning vil da involvere alle rækker og søjler fra den r-partielle løsning og desuden række i og en eller anden ny søjle. Hvis EXPAND ikke genererer en ny (r+1)-partiel løsning, kan det vises (35), at det ikke er muligt at finde en løsning for A. Det kan dog være muligt at finde en (r+1)-partiel løsning ved at introducere en anden række, men det har ikke betydning ved SL-problemet, hvor alle rækker skal involveres.

For eksemplet kan genereres følgende 3-partielle løsning ved at introducere række 3 (i=3):

	1	2	3
1	1	o	o
2	o	o	1
3	o	1	o

og ved at introducere række 4 findes følgende mulige løsning for problemet:

	1	2	3	4
1	1	o	o	o
2	o	o	1	o
3	o	1	o	o
4	o	o	o	1

EXPAND fortsætter indtil enten alle rækker (og dermed alle søjler) i A er repræsenteret i en n-partiel løsning, eller det er vist, at dette ikke er muligt. Hvis EXPAND finder en løsning for A, har A bestået feasibilitytesten (for eksemplet er A feasibel, idet der er fundet en løsning for A). Når det er vist, at A er feasibel (trin 1) fortsættes med matrixreduktion (trin 2). Det er muligt, at der kan findes andre løsninger for A end den under feasibilitytesten fundne. Men det er ikke sikkert at alle ikke-nul-elementer vil kunne optræde i en eventuel løsning. Kan det derfor vises, at et ikke-nul-element aldrig vil kunne optræde i en løsning, kan dette element reduceres til nul. Derfor tester EXPAND successivt alle ikke-nul-elementer for at se, om der findes en løsning indeholdende dette element.

Lad os undersøge et ikke-nul-element i række i og søjle j. Dette element vil tilhøre en mulig løsning til A, hvis der eksisterer en løsning for undermatricen A_s, som fås fra A ved at slette række i og søjle j. A_s er af størrelsen (n-1)x(n-1), og da der er fjernet et løsningselement fra række i og et løsningselement fra søjle j ved reduktionen af A til A_s, da vil der udfra A kunne opnås en (n-2)-partiel løsning for A_s. EXPAND skal derfor kun anvendes en gang for at finde en (n-1)-partiel løsning, og er dette muligt, da kan det undersøgte element optræde i en løsning for A. Fejler EXPAND er det vist, at elementet ikke kan forekomme i en løsning, og det kan derfor reduceres til nul.

<u>Eksempel:</u> Givet matricen nederst side 5.3. For denne matrix er fundet en løsning nederst på side 5.4. Nu undersøges de elementer, der ikke findes i denne løsning.

1. Elementet i række 1 (i=1) og søjle 4 (j=4). Undermatricen A_s bliver:

	1	2	3
2	o	1	1
3	1	1	o
4	o	1	o

hvor den (n-2)-partielle løsning er indrammet af en punkteret linie. For at finde en (n-1)-partiel løsning skal række 4 introduceres. Herefter findes følgende løsning for A_s:

	1	2	3
2	o	o	1
3	1	o	o
4	o	1	o

Ved indføring af det undersøgte element fås følgende løsning for A:

	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	1	0	0	0
4	0	1	0	0

Det undersøgte element kan altså ikke reduceres til nul. Der er nu fundet to mulige løsninger for A, og de elementer, der indgår i disse løsninger er her understreget i den oprindelige matrix A:

	1	2	3	4
1	$\underline{1}$	0	0	$\underline{1}$
2	0	1	$\underline{1}$	1
3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	1
4	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

2. Det næste element, der skal undersøges, er elementet i række 2 og søjle 2:
Undermatricen A_s bliver:

	1	3	4
1	1	0	1
3	1	0	1
4	0	0	1

Denne undermatrix har ingen løsning (alle elementer i søjle 3 er nul). Det undersøgte element kan reduceres til nul. Ved undersøgelse af de resterende elementer viser det sig, at endnu et kan reduceres til nul, og som resultat fås R(A):

	1	2	3	4
1	1	0	0	1
2	0	0	1	0
3	1	1	0	1
4	0	1	0	1

Af R(A) kan så findes 3 forskellige løsninger til A. Dette ses af, at der findes 3 mulige elementer i række 3 (også i søjle 4), og disse elementer kan ikke optræde i den samme løsning.

Som det tidligere er nævnt indebærer reduktionen af et element i en matrix reduktion af det tilsvarende element i andre matricer. Der anvendes 3 sæt af matricer (lærere, klasser, timer) og den samme information findes i dem alle.

5.4 EXPAND

EXPAND arbejder på en nxn-matrix A. En partiel løsning for A angives i vektorer SOLUTION, hvis j-te komponent angiver rækkenummeret på løsningselementet i søjle j. Som hjælpemidler haves to vektorer REFERENCE og ROWLIST. ROWLIST giver hvilke rækker, der skal undersøges (princip: First in - First served).

EXPAND kan deles i to faser:

1. Undersøgelse af rækker udvalgt fra ROWLIST.
2. Bestemmelse af den partielle løsning.

Første fase afsluttes når enten:

a. Et ikke-nul-element findes i søjle j for hvilken SOLUTION(j) er nul

b. Alle rækker i ROWLIST er undersøgt, og ingen opfylder betingelsen under a.

Når a indtræffer, er det vist, at der eksisterer en (r+1)-partiel løsning som så konstrueres af fase 2. Hvis b indtræffer, så er den undersøgte matrice infeasibel.

En fuldstændig redegørelse for EXPAND findes i (39). Her er også anført et ALGOL-program for EXPAND.

Kapitel 6: Specielle skemaproblemer.

6.1 Indledning.

I dette kapitel behandles 4 specielle SL-problemer: Det tætte SL-problem, det symmetriske SL-problem, SL-problemet uden initiale tildelinger og SL-problemet for 3 lærere og 3 klasser. Disse specielle problemer er medtaget for at karakterisere deres specielle problemstillinger. De har ikke større praktisk betydning, men de indeholder interessante oplysninger om SL-problemet.

6.2 Det tætte skemaproblem.

I kapitel 4 er omtalt, hvorledes SL-problemet kan løses ved at finde tætte kombinationer. Imidlertid kan det tænkes, at et SL-problem ikke indeholder tætte kombinationer, og for så at kunne løse problemet, transformeres det til et tæt problem. Inden omtalen af dette skal først defineres en generaliseret dobbelt stokastisk matrix (g.d.s): En matrix med ikke-negative elementer kaldes g.d.s., hvis alle rækker og søjler har den samme sum. Heraf følger, at en g.d.s.matrix altid er kvadratisk. I afsnit 6.4 omtales g.d.s.matricer nærmere, her benyttes de til at definere det tætte SL-problem.

Det tætte SL-problem er et problem, hvor behovmatricen er g.d.s, d.v.s. et problem, hvor behovmatricens rækkesummer og søjlesummer alle er lig antallet af perioder (en forudsætning for at anvende Hungarian Method, se side 5.3). I det tætte problem er antallet af lærere lig antallet af klasser. For at opnå dette tilføjes dummylærere og dummyklasser (tilføjet af teoretiske årsager). Det skal nu vises hvorledes et SL-problem kan transformeres til et tæt SL-problem, samt hvorledes der kan opnås et skema for det oprindelige problem udfra den opnåede løsning på det tætte problem. Denne transformation er meget vigtig, da et tæt problem er meget lettere at behandle.

6.2.1 Transformation.

Lad ($\tilde{R}$,S) være et tilfældigt SL-problem og lad (T,C,H) betegne mængden af lærere, klasser og perioder. Idet u, v og w betegner antallet af lærere, klasser og perioder konstrueres nu et tæt SL-problem ($\underline{\tilde{R}}$,$\underline{S}$) med u+v klasser, u+v lærere og w perioder på følgende måde:

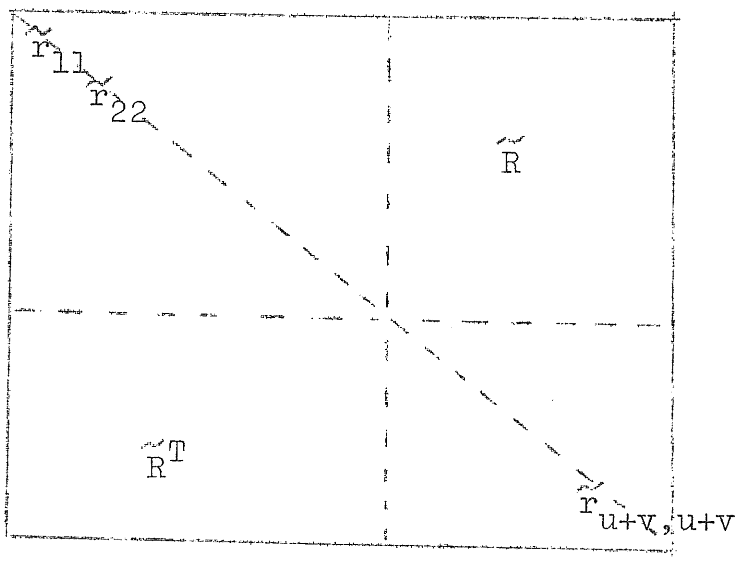
Elementerne i $\underline{\tilde{R}}$ bliver:

$$\underline{\tilde{r}}_{ii}=w-\sum_{j=1}^{v}\tilde{r}_{ij} \quad \text{for } 1\leq i\leq u \tag{6.1}$$

$$\underline{\tilde{r}}_{u+v,u+v}=w-\sum_{i=1}^{u}\tilde{r}_{ij} \quad \text{for } 1\leq j\leq v \tag{6.2}$$

$$\underline{\tilde{r}}_{i,u+j}=\underline{\tilde{r}}_{u+j,i}=\tilde{r}_{ij} \quad \text{for } 1\leq i\leq u \text{ og } 1\leq j\leq v \tag{6.3}$$

$\underline{\tilde{R}}$ er en (u+v)x(u+v)-matrix med $\tilde{R}$ stående i den øverste højre del og den transponerede til $\tilde{R}$ (spejling omkring hoveddiagonalen) i nederste venstre hjørne. I diagonalen antager $\underline{\tilde{R}}$'s elementer værdier, som bevirker at søjlesummer og rækkesummer bliver lig w. De resterende elementer har værdien nul. $\underline{\tilde{R}}$ får altså følgende form:



<u>Eksempel:</u>

$$\tilde{R}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad w=6$$

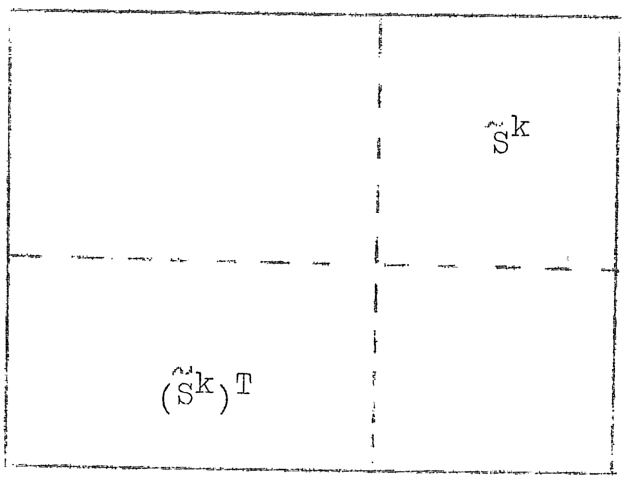
$$\underline{\tilde{R}}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Elementerne i $\underline{S}$ bliver:

$$\underline{S}_{i,u+j,k}=\underline{S}_{u+j,i,k}=S_{ijk} \quad \text{for } 1\leq i\leq u \text{ og } 1\leq j\leq v \text{ og } 1\leq k\leq w \qquad (6.4)$$

De resterende elementer bliver nul.
Placeringen af S i $\underline{S}$ svarer til $\tilde{R}$ i $\underline{\tilde{R}}$ bortset fra, at diagonalerne for fast k har nulelementer.

Betegner $\underline{\tilde{S}}$ et skema for $(\underline{\tilde{R}},\underline{S})$ og defineres $\tilde{S}$ som $\tilde{S}_{ijk}=\underline{\tilde{S}}_{i,u+j,k}$, så er $\tilde{S}$ et skema for $(\tilde{R},S)$. Er $\tilde{S}$ et tilfældigt skema for $(\tilde{R},S)$ med schedulingmatricerne $\tilde{S}^1,\tilde{S}^2,\ldots,\tilde{S}^k$ dannes $(u+v)x(u+v)$-matricerne $\underline{\tilde{S}}^1,\underline{\tilde{S}}^2,\ldots,\underline{\tilde{S}}^k$ som vist på følgende figur:



Det er nu omtalt, hvorledes et SL-problem kan transformeres til et tæt problem, og hvorledes løsningen til det oprindelige problem fås af løsningen til det tætte problem (beviserne for dette fremføres af Csima (1o)). Ved denne transformation gøres problemet langt større, men til gengæld må det huskes, at long-range feasibilitymetoden anvendes på det tætte problem på en sådan måde, at når $\underline{t}_i$ tildeles klasse $\underline{c}_{j+u}$, så tildeles samtidig $\underline{t}_{u+j}$ klasse $\underline{c}_i$ i den samme periode.

Det har vist sig, at ved praktisk anvendelse har det været en fordel at beskæftige sig med det tilhørende tætte problem. Den nødvendige tid til reduktion af matricerne på en datamat kan også formindskes ved anvendelse af denne transformation, idet søgningen efter tætte kombinationer gøres lettere.

6.3 Det symmetriske skemaproblem.

Inden omtalen af det symmetriske SL-problem skal først omtales et kendt, uløst matematisk problem for latinske kvadrater. En latinsk kvadrat af orden n er en nxn-matrix dannet af de første n positive heltal således, at hver række og søjle indeholder det samme heltal netop en gang. En latinsk kvadrat indeholder altså n forskellige tal, som hver findes n gange.

Eksempel: Latinsk kvadrat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En nxn-matrix er partiel kvadratisk af orden n, hvis dens elementer er nuller og positive heltal, som ikke overstiger n og hvis alle ikke-nul elementer i samme række eller søjle er forskellige.

Eksempel: Partiel kvadrat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Efter disse definitioner kan problemet omtales: Givet en partiel kvadrat P af orden n. Find nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der eksisterer en latinsk kvadrat L af orden n, som kun adskiller sig fra P på de pladser, hvor P har nuller. Dette problem, som er relevant til det symmetriske SL-problem, er endnu ikke løst. Som et eksempel på en partiel kvadrat, som ikke kan blive til en latinsk kvadrat ved ændring af nullerne, kan nævnes:

$$P= \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}$$

Det er nu muligt at definere et symmetrisk SL-problem: Et SL-problem er symmetrisk, hvis antallet af lærere, klasser og perioder er ens og elementerne i bohovmatricen alle er 1-taller. $(\tilde{I}_n, S)$ betegner et uxuxu-symmetrisk SL-problem. Er $\tilde{S}$ et skema for $(\tilde{I}_n, S)$, så er

$$\sum_{k=1}^{n} k\tilde{S}^k \tag{6.5}$$

en latinsk kvadrat, dannet af den partielle kvadrat

$$\sum_{k=1}^{n} kS^k \tag{6.6}$$

Det symmetriske SL-problem er altså analogt til det ovenfor anførte problem (danne en latinsk kvadrat udfra en partiel kvadrat). Den partielle kvadrat svarer til den initiale tildelingsmatrix, og den latinske til det endelige skema.

<u>Eksempel</u>: Et symmetrisk SL-problem er defineret ved følgende initiale tildelingsmatricer:

$$S^1= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad S^2= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad S^3= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Den dertil svarende partielle kvadrat er:

$$P=1S^1+2S^2+3S^3= \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Af denne partielle kvadrat kan kun dannes en latinsk kvadrat, nemlig:

$$K=\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{Bmatrix}$$

svarende til følgende løsning på SL-problemet:

$$\tilde{S}^1=\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad \tilde{S}^2=\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad \tilde{S}^3=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

6.4 Skemaproblemet uden initiale tildelinger.

Som en følge af teoremet side 3.4 (teorem 1) kan anføres følgende teorem for en g.d.s.matrix: Term rank for en nxn-g.d.s.matrix er n. Hvis M er en g.d.s.matrix med rækkesummer og søjlesummer lig w, så kan M ifølge dette teorem dannes af en sum af n schedulingmatricer (matricer med netop et 1-tal i hver række og søjle, ellers nuller). Det betyder, at ethvert tæt SL-problem uden initiale tildelinger har en løsning. Da ethvert SL-problem kan transformeres til et tæt problem, betyder dette, at ethvert SL-problem uden initiale tildelinger har en løsning.

At konstruere et skema for et SL-problem uden initiale tildelinger reduceres til følgende: Lad D være en g.d.s. matrix med heltalselementer og rækkesummer og søjlesummer lig w. Find schedulingmatricer $P^1, P^2, \ldots, P^w$ således, at

$$D=\sum_{i=1}^{w} P^i \qquad (6.7)$$

I stedet for at benytte long-range feasibilitymetoden til denne konstruktion, kan anvendes den tidligere omtalte M. Hall algoritme eller Hungarian Method. Disse metoder kan konstruere en scheduling P^1 i D. Så vil $D-P^1$ være en g.d.s. matrix med rækkesummer og søjlesummer lig w-1. Derefter kan P^2 konstrueres og fortsættes således, fås tilsidst en løsning på problemet.

Der findes andre algoritmer anvendelige på dette specielle SL-problem. Principielt bygger de på teorien om kæder og cykler i en matrix.

6.5 Skemaproblem for 3 lærere og 3 klasser.

Dette simple problem er medtaget for at vise, hvorledes SL-problemet kan løses ved at opstille at antal ligninger med et antal ubekendte. Det skal straks nævnes, at ved større SL-problemer bliver antallet af ligninger så enormt stort, at denne metode ikke kan anvendes.

Vi opererer altså med følgende behovmatrix:

$$\{\tilde{r}_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{13} \\ \tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \tilde{r}_{23} \\ \tilde{r}_{31} & \tilde{r}_{32} & \tilde{r}_{33} \end{Bmatrix}$$

Det forudsættes, at alle rækkesummer og søjlesummer er lig w. For at finde en løsning for en enkelt time, skal vælges 3 kombinationer af klasser og lærere således, at hver lærer kun findes i en af kombinationerne og hver klasse ligeledes kun findes i en. For en enkelt time bliver løsningen:

$$\tilde{S}^k = x_{1j_1} + x_{2j_2} + x_{3j_3} \qquad (6.8)$$

hvor j_1, j_2, j_3 er en vilkårlig permutation af tallene 1,2,3. For $\tilde{S}^k$ findes da $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ forskellige løsninger (schedulings).

For det totale problem (w perioder) bliver løsningen:

$$\tilde{S} = \tilde{S}^1 + \tilde{S}^2 + \ldots + \tilde{S}^k + \ldots + \tilde{S}^w \qquad (6.9)$$

hvor $\tilde{S}^k$ er en scheduling for time k. Er der ingen initiale tildelinger, da vil også

$$\tilde{S} = \tilde{S}^{k1} + \tilde{S}^{k2} + \ldots\ldots \tilde{S}^{kw} \qquad (6.1o)$$

være en løsning til problemet, hvis k1,k2,...,kw er en tilfældig permutation af tallene 1,2,...w. Er der således fundet en løsning på problemet, da vil ombytning af schedulings give ialt $w!=w(w-1)(w-2)\ldots 2\cdot 1$ løsninger. Dette nævnt for at anskueliggøre, at selv om et SL-problem har mange løsninger, så vil disse løsninger først kunne bestemmes, når <u>en</u> løsning er fundet.

For 3x3 SL-problemet kan følgende schedulings forekomme (ialt $3!=6$ forskellige):

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^1 &= x_{11}+x_{22}+x_{33} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \\
\tilde{S}^2 &= x_{11}+x_{23}+x_{32} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \\
\tilde{S}^3 &= x_{12}+x_{23}+x_{31} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \\
\tilde{S}^4 &= x_{12}+x_{21}+x_{33} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \\
\tilde{S}^5 &= x_{13}+x_{21}+x_{32} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \\
\tilde{S}^6 &= x_{13}+x_{22}+x_{31} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

En løsning til 3x3 SL-problemet vil være:

$$\tilde{S}=C^1\tilde{S}^1+C^2\tilde{S}^2+C^3\tilde{S}^3+C^4\tilde{S}^4+C^5\tilde{S}^5+C^6\tilde{S}^6 \tag{6.12}$$

hvor C^i angiver det antal gange $\tilde{S}^i$ findes i $\tilde{S}$. Det gælder derfor:

$$\sum_i C^i=w \tag{6.13}$$

Da leddet x_{11} kun findes i $\tilde{S}^1$ og $\tilde{S}^2$ kan følgende ligning fås:

$$C^1+C^2=\tilde{r}_{11} \tag{6.14}$$

Opskrives den analoge ligning for alle x_{ij} (ialt 9 ligninger) fås til bestemmelse af de 6 ubekendte $C^1,C^2,\ldots,C^6$ 9 ligninger hvoraf de 4 er linearkombinationer af de øvrige 5 (fordi rækkesummer og søjlesummer i $\{\tilde{r}_{ij}\}$ er lig det samme tal w, og derfor er kun 5 af elementerne $\tilde{r}_{ij}$ lineært uafhængige). Sættes derfor C^1 lig en parameter t, fås følgende værdier for de øvrige ubekendte:

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \tilde{r}_{11} - t \\
C^3 &= \tilde{r}_{23} - \tilde{r}_{11} + t \\
C^4 &= \tilde{r}_{33} - t \\
C^5 &= \tilde{r}_{32} - \tilde{r}_{11} + t \\
C^6 &= \tilde{r}_{22} - t
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Da alle konstanter $C^1, C^2, \ldots, C^6$ skal være større end eller lig med nul, fås følgende begrænsning for t:

$$\mathrm{Max}(\tilde{r}_{11} - \tilde{r}_{32},\ \tilde{r}_{11} - \tilde{r}_{23}) \leq t \leq \mathrm{Min}(\tilde{r}_{11}, \tilde{r}_{22}, \tilde{r}_{33}) \tag{6.16}$$

t angiver således de mulige mængder af w scheduling-matricer som er en løsning på problemet.

Den fuldstændige løsning til 3x3 SL-problemet bliver:

$$\tilde{S} = t\tilde{S}^1 + (\tilde{r}_{11} - t)\tilde{S}^2 + (\tilde{r}_{23} - \tilde{r}_{11} + t)\tilde{S}^3 + (\tilde{r}_{33} - t)\tilde{S}^4 + (\tilde{r}_{32} - \tilde{r}_{11} + t)\tilde{S}^5 + (\tilde{r}_{22} - t)\tilde{S}^6 \tag{6.17}$$

hvor $\tilde{S}^i$ bestemmes af ligningerne (6.11) og t kan antage værdier i intervallet bestemt af (6.16).

<u>Eksempel</u>: For SL-problemet side 4.9 var flg. behovmatrix:

$$\{\tilde{r}_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{Bmatrix}$$

For dette problem fås:

$t_{min}=Max(1-1,1-o)=1$ og (ligning (6.16))

$t_{max}=Min(1,1,3)=1$

t kan kun antage værdien 1 og problemets løsning bliver (ligning (6.17)):

$$\tilde{S}=1\cdot\tilde{S}^1+(1-1)\tilde{S}^2+(o-1+1)\tilde{S}^3+(3-1)\tilde{S}^4+(1-1+1)\tilde{S}^5+(1-1)\tilde{S}^6$$

$$\tilde{S}=\tilde{S}^1+2\tilde{S}^4+\tilde{S}^5$$

$$\tilde{S}=\begin{Bmatrix} 1 & o & o \\ o & 1 & o \\ o & o & 1 \end{Bmatrix}+2\begin{Bmatrix} o & 1 & o \\ 1 & o & o \\ o & o & 1 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} o & o & 1 \\ 1 & o & o \\ o & 1 & o \end{Bmatrix}$$

Den indbyrdes rækkefølge af disse 4 schedulings kan så ændres på 4!/2 måder ($\tilde{S}^4$ findes to gange, derfor divideres med 2).

Indføres nu de initiale tildelinger fra eksemplet side 4.9 fås, at den eneste rækkefølge, som tilfredsstiller disse, er den løsning på problemet, som er angivet på side 4.11.

Kapitel 7: Skemaproblemets løsningsvolumen.

Skemaproblemet er et allokeringsproblem, hvor en række faktorer (lærere, klasser, lokaler, timer) skal samordnes således, at resultatet fremstiller et anvendeligt skema. I sin simpleste form, d.v.s. i et tilfælde, hvor der ingen ydre begrænsninger lægges på undervisningen (møder mellem klasser og lærere er tilfældige) er skemaproblemet derfor et kombinatorisk problem af ganske enorme dimansioner.

For at få et indtryk af antallet af løsninger for et sådant problem betragtes en skole med x klasser, x lærere og y perioder. Da undervisningen er forudsat tilfældig, har hver lærer mulighed for at undervise (møde) x klasser. For problemet er x^2 klasse-lærer kombinationsmuligheder. Når der nu skal udfærdiges et skema for en enkelt periode har lærer t_1 mulighed for at møde x klasser, lærer t_2 kan så møde x-1 klasser o.s.v. Antallet af løsninger for en enkelt time bliver derfor x!. Da der skal udfærdiges skema for ialt y perioder, og hver periode har x! løsninger, så bliver antallet af løsninger for det samlede skemaproblem $(x!)^y$. I nedenstående tabel er angivet størrelsesordenen af dette tal for forskellige værdier af x og y. Resultaterne er angivet i potenser af 10 (10-tals-logaritmen).

y \ x	10	20	30	40	50
10	60	200	350	520	700
20	120	400	700	1040	1400
30	180	600	1050	1560	2100
40	240	800	1400	2080	2800

For et ganske lille problem med 10 lærere, 10 klasser og 10 perioder er antallet af løsninger af størrelsesordenen 10^{60}.

Det skal nu undersøges hvilken betydning tilføjelse af lokaler til problemet har. Ved placering af en lærer-klasse-kombination skal nu også tildeles et lokale. Forudsættes, at der findes x lokaler (lig antallet af klasser) og at lokaletildelingen er tilfældig og kan foretages uden hensyn til eventuelle begrænsninger, da vil den første lærer-klasse kombination i enhver time kunne vælge mellem x lokaler, den næste kombination mellem x-1 lokaler o.s.v. Der vil altså ved hver periode være x! muligheder for anvendelse af lokaler. Antallet af løsninger for en enkelt periode bliver nu $(x!)^2$ og for et skema for y perioder bliver antallet af løsninger $(x!)^{2y}$. For det lille problem med 1o lærere, 1o klasser og 1o perioder og nu 1o lokaler bliver antallet af løsninger af størrelsesordenen $1o^{12o}$.

Heldigvis indeholder et virkeligt SL-problem ikke tilnærmelsesvis så mange løsninger. Hver lærer skal ikke undervise alle klasser og antallet af timer, hver lærer skal undervise hver klasse (behovet),er nøje fastlagt. Med andre ord vil der være mange af de fundne løsninger, som ikke kan akcepteres som gyldige, da de indeholder møder mellem lærere og klasser, som ikke må forekomme.

For en enkelt periode fandt vi, at antallet af løsninger er x! (ikke hensyn til lokaler). Er det nu givet, at en kombination $t_i c_j$ ikke er tilladt, så reduceres antallet af løsninger med det antal løsninger, som indeholder denne kombination. Hver løsning er en sum af x kombinationer, d.v.s. det samlede antal løsninger indeholder x!x kombinationer. Tidligere er fundet, at antallet af forskellige kombinationer er x^2, d.v.s. hver kombination findes i

$$\frac{x!\ x}{x^2} = (x-1)! \text{ løsninger}$$

Udelukkes en enkelt kombination bliver antallet af løsninger:

$$x!-(x-1)! = (x-1)(x-1)!$$

Udelukkes endnu en kombination, og tages hensyn til, at i nogle af de i første omgang udelukkede løsninger findes også denne kombination, da reduceres antallet af løsninger yderligere med

$$(x-1)!(1-\frac{1}{x}) \tag{7.3}$$

og det totale antal løsninger bliver nu:

$$(x-2+\frac{1}{x})(x-1)! \tag{7.4}$$

Efter udelukkelse af N kombinationer bliver det gennemsnitlige antal løsninger:

$$S=(x-1)!\ (x-N+\frac{C_2^N}{x}-\frac{C_3^N}{x^2}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^{N+1}\cdot\frac{C_{k+1}^N}{x^k}) \tag{7.5}$$

hvor

$$C_k^N=\begin{cases} o & \text{for } k>N \\ f(N,k) & \text{for } k\leq N \end{cases}$$

Det skal nævnes, at $f(N,k)$ er af størrelsesordenen N^k og leddene i formel (7.5) med store potenser af x kan derfor ikke udelades.

Imidlertid kan fås et billede af antallet af løsninger for et reelt problem ved at betragte problemet fra en anden synsvinkel. Igen haves en skole med x lærere og x klasser. Nu forudsættes, at hver lærer i gennemsnit skal undervise t klasser (t x). Der findes altså xt tilladte kombinationer (vi har altså udelukket $x(x-t)$ kombinationer). Den første lærer kan vælge mellem t klasser, den anden lærer kan vælge mellem $(1-\frac{1}{x})t$ klasser (der er en sandsynlighed på $\frac{t}{x}$ for, at den første lærer har valgt en af den anden lærers t klasser), den tredie lærer kan så vælge mellem $(t-\frac{2t}{x})=(1-\frac{2}{x})t=(\frac{x-2}{x})t$ klasser o.s.v. For det gennemsnitlige antal af løsninger fås:

$$t\cdot\frac{x-1}{x}\cdot t\cdot\frac{x-2}{x}\cdot t\ \ldots\ldots\ldots\ \cdot\frac{1}{x}\cdot t \tag{7.6}$$

Eller

$$S=x!\cdot(\frac{t}{x})^x \tag{7.7}$$

Afhængig af x og t er fundet følgende værdier for S, angivet som potenser af lo:

t \ x	1o	2o	3o	4o	5o
1	-4	-6	-9	-12	-15
2	-1	o	o	o	o
3	1	3	5	7	9
4	2	6	9	12	15
5	3	8	12	16	2o
6	4	9	14	19	24
7	5	1o	15	2o	25

Når der tales om det gennemsnitlige antal løsninger skal det forstås således, at når en lærer skal undervise t klasser, så kan disse t klasser udvælges af de x klasser på $\binom{x}{t} = \frac{x!}{t!(x-t)!}$ måder. Undersøges alle disse muligheder for hver lærer, og bestemmes for hvert tilfælde antallet af løsninger, så vil summen af alle disse ved division med antallet af muligheder give det gennemsnitlige antal af løsninger. Det vil sige, at f.eks. et tilfælde, hvor alle lærer skal undervise de samme t klasser (og x-t klasser altså ikke får undervisning) er medregnet og således også mange andre tilfælde, hvor der ikke findes nogen løsning. I et virkeligt SL-problem vil derfor antallet af løsninger være større end de tal der er fundet i ovenstående tabel, og mindre end tallene fra tabellen side 7.1. Til gengæld vil tallet reduceres ved kravet om diverse initiale tildelinger og dette sidste kan naturligvis nemt resultere i, at problemet ingen løsning har. Det skal endelig nævnes, at når det er givet, at hver lærer i gennemsnit skal undervise t klasser, så behøver disse t klasser ikke at være forskellige. t kan derfor nærmere fortolkes som det antal timer, en lærer i gennemsnit skal undervise. For det tætte SL-problem bliver t derfor lig w,idet alle lærere skal undervise i w timer.

Kapitel 8: Faktorer med betydning ved vurdering af et skemas godhed.

8.1 Indledning.

I de foregående kapitler er omtalt forskellige fremgangsmåder til skemalægning (tæt kombinationsmetodik, Hungarian Method). Ved hjælp af disse metoder kan udfærdiges skemaer, men der tages ikke hensyn til fagenes placering på ugens dage, den indbyrdes placering af fagene på de enkelte dage, de til rådighed værende lokaler og den interne trafik (antallet af vandreklasser).
De to sidstnævnte punkter vil være ude af betragtning i det tilfælde, hvor der findes lige så mange lokaler som antallet af klasser. Hver klasse kan da tildeles sit "eget" lokale. Dette er imidlertid en forudsætning, som gør en SL-procedure næsten uanvendelig, idet et sådant antal lokaler er ønskedrømme for de fleste skoler

En SL-procedure vil først tiltrække sig større opmærksomhed i det øjeblik den foruden at kunne udfærdige et skema for et givet problem (i løbet af kort tid),kan sikre en optimal fagfordeling og fagspredning (bestemt udfra nærmere angivne kriterier).

Vedrørende problemet fagspredning, så er det nok det nemmeste at tage hensyn til. Det kan foretrækkes initialt at inddele de ugentlige behov i daglige behov (hvilket sikrer en gunstig fagfordeling) og så blot udfærdige 5 eller 6 daglige skemaer. Problemerne fagrækkefølge og lokaletildeling er derimod vanskelige at behandle. De bliver omtalt nærmere i dette kapitel, men det skal straks nævnes, at den metode, der angives til opnåelse af optimal fagrækkefølge,ikke (endnu) kan koordineres med en SL-procedure.

8.2 Fagfordeling.

Ved behandling af problemet fagfordeling opereres med to problemer, det daglige problem og det ugentlige problem. Det daglige problem er for hver dag at finde timer for hver klasse til at møde sine lærere, og for hver lærer til at møde sine klasser uden at de indbyrdes implikationer umuliggør færdiggørelsen af skemaet. Det ugentlige problem fortolkes som problemet at dele et sæt af ugentlige behov i daglige behov. Der er formel lighed mellem de to problemer. Medens det første omfatter placering af behov på et antal timer, omfatter det sidste placering af behov på en række dage.

Denne opdeling af problemet muliggør, at der kan opnås en god spredning af fagene over ugens dage. Betegner W et sæt af ugentlige behov, er problemet at finde de daglige behov ækvivalent med at finde en række matricer R_d for hvilke

$$\sum_d R_d = W \tag{8.1}$$

hvor d betegner antallet af dage.

Betegner m det maximale antal timer pr. dag pr. lærer (klasse), skal endvidere gælde:

$$\sum_i r_{ij}^d \leq m_j \tag{8.2}$$

og

$$\sum_j r_{ij}^d \leq m_i \tag{8.3}$$

Endelig skal følgende krav helst opfyldes:

$$r_{ij}^d \leq p_{ij} \quad \text{for alle i, j og d} \tag{8.4}$$

Her betegner p_{ij} det antal fag, lærer t_i underviser klasse c_j i. I denne ligning er dog ikke indbefattet specielle krav som dobbelttimer. Ligningens hensigt er at sikre, at en klasse ikke undervises i samme fag flere gange dagligt. Underviser eksempelvis t_i c_j i fransk og engelsk ($p_{ij}=2$), da må t_i højst møde c_j to timer dagligt, en time til engelsk og en time til fransk.

Til opnåelse af optimal spredning af fagene over ugens dage kan opstilles forskellige kriteriefunktioner. Hvis en klasse og lærer skal mødes 3 gange ugentligt ($\sum_d r_{ij}^d=3$), kan der være forskellige muligheder:

1. Mandag-onsdag-fredag.
2. Tirsdag-torsdag-fredag.
3. Onsdag-torsdag-fredag.

Mulighed 1 må her betragtes som værende bedre end mulighed 2, som igen er bedre end 3. De forskellige muligheder kan anføres ved et pointtal således, at den bedste mulighed får flest point. For alternative delinger af ugens fag kan bestemmes summen af disse point, og det alternativ med flest point kan vælges. Problemet kan imidlertid formuleres som et liniært eller kvadratisk programmeringsproblem. Betegner r_{ij}^d antal timer c_j skal undervises af t_i på dag d, og p_{ij} som før antal fag t_i underviser c_j, så kan opstilles følgende begrænsningsligninger:

$$
\begin{aligned}
&\sum_d r_{ij}^d = r_{ij} && \text{for alle } d \\
&\sum_i r_{ij}^d \leq a_{dj} && \text{for alle } j \\
&\sum_j r_{ij}^d \leq b_{di} && \text{for alle } i \qquad (8.5) \\
&o \leq r_{ij}^d \leq p_{ij} && \text{for alle } i,\ j \text{ og } d
\end{aligned}
$$

a_{dj} betegner antallet af timer c_j er til rådighed på dag d, og b_{di} betegner antallet af timer t_i er til rådighed. Problemet er nu at opstille en kriteriefunktion, som sikrer en spredning af fagene. Her skal anføres en kriteriefunktion for kvadratisk programmering:

$$C=\mathrm{Min}\Big(\sum_{i,j,d}(r^d_{ij})^2\Big) \qquad (8.6)$$

Anvendelse af denne kriteriefunktion indebærer, at der opnås stor spredning af fagene. En fordeling af et fag med et behov (ugentligt) på 3 timer kan på 3 dage være 1-1-1 (C=3) eller 1-2-o (C=5) eller 3-o-o (C=9). Den første fordeling, som også er den bedste, foretrækkes (C er mindst). Kriteriefunktionen kan imidlertid ikke skelne mellem fordelinger som 1-2-o og 1-o-2 hvilket måske forkaster anvendelse af denne funktion. At løse problemet på denne måde vil nok være ret tidsrøvende og derfor skal omtales en heuristisk metode, som er ganske let at arbejde med.

Som data haves de ugentlige behov og de initiale tildelinger (disse kan naturligvis også inkorporeres i den ovenfor omtalte metode ved i den 4. begrænsningsligning (8.5) at ændre nullet til et 1-tal for det r^d_{ij} som kræves placeret initialt). Ved subtraktion fås den residuale ugentlige behovmatrix. De tildelinger, hvor behovet er lig antallet af dage kan straks placeres med en time hver dag. Derefter udvælges til placering det største behov. Det undersøges nu hvilke dage, der tilfredsstiller behovet bedst (størst spredning). Er der i forvejen placeret et antal timer på en dag svarende til at enten t_i eller c_j er fuldt optaget (ikke til rådighed), forkastes denne dag. For de resterende dage beregnes summen af de placerede behov for t_i og c_j, og dagene med mindst værdi af denne sum vælges for placering af (t_i,c_j). Har flere dage den samme sum vælges den kombination af dage som giver størst spredning udfra givne prioriteringsfunktioner for spredningsalternativer.

<u>Eksempel:</u> Givet følgende behovmatrix for 3 lærere, 3 klasser og 3 dage:

$$\{r_{ij}\}=\begin{Bmatrix}3 & 3 & o\\ 3 & 1 & 2\\ o & 2 & 4\end{Bmatrix}$$

For kombinationerne (t_1,c_1), (t_1,c_2) og (t_2,c_1) er behovene lig 3 og disse kombinationer kan placeres med daglige behov på 1 på alle 3 dage. Størst behov har nu (t_3, c_3) (behov=4). For denne kombination kan placeres en time hver dag, og for den 4. times vedkommende er det ligegyldigt hvilken dag, der vælges. Vi placerer denne time på den første dag. Vi får nu følgende foreløbige behov:

$$\left\{r^1_{ij}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \quad \left\{r^2_{ij}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \left\{r^3_{ij}\right\}$$

De resterende behov er:

$$\left\{r_{ij}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$$

Nu skal (t_2, c_3) placeres. For denne kombination undersøges, hvor mange timer t_2 og c_3 i forvejen har placeret på de 3 dage. Det forudsættes, at alle lærere og klasser er ubegrænset til rådighed.

Antal timer for $t_2 + c_3$ bliver for dag

1: $1 + 2 = 3$

2: $1 + 1 = 2$

3: $1 + 1 = 2$

(t_2, c_3) placerer deres behov på 2 på dag 2 og 3.

Fortsættes således fås flg. løsning:

$$\left\{r^1_{ij}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \quad \left\{r^2_{ij}\right\} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix} = \left\{r^3_{ij}\right\}$$

Nu kan SL-proceduren udfærdige skemaer for de enkelte dage. For dag 1 fås følgende løsning:

$$\tilde{S}^1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad \tilde{S}^2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

For dag 2 og 3 er behovene ens, og følgene eneste løsning findes:

$$\tilde{S}^1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \qquad \tilde{S}^2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Rækkefølgen af $\tilde{S}^1$ og $\tilde{S}^2$ for de enkelte dage kan så ændres, hvis ikke initiale tildelinger forbyder dette.

6.3 Fagrækkefølge.

For at et skema kan akcepteres som værende tilfredsstillende, må kræves, at rækkefølgen af forskellige fag følger et tilfredsstillende mønster. Det er et dårligt skema, hvor alle læsefagene følger hinanden, og alle de afslappende fag følger hinanden. Der kan også være regler for hvilke fag, der helst skal ligge først på dagen og hvilke, der helst skal være sidst. Det bedste skema må indeholde en fagrækkefølge, som veksler mellem svære og lette fag. Vi skal nu prøve at løse et fagrækkefølgeproblem. Det skal igen pointeres, at metoden endnu ikke har kunnet koordineres med en SL-procedure. Senere i dette afsnit anføres en formodning om, hvorledes dette eventuelt skulle kunne gøres.

Givet en klasse, som skal have følgende fag på en dag: Historie, regning, gymnastik, sang og dansk.

For rækkefølgen af fag kan gives forskellige point svarende til, om rækkefølgen er god eller dårlig. Foruden de 5 nævnte fag kan anføres en fritime og for de forskellige fag kan gives point for, hvor godt det er, at faget følger efter en fritime (svarer til, at faget undervises i den første time) eller hvor godt det er, at der følger en fritime efter faget (svarer til, at faget undervises i sidste time. Gives et højt antal point for en dårlig rækkefølge kan opstilles følgende pointmatrix angivende pointene, når fag p kommer efter fag q:

q \ p	hi	re	gy	sa	da	fri
hi	∞	5	1	1	6	2
re	4	∞	1	2	4	3
gy	2	2	∞	7	1	5
sa	1	3	6	∞	3	3
da	5	5	2	2	∞	3
fri	4	3	3	4	2	∞

Det giver altså 5 point, når regning kommer efter historie (dårlig rækkefølge) og 1 point, når gymnastik kommer efter historie (god rækkefølge). Problemet er nu at finde den rækkefølge, der giver færrest point. Problemet er analogt til Travelling Salesman-problemet. Ved dette problem er det dog forudsat, at handelsmanden ender på sit udgangspunkt. Dette er ikke tilfældet ved fagrækkefølgeproblemet, men betragtes fritimen som udgangspunkt og slutpunkt kan løsningsmetodikken for Travelling Salesman problemet også anvendes her. Gås først frem på samme måde, som nævnt i afsnittet om Assignment problemet (subtraktion af laveste element i hver række og søjle) fås:

q \ p	hi	re	gy	sa	da	fri	laveste elem
hi	∞	3	o	o	5	$\boxed{o}$	1
re	3	∞	$\boxed{o}$	1	3	1	1
gy	1	o	∞	6	$\boxed{o}$	3	1
sa	$\boxed{o}$	1	5	∞	2	1	1
da	3	2	o	$\boxed{o}$	∞	o	2
fri	2	$\boxed{o}$	1	2	o	∞	2
laveste elem.	o	1	o	o	o	1	

Af denne sidste matrix er vi "heldige" at kunne udtage en gyldig rækkefølge hvor summen af pointene er lig summen af de elementer, der er reduceret med (8+2=1o). Her skal ikke anføres den fuldstændige løsningsmetodik for Travelling Salesman problemet, men den optimale løsning på dette simple problem skal anføres:

hi-fri-re-gy-da-sa

(rækkefølgen fås af de indrammede nuller i matricen)

Skilles ved fritimen fås:

fri-re-gy-da-sa-hi-fri

Og til kontrol af pointene fås: 3+1+1+2+1+2=1o.

Ved denne formulering af problemet fagrækkefølge, er det forudsat, at alle muligheder for fagrækkefølge kan tages i betragtning. I virkeligheden må der tages hensyn til, om de pågældende tildelinger er mulige. Fagrækkeproblemet er endnu et uløst problem i kombination med en SL-procedure, men det er et problem, der arbejdes på at indføre.

For et givet SL-problem er det muligt at finde en løsning, og det er også muligt at finde alle løsningerne til problemet. Dette antal kan vel tænkes at være meget stort, og at vurdere hver enkelt for derved at finde det bedste kan meget vel blive en umulig opgave. Det er forudsat, at de fundne løsninger opfylder alle krav (initiale tildelinger, fagfordeling m.m.), og som kriterie anvendes nu fagrækkefølgen. Kunne det derimod tænkes, at når en løsning til problemet var fundet og "fagrækkefølgepointene" beregnet, så ville vi kun finde de løsninger, som gav bedre fagrækkefølge, da kunne fagrækkefølgeproblemet siges at være løst. En sådan procedure vil svare til en Simplex-procedure, og at det skulle være utopisk at tænke i sådan retning, kan blot forkastes derved, at Simplex kan modificeres til anvendelse på andet end lige LP-opgaver (således f.eks Kvadratisk Programering).

8.4 Andre faktorer.

Der er i den hidtidige fremstilling af SL-problemet ikke nævnt hvorledes der tages hensyn til dobbelttimer, paralleltimer, lokaler m.m. For dobbelttimer og paralleltimer forudsættes, at de enten placeres initialt, eller behandles af en selvstændig SL-procedure. For lokalernes vedkommende er det foreløbig forudsat, at hver klasse (eller lærer) har sit eget klasseværelse. Anvendelse af specielle faciliteter (fysiklokaler, gymnastiksale m.m.) må sikres ved initiale tildelinger. Hensyn til lokaler kunne naturligvis ske ved at tilføje denne "4. dimension" til SL-problemet, men derved bliver problemet endnu vanskeligere at løse, og det vil kræve datamater med enormt mange huskeceller. Lokalerne kan derimod involveres i en særskilt matrix, som angiver hvorvidt et givet lokale er ledigt. Ved hver klasse-lærer-tildeling tildeles så et lokale (klasse eller lærer kan have forskellige prioriteter på forskellige lokaler), og når alle lokaler er optaget i en time, kan der ikke placeres flere undervisningstimer på denne time. Disse prioriteringsfunktioner kan bevirke, at antallet af vandreklasser eller vandrelærere bliver minimalt . Hvor ligevægtspunktet (antallet af vandreklasser kontra antallet af vandrelærere) ligger er individuelt.

Udviklingen af SL-procedurer har hidtil i første række koncentreret sig om at udvikle algoritmer for selve klasse-lærer tildelinger, og herefter er det hensigten at forsøge at involvere andre faktorer. Af disse ekstra faktorer er det således hensynet til fagrækkefølge, hensynet til den interne trafik og hensynet til lokaler, som er de vanskeligste forhindringer.

Kapitel 9: Udviklede skemalægningsprocedurer, deres anvendelsesmuligheder og begrænsninger

9.1 Indledning.

I dette kapitel gennemgås 4 procedurer til skemalægning. Som tidligere omtalt ligger de SL-procedurer, der er udviklet til brug ved amerikanske undervisningssystemer (se fodnote), ikke indenfor rammerne af dette projekt. Alligevel skal dog omtales en speciel SL-procedure, som er udviklet af Cole til anvendelse ved universitetet i Leicester . Proceduren omtales, fordi den er anvendelig på sådanne systemer som f. eks. DtH. De øvrige 3 metoder er formuleret for SL-problemer af den art, som er behandlet teoretisk i de foregående kapitler. Medens Appleby's metode (U.S.A.) og Berghuis's metode (Holland) er heuristiske fremgangsmåder bygger Gotliebs metode (Canada) direkte på den omtalte teori. Der er da også nået de hidtil bedste resultater med Gotliebs metode. De seneste oplysninger om metodens sukces er først publiceret i August 1967 (34) således at de her anførte resultater er up-to-date.

Der er udviklet andre SL-procedurer end de her omtalte. Således har Barraclough (4) udviklet en procedure, som er anvendelig for det engelske skolesystem. Metoden er dog blot en modificering af Berghuis' metode og skal derfor ikke omtales nærmere. Endvidere er forsøgt udvikling af SL-procedurer i Sverige (2)(43)(44) og Tyskland (24)(48), men der er ikke nået så gode resultater, at en omtale nødvendiggøres.

Fodnote: Af litteratur om SL-procedurer ved amerikanske undervisningssystemer kan anbefales (1)(7)(8)(17)(28)(29)(3o)(31)(32)(33)(46)(47)(49)(5o).

9.2 Metode udviklet af Cole. (9).

I 1963 er udviklet en SL-procedure af Cole ved universitetet i Leicester. Proceduren er baseret på anvendelse af datamater. Metoden er kun anvendelig på skolesystemer, hvor hver student vælger sine fag (eksempelvis DtH). Når alle studenters ønsker er fremkommet, skal der lægges et skema, som både sikrer, at alle studenter får deres ønsker opfyldt samtidig med, at antallet af perioder, undervisningen strækker sig over, minimeres.

Metoden er relativ simpel og den bygger på en empirisk prioritering af fagene. Metoden garanterer ikke, at det fundne nødvendige antal perioder er minimum. Ej heller garanteres for, at antallet af fritimer for de enkelte studenter er minimalt (med fritimer menes timer imellem forelæsninger). Alligevel har metoden vist sig at være ganske brugbar for sådanne systemer.

Problemformulering.

Som ovenfor anført er metoden baseret på skolesystemer, hvor hver student vælger sine fag. Foruden at tilfredsstille de opstillede krav på tilsyneladende bedste mulige måde, kan metoden tage hensyn til følgende betingelser:

1. Forelæsningsrækken i et bestemt fag enten skal eller skal ikke eller behøver ikke at placeres i successive timer.
2. Ingen forelæsning i fag A må følge en forelæsning i fag B.
3. Forelæsninger i fag C skal alle forekomme i nærmere specificerede perioder.
4. Det totale antal studenter i et fag er begrænset ved de til rådighed værende faciliteter.

Anvendelsen af 4. betingelse indebærer enten en utilfredsstillelse af enkelte studenters ønsker eller dannelse af to eller flere studenterhold i samme fag. Betingelsen indgår imidlertid ikke i det for Leicester universitet udviklede program, og den skal derfor heller ikke medtages i følgende omtale af programmet.

Nødvendige data.

De for programmets kørsel nødvendige data opdeles i 4 punkter:

1. For hver student angives hvilke fag han ønsker. Disse data anføres som:

   $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_p$ §

   hvor m_j betegner nummeret på det ønskede fag og § afslutter hver students ønsker. Tages studenterantallet i betragtning, kan data anføres som:

   $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_p/k$ §

   hvor k angiver antallet af studenter, der ønsker den pågældende fagkombination.

   Data kan tage form som følgende:

Kombinat.	fag	antal stud.	data-input
1	1,3	1o	1,3/1o §
2	2,5	8	2,5/8 §
3	1,3,5	14	1,3,5/14 §
4	4,6	8	4,6/8 §
5	4,5,7	11	4,5,7/11 §

2. Der anføres data for antal forelæsninger i hvert fag samt for ønskede eller uønskede successive timer. Disse data anføres som (u,v,w) hvor:

   u=fagnummer,

   v=antal forelæsninger i fag u

   $$w = \begin{cases} 2 & \text{hvis forelæsninger ikke må følge hinanden.} \\ 1 & \text{- \quad - \quad skal \quad - \quad -} \\ 0 & \text{- \quad - \quad ikke behøver \quad - \quad -} \end{cases}$$

   Disse data angiver de betingelser, der er nævnt under punkt 1 (side 9.2) For det anførte eksempel haves følgende værdier:

u	v	w
1	2	1
2	3	o
3	1	o
4	3	o
5	2	1
6	3	o
7	1	o

3. De under punkt 2 nævnte betingelser (fag B må ikke følge fag A) kan for eksemplet være:

A	B
2	5
1	7

4. Det skal anføres, hvilke fag, der skal undervises i specielle perioder. For eksemplet kan følgende gælde:

Periode	Forelæsning i fag
1	3
1	6

Hermed er opnået tilstrækkelig information om studenterønsker og fagbetingelser til, at problemet kan løses.

Løsningsprocedure.

Først opstilles en liste over inkompatible fag. Cole definerer, at to fag er inkompatible, hvis den samme student ønsker dem begge. Det vil med andre ord sige, at inkompatible fag ikke kan undervises i samme periode. Denne liste udarbejdes efter data om studenterønsker. Det kan være nødvendigt kunstigt at gøre to fag inkompatible (hvis de undervises af samme lærer eller anvender samme lokaliteter). Dette opnås ved at introducerer en dummy-student, som skal have disse to fag. For eksemplet udarbejdes følgende liste for hvert fag og dets inkompatible fag:

fag	inkomp.fag	antal inkomp. fag
1	3,5	2
2	5	1
3	1,5	2
4	5,6,7	3
5	1,2,3,4,7	5
6	4	1
7	4,5	2

Efter adskillige forsøg er fundet en prioriteringsfunktion for hvert fag, afhængig af følgende 4 faktorer:

1. Antal inkompatible fag (p).
2. Er faget indeholdt i betingelsen "B må ikke følge

A" som B sættes q=1, ellers o.

3. Antal forelæsninger pr fag (v).
4. Oprindelige rækkefølge af fag (s).

For hvert fag opstilles en vektor P=(p,q,v,N-s), hvor N betegner antallet af fag. Disse N vektorer sorteres efter størrelsesorden, idet 1.komponenten (p) har 1. prioritet, 2. komponenten (q) har 2. prioritet o.s.v. For eksemplet fås følgende 7 vektorer:

$P_1=(2,o,2,6)$
$P_2=(1,o,3,5)$
$P_3=(2,o,1,4)$
$P_4=(3,o,3,3)$
$P_5=(5,1,2,2)$
$P_6=(1,o,3,1)$
$P_7=(2,1,1,o)$

Betydningen af den sidste komponent (N-s) er, at her kan en eventuel personlig prioritering anvendes, idet fagene nummereres i den rækkefølge, de forekommer mest betydningsfulde. For eksemplet er altså fag 1 det af fagene, som tillægges størst prioritet af skolelederen.

Opstilles nu vektorerne i prioriteringsrækkefølge fås:

1. $P_5=(5,1,2,2)$
2. $P_4=(3,o,3,3)$
3. $P_7=(2,1,1,o)$
4. $P_1=(2,o,2,6)$
5. $P_3=(2,o,1,4)$
6. $P_2=(1,o,3,5)$
7. $P_6=(1,o,3,1)$

For at anskueliggøre selve løsningsproceduren forudsættes nu, at der er lagt skema for de første (t-1) perioder, og at der nu skal lægges skema for periode t. Endvidere forudsættes, at antallet af forelæsninger pr fag (v) er reduceret med 1 hver gang faget er placeret i de første (t-1) perioder. Det antal fag, der er placeret hidtil betegnes med v'. En vektor W angiver de fag, der blev placeret i periode (t-1). For t=1 haves altså: v'=o og W=$\bar{o}$.

Ved proceduren undersøges først vektoren W. Denne angiver numrene på en række fag (fagene i periode (t-1)), og for disse fag undersøges værdien af w, angivende hvorvidt faget skal undervises successivt eller ej. Er w=o negligeres det pågældende fag i W, da faget ikke kræver specielle hensyn til rækkefølgen. Er w ikke nul undersøges værdien af v og er denne nul (alle forelæsninger i faget er placeret) negligeres også dette fag i W. Nu vil W angive alle de fag i periode (t-1) som også skal placeres i periode t. Disse fag er indbyrdes kompatible, da de er placeret sammen i periode (t-1). Fagenes samlede inkompatible fag anføres nu i en vektor W'. Nu undersøges i prioriteringsrækkefølge de fag, der ikke er repræsenteret i enten W eller W' og for hvilke ikke alle forelæsninger er placeret for at se, om faget kan optages i W hvilket er ensbetydende med, at faget placeres i periode t. Blandt de betingelser, der skal undersøges, er værdien af q. Er q=1 betyder det, at faget (B) ikke må følge efter faget (A), og er dette fag (A) repræsenteret i W for periode (t-1), kan (B) ikke optages i W for periode t. Et fag, som tilfredsstiller alle betingelser, anføres i W og dets inkompatible fag i W', og værdien af v formindskes med 1. Derefter søges efter det næste tilladelige fag, indtil alle fags muligheder er undersøgt. Mængden af tilladelige fag i W placeres i periode t og processen fortsætter med periode (t+1), idet alle data reduceres til de nu gældende betingelser og der opstilles en ny prioriteringsrækkefølge.;

<u>Eksempel:</u> Data for dette eksempel på metodens fremgangsmåde, er givet på side 9.3 og 9.4. En liste over fagenes inkompatible fag findes på side 9.4 og prioriteringsrækkefølgen for placering i den første periode er anført på side 9.5.

Af betingelserne (punkt 4) fås, at fagene 3 og 6 skal undervises i 1. periode. Altså bliver:

$$W_1=(3,6) \quad \text{og} \quad W_1'=(1,4,5)$$

Af prioriteringsrækkefølgen fås, at det første fag, der skal undersøges, er fag nummer 2. Da fag 2 er kompatibelt med både fag 3 og 6 kan fag 2 optages i W. Nu undersøges fag 7, og det viser sig, at også fag 7 kan optages i W (fag 7 må ikke følge fag 1, men det er heller ikke aktuelt i første periode). For første periode fås altså:

$$W_1=(3,6,2,7) \quad \text{og} \quad W_1'=(1,4,5)$$

Fagene 3,6,2,7 placeres i periode 1. Dette indebærer ændring af data til:

Fag	inkomp.fag	p	v	q
1	5	1	2	o
2	5	1	2	o
3			o	
4	5,6	2	3	o
5	1,2,4	3	2	1
6	4	1	2	o
7			o	

Fagene 3 og 7 udgår, da der kun skulle undervises i 1 time i dem.
Ved at opstille prioriteringsvektorerne P fås nu følgende fagrækkefølge: 5,4,1,2,6

Ingen af de i W_1 anførte fag skal undervises successivt og til placering i periode 2 undersøges straks fagene i prioriteringsrækkefølge:

Fag 5 må forkastes, da fag 5 ikke må følge fag 2.
Fag 4 accepteres: $W_2=(4)$ og $W_2'=(5,6)$
Fag 1 accepteres: $W_2=(4,1)$ og $W_2'=(5,6)$
Fag 2 accepteres: $W_2=(4,2,1)$ og $W_2'=(5,6)$
Fag 6 forkastes, da det er indeholdt i W_2'.

I periode 2 placeres altså fagene 4,2,1.

Det indebærer følgende ændring af data:

Fag	Inkomp.fag	p	v	q
1	5	1	1	o
2	5	1	1	o
4	5,6	2	2	o
5	1,2,4	3	2	1
6	4	1	2	o

Prioriterinsrækkefølgen bliver: 5,4,6,1,2

Af fagene i W_2 skal fag 1 undervises successivt, og vi får:

Fag 1 accepteres: $W_3=(1)$ og $W_3'=(5)$
Fag 5 forkastes, da det er indeholdt i W_3'.
Fag 4 accepteres: $W_3=(1,4)$ og $W_3'=(5,6)$
Fag 6 forkastes, da det er indeholdt i W_3'
Fag 2 accepteres: $W_3=(1,4,2)$ og $W_3'=(5,6)$

I periode 3 placeres fagene 1,4,2.

De korrigerede data bliver:

fag	inkomp. fag	p	v	q
1			o	
2			o	
4	5,6	2	1	o
5	4	1	2	1
6	4	1	2	o

For periode 4 placeres kun fag 4, og fortsættes fås flg. løsning på problemet:

Periode	fag
1	2,3,6,7
2	1,2,4
3	1,2,4
4	4
5	5,6
6	5,6

Den fundne løsning kræver en undervisningstid på 6 perioder. Dette er det minimale antal perioder, idet studenter, der har valgt fagene 4,5 og 7 kræver undervisning i 1+2+3=6 perioder.

Resultater og kritik.
Metoden er på Leicester universitet blevet programeret til en Elliott 803 datamat, som er i stand til at behandle et system bestående af op til 340 fag med maximalt 15 forelæsninger pr. fag. Et skema fra juni 1963 på dette universitet for the First Year General Degree indbefattende 34 fag med ialt 57 forelæsninger tog ialt 12½ minut at fremstille på Elliott-datamaten. Hvis 340 fag benyttes i programmet vil det tage adskillige timer, afhængig af hvor komplekse betingelserne er.

Metoden er som tidligere nævnt begrænset til anvendelse på specielle skolesystemer. Foruden at kunne anvendes på et system som DtH er det også velegnet til de nye tilvalgssystemer, som forsøges gennemført indenfor det danske skolesystem. Her kan eleverne til en vis grad selv bestemme hvilke fag, de vil undervises i. For det normale skolesystem, hvor både antallet af perioder er begrænset, og hvor eleverne beskæftiges klassevis, er Coles metode uanvendelig.

9.3 Metode udviklet af Gotlieb

Den metode canadieren Gotlieb har udviklet bygger på de teoretiske grundsætninger og den formulering, som er omtalt i tidligere kapitler. I dette afsnit skal derfor kun omtales de resultater, der er opnået med metoden. Det skal dog nævnes, at Gotliebs metode bygger på matrixreduktion ved søgning efter tætte kombinationer. Hungarian Method er bedre til matrixreduktion, og de resultater, der her skal omtales er opnået af programmet OSSP (Ontario School Scheduling Program) som bygger på Gotliebs formulering af problemet, men anvender Hungarian Method til matrixreduktion.

Det skal kort resumeres, at ved Gotliebs fremstilling simplificeres SL-proceduren initialt ved opdeling af de ugentlige behov i daglige behov. Endvidere udfyldes en del af skemaet initialt for at imødegå specielle krav. Metodens force fremfor andre metoder er, at det først undersøges, hvorvidt problemet er feasibel m.h.t. de initiale tildelinger. Er problemets feasibility bekræftet findes let en løsning ved matrixreduktion. Alle problemets løsninger kan findes.

Eksperimenter. (11)(34)(4o).
Da Gotlieb i 1964 havde fuldendt sin udvikling af SL-proceduren, overgav han materialet til Kates, Peat, Marwisk & Co. i Toronto for at dette firma kunne udvikle et datamat-program.. Arbejdet udførtes i forening med the Ontario Institute for Studies in Education, og det udviklede program fik betegnelsen OSSP.

Programmet blev udviklet i Fortran IV for anvendelse på IBM 36o/65 datamater, og er senere blevet modificeret til IBM 7o94-systemet. Programmet består af ca. 7ooo fortranordrer. Komponenterne i OSSP-SL-systemet inkluderer:

1. Skoleleder
2. Analytiker
3. Operatør
4. Datamat og datamat-program.
5. Manuel data-præparering.
6. Manuel programinformation.

OSSP-programmet deles i:

1. Data-checking.
2. Opdeling af behov.
3. SL-procedure.
4. Rapport

I 1967 er programmet forsøgsvis blevet anvendt til skemalægning for 15 skoler i Torontoområdet. Den 11. August forelå resultatet af disse forsøg (34). Seks af skolerne anvender det af OSSP producerede skema. De resterende skoler anvender manuelt udarbejdede skemaer, men for dem alle udarbejdede OSSP akceptable skemaer. Der skal her nævnes de årsager, som var skyld i, at ikke alle skoler bruger OSSP's skema.

Skole 1: OSSP-skemaet involverede ikke nogle enkelte specielle krav.

Skole 2: Skolen vurderede OSSP-skemaet som værende af samme kvalitet som et manuelt udarbejdet skema. Skolen fandt det dog mest passende at anvende det manuelle.

Skole 3: Her fandtes et specielt undervisningssystem (samme fag undervises samtidig hver dag) som ikke kunne løses tilfredsstillende af OSSP.

Skole 4: Dårlig fordeling af 5 behov forkaster OSSP-skemaet.

Skole 5 og 6: Specielle hensyn til intern trafik bevirker, at OSSP-skemaet ikke er tilfredsstillende.

Skole 7: Utilstrækkeligt behandlede data gør OSSP-skemaet uanvendeligt.

Skole 8: OSSP-skemaet kan ikke anvendes, da skolen i mellemtiden ændres til andet skolesystem. OSSP-skemaet var ellers udmærket.

Skole 9: OSSP-skemaet udmærket, men data stammer fra tidligere års behov.

For de producerede skemaer udførtes en serie regressionsstudier for at finde relationen mellem:

1. t_d=datamat-tid til løsning af en enkelt tildeling i minutter på IBM 7o94.
2. n_s=antallet af lærere og klasser.
3. n_p=antallet af perioder pr. dag

Som resultat fandtes:

$$t_d=o{,}ooooo516\ (n_s \cdot n_p)^2 \qquad (9.1)$$

Som estimat for den totale datamat-tid nødvendig til løsning af et SL-problem for en enkelt skole, fandtes:

$$T=(t_d \cdot n_s \cdot n_p \cdot E)(1+a) \qquad (9.2)$$

hvor E=gennemsnitligt antal gange, hvert tildelingsproblem skal processeres før akceptabelt resultat nås, og a=faktor til supplering af data-checking og opdeling af behov. Almindeligvis bliver værdierne for E og a hendholdsvis 3,o og o,15. For en skole med 4o lærere og 4o klasser bliver datamat-tiden ca. 15 minutter for udarbejdelse af 6 daglige skemaer med ca 10 perioder.(IBM 7094-minutter).

Omkostningerne til fremstilling af skemaer gik hovedsageligt til analytikeren (59%) og datachecking (26%). Som gennemsnit for de udviklede skemaer blev udgiften 1500$ (canadiske) eller ca. 1,5$ pr elev.

Det skal endelig nævnes, at i Canada formodes det, at om 3 år vil OSSP kunne anvendes på alle landets skoler.

9.4 Metode udviklet af Appleby (3).

Den af Appleby m.fl. i 1961 offenliggjorte SL-procedure er det første bedre resultat,der er opnået i bestræbelserne på at finde egnede SL-procedurer for sådanne skolesystemer, som findes her i landet. Metoden kan langt fra måle sig med senere udviklede metoder (Gotlieb, Berghuis), men den er et eksempel på, hvorledes en simpel systematisk fremgangsmåde kan udfærdige skemaer. Ved den følgende fremstilling af metoden anvendes Appleby's notation, selv om den afviger kendeligt fra den tidligere anvendte notation.

Problemformulering.

For en skole forudsættes, at følgende data er faste:

1. Antal dage pr. cyklus (uge).
2. Antal perioder pr. dag
3. Antal klasser.

Endvidere bestemmes ud fra undervisningsplaner og forhandlinger mellem skoleledere og skolelærere følgende data:

4. Antal fag pr. klasse.
5. Antal perioder for hvert fag og hver klasse.
6. Allokering af lærere til hvert fag og hver klasse.

Punkt 5 og 6 giver:

7. Antal perioder lærer i skal undervise klasse j (N).

Fremgangsmåde.

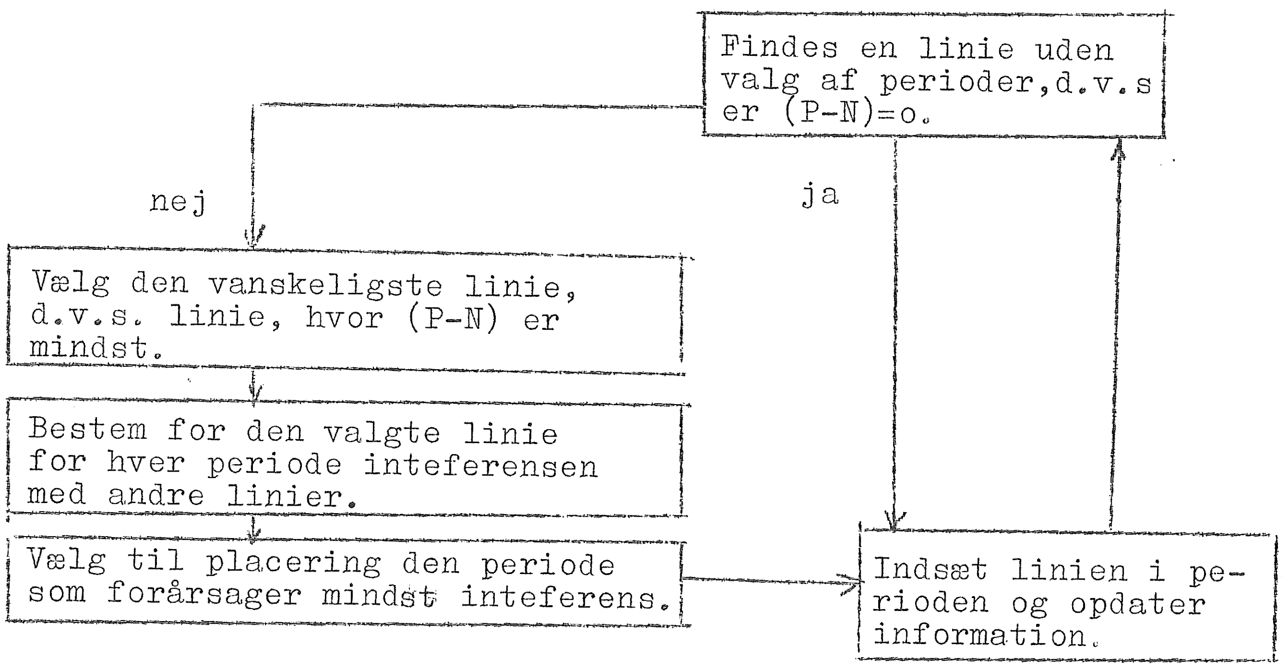
1. Der startes med et blankt skema.
2. Skemaet udfyldes med en placering ad gangen. (Placering angiver lærernummer i til klasse j i periode k)

For at bestemme hvilken klasse-lærer-kombination, der skal indsættes i skemaet, dannes et antal linier (ixj). Hver linie repræsenterer en klasse-lærer-kombination. Der kan således angives:

Linienummer	klassenummer	lærernummer
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	1	2
5	2	2
6	3	2
7	1	3

o.s.v.

For hver linie haves så behov for placering af et bestemt antal timer (N), og der er et bestemt antal perioder til rådighed (P). For at problemet kan løses skal i hvert fald for alle linier gælde , at P $\geqslant$ N. Fremgangsmåden ved allokeringsprocessen kan illustreres ved et blokdiagram:



For hver linie haves et sæt mærkecifre, et for hver periode. Cifret er o, hvis perioden er ledig, og 1, hvis perioden er optaget. Endvidere angives antal perioder, der er ledige (antal nuller) (P) samt linienumre for de linier, der kolliderer med den pågældende (kolliderende linier er linier, som enten har samme lærer eller samme klasse).

For dette behov:

$$N_{ij} = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & o \\ o & 1 & 3 \end{Bmatrix}$$

fås:

Linie	klasse	lærer	kolliderende linier	N_s	P_s	periode cifre
1	1	1	2,3,4,7	2	4	o o o o
2	2	1	1,3,5,8	1	4	o o o o
3	3	1	1,2,6,9	1	4	o o o o
4	1	2	1,5,6,7	2	4	o o o o
5	2	2	2,4,6,8	2	4	o o o o
6	3	2	3,4,5,9	o	4	o o o o
7	1	3	1,4,8,9	o	4	o o o o
8	2	3	2,5,7,9	1	4	o o o o
9	3	3	3,6,7,8	3	4	o o o o

Kriteriefunktioner.

Når en placering af en linie foretages ændres de dertil svarende periodecifre til 1 (både for linien og de kolliderende linier). Foretages således en placering af linie s (lærer i og klasse j) i periode k, da er det evident, at for alle de linier, som enten indeholder lærer i eller klasse j, er det ikke muligt at foretage andre placeringer i periode k. På ethvert trin angiver nullerne altså de perioder, hvor en linie kan placeres. Antallet af ledige perioder (P_s) og antallet af placeringer, der mangler (N_s) opdateres. Simple funktioner af P og N (f. eks. P-N eller P/N) giver et nyttigt tal for antallet af frihedsgrader for en linie:

P-N	P/N	
$<$o	$<$1	perioder til rådighed for lille
=o	=1	Nøjagtig så mange perioder som nødvendigt.
$>$o	$>$1	Flere muligheder for placering.

Ved valg af linier udtages først linier med P-N=o. Forårsager placeringen af disse linier, at P-N bliver negativ for andre linier, er der opstået indikation for fejl. Dernæst vælges den linie med mindst værdi af funktionen P-N+P/N. Denne funktion angiver en værdi for, hvor vanskelig linien er at placere. Jo større funktionen er, des flere muligheder er der for placering, og jo mindre grund er der til at placere den først.

Valg af bedste periode.

For at bestemme den bedste periode for en linies placering, bestemmes liniens inteferens. Hvis den valgte linie kolliderer med linie x, bestemmes følgende tal for enhver periode, hvor linien kan placeres:

$$A=\sum_{x}\frac{R_{sx}\cdot N_{sx}}{(P-N)_{sx}} \tag{9.3}$$

Her er $R_{sx}=1$, hvis periodetallet for linie x er nul og $R_{sx}=o$ hvis periodetallet er 1.

N_{sx} og $(P-N)_{sx}$ er værdien for N_s og $(P-N)_s$ for linie x.

Den periode, for hvilken A bliver mindst, vælges.

Eksempel: Givet behovmatricen side 9.14. Det forudsættes, at der ikke er andre betingelser, der skal opfyldes. Det skal dog nævnes at initiale tildelinger m.m. ikke er nogen større hindring for anvendelse af metoden. Det vil altså sige, at vi på forhånd ved, at problemet har mindst en løsning (se SL-problemet uden initiale tildelinger). Der opstilles en liste som vist side 9.14 dog tilføjes for hver linie værdien af kriteriefunktionen P-N+P/N. Behovene for linie 6 og 7 er nul, og de kan derfor udelades. Kriteriefunktionen antager sin mindste værdi for linie 9 ($4-3+{}^4/_3=7/3$). Linie 9 vælges derfor til placering (lærer 3 og klasse 3). Periode 1,2,3 og 4 er ligestillet for dette møde, og periode 1 vælges tilfældigt. Ved opdatering af data fås følgende liste:

linie	N_s	P_s	K $P_s-N_s+P_s/N_s$	periodecifre
1	2	4	4	o o o o
2	1	4	7	o o o o
34	1	3	5	1 o o o
4	2	4	4	o o o o
5	2	4	4	o o o o
8	1	3	5	1 o o o
9	2	3	$2\frac{1}{2}$	1 o o o

K er mindst for linie 9, som derfor vælges. Periode 2,3 og 4 er ligestillet. Periode 2 vælges.

Opdatering af data giver:

1	2	4	4	o o o o
2	1	4	7	o o o o
3	1	2	3	1 1 o o
4	2	4	4	o o o o
5	2	4	4	o o o o
8	1	2	3	1 1 o o
9	1	2	3	1 1 o o

K er mindst for linie 3, 8 og 9. Da ingen sekundært kriterium anvendes, vælges tilfældigt linie 3. Her er periode 3 og 4 ligestillet. Periode 3 vælges.

Opdatering giver:

1	2	3	$2\frac{1}{2}$	o o 1 o
2	1	3	5	o o 1 o
4	2	4	4	o o o o
5	2	4	4	o o o o
8	1	2	3	1 1 o o
9	1	1	1	1 1 1 o

(behovet for linie 3 er nul, hvorfor linien udelades). K er mindst for linie 9. Eneste mulige periode er periode 4.

Opdatering giver:

linie	N_s	P_s	K	Periodetal
1	2	3	$2\frac{1}{2}$	o o 1 o
2	1	3	5	o o 1 o
4	2	4	4	o o o o
5	2	4	4	o o o o
8	1	1	1	1 1 o 1

Linie 8 og periode 3 vælges.

1,	2	3	$2\frac{1}{2}$	o o 1 o
2	1	3	5	o o 1 o
4	2	4	4	o o o o
5	2	3	$2\frac{1}{2}$	o o 1 o

Linie 5 og periode 1 vælges

1	2	3	$2\frac{1}{2}$	o o 1 o
2	1	2	3	1 o 1 o
4	2	3	$2\frac{1}{2}$	1 o o o
5	1	2	3	1 o 1 o

Linie 4 vælges. En kort udregning viser, at A er mindst for periode 3.

Fortsættes således fås følgende løsning:

		Klasse 1	2	3
Periode	1	1	2	3
	2	1	2	3
	3	2	3	1
	4	2	1	3

Lærer.

Eller:

$$\tilde{S}^1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \tilde{S}^2 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \tilde{S}^3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \tilde{S}^4 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Datamat-program.

Der foreligger ikke nogle resultater af anvendelse af Appleby's metode på virkelige systemer. Undertegnede har udviklet et Fortran-program for metoden (vist i kursusarbejde, dog udbygget væsentligt). Der skal dog ikke spildes plads til en gennemgang af programmet (det er blot et simpelt programeringsarbejde), men det skal nævnes, at et skema for 3o lærere, 3o klasser og 9 perioder tager ca. o,8 IBM 7o9o-minutter at udarbejde. Det skal dog nævnes, at for de ca 5 sidste tildelinger (af ialt 3ox9=27o) må anvendes manuel tildeling. For disse linier er værdien af K blevet mindre and 1, og da der ikke er indbygget en back-tracking procedure, kan programmet ikke foretage disse sidste tildelinger. Ved indføring af lo tilfældige initiale tildelinger må de sidste ca 15 tildelinger foretages manuelt. For at gøre Appleby's metode anvendelig skal derfor udvikles en back-tracking procedure til ændring af tidligere allokeringer, således, at også de sidste kan placeres. Det er en vanskelig opgave at udforme en sådan procedure, og da samtidig metoden aldrig vil kunne afgøre, om der i det hele taget er løsninger for et givet problem, så er det begrænset hvilken sucses, der vil kunne opnås med metoden. Der er da heller ikke offentliggjort artikler om metodens anvendelse siden metodens fremkomst i 1961.

9.5 Metode udviklet af Berghuis.(6).

Den af hollænderen Berghuis udviklede SL-procedure er den eneste af de her omtalte metoder, som uden initiale tildelinger og initial opdeling af problemet sikrer en nogenlunde spredning af fagene over ugens dage. Berghuis anstiller visse betingelser, som skal være opfyldt for et SL-problem, hvis dette skal have en løsning. Disse betingelser er dog ret identiske med de af Gotlieb formulerede feasibilitytester, dog således, at en opfyldelse af Berghuis' betingelsesligninger ikke er ensbetydende med, at også Gotliebs ligninger kan akceptere, at problemet har løsninger. Berghuis' metode kan betragtes som en mellemting mellem Gotliebs metode og Applebys metode. Selv om grundlaget er det samme som for Gotlieb, så involverer Berghuis' metode ikke anvendelse af matrixreduktion, men anvender istedet prioritering af fagene. Tildelinger foregår i overensstemmelse med prioriteringfunktionens værdi. Når proceduren ikke kan placere flere møder på skemaet, opnås de bedste resultater ved manuel placering af de resterende timer.

Problemformulering.

Til formulering af problemet opstilles 3 matricer:

1. Rådighedsvektorer for lærere (TA):

$$A_k^i = \{a_k^i\}$$

(det tilstræbes at benytte notationen fra gennemgangen af Gotliebs metode, idet indføring af Berghuis' notation . vil virke forvirrende.).

2. Rådighedsvektorer for klasser (CH):

$$A_k^j = \{a_k^j\}$$

Her gælder naturligvis som tidligere:

$\sum_k a_k^i$ = antal timer lærer t_i er til rådighed

$\sum_i a_k^i$ = antal lærere til rådighed i time h_k.

3. Behovmatrix (TSC):

$R = \{r_{ij}\}$ angiver antal timer, lærer t_i skal møde klasse c_j.

$\sum_j r_{ij}$=totale antal timer for lærer t_i

$\sum_i r_{ij}$=totale antal timer for klasse c_j

Derudover omfatter metoden hensyntagen til følgende betingelser. Betingelserne er opstillet på listeform, og ved hver tildeling må det undersøges, om tildelingen tilfredsstiller de betingelser, som er aktuelle:

1. Ensartede fag må ikke følge hinanden (historie, geografi, biologi)
2. Visse fag undervises i dobbelttimer.

3. Visse fag skal undervises i specielle lokaler.
4. I visse fag skal klasser deles eller samles.
5. Fag uden hjemmearbejde skal deles over hele ugen.
6. Klasser må kun have fritimer ved begyndelsen eller slutningen af dagen.

Nødvendige betingelser.

Foruden de 3 definerede matricer udvikles en matrix $P_d = \{p_d^i\}$ angivende hvilke dage t_i er til rådighed. Består en dag af u perioder, da er det samlede antal perioder på en uge lig uxd, hvor d lig antallet af dage. For elementerne p_d^i gælder, at såfremt

$$T = \sum_{k=ut}^{u(t+1)} a_k^i \geq 1 \qquad (9.4)$$

hvor t er et positivt tal mindre end d, da er $p_d^i = 1$.
Er T=o er $p_d^i = o$.

Berghuis angiver en række simple betingelser, som skal være opfyldt, hvis det skal være muligt at løse problemet.

1. Antallet af timer t_i er til rådighed må være større end eller lig med t_i's behov:

$$\sum_k a_k^i \geq \sum_j r_{ij} \qquad (9.5)$$

og analogt for c_j. Disse betingelser er af Gotlieb videreudviklet til: $A^i \cup A^j = A^{ij}$, $\| A^{ij} \| \geq r_{ij}$

2. Antallet af lærere til rådighed i time h_k skal være større end eller lig med antallet af klasser til rådighed:

$$\sum_k a_k^i \geq \sum_k a_k^j \qquad (9.6)$$

Denne betingelse giver en foreløbig garanti for, at klasserne ikke får fritimer mellem undervisningstimerne. Her indførte Gotlieb dummyklasser og dummylærere for at opnå, at alle klasser og lærere beskæftiges hver time. Berghuis angiver, at hvis følgende ligning er opfyldt for alle i, j og k, da er der gode muligheder for at opnå et godt resultat:

$$\sum_k a_k^i \geqslant 1{,}1 \cdot \sum_k a_k^j \qquad (9.7)$$

3. Antallet af dage t_i er til rådighed må være større end eller lig med det maximale antal timer, t_i skal undervise een klasse.

$$\sum_d p_d^i \geqslant \max \overset{+}{r}_{ij} \qquad (9.8)$$

hvor $\overset{+}{r}_{ij}$ betegner antallet af enkelttimer plus antallet af dobbelttimer t_i skal undervise c_j. Er således $r_{ij}=6$ og skal t_i undervise c_j i 2 enkelttimer og 2 dobbelttimer, bliver $\overset{+}{r}_{ij}=4$. Denne ligning indebærer en mulighed for, at ingen klasse undervises mere end en gang om dagen i det samme fag.

4. Den 4. betingelse gælder kun for den mængde af lærere l_i, der er til rådighed netop det antal dage, der er nødvendigt, altså for hvilke det gælder:

$$\sum_d p_d^i = \max \overset{+}{r}_{ij} \qquad (9.9)$$

For hver dag skal da gælde:

$$\Big\| \bigcup_{t_i=l_1,l_2,\dots,l_n} A^{ij} \Big\| \geqslant \sum_{t_i=l_1,l_2,\dots,l_n} r_{ij} \qquad (9.1o)$$

hvor leddet før lighedstegnet angiver det samlede antal muligheder for et møde mellem c_j og lærerne l_i, og det andet led angiver behovet for (c_j, l_i).

Det skal her nævnes, at de af Berghuis udviklede nødvendige betingelser kun er medtaget for at anskueliggøre, hvorledes Berghuis har grebet problemet an. Nok er Berghuis' betingelser nødvendige, i hvert fald hvis der stilles strenge krav til en jævn fagfordeling, men de er langt fra tilstrækkelige. Selv om det ikke er bevist, at Gotliebs feasibilitytest er tilstrækkelig, så er en tilfredsstillelse af denne en større garanti for, at der findes en løsning, end en tilfredsstillelse af Berghuis' betingelser. Berghuis lader kun betingelse 4 gælde for en bestemt mængde af lærere, hvor Gotlieb undersøger alle mængder af lærere (også delmængder til l_i).

Løsningsprocedure.

I lighed med flere andre SL-procedurer er metoden baseret på udvikling af prioriteter for fagene (lærerne). Et fag som gymnastik, hvor flere klasser skal mødes med flere lærere, gives højere prioritet end historie. For at finde den "korrekte" prioriteringsværdi for en given lærer, tildeles hans fag et kvalitetstal q_v, bestemt af antallet af restriktioner for dette fag. Bestemmelse af q_v kræver stor erfaring, og der kan ikke opstilles normer herfor. En lærers prioriteringstal bliver:

$$W(i)=A\cdot B\cdot C\cdot q_v \tag{9.11}$$

Her er:

$$A=\frac{\sum_j r_{ij}}{\sum_k a_k^i\left(\left\| \bigcup_{j=j_1,j_2,..,j_n} A^{ij}\right\| - \sum_j r_{ij} +1\right)} \tag{9.12}$$

A er altså proportional med antallet af timer t_i skal undervise og omvendt proportional med antallet af timer t_i er til rådighed multipliceret med differencen mellem antallet af timer t_i er til rådighed for alle klasser minus antallet af timer, t_i skal undervise.

$$B=\frac{1}{\sum_d p_d^i - \max \overset{+}{r}_{ij} +1} \tag{9.13}$$

hvorved B bliver omvendt proportional med differencen mellem antallet af dage t_i er til rådighed, og antallet af dage, t_i nødvendigvis skal være til rådighed.

For C angives en funktion, som tilsigter at gøre prioriteten stor for en lærer, som kun er til rådighed i en time. Er h_k denne periode bliver:

$$C = \sum_i a_k^i - \sum_j a_k^j \qquad (9.14)$$

Når nu en lærer skal sammenstilles med en klasse, vælges først den lærer, som har størst prioritet, og som klasse vælges den, han skal undervise i flest timer. For at finde en passende time for denne kombination bestemmes for hver mulig time værdien af

$$G = \sum_i a_k^i - \sum_j a_k^j \qquad (9.15)$$

Den time h_k, for hvilken G bliver mindst vælges.

Der skal ikke anføres noget eksempel på anvendelse af denne metode. Den bygger på nogenlunde de samme betingelser som Gotliebs metode, men ved løsningsproceduren anvendes en algoritme baseret på prioriteringsfunktioner, d.v.s. en fremgangsmåde, som allerede er illustreret ved Coles og Appleby's metoder.

Resultater og kritik.

Der er eksperimenteret med Berghuis' metode i adskillige år, og metoden er også anvendt til reel produktion af skemaer. I 1963 produceredes skemaer for 8 skoler, og om resultaterne skal her citeres:

1. For de 7 skoler fastslog betingelsesligningerne, at der ikke fandtes nogen løsning (det var hovedsageligt betingelserne 3 og 4, der ikke var opfyldt).
2. Efter konsultation med skolerne revideredes data, men det var ikke muligt at løse alle de vanskeligheder, man var stødt på i første omgang.
3. Der opnåedes løsninger ved at forkaste mellem 1% og 3% af tildelingerne.
4. Den endelige udfærdigelse af skemaerne måtte udføres manuelt.
5. De udfærdigede skemaer var mere regelmæssige end de tilsvarende skemaer udført manuelt.

Metoden anstiller visse betingelser for at kunne opnå en vis spredning af fagene. Imidlertid er der ikke i prioriteringsfunktionen involveret faktorer, som bevirker placering af fagene således, at størst mulig spredning opnås. For at opnå spredningen vil det ofte være nødvendigt at vælge timer med lav prioritet (høj G-værdi), hvilket naturligvis gør det vanskeligere at finde en løsning.

Metoden fortæller ikke på noget tidspunkt, om et givet problem har løsninger. Man ved altså ikke, om den kombination, der placeres nu, på et senere tidspunkt vil blokere for yderligere placeringer. Back-tracking er altså nødvendigt. Metoden må dog betragtes som værende bedre end Appleby's, idet den anvendte prioriteringsfunktion indeholder hensyn til flere faktorer. Som ved de andre metoder er det klart, at initiale tildelinger kan forbedre skemaet på bekostning af antallet af løsninger.

Kapitel 1o: Skemalægning og EDB.

1o.1 Indledning.

Da der udvises stor interesse fra undervisningssektoren angående anvendelse af EDB ved skemalægning, skal her anføres de vigtigste erfaringer desangående. Det her anførte bygger hovedsageligt på erfaringer fra OSSP-systemet i Canada. Det skal dog nævnes, at anvendelse af datamater til skemalægning er en ret ny foreteelse. Man begyndte først at tænke i de baner sidst i 5o-erne.

1o.2 Planlægning af et datamat-baseret SL-system.

Et effektivt system til datamat-baseret skemalægning vil kræve aktiv menneskelig deltagelse på en del områder. De hverv, der skal udføres kan grupperes som:

1. Dataanalyse.
2. Systemvedligeholdelse.
3. Systemudvikling.
4. Administration.
5. Kontorarbejde.
6. Uddannelse.

Dataanalyse.

Analytikeren bør have den primære ansvarlighed for forbindelsen mellem skolerne og datamaten. Det vil være ønskeligt, om analytikeren kan udføre følgende funktioner:

1. Danne et godt arbejdsforhold med hver skoleleder.
2. Sikre, at hver skole forstår dets ansvar ved arbejde med systemet.
3. Overvåge behandlingen af hver skoles data.
4. Sikre, at hver skole opnår det absolut bedste resultat.

Behandlingen af skolernes data kan deles i følgende faser:

1. Dataindsamling (udføres af skolelederen)
2. Konvertering af data til datamat.
3. Check af data (fejlfinding).
4. Analyse af output.
5. Justering af output (manuelt).

Systemvedligeholdelse og -udvikling.

Funktioner til systemvedligeholdelse vil inkludere rettelse af programfejl og inkorporering af nye programkoder til behandling af betingelser, som oprindeligt ikke var forudset.

Administration.

Lederen af et SL-produktionssystem bør i første række forsøge at indføre og benytte en række effektive kontrolforanstaltninger. Endvidere bør lederen påtage sig ansvaret for uddannelse af personel, planlægning, rapportering,udvikling og opretholdelse af forbindelse med undervisningssektoren.

lo.3 Anvendelse af datamater.

For et datamat-baseret SL-system vil anvendelse på en skoles problem kun være fornuftig, hvis følgende to spørgsmål kan besvares bekræftende:

1. Tilbyder systemet skolelederen væsentlige fordele i tid, penge og anstrengelser?
2. Vil skolens problem passe indenfor de fysiske begrænsninger for SL-systemet?

Det formodes, at et SL-system især vil være relevant, hvor skolelederen på grund af sygdom, fravær, andre pligter, ingen erfaring og utilstrækkeligt kendskab til skolen, ikke er i stand til at udfærdige et skema. Endvidere vil SL-systemet være relevant hvor pludselige ændringer i strukturen kræver et nyt skema. Endvidere bør det nok påtales, at som regel udføres et skema af personer, som ikke er systematikere, men pædagoger, og en overføring til datamatfremstilling vil gøre det muligt for disse personer at anvende deres tid til andre opgaver. Det skal i den forbindelse nævnes, at arbejdet med skemalægning på de ca. 1ooo købstadordnede folkeskoler betyder ca. 2 mill. kroner årligt i skemalægningshonorar. Hertil kommer, at en eventuel kundekreds til et SL-system også vil kunne omfatte gymnasier, seminarier m.m.

Ved produktion af skemaer på datamater kan påregnes følgende fordele:

1. Hurtig fremstilling af skemaer
2. Ensartede skemaer af samme kvalitet som manuelle skemaer (med tiden forhåbentlig bedre).
3. Billigere fremstillingspris (fra forsøgene i Canada har udgiften til skemalægning på datamater været af ca. samme størrelse som udgiften til manuel skemalægning. At datamat-anvendelse er en ny foreteelse taler derfor kun til datamatens "økonomiske" fordel)
4. Produktion af skemaer kan foretages på EDB-centraler og frigøre tid for skolelederen (eller skemalæggeren) til andre og mere pædagogiske opgaver.

Litteraturliste.

(1) Abell, Victor A.: Purdue Academic Student Scheduling (PASS). Purdue University, July 1965

(2) Akermann, F.: Elektronish schemalägning. Journal for Swedish High Schools no 5, 1962.

(3) Appleby, J. S.: Techniques for producing school time tables on a computer and their application to other scheduling problems. Computer Journal 3, Jan. 1961, p 237-245.

(4) Barraclough, E.D.: The application of a digital computer to the construction of time tables. Computer Journal 8, July 1965, p 136-146.

(5) Berge C.: The theory of graphs and its application. J.Wiley and sons, N.Y., 1962.

(6) Berghuis, J.: The preparation of school time tables by electronic computers. BIT 4, nr 2, 1964, p 1o6-114.

(7) Blakesley, J.F.: Automation in college management. College and University Business 27, no 5, 1959, p 39-44.

(8) Bossert, W.H. & Harmon, J.B.: Student sectioning on the IBM 7o9o, IBM Corp., Camp. Mass., Mar. 1963.

(9) Cole A.J.: The preparation of examination time tables using a small store computer. Computer Journal 7, July 1964, p 117-121.

(1o) Csima, J.: Investigations on a time table problem. Doctor Thesis, University of Toronto, 1965.

(11) Csima, J.& Gotlieb, C.C.: Test's on a computer method for constructing school time tables. Commun. ACM, 7, Mar. 1964, p 16o-163.

(12) Dulmage, A.L.& Mendelsohn, N.S.: Two algorithms for bipartite graphs. J.Soc.Indust.Appl.Math.,11, 1963, p 183-194.

(13) " A structure theory of bipartite graphs of finite exterior dimension. Trans.Roy.Soc.Canada, Sect III, 53, 1959, p 1-13.

(14) " Matrices associated with the Hitchcock problem. J.ACM., 9, 1962, p 4o9-418.

(15) Duncan, A.K.: Letter to the editor. Commun. ACM., 8, 1965, p 72.

(16) Egervary, E.: Matrixok kombinatorikus tulajdonsagairol. Mat.Fiz.Lapok, 38, 1931, p 16-28.

(17) Faulkner, M.: Computer sectioning and class scheduling. Datamation 11, June 1965, p 35-37.

(18) Folkers, J.S.: Construction of school time tables by a computer. Letter, Commun. ACM, no 8, 1963, p 421.

(19) Frobenius, G.: Über zerlegbare Determinanten. Sitzungsberichte der preussischen Akademie, 1917, I, p 274-277.

(2o) Gotlieb C.C.: The construction of class-teacher time tables. Proc. IFIP Congress 1962, p 73-77.

(21) " Construction of class-teacher time tables. Res. summ., Commun. ACM, no 1, 1963, p 23.

(22) Greko, B.: Maskinell schemaläggning. NordSam 1963, del 1, p 128-139.

(23) Griffith, B.A.: Remarks on a computer program for the construction of school timetables. Commun. ACM, 9, 1966, p 35.

(24) Gunzenhauser, R.& Junginger, W.: Über eine Methode zur Erstellung von Schulstundenplänen mit Hilfe einer Zifferrechenanlage. Mat. Tech. Wirts., Heft 3, 1964.

(25) Hall, M.: An algorithm for distinct representives. Amer. Math. Monthly, 1956, p 716-717.

(26) Hall, P.: On representives of subsets. J. London Math. Soc., 1o, 1935, p 26-3o.

(27) Halmos P.R.& Vaughan H.E.: The marriage problem. Amer. J. Math., 72, 195o, p 26-27.

(28) Holz, R.E.: The Gasp Manual, June 1963, Mass. Inst. of Technologi, Cambr., Mass.

(29) " School scheduling using computers. MIT, Cambr, Mass, Febr. 1963.

(30) " State of the art of automatic scheduling and registration. Proc., 9. College and University machine records Conference, Apr. 1964, p 253-258.

(31) IBM: Application program. Student scheduling system/360. The tally and conflict matrix programs (360A-US-06X), Users manual. H20-0220-0, IBM Corp. 1966.

(32) " Application program. Student schedulign system/360. The scheduler program (360A-US-07X), Users manual. H20-0239-0, IBM Corp. 1966.

(33) " Application program. Student scheduling system/360. Application description. H20-0202-1, IBM Corp. 1966.

(34) Kates, Peat, Marwick & Co.: Timetabling by computer for schools in Ontario. Ontario Inst. for studies in Educ., August 1967.

(35) Kuhn, H.W.: The hungarian method for the assignment problem. Naval Res. Logistics Quarterly, 2, 1955, p 83-97.

(36) König, D.: Theorie der endlichen und uendlichen Graphen. Chelsea, N.Y., 1950.

(37)	König, D.:	Uber graphen und ihre Abwendung. Math. Annalen, vol 77, p 453-465.
(38)	Lewis, C.F.:	The school time table. Cambridge University Press, 1963.
(39)	Lions, J.:	Matrix reduction using the Hungarian Method for the generation of school time tables. Commun. ACM, no 5, 1966, p 349-354.
(40)	"	The Ontario school scheduling program. Computer Journal 5, 1967, p 14-21.
(41)	"	A counter example for Gotliebs method for construction of school time tables. Letter, Commun. ACM, no 9, 1966, p 697.
(42)	Lipschutz, S.:	Set theory and related topics. Schaum Publishing Co., N.Y., 1964.
(43)	NordSam 1961:	Schemaläggning på siffermaskine. 18/8-1961, grubbe D.
(44)	"	Skolschema- et pedagoisk planläggnings problem. 18/8-1961, grubbe D.
(45)	Ryser, J.H.:	Combinatorial properties of matrices of zeroes and ones. Can. J. Math, 9, p 371-377.
(46)	Shermann, G.R.:	The sequental method of schedling students. Computer research rapport, Purdue Research Foundation, Sept. 1958.

(47) Shermann, G.R.: A combinatorial problem arising from scheduling af university classes.
Journal of the Tennessee Academy of Science, vol 38, no 3, p 115.

(48) Stahlknecht: Zur elektron. Berechn. von Stundenplanen.
Elek. Datenv. 6, 1964, p 85-91.

(49) Thomsom, G.L.: A method for scheduling students to classes.
AD 62o174, July 1965.

(5o) Williams, C.W.: Scheduling students by computer.
Data Processing for Education, no 5, 1966, p 349-354.

(51) Zehnder, C.A.: Berechnung von Stundenplanen und transportplanen.
Verlag Industrielle Organisation, 1965.

I den nærmeste fremtid offenliggøres følgende artikler:

(52) Dempster, M.A.H.: On the Gotlieb-Csima timetabling algorithm.
Canadian Journal of Mathematics.

(53) Lions, J.: A theorem pertaining to the reduction of binary matrices.
Journal of ACM.

(54) " An improved method for the construction of class-teacher time tables (under forberedelse).