En Introduktion til Statistik

Bind 3D

Statistisk beslutningsteori

Poul Thyregod

LYNGBY 1998

IMM

Trykt af IMM - DTU
Bogbinder Hans Meyer

Indhold

Indhold

denne side blank

denne side blank

Afsnit 9

Nyttebegrebet

fil: kapitel3.tex 1998-05-12

9.1 Kort om konsekvenser

Teorierne for beslutninger under usikkerhed og under benyttelse af statistiske data bygger dels på sandsynlighedsteorien, og dels på nytteteorien. Vi vil i dette kapitel indføre nyttebegrebet og vise, hvorledes indførelsen af nytteværdien svarende til enhver mulig konsekvens muliggør en beskrivelse af rationel beslutningstagen.

Vi vil forudsætte, at beslutningstageren er i stand til at beskrive alle de mulige konsekvenser, der kan overgå hende i en beslutningsituation. Disse konsekvenser kan gøres op i penge, som det for eksempel ofte vil være tilfældet ved private investeringer, eller konsekvenserne kan opgøres i andre enheder, for eksempel antal trafikuheld på en given vejstrækning, antal kørte personkilometer og rejsetid ved vejinvesteringer, eller antal personsygedage, dødsfald i forskellige aldersgrupper etc. ved social- og sundhedsmæssige investeringer.

Det væsentlige er i første omgang, at beslutningstageren er i stand til at angive alle de mulige konsekvenser, hun kan risikere i den givne beslutningssituation. Vi vil benævne mængden af mulige konsekvenser med $\mathcal{K}$, og de enkelte konsekvenser, der altså er elementer i $\mathcal{K}$, vil blive benævnt

$K_1, K_2, \ldots$. Vi kalder de enkelte konsekvenser, som en beslutning kan resultere i, for simple konsekvenser.

Eksempel 9.1.1 ***Opstilling af konsekvenser***

En virksomhed modtager fra en underleverandør et parti på 1000 transistorer. Kvaliteten af hver transistor er enten tilfredsstillende eller den er fejlbehæftet. Såfremt virksomheden anvender transistorerne på ensartet måde i produktionen, er der følgende mulige konsekvenser:

K_0: Transistorerne anvendes, ingen er fejlbehæftede.
K_1: Transistorerne anvendes, een transistor er fejlbehæftet.
K_2: Transistorerne anvendes, to transistorer er fejlbehæftede.
.
.
.
.
K_{1000}: Transistorerne anvendes, alle transistorer er fejlbehæftede.

En mere detaljeret opskrivning af konsekvenserne ville være følgende:

K_0': Transistorerne anvendes, ingen er fejlbehæftede.
K_1': Transistorerne anvendes, den først installerede er fejlbehæftet, de øvrige acceptable.
K_2': Transistorerne anvendes, den anden installerede er fejlbehæftet, de øvrige acceptable.
.
.
.
.
etc.

Når vi tillod os at nøjes med de 1000 først beskrevne konsekvenser, skyldes det, at virksomheden var indifferent over for forskellige placeringer af de fejlbehæftede transistorer. Da alle transistorer indgik på ensartet måde i produktionen, og ikke nogle transistorer var mere vitale end andre, var det kun antallet af fejlbehæftede transistorer, der spillede en rolle. □

Eksempel 9.1.2 ***En konsekvens kan være et helt forløb***

En virksomhed står over for indkøb af en maskine. Såfremt virksomheden køber maskinen, vil der til ethvert forløb af maskinens driftsforhold, forløb af benyttelsen af maskinen, forløb af salgsforhold samt renteniveau svare en konsekvens. Ved at analysere virksomhedens indifferens over for de mulige konsekvenser vil man stræbe efter at nedbringe mængden af konsekvenser til et mere overskueligt niveau. □

9.2 Nyttebegrebet

Det er imidlertid ikke tilstrækkeligt, at beslutningstageren er i stand til at specificere alle konsekvenserne. Vi må også vide, hvordan hun ordner disse indbyrdes, det vil sige, om hun foretrækker K_1 for K_2 etc., og yderligere vil vi kræve, at beslutningstageren er i stand til at præcisere, hvorledes hendes præference er i situationer, hvor de pågældende konsekvenser vil indtræffe med givne sandsynligheder.

Formelt opstiller vi følgende krav til beslutningstagerens præferencemønster:

Axiom 1 For to vilkårlige konsekvenser K_1 og K_2 gælder enten

$$K_1 \prec K_2, \quad K_2 \prec K_1 \quad \textit{eller} \quad K_1 \sim K_2 \ , \tag{9.2.1}$$

hvor $K_1 \prec K_2$ symboliserer, at K_2 foretrækkes for K_1, og $K_1 \sim K_2$ angiver, at K_1 og K_2 er lige gode (ækvivalente).

□

Axiom 2

$$\text{Hvis } K_1 \prec K_2 \text{ og } K_2 \prec K_3 \text{, da vil } K_1 \prec K_3 \quad . \tag{9.2.2}$$

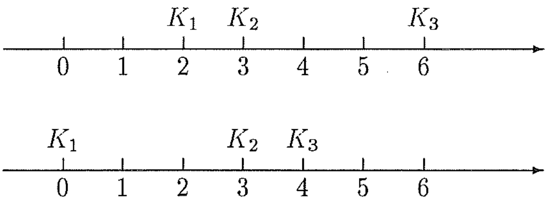
□

De to axiomer udsiger, at beslutningstageren er i stand til parvis at ordne konsekvenserne (Axiom 1), og at denne ordning er transitiv (Axiom 2).

Såfremt de to axiomer er opfyldt, kan vi altså opstille konsekvenserne efter præference, $K_1 \prec K_2 \prec K_3 \prec \ldots$, således at den mindst attraktive konsekvens står først og derefter følger de øvrige konsekvenser i præferenceorden. Vi kan da repræsentere konsekvenserne ved punkter på den reelle talakse, men vi bemærker at repræsentationen kun er ordinal, dvs. ordenstro. En vilkårlig monoton transformation af den reelle talakse fører til en repræsentation af konsekvenserne, der i lige så høj grad afspejler præferencemønstret, som det er bestemt gennem axiomerne 1 og 2.

Figur 9.1 viser to ordinale repræsentationer af konsekvenserne K_1, K_2 og K_3, hvor $K_1 \prec K_2 \prec K_3$. Konsekvenserne kan eksempelvis være udbyttet

Figur 9.1. To ækvivalente ordinale repræsentationer af konsekvenserne $K_1 \prec K_2 \prec K_3$.



af en investering, $K_1 \sim 2$ mill. kroner, $K_2 \sim 3$ mill. kroner og $K_3 \sim 4$ mill. kroner. Det fremgår af figuren, at den ordinale repræsentation kun illustrerer rækkefølgen af konsekvenserne, ordnet efter præference, men repræsentationen giver ingen oplysning om graden af præference.

I en stor del af de situationer, man møder, er det imidlertid ikke tilstrækkeligt at kunne rangordne de simple konsekvenser; man har også behov for at kunne sammenligne kombinationer af konsekvenser. De kombinationer, vi her vil betragte, afspejler situationer, hvor beslutningstageren skal vælge mellem sammensatte situationer, der hver for sig indebærer, at beslutningstageren bliver udsat for en konsekvens, udvalgt i overensstemmelse med en given sandsynlighedsfordeling blandt en given mængde af konsekvenser. En sådan situation siges at medføre en sammensat konsekvens.

Definition 9.2.1 ***Sammensatte konsekvenser***

Lad $K_1, K_2, K_3, \ldots,$ være konsekvenser. Ved den sammensatte konsekvens

$$(K_1, K_2)_p \text{ , hvor } 0 \leq p \leq 1, \tag{9.2.3}$$

vil vi betegne den mulighed, at K_1 indtræffer med sandsynligheden p, og K_2 indtræffer med sandsynligheden $1-p$. Endvidere vil vi ved den sammensatte konsekvens

$$(K_1, K_2, K_3, \ldots)_{p_1, p_2, \ldots} \text{ , hvor } 0 \leq p_i \leq 1 (i = 1, 2, \ldots) \text{ og } \Sigma p_i = 1, \tag{9.2.4}$$

betegne den mulighed, at K_1 indtræffer med sandsynligheden p_1, K_2 indtræffer med sandsynlighed p_2 etc.

Sammensatte konsekvenser benævnes ofte lotterier mellem simple konsekvenser.

Vi vil antage, at beslutningstagerens præference over for sammensatte konsekvenser yderligere tilfredsstiller

Axiom 3

a Hvis $K_1 \prec K_2$, da vil der for enhver konsekvens K og enhver sandsynlighed p, $0 \leq p \leq 1$, gælde

$$(K_1, K)_p \prec (K_2, K)_p.$$

b Hvis $K_1, K_2, K_3, \ldots$ og $K_1', K_2', K_3', \ldots$ er følger af konsekvenser, således at $K_1 \prec K_!', K_2 \prec K_2'$, etc., da vil der for enhver sandsynlighedsfordeling $p_1, p_2, p_3, \ldots$ med $\sum p_i = 1$ gælde

$$(K_1, K_2, K_3, \ldots)_{p1,p2,\ldots} \prec (K_1', K_2', K_3', \ldots)_{p_1,P_2,\ldots}$$

□

Axiomet udsiger, at hvis beslutningstageren er stillet over for et lotteri mellem en række konsekvenser, og én eller flere af disse forbedres, da vil hun foretrække det forbedrede lotteri.

Axiomet muliggør en sammenligning mellem to sammensatte konsekvenser, såfremt den ene sammensatte konsekvens er fremkommet af den anden ved at forbedre nogle af de indgående konsekvenser, men, som det følgende eksempel viser, er axiomet ikke kraftigt nok til at sikre os en sammenligning af to vilkårlige, sammensatte konsekvenser.

Eksempel 9.2.1 *Ordning af sandsynlighedsfordelinger*

Skibsværftet Søblik har indgået en kontrakt med rederiet Fultank om bygning af tre mellemstore tankskibe. Ifølge kontrakten skal Søblik med 14 dages varsel kunne levere vitale reservedele til skibenes fremdrivningsapparat, såfremt dette beskadiges inden for tre år efter, at skibene er afleveret. I planlægningsafdelingen i Søblik overvejer man da, hvorvidt man skal producere et lager af reservedele, mens skibene er under bygning, eller om man først skal producere reservedelene, når behovet opstår. En gennemgang af planerne for skibets fremdrivningsapparat viser, at de fleste af de vitale dele let vil kunne fremskaffes i løbet af de fastsatte 14 dage; den eneste reservedel, der synes at give anledning til problemer, er skibets skrue. Skruer i den størrelse er ikke normal lagervare hos Søblik, og konstruktion af en skrue varer, selv med udnyttelse af al ekstrakapacitet på værftet, længere end 14 dage. Det er derfor værd at overveje, hvad der kunne ske, hvis man proderer nogle reserveskruer til brug ved skruehavari hos Fultank.

Man skønner, at fremstillingsomkostningerne for en skrue er C = 100.000 kr., at salgsprisen i tilfælde af et skruehavari er S = 300.000 kr., og endvidere skønner man, at såfremt man ikke kan levere en skrue inden for de fastsatte 14 dage, da vil fremstillingsomkostninger, bod til arbejdere og til Fultank samt luftfragt sluge hele salgsprisen og yderligere påføre Søblik et tab på T = 200.000 kr. Endelig skønner man, at såfremt man efter tre år stadig har nogle skruer på lager, da vil disse kunne sælges til det rederi, der til den tid ejer skibene, til en pris af R = 100.000 kr. pr. skrue. (For simpelheds skyld opfatter vi alle priser som fx. 1997 priser).

Søblik ønsker nu at sammenligne konsekvensen af at lagerføre én skrue med konsekvensen af at producere to skruer til lageret. Konsekvensen af at lagerføre én skrue er imidlertid en sammensat konsekvens. Man kan risikere, at skibene sejler helt uden skruehavari, i hvilket tilfælde skruen sælges efter tre år til fremstillingsprisen; men man kan også risikere, at skibene netop får ét skruehavari, i hvilket tilfælde værftets nettoudbytte er 200.000 kr., etc.

Idet man anser det for udelukket, at skibene oplever flere end tre skruehavarier i den betragtede periode, finder man udtrykket for værftets nettoudbytte, målt i 100.000 kr.,

$$Udbytte = \begin{cases} 2\theta & \text{for } \theta = 0, 1, \cdots, a \\ 4a - 2\theta & \text{for } \theta = a+1, \cdots, 3, \end{cases}$$

hvor θ angiver antallet af skruehavarier, og a betegner antallet af lagerførte skruer. I nedenstående tabel har vi anført udbyttet svarende til 0,1,2 og 3 skruehavarier for et lager på $a = 1$ og $a = 2$ skruer

Nettoudbytte i 100.000 kr. som funktion af lagerstørrelse og antal havarier.

Lager	Antal havarier			
	0	1	2	3
1	0	2	0	-2
2	0	2	4	2

Idet Søblik vurderer risikoen for henholdsvis 0, 1, 2 og 3 havarier til 0.1, 0.3, 0.4 og 0.2, kan resultatet af at lagerføre én skrue altså beskrives ved den sammensatte konsekvens $(0, 2, 0, -2)_{0.1,0.3,0.4}$, og resultatet af at lagerføre to skruer kan tilsvarende beskrives ved den sammensatte konsekvens $(0, 2, 3, 2)_{0.1,0.3,0.4}$, der ifølge Axiom 3 må foretrækkes for konsekvensen af kun at lagerføre én skrue, idet vi forudsætter, at Søblik rangordner nettoudbytte efter størrelse.

Forsøger vi tilsvarende at vurdere konsekvensen af at lagerføre tre skruer, finder vi, at denne konsekvens er mere attraktiv end konsekvensen af kun at lagerføre to skruer, og Søblik vil derfor, såfremt man handler i overensstemmelse med de udtrykte præferencer, lagerføre tre skruer. Dette resultat kunne vi naturligvis have indset umiddelbart, thi Søblik lider ikke noget tab ved at lagerføre for mange skruer, men derimod er der mulighed for tab, hvis man har for få skruer på lager.

Før man har påbegyndt produktionen af de ekstra skruer, ændres tankrater og afskrivningsregler på en måde, man ikke havde evnet at forestille sig ved kontraktens indgåelse. Fultank har kontrakter om langtidscharter for de tre skibe i tre år, men derefter vil skibene blive oplagt på ubestemt tid, og Søblik kan derfor ikke regne med, at eventuelle resterende skruer vil have nogen værdi efter tre år, dvs. man sætter $R = 0$, hvorfor udtrykket for nettoudbyttet bliver

$$Udbytte = \begin{cases} 3\theta - a & \text{for } \theta = 0, 1, \ldots, a \\ 4a - 2\theta & \text{for } \theta = a+1, \cdots, 3. \end{cases}$$

I nedenstående tabel har vi anført udbyttet svarende til 0, 1, 2 og 3 skruehavarier for et lager på 1, 2 eller 3 skruer.

Nettoudbytte i 100.000 kr. som funktion af lagerstørrelse og antal havarier

Lager	Antal havarier			
	0	1	2	3
1	-1	2	0	-2
2	-2	1	4	2
3	-3	0	3	6

Forsøger vi nu at sammenligne den sammensatte konsekvens af at lagerføre én skrue,

$$K_1 \sim (-1, 2, 0, -2)_{0.1, 0.3, 0.4} ,$$

med konsekvensen af at lagerføre to skruer,

$$K_2 \sim (-2, 1, 4, 2)_{0.1, 0.3, 0.4} ,$$

finder vi, at en sådan sammenligning ikke er mulig ved anvendelse af axiomerne 1-3, idet nogle af de simple konsekvenser i K_1, forbedres ved at lagerføre to skruer, mens andre forværres. Vi må derfor finde et princip, der muliggør en sammenligning af to lotterier, hvor nogle af prospekterne i det ene er bedre end de tilsvarende prospekter i det andet, og andre er værre.

Ved en vurdering af de to konsekvenser bemærker vi først, at hver af de sammensatte konsekvenser definerer en sandsynlighedsfordeling på konsekvensrummet. I nedenstående tabel har vi ordnet de mulige simple konsekvenser efter præference og for hver lagerstørrelse, $a = 1, 2, 3$, angivet de tilsvarende sandsynligheder for konsekvenserne.

Sandsynligheder for nettoudbytte ved forsk. lagerstørrelser

	Nettoudbytte 100.000 kr.								
Lager	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6
1	0.0	0.2	0.1	0.4	0.0	0.3	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.1	0.0	0.0	0.3	0.2	0.0	0.4	0.0
3	0.1	0.0	0.0	0.3	0.0	0.0	0.4	0.0	0.2

Vi ser, at ved et lager på to skruer vil de store nettoudbytter optræde med større sandsynligheder end ved et lager på én skrue, hvorfor man måske vil foretrække at lagerføre to skruer.

Vort problem er imidlertid at generalisere denne løse tankegang til et princip, som vi kan anvende i mere komplicerede situationer. Lader vi den stokastiske variable X betegne nettoudbyttet målt i 100.000 kr. for et lager på én skrue, og lader vi tilsvarende Y betegne nettoudbyttet ved et lager på to skruer, har vi af skemaet, at

$$\mathsf{P}\,[X \geq t] \leq \mathsf{P}\,[Y \geq t] \qquad \text{for ethvert } t\ ,$$

dvs., Y er stokastisk større end X, eller med andre ord: For enhver simpel konsekvens, t, vil sandsynligheden for at opnå en mindst lige så attraktiv konsekvens ved lagerføring af én skrue være mindre end den tilsvarende sandsynlighed ved lagerføring af to skruer. Vi kunne da forsøge at ophøje denne betragtning til et princip for sammenligning af sammensatte konsekvenser; dette princip ville udsige, at blandt to sammensatte konsekvenser vil man foretrække den stokastisk største.

Før vi ophøjer dette princip til et axiom, er det nok umagen værd at betragte princippet lidt nærmere. Den første bemærkning, vi gør, er, at simple konsekvenser ikke entydigt kan afbildes på den reelle talakse; alle ordenstro afbildninger af et givet sæt konsekvenser er principielt lige gyldige. Vi må derfor overtyde os om, at det foreslåede princip ikke fører til forskellige præferencer for forskellige repræsentationer af et givet, ordnet sæt konsekvenser. At dette ikke kan være tilfældet, indses let ved at bemærke, at princippet er ensbetydende med at sige, at Y foretrækkes for X, hvis grafen for den kumulerede fordelingsfunktion for Y i hele sit forløb ligger under eller rører grafen for den kumulerede fordelingsfunktion for X, og denne egenskab ændres ikke, hvis vi foretager en ordensbevarende (dvs. en monoton) transformation af den vandrette akse.

Et andet spørgsmål, vi bør undersøge, er, om det foreslåede princip kan benyttes til en sammenligning af alle tænkelige sammensatte konsekvenser. For at vurdere dette spørgsmål vil vi forsøge at sammenligne den sammensatte konsekvens, vi oplever ved at lagerføre to skruer med konsekvensen af at lagerføre tre skruer. Lader vi Z betegne nettoudbyttet ved et lager på tre skruer, finder vi relationerne

$$\mathsf{P}[Y \geq -2] = 1.0 \quad \text{og} \quad \mathsf{P}[Z \geq -2] = 0.9 \,,$$

men

$$\mathsf{P}[Y \geq 3] = 0.4 \quad \text{og} \quad \mathsf{P}[Z \geq 3] = 0.6 \,.$$

Graferne for de kumulerede fordelinger skærer altså hinanden, og vi kan derfor ikke benytte det foreslåede princip til at afgøre, hvilken af disse to sammensatte konsekvenser, man vil foretrække.

Det foreslåede princip er således ikke nok til i almindelighed at sammenligne sammensatte konsekvenser. For at muliggøre en sammenligning må vi have en finere repræsentation af de simple konsekvenser end den primitive ordning efter størrelse; vi må også inddrage den grad af præference, man tillægger de enkelte simple konsekvenser.

□

Den sidste antagelse, vi vil gøre, er at enhver konsekvens K kan indesluttes mellem sammensatte konsekvenser, opbygget af konsekvenser, der er henholdsvis bedre og værre end K.

Axiom 4 Lad K_1, K_2 og K_3 være konsekvenser, således at $K_3 \prec K_2 \prec K_1$. Der findes da en sandsynlighed $p, 0 < p < 1$, og en sandsynlighed $p', 0 < p' < 1$, således at

$$K_3 \prec (K_3, K_1)_p \prec K_2 \prec (K_3, K_1)_{p'} \prec K_1 \; . \tag{9.2.5}$$

□

Axiomet, der ofte kaldes det Archimediske Axiom, er væsentligt for den følgende teori.

En grov karakterisering af axiomet er at sige, at ingen af konsekvenserne er uendeligt attraktive eller uendeligt ubehagelige. Selv om K_1 er meget attraktiv, vil der findes en sandsynlighed p, således at den sammensatte konsekvens $(K_3, K_1)_p$ tilmed er mindre attraktiv end K_2.

Eksempel 9.2.2 *Ordning af sammensatte konsekvenser*

En person har et uopsætteligt ærinde i New York, hvorfor hun anser det at blive transporteret sikkert til New York som en yderst ønskværdi konsekvens, væsentligt mere attraktiv end konsekvens K_2, nemlig at undlade denne rejse og i stedet blive hjemme. Endnu ubehageligere forestiller hun sig dog at det vil være at omkomme ved en flyveulykke. For denne person har vi altså ordningen

$$K_3 \prec K_2 \prec K_1 \quad ,$$

hvor K_3 symboliserer, at personen omkommer ved en flyveulykke, K_2, at hun undlader at rejse til New York, og K_1 angiver, at hun flyver til New York og forretter sit ærinde uden uheld.

Ved tiltrædelse af en flyverejse til New York står personen over for en sammensat konsekvens $(K_1, K_3)_p$, som i attraktivitetsgrad vil være beliggende imellem K_1 og K_3. Det synes ikke urimeligt at tro, at personens skøn over sandsynligheden p' for at en flyverejse forløber uden uheld kan være så stor, at personen har præferencemønsteret

$$K_3 \prec K_2 \prec (K_1, K_3)_{p'} \prec K_1 \quad ,$$

(i hvert fald er det et faktum, at det årlige antal flypassagerer til New York kan tælles i millioner). Man kan vel også forestille sig, at hvis sandsynligheden p' var nær ved nul, ville personen undlade flyveturen, det vil sige, at hun ville anse den sammensatte konsekvens for at være ringere end K_2.

Personens valg i en given situation afhænger dels af, hvor ønskværdigt det er for hende at komme til New York, og dels af, hvor højt hun vurderer chancen p' for en flyverejse uden uheld.

□

Eksempel 9.2.3 ***Sammensatte konsekvenser***

En ikke helt så dramatisk situation til belysning af Axiom 4 får vi ved at forestille os en skiløber ved foden af en skilift. Lad K_3 angive dette, at hun falder på vej ned ad bjerget, brækker ski og ben og må ligge på hospital med benet i gips i en måned, lad endvidere K_2 betegne den mulighed, at hun undlader at tage op med liften og i stedet går hjem og nyder udsigten fra hotellets terrasse, og lad endelig K_1 angive dette, at hun oplever en skitur ned ad bjerget uden uheld. Lad os antage, at skiløberen ordner konsekvenserne i rækkefølgen

$$K_3 \prec K_2 \prec K_1 \quad ,$$

og betragt den sammensatte konsekvens $(K_1, K_3)_p$, hvor p altså angiver chancen for, at skiløberens tur ned ad bjerget forløber uden uheld.

Hvis løjpen er jævn, skiløberen rutineret og fuld af selvtillid, vil hun vurdere chancen p' for en heldig udgang af turen som ganske stor, og man kan forestille sig præferencemønsteret

$$K_3 \prec K_2 \prec (K_1, K_3)_{p'} \prec K_1 \quad .$$

Hvis derimod løjpen er isglat, og skiløberen har hovedpine og er usikker, kan vi forestille os, at hun vurderer chancen p som værende så lille, at hendes præferencemønster er

$$K_3 \prec (K_1, K_3)p \prec K_2 \prec K_1 \quad .$$

□

En følge af Axiom 4 er, at vi for ordningen

$$K_3 \prec K_2 \prec K_1$$

kan bestemme en sandsynlighed $p, 0 < p < 1$, således at den sammensatte konsekvens $(K_1, K_3)_p$ er hverken værre eller bedre end K_2, dvs.

$$(K_1, K_3)_p \sim K_2 \ . \tag{9.2.6}$$

Denne sandsynlighed giver os da et talmæsigt udtryk for den grad af præference, der tillægges K_2. Forestiller man sig nu alle de mulige simple konsekvenser i en beslutningssituation opstillet i præferenceorden

$$K_n \prec K_{n-1} \prec \cdots \prec K_2 \prec K_1 \ ,$$

kan vi altså erstatte enhver af konsekvenserne $K_2, K_3, \ldots, K_{n-1}$ med en sammensat konsekvens

$$K_i \sim (K_1, K_n)_{u(K_i)} \ . \tag{9.2.7}$$

idet beslutningstageren anser det, med sikkerhed at modtage konsekvensen K_i, for at være hverken værre eller bedre end med sandsynligheden $p = u(K_i)$ at modtage konsekvensen K_1 (den <u>mest</u> attraktive simple konsekvens) og med sandsynligheden $1 - p$ at modtage konsekvensen K_n (den <u>mindst</u> attraktive simple konsekvens). Idet vi desuden har

$$K_1 \sim (K_1, K_n)_{1.0} \quad \text{og} \quad K_n \sim (K_1, K_n)_{0.0} \ ,$$

ser vi, at vi kan erstatte enhver konsekvens $K_i, i = 1, 2, \cdots, n$ med et tal $u(K_i)$, der angiver graden af præference, således at

$$u(K_i) < u(K_j) \text{ for } K_i \prec K_j \ . \tag{9.2.8}$$

Den præferencegrad, $u(K)$, vi herved har tillagt konsekvensen K, kaldes ofte utiliteten eller nytteværdien af den pågældende konsekvens.

I den foregående konstruktion bestemte vi nytteværdien som en sandsynlighed; det følger da, at regning med nytteværdier foregår i overensstemmelse med sandsynlighedsregningens regler.

For nærmere at belyse bestemmelsen af nytteværdier af sammensatte konsekvenser, vil vi først diskutere reduktionen af en flertrins sammensat konsekvens.

Sætning 9.2.1 ***Ækvivalens mellem sammensat konsekvens og to-trins lotteri***

Lad A og B være konsekvenser, og lad $K_1 \sim (A, B)_{p_1}$ og $K_2 \sim (A, B)_{p_2}$. Da gælder for $K \sim (K_1, K_2)_p$

$$K \sim (A, B)_{p_0} \quad ,$$

hvor

$$p_0 = p\, p_1 + (1 - p)\, p_2 \tag{9.2.9}$$

Bevis:
Sætningen udsiger, at vi kan erstatte den dobbelt-sammensatte konsekvens $((A, B)_{p_1}\ ,\ (A, B)_{p_2})_p$ med et enkelt lotteri imellem de to simple konsekvenser A og B.

Vi kan opfatte den sammensatte konsekvens $(K_1, K_2)_p$ som et lotteri, hvor gevinsterne er deltagelse i et nyt lotteri: Med sandsynligheden p deltager man i lotteri K_1, der har gevinsterne A og B med de tilsvarende sandsynligheder p_1 og $1 - p_1$, og med sandsynligheden $1 - p$ deltager man i lotteri K_2, der atter har gevinsterne A og B, men her med sandsynlighederne p_2 og $1 - p_2$. Det sammensatte lotteri er søgt anskueliggjort ved netværket i figur 9.2.

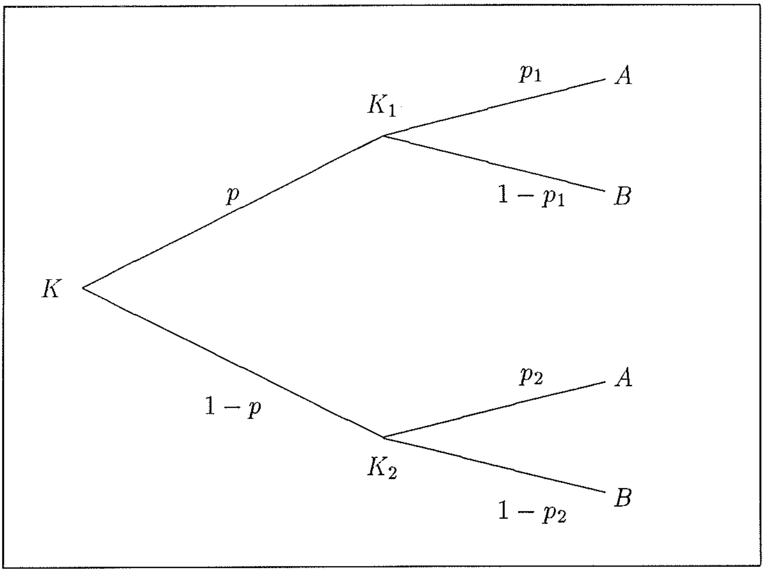
I det sammensatte lotteri har vi mulighed for at få gevinsten A på to forskellige måder, dels gennem lotteriet K_1 og dels gennem K_2. Symbolsk skriver vi

$$A = (A \cap K_1) \cup (A \cap K_2) \quad ,$$

og da de to lotterier K_1 og K_2 udelukker hinanden har vi

$$\mathsf{P}\,[A] = \mathsf{P}\,[A \cap K_1] + \mathsf{P}\,[A \cap K_2] \quad ,$$

Figur 9.2. Den sammensatte konsekvens $((A,B)_{p_1},(A,B)_{p_2})_p$ opfattet som et totrins lotteri



hvoraf vi får ved benyttelse af

$$\mathsf{P}\,[A\cap K_1]=\mathsf{P}\,[K_1]\cdot\mathsf{P}\,[A|K_1]=p\,p_1$$

og

$$\mathsf{P}\,[A\cap K_2]=\mathsf{P}\,[K_2]\;\mathsf{P}\,[A|K_2]=(1-p)\,p_2\quad,$$

at

$$\mathsf{P}\,[A]=pp_1+(1-p)p_2=p_0\quad.$$

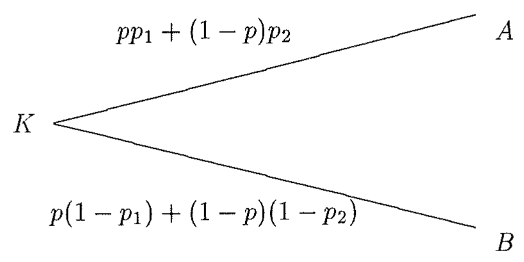
På tilsvarende måde får vi

$$\mathsf{P}\,[B]=p(1-p_1)+(1-p)(1-p_2)=1-p_0\quad,$$

således at vi ved substitution kan reducere totrinslotteriet $(K_1,K_2)_p$ til et lotteri imellem A og B med sandsynlighederne p_0 og $1-p_0$. Det reducerede lotteri er skitseret i Fig. 9.3.

□

Figur 9.3. Det reducerede lotteri $(A, B)_{p_0}$.



Har vi nu en række konsekvenser

$$K_n \prec K_{n-1} \prec \ldots \prec K_1 \quad ,$$

for hvilke vi har bestemt de tilsvarende nytteværdier $u(K_i)$, således at (9.2.7) er opfyldt for $i = 1, 2, \ldots, n$, kan vi ved substitution bestemme nytteværdien u af den sammensatte konsekvens $(K_i, K_j)_p$. Idet nytteværdien u skal bestemmes således, at

$$(K_i, K_j)_p \sim (K_1, K_n)_u \quad ,$$

finder vi af sætning 9.2.1, at

$$\boxed{u\big((K_i, K_j)_p\big) = p\, u(K_i) + (1-p)u(K_j) \ , \qquad (9.2.10)}$$

idet vi har substitueret

$$K_i \sim (K_1, K_n)_{u(K_i)} \quad \text{og} \quad K_j \sim (K_1, K_n)_{u(K_j)} \quad .$$

Vi kan altså bestemme nytteværdien af en sammensat konsekvens som forventningsværdien af de indgående konsekvensers nytteværdier.

Der gælder følgende hovedsætning om den ordinale repræsentation af beslutningstagerens præferencestruktur.

Sætning 9.2.2 ***Eksistens af en nyttefunktion***

Lad $\mathcal{K}^*$ angive mængden af sammensatte konsekvenser, blandet af tælleligt mange simple konsekvenser i $\mathcal{K}$.

Såfremt beslutningstagerens præferencemønster over $\mathcal{K}^*$ tilfredsstiller axiomerne 1-4, da eksisterer der en præferencetro afbildning $u : \mathcal{K}^* \to \mathbb{R}$, således at

$$K_i \prec K_j \quad \text{hvis og kun hvis } u(K_i) < u(K_j) \tag{9.2.11}$$

$$u((K_1, K_2, \ldots)_{p_1, p_2, \ldots}) = \sum_i p_i \; u(K_i) \; . \tag{9.2.12}$$

For enhver anden funktion $v(\cdot)$, der tilfredsstiller (9.2.11) og (9.2.12), gælder $v(K) = a + b \; u(K)$ med $b > 0$, dvs. $u(\cdot)$ er entydigt bestemt på nær en lineær transformation.

Bevis:

Beviset følger de heuristiske betragtninger, vi anlagde i de foregående afsnit. For et formelt bevis, se f.ex. Fishburn (1970) pp. 113-115.

$\square$

Sætningen er oprindelig fremført af von Neumann og Morgenstern i deres fundamentale introduktion til nyttetorien. Sætningen udsiger i det væsentlige, at hvis beslutningstageren har et konsistent præferencemønster, ikke blot over for simple, men også over for sammensatte konsekvenser, da findes der en talmæssig repræsentation af de simple konsekvenser. Denne repræsentation kan udvides til at omfatte sammensatte konsekvenser ved simpelthen at danne forventningsværdien (9.2.12) af de tilsvarende værdier for de simple konsekvenser. Endelig er repræsentationen ordenstro: jo mere attraktiv konsekvensen er, desto højere er den tilsvarende talværdi; og specielt gælder altså, at den mest attraktive konsekvens er den med den højeste tilknyttede talværdi.

Den talværdi, vi herved tillægger en konsekvens, kaldes nytteværdien af konsekvensen, og funktionen $u(\cdot)$ kaldes nyttefunktionen, (engelsk: *utility function*). Nyttefunktionen er altså entydigt bestemt på nær en lineær transformation med positiv skalafaktor.

Da vi i de følgende kapitler ofte vil betragte sammensatte konsekvenser, der er sammensat af flere end tælleligt mange simple konsekvenser, skal vi her blot bemærke, at sætning 9.2.2 kan udvides til at gælde sammensætninger med mere generelle sandsynlighedsmål. Da udvidelsen af sætningen er af udpræget teknisk karakter, skal vi undlade at formulere sætningen her, men blot henvise til Fishburn (1970) pp. 139-140. Såfremt nyttefunktionen er "pæn", og sandsynlighedsmålet P{ } på $\mathcal{K}$ er "pænt, vil vi det følgende gå ud fra, at nytteværdien af den sammensatte konsekvens K, der er udtrykt ved sandsynlighedsmålet P, kan bestemmes ved

$$u(K) = \int_{\mathcal{K}} u(k)P(dk) \quad .$$

I afsnit 9.3 vil vi belyse bestemmelsen af nyttefunktionen for en beslutningstager. Til illustration af, hvorledes nyttefunktionen afspejler beslutningstagerens præferencer over for lotterier, skal vi her blot anføre nogle få eksempler.

Eksempel 9.2.4 ***Forventet pengeværdi afspejler ikke nødvendigvis præferencerne***

Et handelsfirma har mulighed for at indgå to kontrakter A og B. Kontrakterne kan fås for 10 mill. kroner hver. Firmaet vurderer, at enten kan kontrakt A videresælges for 20 mill. kroner, eller også vil kontrakten være værdiløs. Sandsynligheden for, at kontrakten kan sælges, anslås til at være 60%. For kontrakt B's vedkommende anslår man, at kontrakten med en sandsynlighed på 30% kan sælges for 15 mill. kroner, og med sandsynlighed 70% kan den videresælges for 9 mill. kroner. Firmaets likviditet er ikke overvældende god, og derfor ønsker man kun at investere i den ene kontrakt. Hvilken kontrakt skal man da vælge?

Betragter vi forsøgsvis den forventede fortjeneste målt i mill. kroner finder vi af Tabel 9.1, at den forventede fortjeneste for projekt A er 2 mill. kr., mens den forventede fortjeneste for projekt B er 0.8 mill. kr.

Det er imidlertid ikke givet, at firmaet vælger projekt A på trods af den større forventede pengeværdi. Som nævnt var firmaets likviditet ret stram, Tabel 9.1. Sandsynlighederne for de mulige fortjenester ved de to projekter.

Projekt A		Projekt B	
Fortjeneste i mill. kr.	Sands.	Fortjeneste i mill. kr.	Sands
10	0.6	5	0.3
-10	0.4	-1	0.7
Forventet fortjeneste	2		0.8

og man kan derfor synes, at en 40% risiko for at tabe 10 mill. kroner er en lidt høj pris at betale for muligheden for at tjene 10 millioner; hellere tjene lidt mindre mod til gengæld at risikere et lavere tab.

Lad os antage, at vi har kendskab til firmaets nyttefunktion for kapitalændringer, og antag endvidere, at funktionen har det udseende, der er angivet i Fig. 9.4.

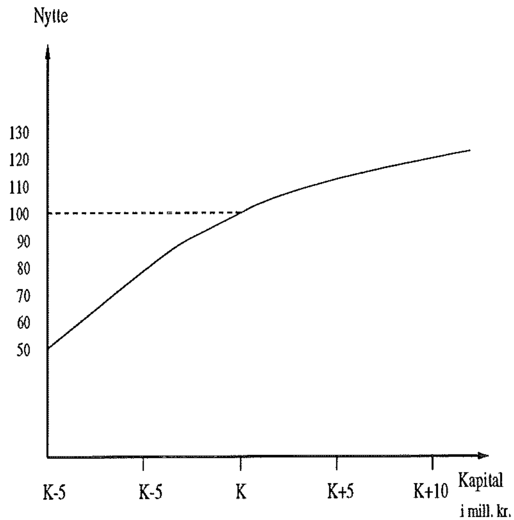
Kurvens krumme forløb er udtryk for firmaets holdning over for risikobehæftede projekter. Ved at betragte det analytiske udtryk, der tilnærmer nyttefunktionen fremgår det, at firmaet er indifferent over for at bevare status quo, eller at indgå i et projekt, der med 50% sandsynlighed giver et tab på 3.5 mill. kr. og med 50% sandsynlighed en gevinst på 5 mill. kr. Tilsvarende finder man, at firmaet anser det, med sikkerhed at modtage 1.5 mill. kr., for at være ækvivalent med at indgå i et projekt, der med 50% sandsynlighed giver et tab på 3 mill. kroner og med 50% sandsynlighed en fortjeneste på 10 mill. kr.

Ved benyttelse af (9.2.12) og udtrykket for firmaets nyttefunktion finder man, at nytteværdien af projekt A er 92, mens nytteværdien af projekt B er 102.2. Såfremt firmaet handler i overensstemmelse med de præferencer, der er udtrykt gennem nyttefunktionen, vil firmaet altså vælge projekt B. Vi ser yderligere, at risikoen ved at vælge projekt A skønnes at være så stor, at firmaet vil foretrække status quo frem for at indgå i dette projekt, på trods af at forventningsværdien af pengefortjenesten er 2 mill. kr.

□

Eksempel 9.2.5 ***Præferencer ved en kontinuert fordeling af konsekvenser***

Figur 9.4. Nyttefunktionen for ændringer i et handelsfirmas kapital. Nytten af den nuværende kapital, K, er sat til 100.



En entreprenør ønsker at deltage i en licitation om et vejbygningsprojekt. Hun skønner, at udgifterne ved at udføre projektet vil være 2 mill. kr.. Hvis hun tilbyder at udføre projektet for x mill. kr., vil hendes fortjeneste, i fald hun får jobbet, være x-2 mill. kr.

Imidlertid frygter hun, at der vil være mange tilbud, og hun må derfor være omhyggelig med udarbejdelsen af sit tilbud. Hun anslår, at chancen for at få jobbet, hvis hun tilbyder at udføre det for x mill. kr., kan beskrives ved tæthedsfunktionen i figur 9.5.

Da der hersker en vis knaphed på arbejde, er entreprenøren villig til at påtage sig arbejdet, selv med et mindre tab. Hun vil dog nødigt tabe mere end 0.1 mill. kr., dvs. at hun anser de to simple konsekvenser (hun får jobbet og taber 0.1 mill. kr.) og (hun får ikke jobbet) for at være ækvivalente. Entreprenørens nyttefunktion for kapitalændringer, såfremt hun får jobbet, er angivet i figur 9.6. Det fremgår af det analytiske udtryk, der approximerer nyttefunktionen, at hun er indifferent imellem at få jobbet og med sikkerhed at tjene 0.1 mill. kr. og en situation, hvor hun får jobbet og med 50% sandsynlighed taber 0.1 mill. kr. og med 50% sandsynlighed tjener 1 mill.

Tabel 9.2. Nytteværdierne af de simple konsekvenser for de to projekter.

Projekt A			Projekt B		
Fortj.	Nytteværdi	Sands.	Fortj.	Nytteværdi	Sands.
10	120	0.6	5	112	0.3
-10	50	0.4	-1	98	0.7
Nytte af projekt A: 92			Nytte af projekt B: 102.2		

kr. Ligeledes er hun indifferent imellem med sikkerhed at tjene 0.5 mill. kr. og en situation, hvor hun med 80% sandsynlighed tjener 1 mill. kr. og med 20% sandsynlighed taber 0.1 mill. kr.

Hvis hun tilbyder at udføre projektet for x mill. kr., vil hun med sandsynligheden $p(x)$ få jobbet og tjene x-2 mill. kr., og med sandsynligheden $1 - p(x)$ vil hun ikke få jobbet.

Da hun anser det, at hun ikke får jobbet, for at være ækvivalent med at få jobbet og tabe 0.1 mill. kr., kan man også aflæse nytteværdien af den konsekvens, at hun ikke får jobbet af figur 9.6. Vi har netop sat nytten heraf til 0. Vi får derfor nytten af at tilbyde at udføre projektet for x mill. kr.

$$\begin{aligned} u(\text{bud på } x \text{ mill.kr.}) &= p(x) \times u(K + x - 2.0) + (1 - p(x)) \times 0.0 \\ &= p(x) \times u(K + x - 2.0) \,, \end{aligned} \tag{9.2.13}$$

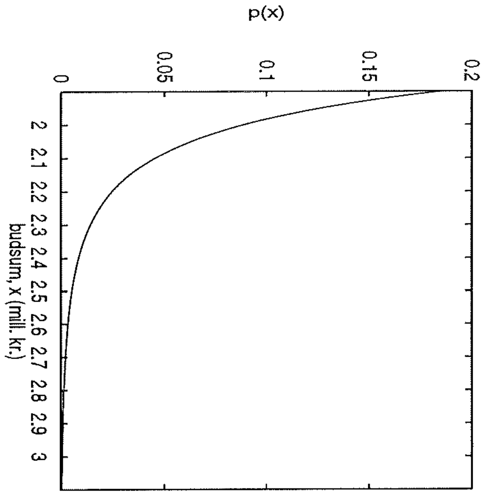
hvor $u(K + x - 2.0)$ kan aflæses af figur 9.6.

Ved aflæsning af sammenhørende værdier af $p(x)$ og $u(K + x - 2.0)$ fra de analytiske udtryk svarende til kurverne i figur 9.5 og figur 9.6, kan vi da bestemme forløbet af nyttefunktionen (9.2.13). Nytten af at tilbyde at udføre projektet for x mill. kr. er skitseret som en funktion af x i figur 9.7. Vi ser, at nytten er størst mulig for $x = 2.06$ mill. kr. Såfremt entreprenøren handler i overensstemmelse med sine præferencer og sin vurdering af chancerne for at få jobbet, vil hun altså tilbyde at udføre projektet for 2.06 mill. kr.

□

Eksempel 9.2.6 ***Holdningen til pengelotterier afhænger sædvanligvis af de økonomiske omstændigheder***

Figur 9.5. Sandsynligheden for at få projektet overdraget ved et bud på x mill. kr.



En bilejer har en bil, hvis værdi ansættes til 30.000 kr. Under overvejelser om, hvorvidt hun ønsker at kaskoforsikre bilen til en præmie på m kr., opstiller hun følgende tabel over kapitalen efter 1 år, idet hun for simpelheds skyld kun betragter ulykker, der indebærer totalskade, og går ud fra, at der ikke er noget afsavn af bilen ved en ulykke.

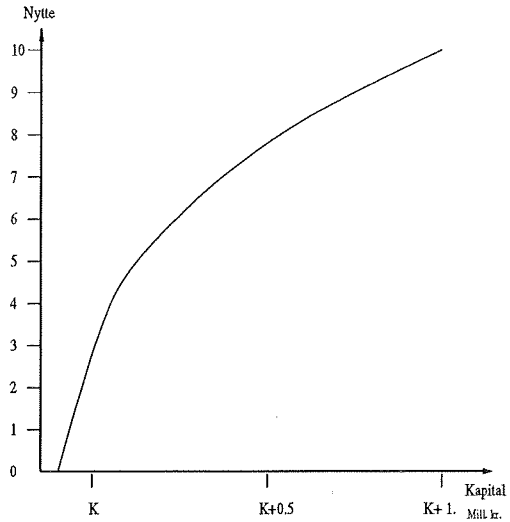
	Forsikring	Ikke forsikring
Ulykke	$K - m$ kr.	K-30.000 kr.
Ingen ulykke	$K - m$ kr.	K kr.

Forsikringstagerens kapital er angivet ved K.

Hvis risikoen (sandsynligheden) for en ulykke er p, er den forventede nytte ved forsikring af bilen $pu(K-m)+(1-p)u(K-m) = u(K-m)$, og såfremt bilen ikke forsikres, er nytten

$$pu(K - 30.000) + (1 - p)u(K).$$

Idet vi sætter $u(K) = 0$, og idet vi samtidig antager, at risikoen for en ulykke er $p = 0.01$, finder vi, at hun er villig til at betale en præmie m, Figur 9.6. Nyttefunktionen for entreprenørvirksomheden, såfremt firmaet får kontrakten. Den nuværende kapital er K.



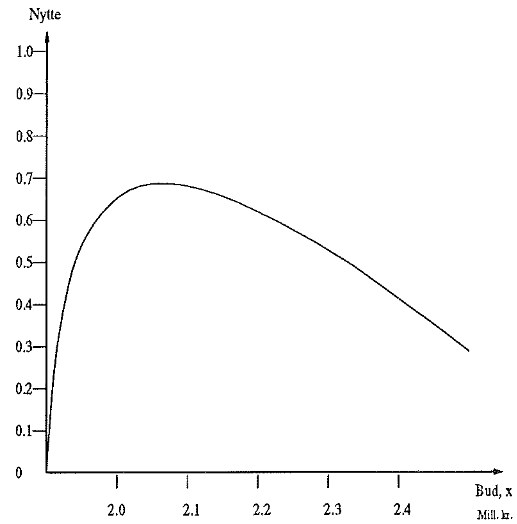
som tilfredstiller $u(K - m) > 0.01u(K - 30.000)$. Antager vi, at bilejerens nyttefunktion svarer til kurven på Fig 9.8, finder vi $u(K - 30.000) = -600$, og bilejeren er således villig til at betale en præmie m, der tilfredsstiller $u(K - m) > -6$. Af figuren finder vi $m = 700$ kr.

Vender vi os nu til at betragte forsikringsselskabets overvejelser, finder vi, idet vi i første omgang ser bort fra administrationsomkostningerne, at forsikringsselskabets muligheder kan sammenfattes i tabellen

	Sælg en forsikring til m kr.	Undlad at sælge
Bilisten rammes af en ulykke	$C + m - 30.000$	C
Bilisten er skadefri	$C + m$	C

hvor C angiver forsikringsselskabets kapital.

Figur 9.7. Entreprenørens beregnede nytte ved at tilbyde at udføre projektet for x mill. kr.



Idet forsikringsselskabet også vurderer sandsynligheden for en ulykke til $p = 0.01$, finder vi, at forsikringsselskabet vil sælge en forsikring til m kr., såfremt

$$0.01u_1(C + m - 30.000) + 0.99u_1(C + m) > u_1(C),$$

hvor u_1 angiver selskabets nyttefunktion.

Såfremt selskabets nyttefunktion svarer til funktionen i figur 9.9, kan man ved betragtning af det analytiske udtryk for $u_1(\cdot)$ vise, at

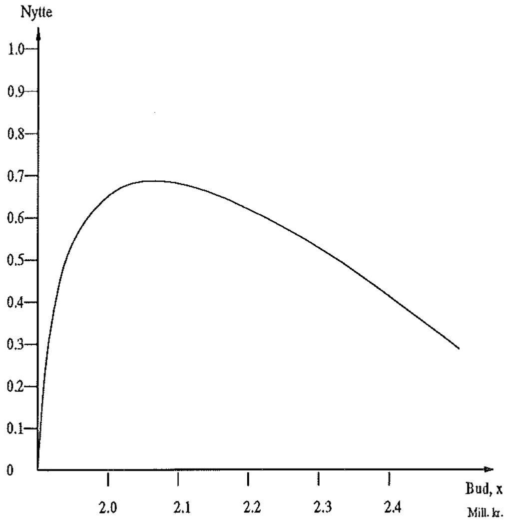
$$m > 300.$$

Selskabet er således villigt til at påtage sig forsikringsrisikoen, hvis blot præmien er større end 300 kr. + administationsomkostningerne, og bilejer og forsikringsselskab vil derfor kunne mødes i et forsikringsforhold.

□

Eksempel 9.2.7 ***Optimal strategi ved gentagne spil under forskellige holdninger til risiko***

Figur 9.8. Nyttefunktionen for en bilejer med kapital K.



En spiller med kapitalen y_0 og nyttefunktionen $u(\cdot)$ har lejlighed til at deltage i et lotteri i alt n gange.

Ved hver deltagelse i lotteriet kan hun frit vælge indsatsen x inden for rammerne af sin aktuelle kapital. Med sandsynligheden p vinder hun beløbet x, og med sandsynligheden $1-p$ mister hun indsatsen.

Lad y_j angive spillerens formue efter det j'te spil. I det $j+1$'ste spil kan spilleren indskyde ethvert beløb, x_{j+1}, som ikke overstiger hendes formue, dvs. $0 \leq x_{j+1} \leq y_j$. Sandsynligheden for de mulige værdier af formuen Y_{j+1} efter det $j+1$'ste spil er da

$$\mathsf{P}\left[Y_{j+1} = y_j + x_{j+1}\right] = p$$

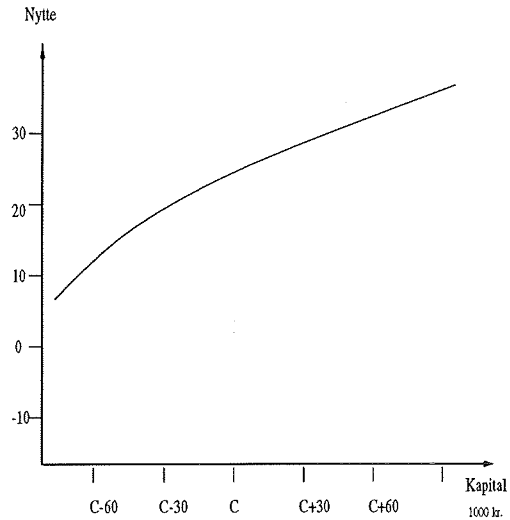
$$\mathsf{P}\left[Y_{j+1} = y_j - x_{j+1}\right] = 1 - p,$$

og den forventede nytte af spillet ved indskud af x_{j+1} er

$$\mathsf{E}\left[u(Y_{j+1})\right] = p\, u(y_j + x_{j+1}) + (1-p)\, u(y_j - x_{j+1}). \tag{9.2.14}$$

Vi vil nu forsøge at bestemme spillernes fordelagtigste strategi ved successivt at bestemme den optimale indsats, begyndende med det sidste spil.

Figur 9.9. Forsikringsselskabets nyttefunktionen.



Betragt situationen på et tidspunkt, hvor der mangler k spil, og antag, at spillerens formue på dette tidspunkt, Y_{n-k}, har værdien y. Vi kan da principielt beregne nytteværdien V_{n-k} af de resterende spil under forudsætning af, at spilleren anvender en optimal strategi, nemlig en strategi, der maksimerer hendes forventede nytte.

Vi har specielt

$$V_n(y) = u(y).$$

Yderligere finder vi

$$V_{n-k-1}(y) = \sup_{0 \leq x \leq y} \left[pV_{n-k}(y+x) + (1-p)V_{n-k}(y-x)\right] \tag{9.2.15}$$

Ved succesive anvendelser af (9.2.15) for $k = 0, 1, \ldots, n-1$ kan spilleren bestemme $V_1(y_0)$, som netop angiver den forventede nytteværdi af spillet under anvendelse af den optimale strategi.

Vi vil i det følgende beskrive bestemmelsen af spillerens optimale strategi i nogle specialtilfælde. Vi vil dog til stadighed antage, at $u(\cdot)$ er voksende.

Spilleren udviser risikoattraktion
Antag først, at spilleren udviser risikoattraktion, dvs. at $u(\cdot)$ er konveks (se side 777). Det gælder da, at $u(y+x)$ og $u(y-x)$ er konvekse funktioner af x for $0 \le x \le y$, hvorfor også linearkombinationen $pu(y+x)+(1-p)u(y-x)$ er en konveks funktion af indsatsen x.

Da maksimumsværdien af en konveks funktion over et lukket interval antages i et af endepunkterne, finder vi altså, at spilleren i sidste spil enten skal undlade at deltage (hvis $u(y) > pu(2y) + (1-p)u(0)$), eller hun skal spille med hele sin formue y. Værdien af sidste spil er

$$V_{n-1}(y) = \max\{u(y)\ ,\ p\,u(2y) + (1-p)u(0)\}. \tag{9.2.16}$$

Da nu både $u(y)$ og $pu(2y)+(1-p)u(0)$ er konvekse funktioner af y, finder vi, at $V_{n-1}(y)$ defineret ved (9.2.16), er konveks. Ved gentagelse af argumentet finder vi generelt

$$V_{n-k-1}(y) = \max\{V_{n-k}\ ,\ p\,V_{n-k}(2y) + (1-p)V_{n-k}(0)\}.$$

Såfremt $p \ge \frac{1}{2}$ finder vi, da $u(\cdot)$ er voksende, at $V_{n-k}(\cdot)$ ligeledes er en voksende funktion. Da desuden $V_{n-k}(\cdot)$ er konveks, har vi

$$V_{n-k}(y) \le \frac{1}{2}V_{n-k}(2y) + \frac{1}{2}V_{n-k}(0) \ \le\ V_{n-k}(2y) + (1-p)V_{n-k}(0),$$

således at den optimale fremgangsmåde i hvert spil vil være at indskyde hele den aktuelle formue.

Vi har

$$V_1(y_0) = p^n u(2^n y_0) + (1-p^n)u(0),$$

idet spilleren med sandsynligheden p^n vil slutte med $2^n y_0$, og med sandsynligheden $1-p^n$ vil have mistet hele formuen i et af de n spil.

Spilleren udviser risikoaversion
Lad os til slut søge at bestemme den optimale strategi under antagelse af, at spilleren har risikoaversion, dvs. at hendes nyttefunktion er konkav (se side 777).

Idet vi stadig antager, at nyttefunktionen er voksende, har vi for $p \le \frac{1}{2}$

$$p\,u(y+x)\ +\ (1-p)u(y-x)\ \le\ \tfrac{1}{2}u(y+x)\ +\ \tfrac{1}{2}u(y-x)\ \le\ u(y).$$

Vi finder derfor $V_{n-1}(y) = u(y)$, og ved induktion følger det da, at $V_{n-k}(y) = u(y)$ for $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Spilleren vil således overhovedet ikke indlade sig på spillet.

For $p > \frac{1}{2}$ er den forventede pengegevinst positiv, og det er derfor muligt, at spileren vil investere i lotteriet. Vi kan ikke beskrive den generelle løsning, men vil lade os nøje med at angive løsningen i den specielle situation, hvor nyttefunktionen er givet ved

$$u(y) = \ln y, \quad \text{for } y > 0 \, .$$

Vi bemærker, at den valgte nyttefunktion ikke er begrænset. Alligevel vælger vi dog at benytte denne funktion til illustration på grund af dens simpelhed.

Vi har

$$V_{n-1}(y) = \sup_{0 \le x \le y} [p \ln(y+x) + (1-p)\ln(y-x)] \, .$$

Ved differentiation finder vi, at maksimum antages for $x = [p - (1-p)]y$, hvorfor

$$\begin{aligned} V_{n-1}(y) &= \ln y + p \ln p + (1-p)\ln(1-p) + \ln 2 \\ &= u(y) + C \, , \end{aligned}$$

hvor $C = p \ln p + (1-p)\ln(1-p) + \ln 2$.

Vi finder da for $k = 2, 3, \ldots$

$$V_{n-k-1}(y) = V_{n-k}(y) + C.$$

Yderligere har vi, for ethvert k, at supremum af $V_{n-k}(\cdot)$ antages for $x = [p - (1-p))]y$. Den optimale strategi er altså ved ethvert spil at investere brøkdelen $[p - (1-p)]$ af den aktuelle formue. Benyttes denne strategi, vil den forventede nytte af lotteriet være

$$\mathsf{E}\,[\ln Y_n] \;=\; \ln y_0 \;+\; n[p\, \ln p + (1-p)\ln(1-p) + \ln 2].$$

Sammenligner man strategierne i de to situationer med spilleres almene uvilje mod at sætte alt på ét bræt, må man konstatere, at enten handler spillerne sjældent optimalt, eller også har de i et vist omfang risikoaversion.

$\square$

Vi understreger, at nytteteorien principielt forudsætter, at beslutningstageren allerede har en præferenceordning af de simple konsekvenser og af lotterier imellem dem.

Denne præferenceordning kan være vanskelig nok at etablere for en individuel beslutningstager, men problemerne bliver mangedoblede, såfremt man ænsker at etablere en ordning, der afspejler præferencerne hos et kollektiv, For blot at antyde de problemer, der er forbundet med konstruktion af en velfærdsfunktion, der simpelt beskriver kollektivets præferencemønster, vil vi anføre et eksempel, givet af Arrow (1951).

Eksempel 9.2.8 ***Præferencer for en gruppe***

Betragt en gruppe, bestående af tre individer A, B og C, der er stillet over for et valg mellem tre konsekvenser, K_1, K_2 og K_3. (De tre konsekvenser kan eksempelvis være tre forskellige middagsretter, hvoraf kun én skal serveres for gruppen). Det synes umiddelbart naturligt at lade gruppens præferencer afgøre ved simpelt flertal således, at såfremt et flertal i gruppen foretrækker konsekvensen Q for R, vil vi definere, at gruppen foretrækker Q for R.

Antag nu, at de tre individer hver for sig har følgende ordning af de tre konsekvenser:

$$\begin{array}{ll} \text{A:} & K_1 \prec K_2 \prec K_3 \\ \text{B:} & K_2 \prec K_3 \prec K_1 \\ \text{C:} & K_3 \prec K_1 \prec K_2 \,. \end{array}$$

Ved et valg mellem K_1 og K_2 finder vi flertalsafgørelsen $K_1 \prec K_2$, og ved et valg mellem K_2 og K_3 fås $K_2 \prec K_3$, således at vi tilsyneladende har ordningen $K_1 \prec K_2 \prec K_3$. Forsøger vi imidlertid yderligere at lade gruppen vælge mellem K_1 og K_3, finder vi $K_3 \prec K_1$, således at det samlede billede bliver den intransitive situation

$$\begin{array}{ccc} & & K_2 \\ & \rotatebox{45}{$\prec$} & \\ K_1 & & \rotatebox{-90}{$\prec$} \\ & \rotatebox{-135}{$\prec$} & \\ & & K_3 \end{array}$$

Det simple flertalsprincip fører os altså ikke til en anvendelig entydig præferencestruktur for denne gruppe. □

Eksempel 9.2.9 *Eksempler på risikodeling hos kollektiver*

Man kunne indvende, at strukturen af de individuelle præferencer i den betragtede gruppe var for grov til at muliggøre en fælles ordning gennem et flertalsprincip, og et af forsøgene på at opstille betingelser, der fører til en velfærdsfunktion, forudsætter da også, at de individuelle præferencer er ordnet på en numerisk skala. Vi skal ikke gå nærmere ind på forsøgene på at etablere en velfærdsfunktion, men blot afrunde denne korte introduktion til problemkredsen med endnu et eksempel:

Mennesket er i dagligdagen udsat for en række risici af forskellig art. Nogle af disse risici er så store, at det vil påføre individet meget store problemer f.eks. at opretholde en, efter hendes og kollektivets opfattelse, rimelig levestandard, hvis uheldet er ude, og individet eksempelvis udsættes for en ulykke med varig invaliditet til følge. Her i landet kan individet dække sig mod denne risiko ved at forsikre sig i et forsikringsselskab, og kollektivet af forsikringstagere deler gennem deres forsikringspræmier de individuelle risici.

Hvorledes vælger kollektivet nu at dele denne risiko? Benytter vi forsikringsselskabernes præmietariffer som udgangspunkt, finder vi, at selskaberne i det store og hele søger at diffentiere præmierne efter ulykkesrisiko, således at grupper med lav risiko betaler en væsentlig lavere præmie. Opfatter vi disse præmietariffer som et resultat af kræfternes frie spil blandt forsikringstagerne, må vi altså konstatere, at kollektivet vælger at dele sig op i mindre grupper, der hver for sig deler risikoen indbyrdes, men ikke ønsker at være solidariske med mere udsatte grupper.

Imidlertid har samfundet også valgt en anden måde, hvorpå det overtager de individuelle risici, f.eks. gennem førtidspension. Bidraget til denne kollektive "forsikringsform"er dog ikke proportionalt med ulykkesrisikoen, men med individets indtægt.

Vi skal ikke vurdere, hvilken af de to forsikringsformer, der er den mest retfærdige, men har blot fremdraget eksemplet for at vise, at der kan være to helt forskellige måder til løsning af det samme problem. □

9.3 Bestemmelse af nyttefunktionen, nytten af penge

Vi så i det foregående afsnit, at såfremt beslutningstageren har et konsistent præferencemønster over for sammensatte konsekvenser, da vil der findes en præferencetro afbildning af konsekvenserne ind i den reelle talakse.

Vi vil i dette afsnit undersøge denne afbildning i en situation, hvor konsekvenserne er repræsenteret ved punkter på den reelle talakse, således som det f.eks. er tilfældet, når konsekvenserne alene kan udtrykkes ved pengebeløb.

Lad os antage, at en person besidder en investeringsmulighed, hvis udbytte kan beskrives ved en stokastisk variabel X med sandsynlighedsfordelingen $w(x)$. Såfemt personen er villig til at sælge sin investeringsmulighed for mindst a kr., har vi da, idet vi betegner personens nyttefunktion med $u(\cdot)$, og investors totale formue betegnes med C, at

$$u(a + C) = \int u(x + C)w(x)\mu\{dx\}. \tag{9.3.1}$$

Vi kan altså opfatte beløbet a som <u>sikkerhedsækvivalenten</u> til lotteriet $(X, w(\cdot))$, idet personen øjensynligt er indifferent imellem at modtage beløbet x. (Vi har her set bort fra betydningen af, at beløbene eventuelt kommer til udbetaling på forskellige tidspunkter).

For at bestemme personens nyttefunktion kunne vi da stille personen over for tre kapitaler $x_1 < x_3 < x_2$ og spørge hende, hvilken sandsynlighed p, der gør lotteriet $(x_2, x_1)_p$ ækvivalent med at besidde beløbet x_3 med sikkerhed. Vi har da af (9.3.1)

$$u(x_3) = pu(x_2) + (1 - p)u(x_1), \tag{9.3.2}$$

der giver os den relative placering af $u(x_3)$ i forhold til $u(x_1)$ og $u(x_2)$. Da vi frit kan vælge nulpunkt og skala for nyttefunktionen, kan vi sætte $u(x_1) = 0$ og $u(x_2) = 1$, hvoraf vi får $u(x_3) = p$. Proceduren kan nu fortsættes, f.eks. med $x_1 < x_4 < x_3$ etc., indtil man har bestemt så mange punkter af nyttefunktionen, som det skønnes nødvendigt.

Den beskrevne fremgangsmåde har imidlertid den praktiske ulempe, at det i almindelighed er meget vanskeligt for en beslutningstager at angive sandsynligheder med en rimelig nøjagtighed. I stedet kan man da gå den modsatte vej og lade beslutningstageren angive den kapital, hun er villig til at substituere for et givet lotteri; d.v.s. forelagt $(x_1, x_2)_p$ skal beslutningstageren angive et beløb x_3, der tilfredsstiller (9.3.2). Kapitalen x_3 angiver altså sikkerhedsækvivalenten for lotteriet.

Nedenstående metode tjener til at bestemme det nettoudbytte, hvis nytteværdi ligger midt imellem to givne udbytter, f.eks. 0 og 1 mill.kr. Vi antager, at alle udbytter betragtes til det samme tidspunkt, og vi har for nemheds skyld benyttet formuen som referencepunkt, d.v.s. vi har sat formuen til 0.

Trin 1 Angiv et beløb x_1, således at det, sikkert at modtage x_1 kr., er ækvivalent med at modtage 0 kr. med sandsynligheden 0.5 og 1 mill. kr. med sandsynligheden 0.5.

Trin 2 Angiv et beløb x_2, således at det, sikkert at modtage x_2 kr., er ækvivalent med at modtage 0 kr. med sandsynligheden 0.5 og x_1 kr. med sandsynligheden 0.5.

Trin 3 Angiv et beløb x_3, således at det, sikkert at modtage x_3 kr., er ækvivalent med at modtage x_1 kr. med sandsynligheden 0.5 og 1 mill. kr. med sandsynligheden 0.5.

Trin 4 Angiv et beløb x_4, således at det, sikkert at modtage x_4 kr., er ækvivalent med at modtage x_2 kr. med sandsynligheden 0.5 og x_3 kr. med sandsynligheden 0.5.

Vi finder ved gentagen anvendelser af (9.3.2), at

$$\begin{aligned}
u(x_1) &= \tfrac{1}{2}u(0) + \tfrac{1}{2}u(10^6) \\
u(x_2) &= \tfrac{1}{2}u(0) + \tfrac{1}{2}u(x_1) = \tfrac{3}{4}u(0) + \tfrac{1}{4}u(10^6) \\
u(x_3) &= \tfrac{1}{2}u(x_1) + \tfrac{1}{2}u(10^6) = \tfrac{1}{4}u(0) + \tfrac{3}{4}u(10^6) \\
u(x_4) &= \tfrac{1}{2}u(x_2) + \tfrac{1}{2}u(x_3) = \tfrac{1}{2}u(0) + \tfrac{1}{2}u(10^6).
\end{aligned}$$

Vi har altså $u(x_4) = u(x_1)$, hvorefter vi slutter $x_4 = x_1$. Såfremt beslutningstageren angiver $x_4 \neq x_1$, tilfredsstiller hendes præferencemønster altså ikke axiomerne for nytteteorien, eller også har hun i sine svar ikke givet udtryk for sit præferencemønster. Ofte vil man dog efter et par gentagelser af ovenstående procedure opnå at $x_4 = x_1$, hvorved man altså har bestemt løsningen til

$$u(x) = \tfrac{1}{2}u(0) + \tfrac{1}{2}u(10^6).$$

Proceduren kan nu gentages for andre værdier af udbytterne, indtil nyttefunktionen er tilstrækkelig detaljeret bestemt.

Tabel 9.3. De 11 hypotetiske investeringsmuligheder i Lorange og Norman's undersøgelse, beløbene er i mill. norske kroner. u(-10) = 0.0, u(100) = 1.0.

Situation	Udbytte 1		Udbytte 2		Ækvivalent	Nytte
nr.	beløb	sands.	beløb	sands.	pengebeløb	$u(x_i)$
1	-10	0.5	100	0.5	x_1	0.5
2	-10	0.5	x_1	0.5	x_2	0.25
3	x_2	0.5	x_1	0.5	x_3	0.375
4	-10	0.5	x_2	0.5	x_4	0.125
5	x_1	0.5	100	0.5	x_5	0.75
6	x_5	0.5	100	0.5	x_6	0.875
7	x_1	0.5	x_5	0.5	x_7	0.625
8	-10	0.1667	100	0.8333	x_8	0.833
9	-10	0.3333	100	0.6667	x_9	0.667
10	-10	0.6667	100	0.3333	x_{10}	0.333
11	-10	0.3333	100	0.1667	x_{11}	0.167

Som en yderligere kontrol af bestemmelsen af nyttefunktionen kan man opstille nogle lotterier, og dels bestemme sikkerhedsækvivalenten ved hjælp af nyttefunktionen, dels undersøge, om beslutningstageren virkelig er indifferent imellem lotteriet og den fundne sikkerhedsækvivalent.

Eksempel 9.3.1 ***Bestemmelse af holdninger overfor risiko hos norske skibsredere***

I en undersøgelse af Lorange og Norman (1970) har man forsøgt at bestemme præferencemønsteret hos ejerne af en række skandinaviske tankskibsflåder. Skibsrederne blev stillet over for 11 hypotetiske situationer, hvor en investeringsmulighed med givne sandsynligher ville give bestemte udbytter; rederne blev spurgt om, hvor meget de ville betale for en sådan investeringsmulighed i en periode med god likviditet. De 11 situationer er angivet i Tabel 9.3

I de første syv situationer er der en 50-50 chance for de to mulige udbytter, og kun udbytterne varierer fra situation til situation, men i de fire sidste situationer er udbyttet ens, hhv. -10 mill. kr. og 100 mill. kr., mens sandsynlighederne varierer fra situation til situation. Såfremt beslutningstagerens præferencemønster er i overensstemmelse med de anførte axiomer, vil pengeværdien x af lotteriet $(K_1,K_2)_p$ tilfredsstille

$$u(x) = pu(K_1) + (1 - p)\, u(K_2), \tag{9.3.3}$$

og x er således det pengebeløb, der har nytteværdien $pu(K_1)+(1-p)\ u(K_2)$. Sætter vi $u(100 \text{ mill. kr.}) = 1$ og $u(-10 \text{ mill. kr.}) = 0$, finder vi den sammenhæng mellem pengeværdi og nytteværdier, der er angivet i tabel 9.3.

De 17 skibsrederes svar er angivet i Tabel 9.4.

Tabel 9.4. 17 skibsrederes sikkerhedsækvivalenter for investeringer under god likviditet. Data fra Lorange & Norman. Beløbene er angivet i mill. kr.

Nytte	Skibsreder nummer																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
.5	80	60	45	55	50	80	60	70	40	70	85	30	80	55	60	80	70
.25	40	40	20	33	25	70	50	50	20	40	70	15	50	30	30	75	50
.375	60	50	35	45	40	78	58	62	30	65	80	20	65	43	45	80	60
.125	20	25	12	12	20	60	40	40	10	25	55	-	30	20	15	65	50
.75	95	80	65	77	80	98	90	90	90	90	95	50	95	78	80	100	100
.875	99	95	80	88	99	100	98	96	100	100	99	-	100	90	90	100	100
.625	95	73	55	66	75	95	75	85	80	85	94	38	90	66	70	100	100
.833	100	90	85	82	99	98	97	90	75	95	95	99	90	85	85	100	-
.667	90	80	60	63	70	80	85	75	50	75	95	57	75	75	65	95	-
.333	67	45	15	27	40	60	50	40	20	33	65	25	30	40	35	80	-
.167	15	30	10	8	20	50	10	15	10	25	10	10	25	20	10	50	-

Rederne blev derefter stillet over for de samme 11 investeringssituationer, idet de nu blev anmodet om at forestille sig, at likviditeten var stram, dvs. at firmaet ville kunne bære et tab på 10 mill. kr. uden væsentlige problemer, men at yderligere tab ville medføre vanskeligheder for firmaet. Redernes svar er angivet i Tabel 9.5 for skibsreder nr. 1-11.

Tabel 9.5. 11 skibsrederes sikkerhedsækvivalenter for investeringer under stram likviditet. Data fra Lorange & Norman. Beløbene er angivet i mill. kr.

Nytte	Skibsreder nummer										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
.5	30	45	20	45	40	50	50	27	30	60	45
.25	5	25	5	18	25	25	40	10	0	35	25
.375	15	40	8	31	30	40	46	22	77	50	42
.125	-2	5	-2	4	10	15	35	0	0	20	15
.75	60	60	30	73	70	80	75	65	80	90	95
.875	99	80	40	86	85	95	88	90	100	100	99
.625	40	53	25	59	60	70	65	50	75	85	92
.833	90	50	50	82	60	50	97	90	60	85	85
.667	30	30	30	63	40	30	80	65	35	70	60
.333	15	20	5	27	15	25	30	35	10	25	20
.167	3	5	0	8	3	10	10	20	0	15	7

Vi bemærker, at eksperimentet kun giver en grov mulighed for at kontrollere, hvorvidt den enkelte reder er konsistent i sit præferencemønster. Såfremt skibsrederens præferencemønster tilfredsstiller nytteteoriens axiomer, må der gælde

$$x_4 < x_{11} < x_2 < x_{10} < x_3 < x_1 < x_7 < x_9 < x_5 < x_8 < x_6,$$

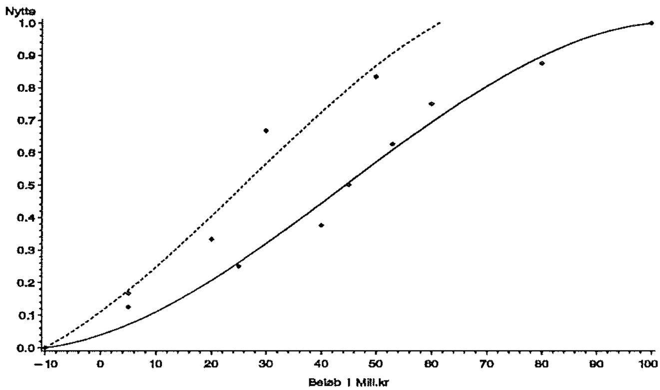
idet de tilsvarende nytteværdier danner en voksende følge.

Vi finder en iøjnefaldende inkonsistens ved fx at betragte sikkerhedsækvivalenten for situation 1 og situation 9 under stram likviditet for skibsreder nr. 2. I situation 1 er hun villig til at betale 45 mill. kr. for en investeringsmulighed, hvor hun med sandsynligheden 0.5 taber 10 mill. kr. og med sandsynligheden 0.5 tjener 100 mill. kr., og i situation 9 vil hun kun betale 30 mill. kr. for en investeringsmulighed med de samme tabs- og gevinstbeløb, men med en større sandsynlighed for gevinst, nemlig 0.667.

For nærmere at belyse den fundne inkonsistens, har vi i figur 9.10 illustreret de fundne sammenhænge mellem nytteværdier og pengebeløb for reder nr. 2 i den stramme likviditetssituation. Da eksperimentet falder i to dele, nemlig de første syv situationer med 50-50 lotterier, og de sidste fire situationer med faste gevinster og varierende sandsynligher, har vi tegnet en nyttefunktion for hvert af eksperimentets to dele. De to nyttefunktioner udviser stort set samme forløb, omend de ligger noget forskudt for hinanden. Såfremt skibsrederens præferencestruktur havde været konsistent, ville alle nyttepunkterne have ligget på samme monotone kurve, hvorfor figuren således illustrerer, hvad vi allerede vidste, at skibsrederens svar ikke er i overensstemmelse med en konsistent præferencestruktur. Det er dog tænkeligt, at med en mere omhyggelig spørgeteknik med mulighed for revision af inkonsistente svar havde givet et billede, der stemte bedre overens med vor teori.

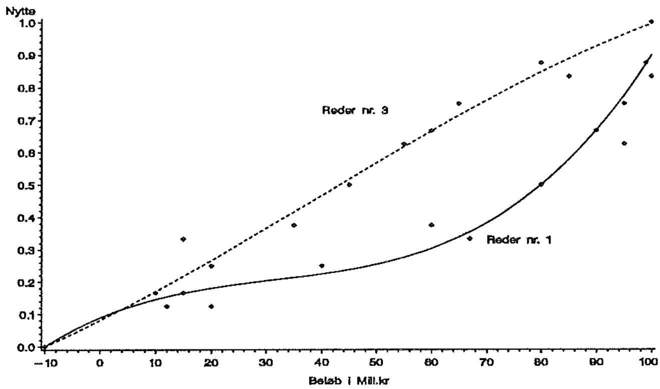
Figur 9.10. Nytten af investeringer under stram likviditet for skibsreder nr. 2.

Nytten ved 50-50 lotterier med varierende gevinster er fuldt optrukket, og nytten ved lotterier med varierende sandsynligheder er angivet ved den stiplede kurve.



For en ordens skyld bemærker vi dog, at de øvrige skibsrederes svar ikke viste slet så udprægede inkonsistenser som den her skitserede. Således var det i de fleste tilfælde muligt at tilnærme den fundne sammenhæng mellem pengeværdier og nytteværdier med en monotont voksende, glat kurve. I figur 9.11 og figur 9.12 har vi skitseret de fundne nyttefunktioner for reder nr. 1 og reder nr. 3 under henholdsvis god og stram likviditet.

Figur 9.11. Nytten af investeringer under god likviditet for to skibsredere.

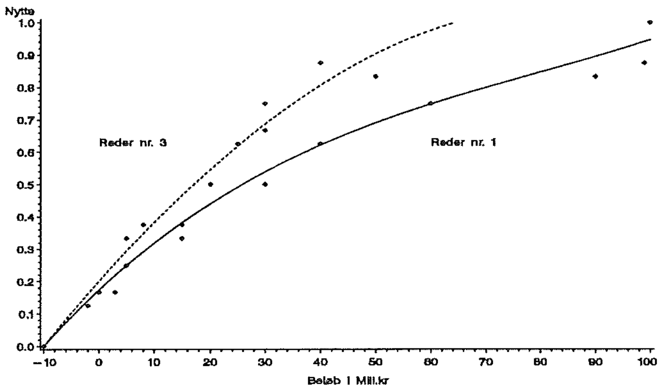


Figurerne viser, at de to redere vurderer investeringsrisiciene forskelligt. Reder nr. 1 er mere indstillet på at tage chancer, end reder nr. 3. Såfremt likviditeten er god, vil reder nr. 1 endog betale mere end den forventede pengeværdi for at få chancen for at tjene store beløb. Vi understreger, at der ikke er noget usædvanligt eller modstridende i, at de to nyttefunktioner er forskellige. Nytteteorien opererer med et givet præferencemønster, men postulerer ikke noget universelt præferencemønster.

Det fremgår ligeledes af figurerne, at præferencemønstret ændres, når de ydre omstændigheder (her likviditeten) ændres. Begge redere bliver væsentligt mere tilbageholdende over for at tage chancer under den anstrengte likviditet.

□

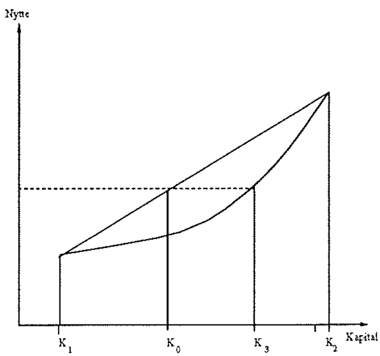
Figur 9.12. Nytten af investeringer under stram likviditet for to skibsredere.

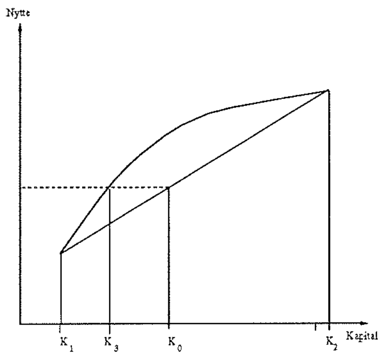


Som det fremgår af eksemplet, vil den præferencestruktur, man har i en given situation, ikke nødvendigvis kunne overføres til en anden situation (f.ex. en periode med stram likviditet). Den præferencestruktur, en beslutningstager har over for pengebeløb, vil således specielt afhænge af beslutningstagerens kapital, hvorfor man principielt bør konstruere nyttefunktionen med kapitalen som den uafhængige variabel.

Vi bemærker endvidere, at selv en grov beskrivelse af nyttefunktionen giver et indtryk af beslutningstagerens holdning over for risikobehæftede projekter. Såfremt nytten af penge er konkav for $K_1 < K < K_2$ finder vi, at sikkerhedsækvivalenten K_3 for et lotteri imellem K_1 og K_2 er mindre end den forventede pengeværdi K_0 af lotteriet, og vi siger, at beslutningstageren udviser risikoaversion i det betragtede område. Såfremt nytten af penge er konveks i området $K_1 < K < K_2$, vil sikkerhedsækvivalenten af et lotteri imellem K_1 og K_2 være større end den forventede pengeværdi K_0 af lotteriet, og vi siger, at beslutningstageren udviser risikoattraktion i området. Figur 9.13 viser eksempler på nyttefunktioner svarende til risikoaversion og risikoattraktion.

Figur 9.13. Nytten af penge for en person med risikoaversion, figuren til venstre, og for en person med risikoattraktion, figuren til højre. $(K_1, K_2)_p \sim K_3$ *og* $pK_1 + (1-p)\,K_2 = K_0$.





Som et groft mål for personens risikoaversion eller risikoattraktion kan vi benytte forskellen mellem sikkerhedsækvivalenten K_3 og den forventede pengeværdi K_0 af et givet lotteri. Lokalt finder vi, idet vi sætter $K_2 = K_1 + \varepsilon$, at $K_0 = K_1 + \varepsilon(1-p)$, og til bestemmelse af en approksimation finder vi Taylorudviklingen

$$\begin{aligned} u(K_3) &= pu(K_1) + (1-p)u(K_2) \\ &= u(K_1) + \varepsilon(1-p)u'(K_1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-p)u''(K_1) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Sætter vi nu $K_3 = K_1 + \delta$, finder vi

$$u(K_3) = u(K_1) + \delta u'(K_1) + O(\delta^2),$$

hvorfor

$$\delta \doteq \varepsilon(1-p) + O(\varepsilon^2).$$

For at bestemme en bedre approksimation sætter vi $K_3 = K_1 + \varepsilon(1-p) + \delta_1$, hvor $\delta_1 \in O(\varepsilon^2)$. Vi finder da

$$u(K_3) = u(K_1) + \varepsilon(1-p)u'(K_1) + \delta_1 u'(K_1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-p)u''(K_1) + O(\varepsilon^3)\ ,$$

således at vi finder

$$K_3 = K_1 + \varepsilon(1-p) + \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2\ p(1-p)u''(K_1)}{u'(K_1)} + O(\varepsilon^3)\ ,$$

hvorfor vi har

$$K_0 - K_3 \simeq -\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2\ p(1-p)u''(K_1)}{u'(K_1)}.$$

Vi bemærker, at variansen af lotteriresultatet netop er $\varepsilon^2 p(1-p)$, og forventningsværdien af lotteriresultatet er som nævnt $K_0 = K_1 + \varepsilon(1-p)$. Størrelsen

$$r(K) = -\frac{u''(K)}{u'(K)} = -\frac{d\ln\ u'(K)}{dK} \tag{9.3.4}$$

benyttes ofte som mål for risikoaversion.

Der gælder specielt

$$(K+\varepsilon, K-\varepsilon)_p \sim K \qquad for \qquad p \simeq 0.5 + \frac{\varepsilon}{4}r(K).$$

Eksempel 9.3.2 ***Fortolkning af den anden afledede af nyttefunktionen som forsikringstendens***

Antag, at en person med den monetære kapital K desuden besidder et lotteri $(K_1, K_2)_p$, hvor $K_1 < K_2$. Lotteriet kan for eksempel bestå i, at hun har en bil, der kan komme ud for en skade, et hus, der kan brænde, eller en investeringsmulighed, der kan give tab eller gevinst.

Antag nu, at sikkerhedsækvivalenten for hendes samlede situation er $K_3 \sim (K + K_1, K + K_2)_p$. Såfremt $K_3 < K$, vil hun være villig til at betale en forsikringspræmie på højst $K - K_3$ for at slippe for lotteriet, således som vi så det i Eks. 9.2.6. Såfremt lotteriet er fair, dvs. såfremt

$$\mu = pK_1 + (1-p)K_2$$

er 0, vil den maximale præmie groft taget være $\frac{1}{2}\sigma^2 r(K)$, hvor σ^2 angiver variansen af lotteriresultatet. I almindelighed vil hun maximalt betale $-\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 r(K)$, og vi kan således opfatte $r(K)$ som personens lokale forsikringstendens. □

Det er værd at bemærke, at mange beslutningstagere angiver en mindste acceptabel salgspris for et lotteri, de allerede besidder, som er forskelligt fra den højeste acceptable købspris for det samme lotteri under antagelse af, at de ikke besidder lotteriet. Vi skal ikke nærmere diskutere dette forhold, men blot gøre opmærksom på, at man ved en eventuel eksperimentel bestemmelse af en beslutningstagers nyttefunktion bør tilstræbe at opstille lotterier under forudsætninger, der er analoge til den situation, hvori nyttefunktionen skal anvendes. Ligeledes vil det være af værdi, at man konstruerer lotterierne således, at de omfatter de konsekvenser, den aktuelle situation vil berøre.

Til belysning af indstillingen til risiko anfører vi:

Eksempel 9.3.3 ***Valg mellem projekter med samme forventede pengebeløb, men med forskellige varianser***

Antag, at en virksomhedsleder har valget mellem to investeringsmuligheder I og II.

Projekt I er et enkelt projekt, der med sandsynligheden 0.5 giver et nettotab på 5 mill. kr. og med sandsynligheden 0.5 en nettogevinst på 15 mill. kr.

Projekt II består af 10 enkeltprojekter, der hver for sig giver et nettotab på 0.5 mill. kr. med sandsynlighed 0.5 og en nettogevinst på 1.5 mill. kr. med sandsynlighed 0.5, og endvidere vides det, at udbytterne af enkeltprojekterne er indbyrdes stokastisk uafhængige.

Vi antager desuden, at virksomhedslederens nyttefunktion er givet ved

$$u(x+K) \;=\; A + xB + x^2C \;,$$

hvor K angiver hendes nuværende kapital, og x angiver nettoudbyttet af investeringen, idet vi ser bort fra ikke-monetære virkninger af investeringen.

Vi finder da, at nytten af projekt I er

$$u(I) \;=\; A + 5B + 125C \;,$$

idet $\mathsf{E}\,[X^2] = V[X] + (\mathsf{E}\,[X])^2$.

Tilsvarende finder vi nytten af projekt II

$$u(II) \;=\; A + 5B + 35C \;,$$

hvorfor vi har

$$u(I) - u(II) \;=\; 90C \;,$$

der viser, at hvis virksomhedslederens præferencemønster udviser risikoaversion $C < 0$, da vil hun foretrække at sprede sine investeringer i projekt II, men hvis hendes præferencemønster udviser risikoattraktion, $C > 0$, vil hun hellere satse alt på ét bræt i projekt I.

□

En grafisk bestemt nyttefunktion kan direkte anvendes til vurdering af nytten af lotterier sammensat af få simple konsekvenser. Såfremt antallet af simple konsekvenser, der indgår i lotteriet, er stort, vil en direkte aflæsning af nyttefunktionens værdier ofte være ubekvem, og man forsøger da at bestemme et analytisk udtryk for nyttefunktionens forløb i det relevante område. I de følgende afsnit vil vi som regel antage, at nyttefunktionen er angivet ved et analytisk udtryk, en antagelse, der muliggør bestemmelse af eksplicitte udtryk for de optimale beslutninger.

Vi har i dette afsnit kun beskrevet bestemmelsen af nyttefunktionen for situationer, hvor de indgående konsekvenser direkte kunne udtrykkes i pengebeløb. Det er imidlertid klart, at vi kan bruge den samme teknik over for situationer, hvor konsekvenserne på naturlig måde kan udtrykkes ved tal på den reelle akse, således som det eksempelvis er tilfældet, når konsekvenserne opgøres i antal eller som relative hyppigheder. Man ser meget ofte, at konsekvenser, der dels er af økonomisk art og dels af ikke-økonomisk, fx miljømæssig, art, opgøres i penge. En sådan afbildning af konsekvenserne er naturligvis kun forsvarlig, såfremt den er i overensstemmelse med præferencestrukturen, dvs. såfremt beslutningstageren er villig til at substituere lotterier med rene pengegevinster for lotterier med blandede gevinster.

Eksempel 9.3.4 ***Fastsættelse af pengeækvivalent for trafikuheld***

I den svenske vejplanbetænkning (Vagplan 1970. Statens offentlige utredninger 1969:57, Stockholm 1969) foreslås det, at den samfundsmæssige gevinst pr. undgået færdselsdødsfald sættes til 750.00 svenske kr. i 1968-priser. Et analogt dansk arbejde (Grundlag for trafikøkonomiske vurderinger af vejplaner - basisår 1968. Vejdirektoratet 1970) anslår, at de samfundsmæssige omkostninger ved samtlige uheld er 75.000 kr. pr. uheld med personskade. Godt 5% af personskaderne er dødsfald.

De to beregningsmåder er ikke direkte sammelignelige, hvilket delvis forklarer forskellen i den svenske og den danske pris pr. færdselsdødsfald. Den samfundsmæssige pris, man kunne fastsætte på et trafikdødsfald, hvis det overhovedet har mening at fastsætte en pris, vil desuden variere med prisfastsættelsen af en række andre imponderalia.

Dawson og Everall (1972) har desuden søgt at vurdere den pris, bilisten vil sætte på sin køretid.

□

9.4 Nytte af flerdimensionale konsekvenser

I det foregående afsnit beskrev vi bestemmelsen af nyttefunktionen, når konsekvenserne på simpel måde kunne ordnes på den reelle talakse, under forudsætning af, at beslutningstageren havde et præferencemønster, der opfyldte nytteteoriens axiomer. Nytteteorien giver os imidlertid langt stærkere resultater end dette, idet teorien sikrer os eksistensen af en nyttefunktion selv i situationer, hvor de simple konsekvenser er af forskellig karakter og tilsyneladende ikke lader sig indplacere på den reelle talakse.

Som et eksempel på en nyttefunktion defineret på et område i den todimensionale plan betragter vi

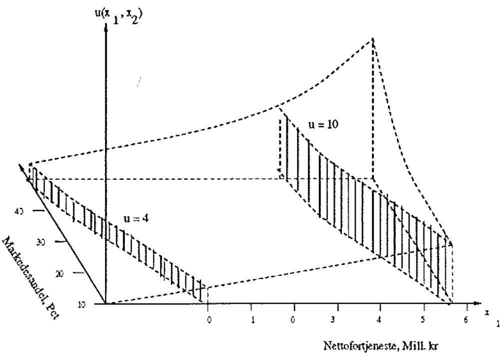
Eksempel 9.4.1 *Nyttefunktion på todimensional konsekvensmængde*

(Efter Fishburn (1970))

Til brug for fastsættelsen af markedspris og reklamedispositioner har en virksomhedsleder vurderet sine præferencer for forskellige kombinationer af nettofortjeneste x_1 og en markedsandel x_2 for det kommende år. Det relevante område skønnes at være -5 mill. kr. $\leq x_1 \leq$ 5 mill. og 10% $\leq x_2$ % $\leq$ 30%. Virksomhedslederens nytteflade for konsekvenser i dette område er skitseret i Figur 9.14. På figuren er yderligere indtegnet niveaukurverne svarende til $u(x_1, x_2) = 4$ og $u(x_1, x_2) = 10$.

Vi finder $u(-5, 30) = u(0, 10) = 4$, hvorfor vi slutter, at virksomhedslederen er indifferent imellem at lide et nettotab på 5 mill. kr. ved en markedsandel på 30% og at få nettogevinsten 0 ved en markedsandel på 10%. Tilsvarende finder vi $u(2, 30) = u(5, 10) = 10$, hvilket viser at en kombination af nettogevinst og markedsandel på (2 mill. kr., 30%) anses for at være ækvivalent med kombinationen (5 mill. kr., 10%). En pris- og reklamekampagne, der med sandsynligheden 0.5 resulterer i en markedsandel på 30%, og en nettofortjeneste på 2 mill. kr. og med sandsynligheden 0.5 resulterer i en markedsandel på 10% og nettofortjeneste 0, anses for at være ækvivalent med det, med sikkerhed at have markedsandelen 10% og nettofortjenesten 2 mill. kr., idet nemlig $u(2, 10) = 7$.

Figur 9.14. Virksomhedens nytte for forskellige kombinationer af nettofortjeneste og markedsandel.



□

Ved bestemmelsen af nytteværdien af flerdimensionale konsekvenser vil man i videst muligt omfang søge at reducere antallet af dimensioner ved først at danne sig et indtryk af nyttefladens niveaukurver, der jo netop beskriver ækvivalenser eller indifferenser mellem de simple konsekvenser.

I et arbejde at Yntema og Klem (1965) har man forsøgt at vurdere indifferensflader for flypiloter ved landing under forskellig skyhøjde, sigtbarhed og brændstofbeholdning.

En ofte forekommende situation er det tilfælde, hvor konsekvensrummet er et homogent produkt

$$K = K_0 \times K_0 \times \cdots \times K_0 = K_0^n .$$

Et punkt i konsekvensrummet kan her være en række årlige indkomster i n år, eller fordelingen af penge på n aktiviteter.

Såfremt præferencestrukturen tilfredsstiller en række 2'ordens betingelser, gælder det specielt, at der eksisterer en nyttefunktion på K, hvis værdier bestemmes ved at summere de diskonterede nytteværdier for enkeltkomponenterne,

$$u(K_1, K_2, \ldots, K_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, u_0(K_i) .$$

For en udførligere diskussion af tidspræferencestrukturen henvises til Fishburn (1970). Se endvidere Keeney & Raiffa (1976) og Farquhar (1977).

Vi bemærker endvidere, at såfremt Axiom 4, der blev opstillet i afsnit 9.2, ikke er opfyldt for alle konsekvenser, dvs. såfremt nogle konsekvenser er uendeligt mere attraktive end andre, kan man opstille en nyttefunktion med flerdimensionale værdier, der afspejler præferencestrukturen.

Vi vil slutte kapitlet med at erindre om, at nytteteorien er deskriptiv, ikke normativ. Vi kan ikke postulere, at der findes én nyttefunktion, som er den ideelle for alle beslutningstagere. Nogle foretrækker en western, andre en dansk folkekomedie; nogle sætter deres sparepenge i banken, andre spiller på galopbanen. Nytteteorien beskriver, hvorledes man for en given præferencestruktur over for konsekvenser kan udtrykke disse præferencer i en reel funktion, der udtrykker relative fordele og ulemper ved konsekvenserne på en måde, der tillader en simpel matematisk behandling af situationer, hvor konsekvenserne optræder med kendte sandsynligheder.

Der er således ikke noget usædvanligt i, at to beslutningstagere har forskellige nyttefunktioner; dette afspejler blot, at de har forskellige holdninger til risiko.

Nyttefunktionen er et hjælpemiddel til at illustere beslutningstagerens syn på risiko. Ved hjælp af nyttefunktionen kan vi således se, hvorledes beslutningstageren kombinerer pengebeløb og sandsynligheder. Imidlertid er det, som antydet, en kompliceret affære at bestemme nyttefunktionen for en beslutningstager, og man vil derfor ofte antage, at nyttefunktionen er lineær, medmindre

i) de beløb, der er på spil i beslutningssituationen, er store i forhold til beslutningstagerens kapital,

eller

ii) de mulige valg, beslutningstageren kan træffe, vil føre til et stort antal komplicerede konsekvenser.

En grov tommelfingerregel er, at det forventede pengebeløb kan benyttes som udtryk for nytten af en sammensat konsekvens, hvis beslutningstageren ville benytte det forventede pengebeløb ved sammenligning af en simpel konsekvens med en sammensat konsekvens bestående af den bedste og den værste blandt de mulige konsekvenser i problemet.

9.5 Referencer

Arrow, K. J. (1951): *Social Choice and Individual Values*, Cowles Commision Monograph 12. Wiley, New York.

Dawson, R. F. F. and Everall, P. F. (1972): *The value of Motorist's time, a study in Italy.* Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne.

Debreu, G. (1959): *Theory of value.* Wiley, New York.

Debreu, G. (1960): Topological methods in cardinal utility theory. In K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes (Eds.): Mathematical methods in the social sciences. Stanford University Press, Stanford.

Farquhar, P. H. (1977): *A survey of multiattribute Utility Theory and Applications.* TIMS Studies in the Management Sciences, **6**. North-Holland, Amsterdam.

Fishburn, P. C. (1964): *Decision and Value Theory.* Wiley, New York.

Fishburn, P. C. (1970): *Utility Theory for Decision Making.* Wiley, New York.

Hull, J. More, P. G. and Thomas, H. (1973): Utility and its Measurement. *Journ. Roy. Statist. Soc.* **A 136**, pp. 226-247.

Keeney, R. L. and Raiffa, H. (1976): *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs.* Wiley, New York.

Lorange, P. and Norman, V. D. (1970): *Risk Preference Patterns among Scandinavian Tankship Owners.* Institute for Shipping Research, Bergen.

Luce, R. D. and Raiffa, H. (1957): *Games and Decisions.* Wiley, New York.

Savage, L. J. (1954): *The Foundation of Statistics.* Wiley, New York.

von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947): *Theory of Games and Economic Behavior.* Wiley, New York.

Yntema and Klem (1965): Telling a computer how to evaluate multidimensional situations. *IEEE Trans. Human Factors Electron.* HFE-6, pp. 3-13

Afsnit 10

Beslutning under usikkerhed og under risiko

kapitel4.tex 1998-05-12

10.1 Elementer i et beslutningsproblem

Vi skal i dette afsnit beskrive en simpel beslutningssituaion, nemlig en situation, der klassificeres som et beslutningsproblem under risiko. Diskussionen af denne situation vil danne grundlag for gennemgangen af de mere sammensatte beslutningsproblemer i de følgende kapitler.

For en ordens skyld skal det påpeges, at en del af eksemplerne er udarbejdet med henblik på at belyse teorien, snarere end at illustrere konkrete industrielle problemstillinger. Formålet med eksemplerne og de simplificerende antagelser, der er gjort, er at belyse strukturen i løsningen til nogle generiske problemstillinger.

Det, der er karakteristisk for en beslutningssituation, er, at beslutningstageren har mulighed for at vælge en aktion blandt en række mulige aktioner. Hun kan for eksempel have valget mellem at købe olierettighederne til et givet område eller at undlade at købe, hun kan vælge mellem at sælge en given produktion med prædikatet 1. kvalitet eller at sælge produktionen til skrot, hun kan vælge mellem at supplere sin lagerbeholdning med $0, 1, 2, \ldots$ enheder af en bestemt vare, etc. Mængden af de aktioner, beslutningstageren mener at råde over, betegnes ofte ved $\mathcal{A}$ med elementerne (aktionerne) $a_1, a_2, \ldots$.

I en triviel beslutningssituation, hvor beslutningstageren er af den opfattelse, at hendes valg af aktion resulterer i en simpel konsekvens, vil en sammenligning af aktionerne blot bestå i en sammenligning af de simple konsekvenser. I en ikke-triviel situation, hvor beslutningstageren ikke har en viden om, hvilken af de simple konsekvenser, aktionen vil resultere i, vil hun opfatte konsekvensen af en aktion som en sammensat konsekvens, dvs. som et lotteri mellem en række simple konsekvenser, hvor gevinstsandsynlighederne afspejler beslutningstagerens vurdering af chancerne for, at aktionen netop resulterer i en bestemt af de simple konsekvenser. En sammenligning af aktionerne vil derfor være en sammenligning af sammensatte konsekvenser, hvor sammenligningen naturligt vil bygge på en vurdering af chancerne for, at de enkelte konsekvenser indtræffer, samt en vurdering af beslutningstagerens tilbøjelighed til at løbe en risiko i ikke-deterministiske valgsituationer. Mængden af de konsekvenser, beslutningstageren inddrager i sin analyse, betegnes ofte med $\mathcal{K}$, og mængden af sandsynlighedsfordelinger (lotterier) over $\mathcal{K}$ betegnes med $\mathcal{K}^*$. Konsekvenserne kan fx være, at man udvinder en bestemt mængde olie i et område, hvortil man har købt olierettighederne, eller at man foretager en række forgæves prøveboringer, at en produktion, der indeholder $0, 1, 2, \ldots$ defekte emner, sælges som første kvalitet, at et lager suppleres, til det indeholder $0, 1, 2, \ldots$ enheder, og efterspørgslen udgør $0, 1, 2, \ldots$ enheder, etc.

Vi vil antage, at der findes en ordenstro afbildning u^* af konsekvenserne ind i den reelle talakse, såldes at $K_1 \prec K_2$, hvis og kun hvis $u^*(K_1) < u^*(K_2)$. En sammenligning af simple konsekvenser kan da udføres ved sammenligning af de tilsvarende værdier af $u^*(\cdot)$, og såfremt $u^*(\cdot)$ tilfredsstiller (9.2.11) og (9.2.12), kan en sammenligning af sammensatte konsekvenser udføres ved at beregne den forventede nytte af de sammensatte konsekvenser.

De beslutningssituationer, vi her vil betragte, er karakteriseret ved, at konsekvensrummet har en simpel struktur. For en given aktion vil udfaldet afhænge af en størrelse, som vi kan kalde naturens tilstand. Disse tilstande kan for eksempel være, at der er en bestemt mængde olie i et område, eller at der ikke er olie i området, at en given produktion indeholder $0, 1, 2, \ldots$ defekte emner, at næste måneds efterspørgsel efter en given vare udgør

$0, 1, 2, \ldots$ enheder, etc. Mængden af mulige tilstande af naturen symboliseres ofte med Θ med elementer $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$. Naturens tilstand kaldes ofte beslutningsproblemets parameter. For enhver kombination af naturens tilstand og beslutningstagerens aktion kan beslutningstageren angive en konsekvens, det vil sige, at vi har afbildningen

$$\Theta \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

med værdier $K(\theta, a)$ for $\theta \in \Theta$, $a \in \mathcal{A}$.

Ved sammensætning af u^* og K finder vi da afbildningen

$$u : \Theta \times \mathcal{A} \to \mathbb{R} ,$$

hvor $u(\theta, a) = u^*(K(\theta, a))$. Vi vil kalde funktionen $u(\cdot, \cdot)$ for beslutningstagerens gevinstfunktion. Såfremt beslutningstagerens præferencemønster på $\mathcal{K}^*$ opfylder aksiom 1-4 i afsnit 9.2, og såfremt u^* yderligere tilfredsstiller (9.2.11) og (9.2.12), vil vi kalde funktionen $u(\cdot, \cdot)$ for beslutningstagerens nyttefunktion.

Definition 10.1.1 ***Maksimal gevinst ved perfekt information, regret***

Såfremt beslutningstageren kender naturens tilstand θ, vil hun naturligvis vælge den aktion, der maksimerer gevinsten for denne værdi af θ. Ved dette valg indkasserer hun den maksimale gevinst ved perfekt information

$$\tau(\theta) = \sup_a u(\theta, a) . \tag{10.1.1}$$

For enhver anden aktion a vil hendes gevinst være mindre end det maximalt opnåelige. Forskellen mellem den maximalt opnåelige gevinst, hun opnår ved at benytte aktionen a, vil vi kalde regretten (eventuelt opportunity loss) ved at benytte aktion a, når naturens tilstand er θ. Vi har regretfunktionen

$$\boxed{R(\theta, a) = \tau(\theta) - u(\theta, a) . \qquad (10.1.2)}$$

□

Bemærkning 1 ***En ordenstro gevinstfunktion føres ikke nødvendigvis over i en ordenstro regretfunktion***

Vi bemærker, at selv om vi har forudsat, at gevinstfunktionen er ordenstro, dvs.

$$(\theta_1, a_1) \prec (\theta_2, a_2), \text{ såfremt } u(\theta_1, a_1) < u(\theta_2, a_2)\ , \tag{10.1.3}$$

kan vi ikke slutte, at det analoge gælder for regretfunktionen. Det kan dog vises, at regretfunktionen er ordenstro for en fastholdt værdi af naturens tilstand θ, dvs.

$$(\theta, a_1) \prec (\theta, a_2), \text{ såfremt } R(\theta, a_1) > R(\theta, a_2)\ . \tag{10.1.4}$$

□

Eksempel 10.1.1 ***Avisdrengens problem, gevinstfunktion og regretfunktion***

En handelsvirksomhed skal træffe beslutning om, hvor stort lager, man skal hjemtage af en sæsonvare. Lageret skal bestilles inden sæsonen begynder, og der er ikke mulighed for senere suppleringer af lageret.

Firmaet kan indkøbe $0, 1, 2, \ldots$ enheder af varen, og efterspørgselen kan tilsvarende være $0, 1, 2, \ldots$ enheder. Vi vil derfor repræsentere de mulige tilstande af naturen ved $\Theta = \{0, 1, 2, \ldots\}$ og de mulige aktioner ved $\alpha K = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Idet indkøbsprisen pr. enhed er C kr. salgsprisen pr. enhed er S kr., såfremt enheden sælges i sæsonen, og R kr., såfremt varen må returneres efter sæsonens ophør, og idet enelig firmaet anslår tabet af good-will til at være T kr. pr. efterspurgt enhed, der ikke kan dækkes af lageret, finder vi virksomhedens gevinstfunktion

$$u(\theta, a) = \begin{cases} S\theta \ - \ Ca \ + \ R(a - \theta) & \text{for } \theta \leq a \\ (S - C)a - T(\theta - a) & \text{for } \theta > a, \end{cases} \tag{10.1.5}$$

hvor $R < C < S$.

Ved opstilling af gevinstfunktionen har vi gjort den antagelse, at sæsonen er af en så kort varighed, at en diskontering er overflødig. Vi finder den maximale gevinst under fuld information

$$\tau(\theta) = (S - C)\theta ,$$

der opnås for $a = \theta$, dvs. for efterspørgselen af samme størrelse som lageret. Regretten bliver derfor

$$R(\theta, a) = \begin{cases} (C - R)(a - \theta) & \text{for } \theta \leq a \\ (S + T - C)(\theta - a) & \text{for } \theta > a, \end{cases} \tag{10.1.6}$$

Gevinsten ved at have 2 enheder på lager ved en efterspøgsel på 1 enhed er

$$u(1, 2) = S + R - 2C ,$$

og gevinsten ved at have 7 enheder på lager ved en efterspørgsel på 5 enheder er

$$u(5, 7) = 5S + 2R - 7C .$$

Såfremt $4S + R > 5C$ har vi derfor

$$u(1, 2) < u(5, 7) ,$$

hvorfor gevinsten ved at have et lager på 2 enheder, når efterspørgselen er 1 enhed, er mindre end gevinsten ved at have et lager på 7 enheder, når efterspørgselen er 5 enheder.

Vi finder desuden

$$R(1, 2) < R(5, 7) ,$$

der udtrykker, at tabet i forhold til det bedst opnåelige ved et lager på 2 enheder og en efterspørgsel på 1 enhed er mindre end det tilsvarende tab ved et lager på 7 enheder og en efterspørgsel på 5 enheder. □

Bemærkning 1 ***Gevinst- og regretfunktionen for avisdrengens problem er generel for simple estimationsproblemer***

Ovenstående eksempel blev formuleret som et generelt indkøbsproblem for en sæsonvare. I OR-litteraturen kaldes problemet ofte for avisdrengens problem, da omkostningsstrukturen giver en rimeligt dækkende beskrivelse af detailhandlerens beslutningsproblem ved indkøb af en så sæsonbestemt vare som en avis.

Vi vil bruge regretfunktionen (10.1.6) som prototype på omkostningsstrukturen i et estimationsproblem, hvor tabet ved hhv over- og underestimation er proportionalt med størrelsen af estimationsfejlen, og hvor proportionalitetsfaktoren ved overestimation kan være forskellig fra proportionalitetsfaktoren ved underestimation. □

10.2 Beslutning under risiko

Såfremt beslutningstageren i sin analyse af beslutningsproblemet finder det rimeligt at handle, som om naturens tilstand θ er en stokastisk variabel med den generaliserede tæthed $w(\cdot)$, siger vi, at hun træffer en beslutning!under risiko. Et beslutningsproblem under risiko er således karakteriseret ved sættet $(\theta, \mathcal{A},\ u(\cdot,\cdot)\, w(\cdot))$, hvor $w(\cdot)$ er en generaliseret sandsynlighedstæthed på Θ. Sandsynlighedsfordelingen af beslutningstagerens apriorividen om θ kaldes ofte apriorifordelingen, og tætheden $w(\cdot)$ kaldes aprioritætheden.

For ethvert valg af beslutningstagerens aktion a vil hun således opfatte gevinsten $u(\theta, a)$ som en stokastisk variabel, hvis fordeling afhænger af den valgte aktion.

Vi skal kort skitsere de problemer, der er forbundet med beslutning under risiko, idet vi forsøger at indføre en ordning af aktionerne.

Definition 10.2.1 *Partiel ordning af aktioner*

En aktion a_1 siges at være bedre end aktionen a_2, hvis

$$u(\theta, a_2) \leq u(\theta, a_1) \quad \text{for alle } \theta \in \Theta \ .$$

og hvis

$$u(\theta, a_2) < u(\theta, a_1) \quad \text{for mindst eet } \theta \in \Theta \ .$$

To aktioner, a_1 og a_2, siges at være ækvivalente, hvis

$$u(\theta, a_1) = u(\theta, a_2) \quad \text{for alle } \theta \in \Theta \ .$$

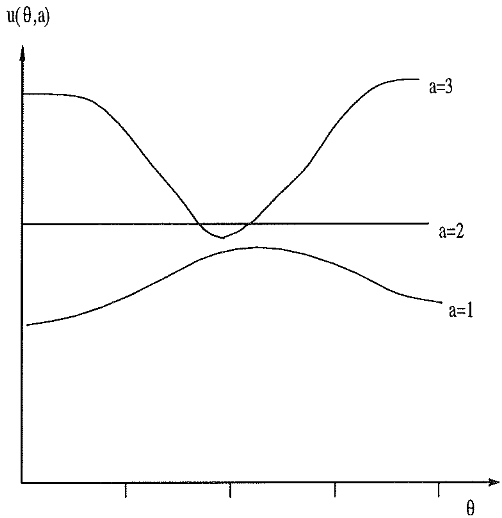
□

Definitionen giver os kun en partiel ordning af aktionerne, og som det fremgår af Figur 10.1, kan vi ikke altid gøre os håb om at finde en aktion, som er bedst for alle parameterværdier. Definitionen gør det imidlertid muligt for os at sortere nogle aktioner fra, som er klart uanvendelige.

Definition 10.2.2 *Admissible aktioner*

En aktion a siges at være admissibel, hvis der ikke findes nogle aktioner, som er bedre end a. (Den partielle ordning "bedre end" er defineret i Definition 10.2.1 på side 792). □

Figur 10.1. Gevinstfunktionen for et beslutningsproblem med $\Theta = [0,1]$ og $\mathcal{A} = \{1,2,3\}$.
Aktionerne $a = 2$ og $a = 3$ er admissible.



Det er klart, at vi kan indskrænke os til at betragte admissible aktioner, når vi søger efter en "god" aktion. Vi skal senere vende tilbage til bestemmelsen af de admissible aktioner i situationer med endeligt mange parameterværdier eller aktioner; her skal vi blot indskrænke os til at konstatere, at vi ikke opnår en fuldstændig ordning af aktionerne gennem Definition 10.2.1.

Eksempel 10.2.1 ***Partiel ordning af aktioner ved skokastisk ordning af gevinst. - Skrotproblemet***

En virksomhed har modtaget en ordre på w enheder af en vare, der skal fremstilles specielt. Fremstillingsprocessen er imidlertid ret kompliceret, hvorfor det ofte hænder, at antallet af acceptable færdige enheder er mindre end det antal, man begyntdte at producere. Det er ikke muligt midt i fremstillingen af et antal enheder pludselig at stoppe processen og erstatte defekte enheder med andre enheder, så det er nødvendigt ved produktionens start at producere flere end de w enheder, Problemet er blot, hvor mange enheder man skal sætte i produktion for at opnå w acceptable enheder.

Lad prisen på råmaterialer plus variable produktionsomkostninger være C kr. pr. enhed, der sættes i produktion, og lad skrotværdien af en defekt enhed eller en overskydende enhed være R kr. med $R < C$. Såfremt der sættes a enheder i produktion, og mindst w af disse er acceptable, får vi gevinsten $Q - Ca + R(a - w)$, hvor Q angiver den pris, kunden betaler for de w enheder.

Såfremt der sættes a enheder i produktion, og der ikke findes w acceptable blandt disse, må der produceres yderligere en række enheder, indtil ordren kan tilfredsstilles. Omkostningerne ved produktion af disse emner sættes til C kr. pr. enhed plus en udgift på i alt V kr. der antages at være uafhængig af antallet af enheder. Kalder vi det antal, der skal sættes i produktion for at opnå w acceptable enheder, for θ, får vi gevinstfunktionen

$$u(\theta, a) = \begin{cases} Q - Ca + R(a - w) & \text{for } \theta \leq a \\ Q - C\theta + R(\theta - w) - V & \text{for } a < \theta \leq m, \end{cases} \tag{10.2.1}$$

hvor m angiver det maximale antal enheder, det overhovedet vil være nødvendigt at producere for at opnå w acceptable enheder.

Lad os antage, at virksomheden ønsker at levere $w = 15$ enheder til en pris af $Q = 1200$ kr., at produktionsomkostningen er $C = 40$ kr. pr. enhed, skrotprisen er $R = 10$ kr. pr. enhed, og at udgifterne ved en ekstra produktion er $V = 120$ kr.

Antag endvidere, at sandsynligheden for, at der netop skal sættes θ enheder i produktion for at producere 15 enheder, er givet ved den afstumpede Poissonfordeling

$$w(i) \;=\; \mathsf{P}\left[\theta = i\right] \;=\; \frac{(25)^i}{i!\,C} e^{-25} \qquad \text{for } i = 15, 16, \ldots\;,$$

hvor

$$C = 1 - \mathrm{P}(14; 25)$$

idet

$$u(\theta, a) = \begin{cases} 1050 - 30a & \text{for } \theta \leq \mathrm{a} \\ 930 - 30\theta & \text{for } \mathrm{a} < \theta, \end{cases}$$

kan vi ved hjælp af en tabel over P(25)-fordelingen bestemme fordelingen af $u(\theta, a)$ for enhver værdi af a. I Tabel 10.1 har vi angivet fordelingen af gevinsten for $a = 20, 21$ og 25.

Tabel 10.1. Sandsynlighedstætheden $g(u)$ (i %) for gevinsten u(θ,a) ved en produktion på $a = 20, 21$ og 25 enheder

$a = 20$

u	≤ 30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	450
$100g(u)$	18.4	5.5	6.4	7.2	7.7	8.1	8.1	7.7	7.1	6.3	17.5

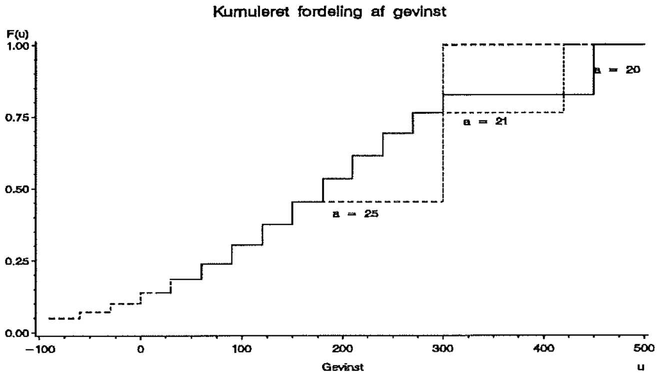
$a = 21$

u	≤ 0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	420
$100g(u)$	13.8	4.6	5.5	6.4	7.2	7.7	8.1	8.1	7.7	7.1	23.8

$a = 25$

u	≤ -90	-60	-30	0	30	60	90	120	150	300
$100g(u)$	5.0	2.2	2.9	3.7	4.6	5.5	6.4	7.2	7.7	54.7

Figur 10.2. Den kumulerede fordeling af gevinsten u ved produktion af $a = 20, 21$ eller 25 enheder.



I Figur 10.2 har vi skitseret den kumulerede fordeling af gevinsten for de tre tilfælde.

Beslutningstagerens valg af initialproduktion vil naturligt kunne baseres på en vurdering af fordelingen af gevinsten under alternative valg af initialproduktionen.

Det synes naturligt at foretrække en aktion a_2 frem for aktionen a_1, såfremt der gælder

$$\mathsf{P}\left[u(\theta, a_1) \leq x\right] \leq \mathsf{P}\left[u(\theta, a_2) \leq x\right] \qquad \text{for alle } x. \tag{10.2.2}$$

Relationen udtrykker, at aktionen a_2 med større sandsynlighed giver samme gevinster som a_1 eller med samme sandsynlighed giver større gevinster end a_1. En sådan partiel ordning er altså i overensstemmelse med Axiom 3 i afsnit 9.2. Såfremt (10.2.2) er opfyldt, siger man, at den stokastiske variable, $u(\theta, a_2)$, er stokastisk større end den variable, $u(\theta, a_1)$. Det kan vises, at såfremt $u(\theta, a_2)$ er stokastisk større end $u(\theta, a_1)$, da vil også

$$\mathsf{E}\left[u(\theta, a_2)\right] > \mathsf{E}\left[u(\theta, a_2)\right],$$

men det omvendte er derimod ikke tilfældet.

Ordningen bestemt ved (10.2.2) er imidlertid ikke fuldstændig; relationen (10.2.2) giver os ikke mulighed for at foretrække én af aktionerne $a = 20, 21$ og 25 i figur 10.2 frem for en anden. □

Bemærkning 1 ***Gevinstfunktion for skrotproblemet er prototype for en række simple estimationsproblemer***

Gevinstfunktionen (10.2.1), der blev formuleret som et specifikt produktionsplanslægningsproblem, er en af de simpleste gevinstfunktioner, der kan formuleres, for en situation, hvor tabet ved hhv over- og underestimation ændres diskontinuert omkring den sande værdi. I OR-litteraturen kaldes problemet ofte for skrotproblemet. □

Vi har her introduceret gevinstfunktionen svarende til skrotproblemet for at illustrere det generelle problem med at etablere en ordning af beslutningstagerens aktioner. Vi fandt, at ordningen svarende til (10.2.2) ikke er fuldstændig, hvorfor den ikke nødvendigvis kan bruges til at udvælge en aktion som værende bedst.

Såfremt gevinstfunktionen $u(\theta, a)$ er en nyttefunktion, vil beslutningstageren imidlertid kunne foretage sammenligninger af stokastisk varierende gevinster i overensstemmelse med axiomerne i afsnit 9.2 ved at bestemme nytteværdien for en aktion a af

$$\boxed{\eta(a, w(\cdot)) \;=\; \mathsf{E}_{\theta}[u(\theta, a)] = \int_{\theta} u(\theta, a) w(\theta) \nu\{d\theta\}. \qquad (10.2.3)}$$

Såfremt der ikke er tvivl om, hvilken apriorifordeling, vi benytter, skriver vi blot $\eta(a)$.

Vi vil kalde $\eta(a)$ for apriorinytten svarende til aktionen a.

En konsekvens af axiomerne er, at en aktion a_1 foretrækkes for aktionen a_2, såfremt

$$\eta(a_2) \;<\; \eta(a_1) ,$$

og den bedste aktion a_0 må tilfredsstille

$$\eta(a_0) \;=\; \sup_a \eta(a) . \qquad (10.2.4)$$

Størrelsen

$$\boxed{\eta^*(w(\cdot)) \;=\; \sup_a \eta(a) . \qquad (10.2.5)}$$

vil blive benævnt Bayesnytten, og den tilsvarende optimale aktion a_0, bestemt ved (10.2.4), kaldes Bayesaktionen. Såfremt der ikke er tvivl om, hvilken apriorifordeling vi benytter, skriver vi blot η^*.

Da ovenstående bemærkning er central for den følgende teori, fremhæver vi den i

Sætning 10.2.1 *Beslutningstagerens optimale aktion er den, der maksimererer apriorinytten*

Lad et beslutningsproblem være givet ved $(\Theta, \mathcal{K}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$, hvor $u(\cdot,\cdot)$ er en nyttefunktion. Beslutningstagerens optimale valg, a_0, kan da bestemmes som løsning til

$$\eta(a_0) \;=\; \sup_{a \in \mathcal{A}} \;\eta(a)\;, \tag{10.2.6}$$

hvor

$$\eta(a_0) \;=\; \int \; u(\theta, a) w(\theta) \nu\{d\theta\} \tag{10.2.7}$$

angiver den forventede værdi af nytten ved at benytte aktionen a under apriorifordelingen $w(\theta)$.
Bevis:
Sætningen er som nævnt en triviel konsekvens af Sætning 9.2.2.

□

Vi vil i de følgende kapitler, medmindre andet udtrykkeligt fremhæves, antage, at gevinstfunktionen i et beslutningsproblem er givet som en nyttefunktion.

Ved en analytisk bestemmelse af beslutningstagerens Bayesaktion kan man ofte med fordel benytte

Sætning 10.2.2 ***Bayesløsningen ændres ikke ved addition af en funktion af θ til gevinstfunktionen***

Lad a_0 tilfredsstille (10.2.6) for et givet beslutningsproblem $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$. Da vil a_0 også være en optimal aktion for beslutningsproblemet givet ved $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$, hvor

$$u_1(\theta, a) \;=\; u(\theta, a) \;+\; k(\theta)\;, \tag{10.2.8}$$

for en vilkårlig, integrabel funktion $k(\cdot)$.
Bevis:
Indfører vi betegnelsen

$$\eta_1(a) \;=\; \int \; u_1(\theta, a) w(\theta) \nu\{d\theta\}\;,$$

finder vi

$$\eta_1(a) \;=\; \eta(a) \;+\; k\;, \tag{10.2.9}$$

hvor

$$k = \int k(\theta)w(\theta)\nu\{d\theta\} .$$

Idet a_0 maksimerer $\eta(a)$, er det klart, at a_0 også vil maksimere (10.2.9).

□

Sætter vi i (10.2.8) specielt $k(\theta) = -\tau(\theta)$, hvor $\tau(\theta)$ er den maksimale gevinst ved perfekt information, (10.1.1) finder vi

$$\eta_1(a) = -\int R(\theta, a)w(\theta)\nu\{d\theta\} ,$$

der, på nær fortegnet, angiver den forventede regret ved benyttelse af aktionen a under apriorifordelingen $w(\theta)$. Vi har således vist følgende

Korollar 10.2.1 ***Man kan lige så godt minimere den forventede regret***

Lad et beslutningsproblem være givet ved $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$. En optimal aktion for beslutningstageren kan da bestemmes som den aktion, der minimerer den forventede regret under apriorifordelingen.

□

Størrelsen

$$\boxed{I = \inf_a \int R(\theta, a)w(\theta)\nu\{d\theta\} \qquad (10.2.10)}$$

kaldes ofte den forventede værdi af perfekt information. Vi har

$$I = \int \sup_a u(\theta, a)w(\theta)\nu\{d\theta\} - \sup_a \int u(\theta, a)w(\theta)\nu\{d\theta\} ,$$

der netop udtrykker, at I er forskellen mellem den gennemsnitsgevinst, man kan opnå, når man handler optimalt under fuldstændig viden om θ, og den gennemsnitsgevinst, man kan opnå, når man handler optimalt uden fuld viden om θ. Beslutningstageren vil således maximalt "betale" I nytteenheder for at få oplyst den sande værdi af θ.

Vi vil i enkelte (abstrakte) beslutningssituationer operere med aktioner, der vælges i overensstemmelse med en sandsynlighedsfordeling, hvorfor vi introducerer dette begreb.

Definition 10.2.3 *Blandet aktion*

Lad $a_1, a_2, \ldots$ angive en række aktioner. Ved den blandede aktion $(a_1, a_2)_p$, hvor $0 \leq p \leq 1$, vil vi forstå den aktion, der fremkommer, når aktionen a_1 vælges med sandsynligheden p, og aktionen p_2 vælges med sandsynligheden $1 - p$. Tilsvarende vil vi med den blandede aktion

$$(a_1, a_2, \ldots)_{p_1, p_2, \ldots},$$

hvor $0 \leq p_i \leq 1$ og $\Sigma p_i = 1$, forstå den aktion, der fremkommer, når aktionen a_i vælges med sandsynligheden p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Såfremt mængden af aktioner er mere end tællelig, vil vi ligeledes angive en blandet aktion ved en sandsynlighedsfordeling på mængden af aktioner.

□

Mængden af blandede aktioner for beslutningstageren vil blive betegnet med $\mathcal{A}^*$. Udvidelsen af beslutningsproblemet til også at omfatte blandede aktioner har blandt andet til formål at sikre, at problemet kan behandles ved teorien for konvekse funktioner (dvs. som et lineært programmeringsproblem), som illustreret i det følgende.

Såfremt $u(\cdot, \cdot)$ er en nyttefunktion, defineret på $\theta \times \mathcal{A}$, kan funktionen ifølge Sætning 9.2.2 udvides til en nyttefunktion på $\theta \times \mathcal{A}^*$ ved

$$u(\theta, a) = \Sigma u(\theta, a_i) p_i \ , \quad a = (a_1, a_2, \ldots)_{p_1, p_2, \ldots}.$$

Mængden af beslutningstagerens blandede aktioner kan udtrykkes ved en (m-1)-dimensional simplex

$$\mathcal{A}^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0 \ , \ \Sigma x_i = 1\},$$

idet vi lader punktet med koordinaterne

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

svare til den blandede aktion, der med sandsynligheden x_i vælger aktionen a_i , $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sætter vi

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta(a_1), \eta(a_2), \ldots, \eta(a_m)) , \tag{10.2.11}$$

finder vi, at apriorinytten svarende til den blandede aktion $\mathbf{x}$ med

$$x_i = \mathsf{P}\,[a_i \text{ vælges}] , \quad i = 1, 2, \ldots, m ,$$

er $\boldsymbol{\eta}\mathbf{x}^T$, og apriorinytten svarende til den bedste blandede aktion fås da ved at maksimere

$$\sum_{j=1}^{m} \eta_j \, x_j \tag{10.2.12}$$

under betingelsen

$$x_j \geq 0 , \; j = 1, 2, \ldots, m \text{ og } \Sigma x_j = 1 . \tag{10.2.13}$$

Vi bemærker, at udtrykket (10.2.12) med betingelserne (10.2.13) netop definerer et lineært programmeringsproblem, hvor løsningen naturligvis er med sandsynligheden 1 at vælge den simple aktion, der medfører den største apriorinytte.

Indfører vi nyttematricen

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u(\theta_1, a_1) & u(\theta_1, a_2) & \ldots & u(\theta_1, a_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(\theta_k, a_1) & u(\theta_k, a_2) & \ldots & u(\theta_k, a_m) \end{pmatrix} \tag{10.2.14}$$

ser vi, at nytten ved at anvende den blandede strategi karakteriseret ved $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, når aprioritætheden er givet ved $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$, er

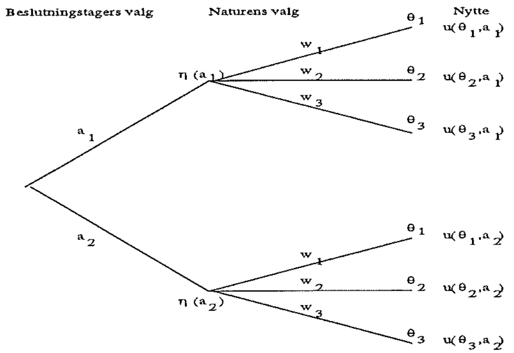
$$u_1(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = \mathbf{w} \, \mathbf{U} \, \mathbf{x}^T , \tag{10.2.15}$$

idet vi har

$$\eta = \mathbf{w} \, \mathbf{U} .$$

Udtrykket (10.2.15) beskriver nytten som en bilineær funktion af apriorifordelingen og beslutningstagerens aktion. Denne repræsentation er central for spilteoretiske overvejelser i beslutningsteorien.

Figur 10.3. Et beslutningstræ svarende til $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ og $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$, $w_1 = w(\theta_1)$, $w_2 = w(\theta_2)$ og $w_3 = w(\theta_3)$.



Vi skal i det følgende skitsere forskellige metoder til bestemmelse af beslutningstagerens Bayesaktion.

En yderst simpel metode er baseret på en beskrivelse af alle beslutningstagerens og alle naturens valgmuligheder i et beslutningstræ.

Et eksempel på et beslutningstræ er vist i Figur 10.3. I grafteorien benævnes et beslutningstræ blot et træ. Træets knudepunkter repræsenterer henholdsvis beslutningstagerens og naturens valg. Vi vælger at placere beslutningstagerens valg ved træets rod, selv om naturens valg måske i tidsmæssig henseende går forud for beslutningstagerens. Denne fremstilling muliggør en løsning af beslutningsproblemet ved succesivt at reducere træet fra top til rod. For enhver af beslutningstagerens aktioner kan vi nemlig repræsentere konsekvensen af aktionen ved apriorinytten svarende til denne aktion, hvor apriorinytten fås som et vejet gennemsnit af konsekvenserne af naturens valg med apriorisandsynlighederne som vægte.

Eksempel 10.2.2 *Aktioner for ejer af olierettigheder*

(Efter C. Jackson Grayson, Jr. Decisions under uncertainty. Drilling decisions by oil and gas operators. Harvard University, Boston (1960)).

Et oliefirma ejer olierettighederne til et område og overvejer nu, hvorvidt man skal forsøge en udvinding af den eventuelle olie. Firmaet ønsker at sammenligne aktionerne

a_1: undlad at bore,

a_2: påbegynd en boring på egen hånd,

a_3: påbegynd en boring med én ligeberettiget partner.

For simpelheds skyld vurderer man kun mulighederne

θ_1: ingen olie,

θ_2: 100 000 bbls kan udvindes,

θ_3: 200 000 bbls kan udvindes,

θ_4: 500 000 bbls kan udvindes,

θ_5: 1 000 000 bbls kan udvindes.

Firmaets geolog anslår, at sandsynlighederne for de fem muligheder er

θ	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
$w(\theta)$	.50	.20	.10	.07	.03

og endelig mener man, at den diskonterede indtægt i de 15 mulige situationer er som vist i Tabel 10.2.

I Figur 10.4 har vi vist beslutningstræet svarende til oliefirmaets valgmuligheder. Vi ser, at firmaet vil vælge den nederste gren i træet, at bore med en ligeberettiget partner. □

Såfremt parametermængden er endelig, kan den optimale aktion endvidere bestemmes ved en grafisk analyse af nyttemængden.

For et beslutningsproblem $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$, hvor $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ og $w(\theta_i) = w_i$,$i = 1, 2, \ldots, k$ indfører vi <u>nyttemængden</u>

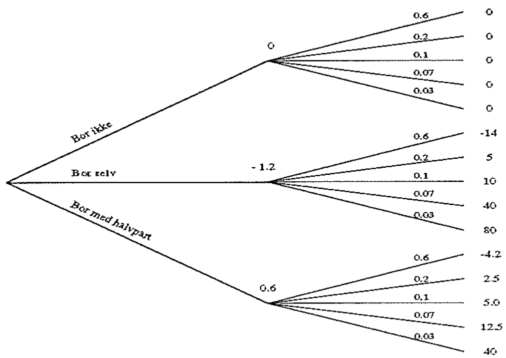
$$U = \{u(\theta, a) \mid (\theta, a) \in \Theta \times \mathcal{A}^*\}\,.$$

For enhver aktion $a \in \mathcal{A}^*$ vil nyttefunktion netop have k værdier svarende til de k mulige parameterværdier, og nyttefunktionens værdier svarende

Tabel 10.2. Den diskonterede indkomst og den tilsvarende nytteværdi ved alternative olieforekomster.

Oliemængde 100 000 bbls	Sands.	Indkomst 1000 $			Nytte		
		a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3
0	.60	0	-50	-25	0	-14	-4.2
1	.20	0	100	50	0	5	2.5
2	.10	0	200	100	0	10	5.0
5	.07	0	500	250	0	40	12.5
10	.03	0	1000	500	0	80	40.0
$\eta(a)$					0	-1.2	0.6

Figur 10.4. Beslutningstræet svarende til alternative aktioner for et olie-firma.



til aktionen a kan derfor repræsenteres ved et punkt i det k-dimensionale euklidiske rum med koordinaterne

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, a) = \big(u(\theta_1, a), u(\theta_1, a), \ldots, u(\theta_1, a)\big) . \tag{10.2.16}$$

Idet

$$u\big(\theta, (a_1, a_2)_p\big) = p\,u(\theta_1, a_1) + (1-p)u(\theta_1, a_2) \quad \text{for} \quad \theta \in \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$$

finder vi

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, (a_1, a_2)_p) = p\,\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, a_1) + (1-p)\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, a_2) ,$$

hvorfor vi har, at nyttemængden indeholder ethvert punkt på en linie imellem to nyttepunkter. Nyttemængden er altså konveks, og netop den mindste konvekse mængde, der indeholder nyttepunkterne svarende til de simple aktioner.

Ethvert punkt i nyttemængden repræsenterer nyttefunktionen svarende til en (eventuel blandet) aktion, og to aktioner, der giver anledning til samme nyttepunkt, er ækvivalente.

Apriorinytten $\eta(a)$ svarende til aktionen a under aprioritætheden $w(\cdot)$ er bestemt af

$$\eta(a) = \sum_{i=1}^{k} w_i u(\theta_i, a) = \mathbf{w}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, a) , \tag{10.2.17}$$

der viser, at $\eta(a)$ kan opfattes som det indre produkt imellem nyttevektoren svarende til a, (10.2.16) og vektoren

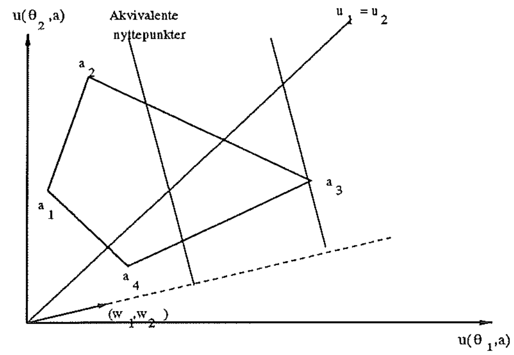
$$\mathbf{w} = (w(\theta_1), w(\theta_2), \ldots, w(\theta_k)) ,$$

der karakteriserer apriorifordelingen. Geometrisk kan vi opfatte det indre produkt som et udtryk for længden af projektionen af nyttevektoren $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, a)$ på apriorifordelingsvektoren $\mathbf{w}$. Såfremt det for to (eventuelt blandede) aktioner a_1 og a_2 gælder, at de tilsvarende nyttepunkter $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, a_1)$ og $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, a_2)$ ligger i en hyperplan vinkelret på vektoren $\mathbf{w}$, har vi altså af (10.2.17)

$$\eta(a_1) = \eta(a_2) ,$$

dvs. at de to aktioner fører til samme apriorinytte, hvorfor beslutningstageren vil anse de to aktioner for ækvivalente.

Figur 10.5. En geometrisk bestemmelse af beslutningstagerens optimale aktion for $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$. $w_1 = w(\theta_1)$, $w_2 = 1 - w_1$.



Alle aktioner, hvis nyttepunkter ligger i en normalplan til **w**, giver anledning til samme apriorinytte, hvorfor beslutningstageren i overensstemmelse med sit præferencemønster vil anse disse aktioner for ækvivalente. Den bedste aktion (eller ækvivalensklassen svarende til den bedste aktion) fås nu ved at forskyde normalplanen til **w** i retning af **w**, indtil planen netop tangerer nyttemængden. Vi har altså reglen:

Nyttepunktet svarende til Bayesaktionen kan bestemmes som det punkt på nyttemængdens øvre rand, hvor tangentplanen netop er vinkelret på $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$.

Lader vi **w** gennemløbe alle mulige apriorifordelinger, vil nyttepunktet svarende til Bayesaktionen tilsvarende gennemløbe nyttemængdens øvre rand.

I Figur 10.5 har vi illustreret den geometriske bestemmelse af Bayesaktionen for $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$. Vi bemærker, at normalplanet til **w** netop skærer vinkelhalveringslinien i punktet med koordinater $(\eta(a), \eta(a), \ldots, \eta(a))$.

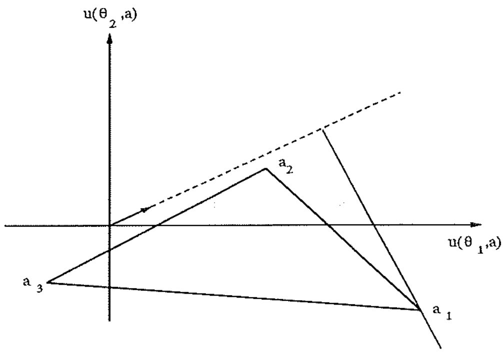
Eksempel 10.2.3 ***Grafisk bestemmelse af Bayesaktion***

Et mejeri, der fremstiller mælk i poser, har erfaret, at posepakkemaskinen ikke altid har held til at svejse poserne korrekt sammen efter påfyldningen. Normalt har ca. 0.1% af poserne defekte svejsninger, men jævnligt oplever mejeriet en produktion, hvor ca. 1% af poserne er defekte. Mejeriets statistikafdeling skønner, at i 66.7% af de sidste års produktion har defektprocenten for en dags produktion været 0.1, men i de resterende 33.3% af de undersøgte dagsproduktioner har defektprocenten været 1.

Mejeriets økonomiafdeling anslår nytteværdien ved at fortsætte som hidtil, installere en kontrolenhed, eller at opgive at føre posemælk til at være som anført i nedenstående tabel.

Defektprocent	a_1 Fortsæt med poser	a_2 Kontroller	a_3 Opgiv poser
θ_1: 0.1	100	50	-20
θ_2: 1.0	-30	20	-20

Figur 10.6. Nyttemængden svarende til mejeriets beslutningsproblem. $a_1 =$ Fortsæt uden ændring, $a_2 =$ Installer kontrolenhed, $a_3 =$ Opgiv posemælk. $w_1 = 0.67$, $w_2 = 0.33$.



Nyttemængden for beslutningsproblemet er vist i Figur 10.6. Vi ser, at mejeriet blandt de undersøgte aktioner vil foretrække aktion a_1, at fortsætte med at producere posemælk, men mejeriet burde nok vurdere, om det kan betale sig at underkaste posepakkemaskinen en grundig analyse. □

I de beslutningsproblemer, hvor nyttefunktionen er beskrevet ved et analytisk udtryk, og hvor aprioritætheden ligeledes er angivet ved et analytisk udtryk, vil apriorinytten $\eta(a)$ svarende til en aktion a kunne beskrives ved en funktion af a, der principielt er givet ved et analytisk udtryk, og bestemmelsen af den optimal aktion er reduceret til bestemmelsen af maksimumværdien af en kendt funktion.

De følgende sætninger illustrerer den analytiske bestemmelse af den optimale aktion i en række simple situationer.

Sætning 10.2.3 ***Avisdrengens problem***

Betragt et beslutningsproblem $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$ med

$$u(\theta, a) = \begin{cases} -b(a-\theta) & \text{for } \theta \leq a \\ -c(\theta - a) & \text{for } \theta > a, \end{cases}$$

hvor $b > 0$ og $c > 0$. Da er Bayesnytten η^* bestemt ved

$$\eta^* \;=\; -c(\mathsf{E}\,[\theta] - a_0) \;-\; (b+c)\{a_0 W(a_0) - \mu_1'(a_0)\}\;, \tag{10.2.18}$$

hvor $\mu_1'(\cdot)$ angiver det første ufuldstændige moment (omkring 0) i apriorifordelingen,

$$\mu_1'(a) \;=\; \int_{\theta \leq a} \theta w(\theta)\nu\{d\theta\}\;,$$

og hvor a_0 er bestemt som løsning til

$$W(a_0) \;=\; \frac{c}{b+c}\;, \tag{10.2.19}$$

såfremt θ kan antage reelle værdier, og til

$$W(a_0 - 1) \;<\; \frac{c}{b+c} \;\leq\; W(a_0)\;, \tag{10.2.20}$$

såfremt θ kun kan antage heltallige værdier, hvor $W(\cdot)$ angiver den kumulerede fordelingsfunktion svarende til apriorifordelingen.

Såfremt θ kan antage reelle værdier, kan Bayesnytten udtrykkes som

$$\eta^* \;=\; (b+c)\mu_1(a_0)\;, \tag{10.2.21}$$

hvor $\mu_1(\cdot)$ angiver det første ufuldstændige centrale moment i apriorifordelingen

$$\mu_1(a) \;=\; \int_{\theta \leq a} (\theta - \mathsf{E}\,[\theta]) w(\theta)\nu\{d\theta\}\;.$$

Bevis:
Vi finder udtrykket for $\eta(a)$

$$\begin{aligned}\eta(a) &= -b\int_{\theta\leq a}(a-\theta)w(\theta)\nu\{d\theta\} - c\int_{\theta>a}(\theta-a)w(\theta)\nu\{d\theta\}\\ &= -c\{\mathsf{E}[\theta]-a\} - (b+c)\{aW(a)-\mu_1'(a)\}\ ,\end{aligned}$$

Såfremt θ kan antage reelle værdier, kan vi differentiere $\eta(a)$ med hensyn til a, hvorved vi får

$$\eta'(a) = c - (b+c)W(a)\ ,$$

der umiddelbart fører til (10.2.19). Indsætter vi (10.2.19) i (10.2.18), får vi (10.2.21).

Såfremt θ kun kan antage heltallige værdier, finder vi af

$$\eta(a+1) - \eta(a) = c - (b+c)W(a)\ ,$$

at maksimumsværdien af $\eta(a)$ må antages for a bestemt ved (10.2.20), hvorved sætningen er bevist. □

Sætningen viser, at hvis det er c/b gange så dyrt at overvurdere θ som at undervurdere θ, da skal vi overvurdere b/c gange flere, end vi undervurderer værdien af θ.

Eksempel 10.2.4 ***Avisdrengens problem ved diskontering***

En virksomhed har et løbende salg af en bestemt vare. Salget udviser ingen sæsonvariation, og virksomheden vil derfor i sin lagerpolitik gå ud fra, at fordelingen af efterspørgselen ikke ændres med tiden.

For simpelheds skyld antager vi, at virksomheden opgør lagerbeholdningen af den pågældende vare med faste tidsmellemrum, fx én gang om måneden, og at virksomheden kun supplerer lageret til disse tidspunkter. Ved supplering af lageret ankommer de bestilte varer uden nævneværdig tidsforsinkelse til lageret, så virksomheden kan disponere over varen i det øjeblik, den er bestilt. Endelig antager vi, at virksomheden agter at fortsætte med at markedsføre den pågældende vare i så lang tid, at problemerne omkring lagerets nedtrapning ikke påvirker de umiddelbart forestående beslutninger.

Virksomhedens salgspris er S kr. pr. enhed, mens indkøbsprisen er C kr. pr. enhed. Endvidere kalkulerer virksomheden med en omkostning på T kr. pr. enhed, hvormed efterspørgselen i en periode overstiger lagerbeholdningen, og en lageromkostning på R kr. pr. enhed, der ligger på lager ved slutningen af en periode.

Såfremt virksomheden ved indgangen til den i'te periode har lagerbeholdningen x_i, og såfremt virksomheden for den i'te periode beordrer b_i enheder, mens efterspøgselen er θ_i enheder, finder vi gevinsten for den i'te periode

$$u_i^*(\theta_i, b_i; x_i) = \begin{cases} S\theta_i - Cb_i - R(x_i + b_i - \theta_i) & \text{for } \theta_i \leq b_i + x_i \\ S(b_i + x_i) - Cb_i - T(\theta_i - x_i - b_i) & \text{for } \theta_i > b_i + x_i, \end{cases}$$

hvor

$$x_i = \max(x_{i-1} + b_{i-1} - \theta_{i-1}, 0) .$$

Indfører vi

$$a_i = b_i + x_i \, , i = 1, 2, \ldots ,$$

kan vi omskrive gevinstfunktionen for den i'te periode

$$u_i(\theta_i, b_i; x_i) = \begin{cases} S\theta_i - Ca_i - R(a_i - \theta_i) & \text{for } \theta_i \leq a_i \\ Sa_i - Ca_i - T(\theta_i - a_i) & \text{for } \theta_i > a_i, \end{cases}$$

således at gevinstfunktionen ved valg af aktionen $a_1, a_2, \ldots$, når efterspørgselen er $\theta_1, \theta_2, \ldots$, er

$$u_0(\theta_1, \theta_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots; x_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u(\theta_i, a_i) + Cx_i}{(1+r)^i} \qquad (10.2.22)$$

hvor

$$x_i = \max(a_{i-1} - \theta_{i-1}, 0) ,$$

og hvor vi endvidere har tilbageskrevet gevinsterne ved hjælp af virksomhedens interne rentefod pr. periode, r.

Omskriver vi nu (10.2.22), får vi endelig

$$u_0(\theta_1, \theta_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots; x_1) = C \frac{x_1}{1+r} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u^*(\theta_i, a_i)}{(1+r)^i} \tag{10.2.23}$$

med

$$u^*(\theta, a) = u(\theta, a) + \frac{C}{1+r} \max(a - \theta, 0) ,$$

dvs.

$$u^*(\theta, a) = \begin{cases} S\theta - Ca + (a-\theta)(\frac{C}{1+r} - R) & \text{for } \theta \leq a \\ Sa - Ca - T(\theta - a) & \text{for } \theta > a, \end{cases} \tag{10.2.24}$$

Vi ser af (10.2.23), at beslutningstagerens problem ved begyndelsen af en periode er det samme for alle perioder, idet apriorifordelingen af θ antages at være uændret fra periode til periode.

Idet vi antager, at u_0 givet ved (10.2.23) er en nyttefunktion, ser vi, at virksomhedens optimale aktion a_0 ved begyndelsen af hver periode tilfredstiller

$$\eta(a_0) = \max_a \eta(a)$$

hvor

$$\eta(a) = \int u^*(\theta, a) w(\theta) \nu\{d\theta\}.$$

Vi ser at $u^*(\theta, a)$ er af formen (10.1.5), hvorfor regretfunktionen svarende til $u^*(\cdot, \cdot)$ er

$$R(\theta, a) = \begin{cases} \left(C \frac{r}{1+r} + R\right)(a - \theta) & \text{for } \theta \leq a \\ (S + T - C)(\theta - a) & \text{for } \theta > a \end{cases} \tag{10.2.25}$$

Vi kan derfor benytte Sætning 10.2.4, der viser, at minimum for

$$\int R(\theta, a) w(\theta) d\nu(\theta)$$

fås for a bestemt som løsning til

$$W(a-1) < \frac{S + T - C}{S + R + T - C/(1+r)} \leq W(a) ,$$

hvor $W(\cdot)$ angiver den kumulerede fordelingsfunktion svarende til apriorifordelingen.

Vi ser af udtrykket for regretfunktionen, at løsningen til beslutningstagerens problem afhænger af udgiften L ved overflødigt at lagre en enhed i en periode

$$L = C\frac{r}{1+r} + R\,,$$

og af tabet G ved ikke at have et tilstrækkeligt lager

$$G = S + T - C,$$

opgjort umiddelbart før en periodens begyndelse.

Såfremt efterspørgselen følger en P(25)-fordeling, finder vi for $R = 2,\ C = 4,\ S = 7,\ T = 1$ og $r = 0.01$, at den optimale lagerbeholdning ved starten af en periode er bestemt ved

$$\mathrm{P}(a-1;25) < \frac{4}{5.99} \leq \mathrm{P}(a;25).$$

Ved tabelopslag finder vi $a = 27$, d.v.s. såfremt lageret ved en periodes slutning består af $x = 12$ enheder, skal der bestilles 15 enheder til dækning af efterspørgselen i den kommende periode.

□

I Tabel 10.3 har vi angivet løsningen til (10.2.19) for en række almindelige apriorifordelinger. Desuden indeholder tabellen udtryk for Bayesnytten bestemt ved (10.2.21). Såfremt beslutningstagerens aktioner er karakteriseret ved heltallige værdier, bør den optimale aktion bestemmes under hensyntagen til (10.2.20), og i disse tilfælde findes Bayesnytten af (10.2.18). I disse tilfælde vil de tabellerede værdier dog være gode approximationer til Bayesnytten. Vi bemærker, at da det ufuldstændige centrale moment for de betragtede fordelinger på simpel måde kan udtrykkes ved den generaliserede tæthed, er udtrykket for η^* blot en simpel funktion af aprioritætheden.

Sætning 10.2.4 ***Skrotproblemet***

Betragt et beslutningsproblem $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$ med

$$u(\theta, a) = \begin{cases} -ba & \text{for } \theta \leq a \\ -b\theta - c & \text{for } \theta > a\,, \end{cases} \qquad (10.2.26)$$

hvor $b > 0$ og $c > 0$.

Bayesnytten η^* er da bestemt ved

$$\eta^* = -c - b\mathsf{E}\,[\theta] + (c - ba)W(a) + b\mu_1'(a)$$

hvor a angiver Bayesaktionen og hvor $\mu_1'(\cdot)$ angiver det første ufuldstændige moment (omkring 0) i apriorifordelingen,

$$\mu_1'(a) = \int_{\theta \leq a} \theta w(\theta)\nu\{d\theta\}\ ,$$

og $W(\cdot)$ angiver den kumulerede fordelingsfunktion svarende til apriorifordelingen.

Såfremt θ er kontinuert fordelt, vil a være en løsning til

$$\frac{w(a)}{W(a)} = \frac{b}{c}, \tag{10.2.27}$$

og såfremt θ er diskret fordelt, vil a være en løsning til

$$\frac{w(a)}{W(a-1)} > \frac{b}{c} \geq \frac{w(a+1)}{W(a)}. \tag{10.2.28}$$

Bevis:
Vi finder apriorinytten

$$\begin{aligned}
\eta(a) &= -baW(a) - b\int \theta > a\theta w(\theta)\nu\{d\theta\} - c\{1 - W(a)\} \\
&= -c - b\mathsf{E}\,[\theta] + (c - ba)W(a) + b\mu_1'(a). \qquad (10.2.29)
\end{aligned}$$

Såfremt θ er kontinuert fordelt, finder vi ved differentiation af (10.2.29) med hensyn til a

$$\eta'(a) = cw(a) - bW(a).$$

En nødvendig betingelse for, at $\eta(\cdot)$ har et lokalt maksimum i a_0, er nu

$$\frac{d\ln W(a)}{da} = \frac{w(a)}{W(a)} = \frac{b}{c}\ ,$$

der netop er (10.2.27). Betingelsen er imidlertid ikke tilstrækkelig, idet (10.2.27) i almindelighed tillader flere løsninger.

Såfremt imidlertid $w(a)$ eller $d \ln W(a)$ er monotont aftagende, vil (10.2.27) kun have én løsning.

Såfremt θ er diskret fordelt med heltallige værdier, vil apriorinytten (10.2.29) være en springfunktion med springpunkter i de heltallige værdier af a.

For en diskret fordeling af θ finder vi

$$\eta(a+1) - \eta(a) = cw(a+1) - bW(a). \tag{10.2.30}$$

Idet en nødvendig betingelse for at opnå et lokalt maksimum for $\eta(\cdot)$ ved benyttelse af aktionen a er

$$\eta(a-1) < \eta(a) \geq \eta(a+1),$$

finder vi ved benyttelse af (10.2.30) netop betingelsen (10.2.28).

□

Tabel 10.3. Bayesaktionen svarende til avisdrengens problem
$u(\theta,a) = -(k-c)(a-\theta)$ for $\theta \le a$; $u(\theta,a) = -c(\theta - a)$ ellers

Apriori-fordeling	Ligning til best. af optimal aktion a $P =$	Bayesnytte η^*
$\mathrm{Bet}(\alpha,\beta)$	$\mathrm{Bet}(a;\alpha,\beta)$	$-\frac{k\alpha}{\alpha+\beta}\binom{\alpha+\beta-1}{\beta-1} a^\alpha(1-a)^\beta$ for α og *beta* heltallige
$\mathrm{BPar}(\beta,\mu,\nu)$	$\mathrm{BPar}(a/\beta;1,\mu,\nu)$	$\frac{-k\mu\nu\beta}{(\mu+\nu)(\mu-1)(\nu+1)}(a/\beta)^\nu\left[\mu-(\mu-1)\frac{a}{\beta}\right]$ for $a<\beta$ $\frac{-k\mu\nu\beta}{(\mu+\nu)(\mu-1)(\nu+1)}(\beta/a)^\mu\left[(\nu+1)\frac{a}{\beta}-\nu\right]$
$\mathrm{G}(\alpha,\beta)$	$\mathrm{G}(a/\beta;\alpha,1)$	$-\frac{k\beta}{\Gamma\alpha}(a/\beta)^\alpha \exp(-a/\beta)$ for α helt.
$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\Phi((a-\mu)/\sigma)$	$-\frac{k\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp[-(a-\mu)^2/(2\sigma^2)]$
$\mathrm{NB}(r,p)$	$\mathrm{NB}(a;r,p)$	$-k(a+1)\binom{r+a}{a+1}p^r(1-p)^{a+1}$ *
$\mathrm{NPl}(r,\alpha,\beta)$	$\mathrm{NPl}(a;r,\alpha,\beta)$	$-\frac{k(\alpha+a)(r+a)}{\beta-\alpha-1}\binom{r+a-1}{a}\frac{\Gamma(\alpha+a)\Gamma(\beta-\alpha+r)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta+r+a)}$ *
$\mathrm{Par}(\beta,\alpha)$	$\mathrm{Par}(a/\beta;1,\alpha)$	$-\frac{k\alpha\beta}{\alpha-1}\left(1-\frac{\beta}{a}\right)(\beta/a)^{\alpha-1}$
$\mathrm{Pl}(n,\alpha,\beta)$	$\mathrm{Pl}(a;n,\alpha,\beta)$	$-\frac{k(n-a)(\alpha+a)}{\beta}\binom{n}{a}\frac{\Gamma(\alpha+a)\Gamma(\beta-\alpha+n-a)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta+n)}$ *
$\mathrm{RG}(\alpha,\beta)$	$\mathrm{RG}(a/\beta;\alpha,1)$	$-\frac{k\beta}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}(\beta/a)^{a-1}\exp(-\beta/a)$ for α helt.
$\mathrm{RBet}(\mu,\nu,\beta)$	$\mathrm{RBet}(a/\beta;\mu,\nu,1)$	$-\frac{k\nu\beta}{\mu-1}\binom{\mu+\nu-1}{\nu}(a/\beta)^\nu/1+a/\beta)^{\mu+\nu-1}$ for μ og ν helt.
$\mathrm{T}(\alpha,\mu,\beta)$	$\mathrm{T}((a-\mu)/\beta;\alpha,0,1)$	$-k\beta\,\frac{\alpha+t^2}{\alpha-1}\,\frac{\alpha^{\alpha/2}}{\mathrm{B}(1/2,\alpha/2)}(\alpha+t^2)^{-(\alpha+1)/2}$ med $t=(a-\mu)/\beta$

Eksempel 10.2.5 ***Skrotproblemet ved negativ binomial fordeling***

En virksomhed har modtaget en ordre på r enheder af en vare, der skal fremstilles specielt. Fremstillingsprocessen er imidlertid ret kompliceret, hvorfor det ofte hænder, at antallet af acceptable færdige enheder er mindre end det antal, man begyndte at producere. Det er ikke muligt midt i fremstillingen af et antal enheder pludselig at stoppe processen og erstatte defekte enheder med andre enheder, så det er nødvendigt ved produktionens start at producere flere end de r bestilte enheder. Problemet er nu at afgøre hvor mange enheder, man skal sætte i produktion for at opnå r acceptable enheder.

Lad prisen på råmaterialer plus de variable produktionsomkostninger udgøre C kr. pr. enhed, der sættes i produktion, og lad skrotværdien af en defekt eller overskydende enhed være R kr. med $R < C$. Såfremt der sættes $a + r$ enheder i produktion, og mindst r af disse er acceptable, opnås gevinsten

$$S - (C - R)a - Cr,$$

hvor S angiver den pris, kunden betaler for de r enheder.

Såfremt der sættes $a+r$ enheder i produktion, og der ikke findes r acceptable blandt disse, må der produceres yderligere en række enheder, indtil ordren kan tilfredsstilles. Omkostninger ved produktion af disse emner sættes til C kr. pr. emne plus en ekstraudgift på i alt L kr. der antages at være uafhængig af antallet af enheder. Lader vi $r + \theta$ betegne det antal enheder, der skal sættes i produktion for at opnå netop r acceptable enheder, finder vi gevinstfunktionen

$$u(\theta, a) = \begin{cases} S - (C - R)a - Cr & \text{for } \theta \leq a \\ S - (C - R)\theta - Cr - L & \text{for } \theta > a \end{cases}, \tag{10.2.31}$$

Vi antager nu, at antallet af defekte enheder θ i en produktion, der netop indeholder r acceptable enheder, kan beskrives ved en $\mathrm{NB}(r, p)$-fordelt stokastisk variabel. En begrundelse for antagelsen kan være, at fejlene optræder uafhængigt af hinanden, og at sandsynligheden for, at en enhed er acceptabel, er den samme for alle enheder, nemlig den kendte sandsynlighed p.

Ved benyttelse af Sætning 10.2.2 ser vi, at vi blot behøver at bestemme den aktion a, der maksimerer

$$\eta_1(a) = \int u_1(\theta, a) w(\theta) d\nu(\theta) ,$$

hvor

$$u(\theta, a) = \begin{cases} -(C-R)a & \text{for } \theta \leq a \\ -(C-R)\theta - L & \text{for } \theta > a\,, \end{cases}$$

og hvor $w(\theta)$ angiver tætheden for NB(r,p)-fordelingen.

Sætning 10.2.4 viser nu, at den optimale værdi af a er en løsning til

$$\frac{w(a)}{\sum_{x=0}^{a-1} w(x)} > \frac{C-R}{L} \geq \frac{w(a+1)}{\sum_{x=0}^{a} w(x)} \tag{10.2.32}$$

hvor

$$w(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x,$$

For at vurdere antallet af løsninger til (10.2.32) betragter vi funktionen

$$h(a) = \sum_{x=0}^{a-1} \frac{w(x)}{w(a)}.$$

Vi finder

$$w(a)\{h(a+1) - h(a)\} = \frac{a+1}{(1-p)(r+a)} \sum_{x=0}^{a} w(x) - \sum_{x=0}^{a-1} w(x),$$

d.v.s. at vi skal vurdere fortegnet for

$$h_1(a) = (a+1)\sum_{x=0}^{a} w(x) - \{r(1-p) + a(1-p)\}\sum_{x=0}^{a-1} w(x). \tag{10.2.33}$$

Ved benyttelse af relationen

$$r(1-p)w(x) = (x+1)w(x+1) - (1-p)xw(x)$$

finder vi

$$r(1-p)\sum_{x=0}^{a-1} w(x) = aw(a) + p\sum_{x=0}^{a-1} xw(x),$$

der ved indsættelse i (10.2.33) fører til

$$h_1(a) = w(a) + \sum_{x=0}^{a-1}\{p(a-x)+1\}w(x), \tag{10.2.34}$$

hvoraf vi ser, at $h_1(a) > 0$. Funktionen $h(a)$ er således voksende, og der er derfor kun én løsning til (10.2.32).

For $p = 0.3$, $r = 5$, $L = 9$ og $C - R = 4$, finder vi ved tabelopslag, at løsningen til (10.2.32) er $a = 5$, dvs. for at producere 5 acceptable enheder bør man iværksætte en produktion af 10 enheder. □

Sætning 10.2.5 ***Kvadratisk tab***

Betragt et beslutningsproblem $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$ med

$$u(\theta, a) = -k(\theta - a)^2, \tag{10.2.35}$$

hvor $k > 0$.

Såfremt a kan antage alle reelle værdier, er Bayesaktionen

$$a_0 = \mathsf{E}\,[\theta],$$

og Bayesnytten er

$$\eta^* = -kV[\theta].$$

Såfremt a kun kan antage heltallige værdier, er den optimale aktion bestemt af

$$\mathsf{E}\,[\theta] - 0.5 \le a_0 < \mathsf{E}\,[\theta] + 0.5,$$

og Bayesnytten er

$$\eta^* = -kV[\theta] - k(a_0 - \mathsf{E}\,[\theta])^2.$$

Bevis:
Sætningen følger umiddelbart af udtrykket for apriorinytten

$$\eta(a) = -k\int(\theta-a)^2 w(\theta)\nu\{d\theta\} = -kV[\theta] - k(a_0 - \mathsf{E}\,[\theta])^2.$$

□

Tabel 10.4. Bayesaktionen svarende til kvadratisk nytte, dvs.

$$u(\theta, a) = -(\theta - a)^2$$

og reelle aktioner.

Apriori-fordeling	Bayesaktion a_0	Bayesnytte
$\mathrm{Bet}(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{-a^2\beta}{\alpha(\alpha+\beta+1)}$
$\mathrm{BPar}(\beta, \mu, \nu)$	$\frac{\mu\nu\beta}{(\mu-1)(\nu+1)}$	$\frac{-a^2(\mu^2+\nu^2-2\mu+2\nu+1)}{\mu\nu(\mu-2)(\nu+2)}$
$\mathrm{Gam}(\alpha, \beta)$	$\alpha\beta$	$-\frac{a^2}{\alpha}$
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2
$\mathrm{NB}(r, p)$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$-\frac{a}{p}$
$\mathrm{NP}\ell(r, \alpha, \beta)$	$\frac{r\alpha}{\beta-\alpha-1}$	$\frac{-a^2(\beta-1)(r+\beta-\alpha-1)}{r\alpha(\beta-\alpha-2)}$
$\mathrm{Par}(\beta, \alpha)$	$\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$	$\frac{-a^2}{\alpha(\alpha-2)}$
$\mathrm{P}\ell(n, \alpha, \beta)$	$\frac{n\alpha}{\beta}$	$\frac{-a^2(n+\beta)(\beta-\alpha)}{n\alpha(\beta+1)}$
$\mathrm{RBet}(\mu, \nu, \beta)$	$\frac{\nu\beta}{\mu-1}$	$\frac{-a^2(\nu+\mu-1)}{\nu(\mu-2)}$
$\mathrm{RGam}(\alpha, \beta)$	$\frac{\beta}{\alpha-1}$	$\frac{-a^2}{\alpha-2}$
$\mathrm{T}(\alpha, \mu, \beta)$	μ	$\frac{-\beta^2\alpha}{\alpha-2}$

I Tabel 10.4 har vi angivet Bayesaktionen under kvadratisk nytte, samt den tilsvarende Bayesnytte for en række simple apriorifordelinger.

Eksempel 10.2.6 ***Kvadratisk nytte.***

Ved montering af en maskindel er det af betydning, at de enkelte komponenter er nøjagtigt justerede. Specielt er det væsentligt, at en bestemt aksel, der indgår i opstillingen, har en længde, der svarer nøje til det benyttede akselhus. Såfremt aksel og akselhus ikke passer sammen, må der foretages en manuel finjustering, der er tidsrøvende. Det skønnes, at den tid, der benyttes til finjusteringen, er proportional med den kvadrerede forskel på længden af aksel og akselhus.

Såfremt akselen har længden θ mm, og der benyttes et akselhus af længden a mm, vil tabet i forhold til den korrekte længdekonstellation vlre $k(\theta - a)^2$, hvor k angiver ekstraudgiften i kr. pr. mm^2.

Idet det vides, at aksellængderne i mm for en given produktion kan beskrives ved en $G(\alpha, \beta)$-fordelt stokastisk variabel, finder vi, at det optimale valg af længde op akselhuset er $a = \beta\alpha$ mm, og at den tilsvarende nytte (i forhold til den korrekte længdekonstellation) er

$$\eta^* = -k\beta^2\alpha.$$

Såfremt vi i stedet havde målt aksellængderne i cm, vil tabet i forhold til den korrekte konstellation være

$$\frac{1}{100}k(\theta' - a')^2,$$

hvor aksellængden θ' i cm kan beskrives ved en $\mathrm{Gam}(\alpha, \frac{\beta}{10})$-fordelt variabel. Den optimale aktion er da $a' = \frac{\alpha\beta}{10}$cm, og Bayesnytten er, som før,

$$\eta^* = -k\beta^2\alpha.$$

Vi siger, at problemet er invariant under skalatransformationer. □

Resultaterne i Sætning 10.2.3 og 10.2.5 kan for normalfordelingens vedkommende sammenfattes i nedenstående mere generelle resultat.

Sætning 10.2.6 ***Generalisering af avisdrengens problem for normaltfordelte parameterværdier***

Betragt et beslutningsproblem $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$ med

$$u(\theta, a) = \begin{cases} -\ell_1(a-\theta)^{\nu_1} & \text{for } \theta \leq a \\ -\ell_2(\theta-a)^{\nu_2} & \text{for } \theta > a, \end{cases} \tag{10.2.36}$$

hvor $\nu_1 > 0$ og $\nu_2 > 0$.

Såfremt $\theta \in \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, vil Bayesaktionen a_0 være $a_0 = \mu + \sigma z_0$, hvor z_0 er løsning til

$$\frac{\nu_1 m_{\nu_1 - 1}(-z)}{\nu_2 m_{\nu_2 - 1}(z)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\sigma^{\nu_2 - \nu_1}, \tag{10.2.37}$$

og Bayesnytten er

$$\eta^* = -\sigma^{\nu_1}\ell_1 m_{\nu_1}(-z_0) - \sigma^{\nu_2}\ell_2 m_{\nu_2}(z_0) \tag{10.2.38}$$

hvor $m_\nu(\cdot)$ angiver det ufuldstændige moment af ν'te orden

$$m_\nu(z) = \int_z^\infty (t-z)^\nu \varphi(t)dt \tag{10.2.39}$$

Bevis:
Vi finder, at apriorinytten ved anvendelse af aktion a er

$$\begin{aligned} \eta(a) &= -\frac{1}{\sigma}\ell_1 \int_{-\infty}^{a} (a-\theta)^{\nu_1}\varphi\left(\tfrac{\theta-\mu}{\sigma}\right) d\theta - \tfrac{1}{\sigma}\ell_2 \int_a^\infty (\theta-a)^{\nu_2}\varphi\left(\tfrac{\theta-\mu}{\sigma}\right) d\theta \\ &= -\sigma^{\nu_1}\ell_1 m_{\nu_1}\left(-\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \sigma^{\nu_2}\ell_2 m_{\nu_2}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Idet

$$m'_\nu(z) = -\nu m_{\nu-1}(z) \qquad \text{for } \nu > 0,$$

finder vi, at $\eta'(a) = 0$ for $a = \mu + \sigma z_0$, hvor z_0 er bestemt ved (10.2.37), og at $\eta(\cdot)$ netop har et globalt maksimum for denne værdi af a.

Ved indsættelse af $a = \mu + \sigma z_0$ i udtrykket for $\eta(\cdot)$ finder vi netop (10.2.38).
□

Bemærkning 1 *Ufuldstændige momenter i normalfordelingen*

For at lette bestemmelsen af $m_\nu(z)$ anfører vi, at

$$m_0(z) = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

og

$$m_1(z) = \int_z^\infty t\varphi(t)dt - zm_0(z) = \varphi(z) - zm_0(z).$$

Generelt finder vi ved delt integration for $\nu \geq 0$

$$m_\nu(z) = \frac{1}{\nu+1} m_{\nu+2}(z) + \frac{z}{\nu+1} m_{\nu+1}(z),$$

hvorfor

$$m_{\nu+1}(z) = \nu m_{\nu-1}(z) - zm_\nu(z) \qquad \text{for } \nu \geq 0 .$$

Vi kan således udtrykke $m_\nu(z)$ ved tæthed og fordelingsfunktion for den normale fordeling:

$$\begin{aligned}
m_1(z) &= 1 - \Phi(z) \\
m_2(z) &= \varphi(z) - z(1 - \Phi(z)) \\
m_3(z) &= -z\varphi(z) + (1 + z^2)(1 - \Phi(z)) \\
m_4(z) &= (2 + z^2)\varphi(z) - (3z + z^3)(1 - \Phi(z)) \\
m_5(z) &= (8 + 9z^2 + z^4)\varphi(z) - (15z + 10z^3 + z^5)(1 - \Phi(z)).
\end{aligned}$$

□

De foregående generelle resultater omhandlede situationer, hvor mængden af beslutningstagerens aktioner var uendelig stor. Den sidste situation, vi vil behandle, er den simple situation, hvor beslutningstageren blot ønsker at vælge mellem to aktioner. Vi indskrænker os til at betragte den mest almindelige situation, nemlig den, hvor nytten afhænger lineært af parameteren.

Sætning 10.2.7 *Tovalgsproblem med lineær gevinst*

Betragt et beslutningsproblem $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$ med

$$u(\theta, a) = \begin{cases} A + B\theta & \text{for } a = a_1 \\ C + D\theta & \text{for } a = a_2 \, , \end{cases} \tag{10.2.40}$$

hvor $B < D$.

Lad $\theta = \dfrac{A-C}{D-B}$.

Bayesaktionen a_0 er da givet ved

$$a_0 = \begin{cases} a_1 & \text{hvis } \mathsf{E}\,[\theta] < \theta_0 \\ a_2 & \text{hvis } \mathsf{E}\,[\theta] > \theta_0 \,, \end{cases} \tag{10.2.41}$$

og Bayesnytten er

$$a_0 = \begin{cases} A + B\mathsf{E}\,[\theta] & \text{hvis } \mathsf{E}\,[\theta] < \theta_0 \\ C + D\mathsf{E}\,[\theta] & \text{hvis } \mathsf{E}\,[\theta] > \theta_0. \end{cases}$$

Bevis:
Vi har

$$u(\theta, a_1) \lessgtr u(\theta, a_2) \qquad \text{for} \qquad \theta \lessgtr \theta_0,$$

og endvidere ser vi, at

$$\eta(a) = u(\mathsf{E}\,[\theta], a), \tag{10.2.42}$$

hvorfor vi finder

$$\eta(a_1) \lessgtr \eta(a_2) \qquad \text{for} \qquad \mathsf{E}\,[\theta] \lessgtr \theta_0,$$

der netop fører til (10.2.41). Bayesnytten fås da direkte af (10.2.42). □

Regretfunktionen svarende til (10.2.40) er

$$R(\theta, a_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } \theta \le \theta_0 \\ -(A-C) + (D-B)\theta & \text{for } \theta > \theta_0 \,, \end{cases}$$

$$R(\theta, a_2) = \begin{cases} (A-C) - (D-B)\theta & \text{for } \theta \le \theta_0 \\ 0 & \text{for } \theta > \theta_0 \,, \end{cases}$$

der kan udtrykkes ved følgende skema

$R(\theta, a)$

	$a = a_1$	$a = a_2$
$\theta \le \theta_0$	0	$(D-B)(\theta_0 - \theta)$
$\theta > \theta_0$	$(D-B)(\theta - \theta_0)$	0

Vi har således sepcielt af Sætning 10.2.7, at såfremt nyttefunktionen er givet ved

$$u(\theta, a_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ -(\theta_0 - \theta) & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

og

$$u(\theta, a_2) = \begin{cases} -(\theta_0 - \theta) & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ 0 & \text{for } \theta > \theta_0 \ , \end{cases}$$

da er den optimale aktion at vælge a_1, såfremt $\mathsf{E}\,[\theta] \leq \theta_0$, og at vælge a_2 ellers.

I Tabel 10.5 har vi angivet den optimale aktion i et tovalgsproblem med lineær nytte for en række apriorifordelinger.

For et beslutningsproblem med to aktioner og en lineær gevinstfunktion

$$u(\theta, a) = \begin{cases} A + B\theta & \text{for } a = a_1 \\ C + D\theta & \text{for } a = a_2 \ , \end{cases}$$

hvor $B < D$, finder vi den forventede gevinst under fuld information

$$\begin{aligned} \int \tau(\theta) w(\theta) \nu\{d\theta\} &= \int_{\theta \leq \theta_0} (A + B\theta) w(\theta) \nu\{d\theta\} + \int_{\theta > \theta_0} (C + D\theta) w(\theta) \nu\{d\theta\} \\ &= C + D\mathsf{E}\,[\theta] + (D - B)\{\theta_0 W(\theta_0) - \mu_1'(\theta_0)\} \ , \end{aligned}$$

hvor $\mu_1'(\cdot)$ angiver det første ufuldstændige moment (omkring 0) i apriorifordelingen,

$$\mu_1'(a) = \int_{\theta \leq a} \theta w(\theta) \nu\{d\theta\} \ ,$$

Såfremt $\mathsf{E}\,[\theta] > \theta_0$, finder vi altså den forventede værdi af fuld information

$$(D - B)\{\theta_0 W(\theta_0) - \mu_1'(\theta_0)\},$$

og for $\mathsf{E}\,[\theta] < \theta_0$, er den forventede værdi af fuld information

$$(D - B)\{\theta_0(1 - W(\theta_0)) + \mu_1'(\theta_0) - \mathsf{E}\,[\theta]\}.$$

Eksempel 10.2.7 ***Eksempel på tovalgsproblem***

Tabel 10.5. Den optimale aktion ved tovalgsproblemer med lineær nytte

$$\begin{aligned} u(\theta, a_1) &= A + B\theta \\ u(\theta, a_2) &= C + D\theta \end{aligned}$$

hvor $B < D$.
Ligevægtsniveauet er bestemt af $\theta_0 = (A-C)/(D-B)$.

Apriorifordeling	E[θ]	Betingelse for at vælge a_1
$\mathrm{Bet}(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\theta_0}{1-\theta_0}$
$\mathrm{BPar}(\beta, \mu, \nu)$	$\frac{\mu\nu\beta}{(\mu-1)(\nu+1)}$	$\frac{\mu\nu}{(\mu-1)(\nu+1)} < \frac{\theta_0}{\beta}$
$\mathrm{G}(\alpha, \beta)$	$\alpha\beta$	$\alpha < \frac{\theta_0}{\beta}$
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	μ	$\mu < \theta_0$
$\mathrm{NB}(r, p)$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$p > \frac{r}{r+\theta_0}$
$\mathrm{NP}\ell(r, \alpha, \beta)$	$\frac{r\alpha}{\beta-\alpha-1}$	$\frac{r\alpha}{\beta-\alpha-1} < \theta_0$
$\mathrm{Par}(\beta, \alpha)$	$\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$	$\frac{\alpha}{\alpha-1} < \frac{\theta_0}{\beta}$
$\mathrm{P}\ell(n, \alpha, \beta)$	$\frac{n\alpha}{\beta}$	$\frac{n\alpha}{\beta} < \theta_0$
$\mathrm{RBet}(\mu, \nu, \beta)$	$\frac{\nu\beta}{\mu-1}$	$\frac{\nu}{\mu-1} < \frac{\theta_0}{\beta}$
$\mathrm{RGam}(\alpha, \beta)$	$\frac{\beta}{\alpha-1}$	$\alpha > \frac{\beta}{\theta_0} + 1$
$\mathrm{T}(\alpha, \mu, \beta)$	μ	$\mu < \theta_0$

En virksomhed producerer en bestemt vare i serier på N enheder. Efter produktionen underkastes hver serie total inspektion, og defekte enheder sorteres fra og kasseres. Det vides, at antallet af defekte i en serie på N enheder ved de sidste mange produktioner har kunnet beskrives ved en $P\ell(\mathrm{N},\alpha,\beta)$-fordelt variabel. Imidlertid overvejer man, om man skal rejustere hele produktionsprocessen, hvorved man vil kunne opnå, at det forventede defektantal i en serie på N enheder reduceres til $N\frac{\alpha}{2\beta}$.

Virksomhedens salgspris pr. emne er S kr. og produktionsomkostningerne pr. emne sættes til P kr., således at virksomhedens gevinst ved produktion af et parti på N enheder med θ defekte er

$$u(\theta) = N(S-P) - S\theta\ .$$

Den forventede fortjenste for et parti, såfremt processen ikke justeres, er da

$$\eta(a_1) = N(S-P) - \frac{\alpha}{\beta}NS.$$

Såfremt processen justeres, påføres hvert emne en yderligere produktionsudgift på J kr., således at vi finder den forventede gevinst

$$\eta(a_2) = N(S-P-J) - NS\frac{\alpha}{2\beta}.$$

Vi finder $\eta(a_2) > \eta(a_1)$ for $\alpha > \frac{2\beta J}{S}$, d.v.s. såfremt justeringsudgiften J er mindre end $\frac{\alpha S}{2\beta}$, kan det betale sig at udføre justeringen. □

10.3 Beslutning under usikkerhed

Traditionelt har man i beslutningsteorien også forsøgt at behandle beslutningsproblemer, hvor beslutningstageren ikke ønsker eksplicit at basere sin beslutning på en vurdering af chancerne for forekomsten af de forskellige konsekvenser. Vi skal i dette afsnit belyse nogle af de principper, der har været foreslået til sammenligning af aktioner i sådanne tilfælde. Det viser sig i øvrigt, at selv om beslutningstageren ikke eksplicit vurderer chancerne, svarer hendes valg af aktion dog til en implicit vurdering af chancerne for, at aktionen resulterer i de givne konsekvenser.

Såfremt et beslutningsproblem er givet ved triplet $(\Theta, \mathcal{A}, , u(\cdot,\cdot), w(\cdot))$, og beslutningstageren ikke ønsker at inddrage en stokastisk apriorividen om parameteren θ, siger vi, at hun træffer en beslutning <u>under usikkerhed</u>.

Blandt de principper, der er foreslået til sammenligning af aktioner ved beslutning under usikkerhed, vil vi specielt behandle <u>maximinprincippet</u>. Dette princip foreslår, at man vurderer en aksion a ved den minimale gevinst, man kan opnå ved at benytte aktionen. Indfører vi betegnelsen for den minimale gevinst

$$\boxed{\rho(a) = \inf_{\theta \in \Theta} u(\theta, a), \qquad (10.3.1)}$$

vil vi ifølge maximinprincippet således foretrække a_1 for a_2, såfremt $\rho(a_2) < \rho(a_1)$, og en optimal aktion er derfor en aktion a_0, der tilfredsstiller

$$\rho(a_0) = \sup_{a \in \mathcal{A}} \rho(a). \qquad (10.3.2)$$

Maximingevinsten benævnes med

$$\boxed{\rho^* = \sup_{a \in \mathcal{A}} \rho(a). \qquad (10.3.3)}$$

Maximinprincippet beskrives ofte som et pessimistisk princip, idet det foreskriver beslutningstageren at disponere, som om den værst tænkelige mulighed vil indtræffe. Vi finder således ved at betragte den i Figur 10.1 skitserede beslutningssituationen, at selv om aktion 3 giver en langt større gevinst end aktion 2 for de fleste værdier af parameterne θ, vil den maximinimale aktion alligevel være aktion 2, idet en beslutningstager, der slavisk følger maximinprincippet, vil lægge vægt på, at der findes en værdi af θ, for hvilken $u(\theta, 3) < u(\theta, 2)$.

Eksempel 10.3.1 *Maximinløsning for skrotproblemet*

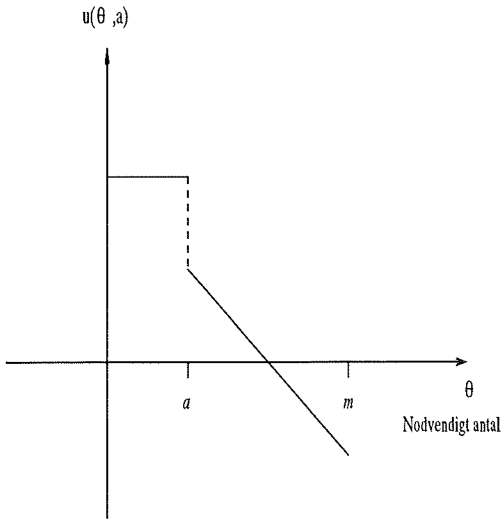
Vi betragter atter den situation, vi behandlede i Eksempel 10.2.1. Gevinstfunktionen for skrotproblemet er givet ved

$$u(\theta, a) = \begin{cases} Q - Ca + R(a - w) & \text{for } \theta \le a \\ Q - C\theta + R(\theta - w) - V & \text{for } a < \theta \le m \end{cases},$$

hvor m angiver det maksimale antal enheder, det overhovedet vil være nødvendigt at producere for at opnå w acceptable enheder.

Figur 10.7 viser en skitse af gevinstfunktionen som funktion af θ svarende til en givet værdi af a. Vi ser, at så længe antallet af nødvendige enheder ikke overstiger antallet af producerede enheder, vil gevinsten være uafhængig af antallet af nødvendige enheder, idet skrotværdien er den samme for en god og en dårlig enhed, men så snart antallet af nødvendige enheder overstiger det producerede antal, vil gevinsten aftage, jo flere enheder det er nødvendigt at producere.

Figur 10.7. Gevinsten ved produktion af a enheder som funtion af det nødvendige minimale antal producerede enheder.



For en given værdi af $a < m$ finder vi, at den minimale gevinst opnås for $\theta = m$, hvorfor vi har

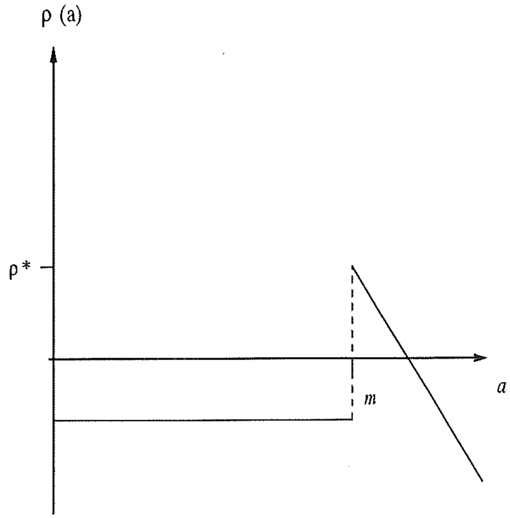
$$\rho(a) = Q - Cm + R(m - w) - V ,$$

mens vi for $a \geq m$ finder

$$\rho(a) = Q - Ca + R(a - w).$$

Forløbet af $\rho(a)$ er vist i Figur 10.8. Vi ser, at den største minimale gevinst opnås for $a = m$, d.v.s. at maximinprincippet fører til, at man skal producere så mange enheder i første serie, at man er helt sikker på at producere w fejlfrie enheder.

Figur 10.8. Den minimale gevinst ved en given startproduktion som funktion af startproduktionens størrelse.



Vi bemærker, at såfremt virksomheden ikke havde været i stand til at specificere det maksimale, nødvendige antal enheder, m, ville der ikke eksistere en maximinløsning til problemet. Såfremt nemlig θ kan blive vilkårligt stor (og gevinstfunktionen er givet ved (10.2.1) for alle værdier af θ), da vil den minimale nytte kunne blive vilkårligt lille, blot θ er stor nok,og ligegyldigt hvor stor en startproduktion a, man vælger, vil man kunne risikere, at den er for lille.

□

For yderligere at belyse maximinprincippet vil vi betragte en situation, hvor beslutningstageren konkurrerer med en modstander om at opnå en gevinst. Vi antager, at beslutningstageren har mulighed for at anvende en aktion $a \in \mathcal{A}$, og hendes modstander kan vælge en aktion $\theta \in \Theta$. Når begge parter har valgt en aktion, modtager beslutningstageren gevinsten $u(\theta, a)$, og modstanderen får gevinsten $K - u(\theta, a)$, d.v.s. at de to parter har strengt modsatte interesser. Selv om de to parter begge optræder både som beslutningstager og modstander, vil vi i det følgende af hensyn til identifikationen altid kalde den ene part <u>beslutningstageren</u> og den anden part <u>modstanderen</u>.

Den problemstilling, vi her berører, er hovedemne for <u>spilteorien</u>, hvortil læseren henvises for en yderligere uddybning.

Såfremt beslutningstageren benytter aktionen a, vil hun være sikker på mindst at modtage gevinsten $\rho(a)$ bestemt ved (10.3.1). Vi kan kalde $\rho(a)$ for beslutningstagerens <u>sikkerhedsniveau</u> ved anvendelse af aktionen a. Den største gevinst, beslutningstageren kan være <u>sikker p at modtage</u>, er da

$$\rho^* = \sup_{a \in \mathcal{A}} \rho(a). \tag{10.3.4}$$

hvis hun vælger en aktion a således, at $\rho(a) = \rho^*$.

Tilsvarende vil modstanderen ved anvendelse af aktionen θ have sikkerhedsniveauet $K - \tau(\theta)$, hvor $\tau(\theta)$ er givet ved (10.1.1), og den største gevinst, hun kan være sikker på at modtage, er $K - \tau^*$, hvor

$$\tau^* = \inf_{\theta} \tau(\theta). \tag{10.3.5}$$

Denne gevinst opnås, hvis hun vælger en aktion θ, der tilfredsstiller $\tau(\theta) = \tau^*$.

Idet

$$\rho(a) \leq u(\theta, a) \leq \tau(\theta) \qquad \text{for} \qquad (\theta, a) \in \Theta \times \mathcal{A},$$

finder vi

$$\rho^* \leq \tau^*. \tag{10.3.6}$$

Såfremt nu $\rho^* = \tau^*$, ser vi, at ingen aktion a kan <u>sikre</u> beslutningstageren en gevinst, der overstiger ρ^*; analogt er der ingen aktion θ, der kan <u>sikre</u> modstanderen en gevinst, der er større end $K - \rho^*$, og begge parter kan faktisk opnå denne maksimale sikre gevinst. Yderligere finder vi, at beslutningstagerens maximinaktion er den bedste aktion, såfremt modstanderen

Tabel 10.6. Den skønnede nettofortjeneste $u(\theta, a)$ for en virksomhed under de mulige valg af salgskampagne for virksomheden og dens konkurrent.

Konkurrentens valg	Virksomhedens valg a_1	a_2	a_3	a_4	Bedste valg	$\tau(\theta)$
θ_1	12	$\boxed{-6}$	-1	10	a_1	12
θ_2	-3	-3	$\boxed{-2}$	-2	a_3, a_4	-2
θ_3	$\boxed{-6}$	2	-1	$\boxed{-4}$	a_2	2
θ_4	-4	14	-1	19	a_4	19
Bedste valg	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3		
$\rho(a)$	-6	-6	-2	-4		

vælger at maksimere sit sikkerhedsniveau. I en spilteoretisk formulering siger man, at gevinstfunktionen har et sadelpunkt, og spillet mellem beslutningstager og modstander siges at have en værdi, ρ^*. Vi skal senere i afsnittet diskutere eksistensen af et sadelpunkt, men først vil vi belyse maximinprincippet i et par eksempler, et konstrueret og et mere realistisk.

Eksempel 10.3.2 *Bestemmelse af sikkerhedsniveau*

Et givet marked beherskes i det væsentlige af to konkurrerende virksomheder. Idet vi for simpelheds skyld antager, at det potentielle marked er fast, stræber begge virksomheder efter at erobre en markedsandel fra modparten. Ved planlægning af en salgs- og reklamekampagne skønner virksomhed I, at der er fire forskellige kampagnemuligheder, a_1, a_2, a_3 og a_4, og at virksomhed II essentielt har de samme fire muligheder, nu blot benævnt $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ og θ_4. Fremgangen i nettofortjeneste for virksomhed I, såfremt virksomheden vælger kampagnen a_j, $j = 1, 2, 3, 4$, og såfremt konkurrenten vælger kampagnen θ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, skønnes af virksomheden at være som angivet i Tabel 10.6.

Såfremt virksomheden kendte konkurrentens kampagnevalg, ville man vælge den aktion, der giver firmaet størst fortjeneste under hensyntagen til konkurrentens valg. Disse aktioner er ligeledes angivet i Tabel 10.6.

Problemet er imidlertid, at virksomheden ikke kender konkurrentens valg, og man forsøger derfor at analysere konkurrentens situation.

Idet man forestiller sig, at konkurrenten har stort set de samme produktions- og afsætningsmuligheder, som virksomheden selv har, anslår man, at konkurrentens gevinstfunktion er givet ved $K - u(\theta, a)$, hvor $u(\theta, a)$ er givet i Tabel 10.6. Under disse antagelser vil konkurrentens bedste valg valg, såfremt konkurrenten kendte virksomhedens kampagnevalg, være den aktion, der giver konkurrenten størt fortjeneste under hensyntagen til virksomhedens valg. Konkurrentens bedste valg bestemmer således virksomhedens sikkerhedsniveau $\rho(a)$, og tilsvarende konkurrentens sikkerhedsniveau $K - \tau(\theta)$ bestemt af virksomhedens bedste valg.

Vi ser nu, at såfremt virksomheden vælger kampagnen a_3, vil virksomheden være sikker på mindst at få fortjenesten -2, og ingen af de øvrige mulige kampagner kan garantere virksomheden denne nettofortjeneste. På analog måde finder vi, at kampagnen θ_2 sikrer konkurrenten en fortjeneste, der er mindst $K + 2$, og ingen af konkurrentens øvrige kampagner kan garantere hende en så høj nettofortjeneste.

Vi bemærker yderligere, at de to kampagner θ_2 og a_3 giver anledning til en ligevægtssituation, idet virksomheden ville fastholde valget af a_3, selv hvis den fik oplyst, at konkurrenten havde valgt θ_2, og tilsvarende ville konkurrenten fastholde valget af θ_2, selv hvis hun fik oplyst, at virksomheden havde valgt a_3.

Man kan derfor forestille sig, at virksomheden vælger kampagnen a_3,

1. fordi den maksimerer virksomhedens sikkerhedsniveau,
2. fordi den er det bedste valg, såfremt konkurrenten vælger at maksimere sit sikkerhedsniveau.

□

Eksempel 10.3.3 ***Bestemmelse af sikkerhedsniveau for militær beslutning***

(Se O.G. Haywod Jr. (1954)).

Under Anden Verdenskrigs kampe om Ny Guinea syntes det sikkert, at japanerne ville overføre tropper fra Rabaul på østsiden af New Britain til Lae, der ligger på Ny Guinea, vest for New Britain. Japanerne kunne enten

Tabel 10.7. General Kenney's vurdering af antallet af bombedøgn for de mulige konvoj- og recognosceringsruter.

Konvojrute	Recognosceringsrute	
	Nordlig	Sydlig
Nordlig	2	1
Sydlig	2	3

sejle tropperne nord om øen, hvor vejret som regel var usigtbart, eller syd om øen, hvor sigtbarheden oftest var god. Sejltiden var i begge tilfælde tre dage.

Den amerikanske øverstkommanderende, general Kenney, kunne tilsvarende sende størstedelen af sine recognosceringsfly enten nord om øen eller syd om øen. Efter at konvojen var blevet opdaget, ville den kunne beskydes indtil ankomsten til Lae. General Kenney vurderede konsekvenserne af de fire mulige kombinationer af konvoj- og recognosceringsfly som angivet i Tabel 10.7.

Vi ser, at såfremt general Kenney ønsker at maksimere det minimale antal døgn, konvojen kan bombes, vil han starte recognosceringen ad den nordlige rute, og tilsvarende vil japanerne, såfremt de ønsker at minimere det maksimale antal døgn, konvojen kan udsættes for bombning, vælge at sejle ad den nordlige rute.

Begge parter valgte den nordlige rute, og konvojen led svære tab. □

Det er karakteristisk for eksemplerne, at gevinstfunktionen i begge tilfælde havde et sadelpunkt, og at beslutningstagerens maximinaktion derfor netop var den bedste aktion over for modstanderens minimaxaktion (nemlig den blandt modstanderens aktioner, der maksimerer modstanderens sikkerhedsniveau, $K - \tau(\theta)$, eller, anderledes udtrykt, den aktion, der minimerer modstanderens maksimale tab). Det kan vises, at disse egenskaber overføres til en stor klasse af spil mellem to modstandere, der har udtrykt deres præferencer ved en nyttefunktion, såfremt vi tillader de to parter at benytte blandede aktioner.

Svarende til beslutningstagerens blandede aktioner, angivet i Definition 10.2.3, kan vi naturligvis indføre blandede aktioner

$$(\theta_1, \theta_2, \ldots)_{w_1, w_2 \ldots}$$

for modstanderen og udvide nyttefunktionen til en nyttefunktion på $\theta^* \times \mathcal{A}^*$, hvor θ^* angiver mængden af modstanderens blandede aktioner.

Vi bemærker, at beslutningstageren, såfremt hun mener at kende modstanderens blandede aktion, vil benytte denne som sin apriorifordeling. Endvidere bemærker vi, at vi ved at betragte blandede aktioner tvinges til at tage stilling til, hvorledes beslutningstageren sammenvejer sandsynligheder og konsekvenser. I nærværende fremstilling har vi antaget, at denne stillingtagen er gennemført ved etableringen af beslutningstagerens nyttefunktion.

Nedenstående sætning, der er en af spilteoriens hovedsætninger, sikrer eksistensen af en maximinaktion for beslutningstagen i situationer med endelig mange muligheder.

Sætning 10.3.1 ***Eksistens af sadelpunkt***

Lad Θ og $\mathcal{A}$ bestå af et endeligt antal elementer, da findes der en blandet aktion $a_0 \in \mathcal{A}^*$ for beslutningstageren og en blandet aktion $w_0 \in \Theta^*$ for modstanderen, således at

$$\sup_{a \in \mathcal{A}^*} \inf_{w \in \Theta^*} \eta(a; w) = \inf_{w \in \Theta^*} \sup_{a \in \mathcal{A}^*} \eta(a; w) = \eta(a_0; w_0) \tag{10.3.7}$$

Bevis:
Sætningen er formuleret og bevist af von Neumann i 1928. Et nyere bevis er angivet af Dantzig (1956). □

Sætningen udsiger, at såfremt beslutningstagerens nyttefunktion er $u(\cdot, \cdot)$, og modstanderens præferencer kan udnyttes ved $-u(\cdot, \cdot)$, da vil aktionen a_0 maksimere beslutningstagerens sikkerhedsniveau (også over for blandede aktioner), og desuden vil a_0 være den bedste aktion over for w_0, hvor w_0 maksimerer modstanderens sikkerhedsniveau. Beslutningstagerens maximinaktion er altså en Bayesaktion over for den for hende mindst gunstige apriorifordeling.

Sætningen kan udvides til aktionsrum $\mathcal{A}$ og parameterrum Θ, der er mere end endelige. Det væsentlige for eksistensen af et sadelpunkt er, at nyttemængden

$$U = \{u(\theta, a) \mid (\theta, a) \in \Theta \times \mathcal{A}^*\tag{10.3.8}$$

er begrænset, og det væsentlige for eksistensen af de optimale aktioner er, at nyttemængden endvidere er afsluttet.

Såfremt parameterrummet er endeligt, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$, kan nyttemængden repræsenteres ved en konveks figur i det k-dimensionale euklidiske rum, idet vi repræsenterer nyttefunktionen svarende til en aktion a ved punktet med koordinaterne

$$\mathbf{u}(\theta, a) = \big(u(\theta_1, a), u(\theta_2, a), \ldots, u(\theta_k, a)\big), \tag{10.3.9}$$

d.v.s. vi afbilder $\mathcal{A}^* \to \mathbb{R}^k$. Afbildningen kan vendes om, idet to aktioner, der giver anledning til samme nyttepunkt, er ækvivalente.

At nyttemængden er konveks indses let ved at bemærke, at

$$\mathbf{u}\left(\theta, (a_1, a_2)_p\right) = p\mathbf{u}(\theta, a_1) + (1-p)\mathbf{u}(\theta, a_2).$$

For $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ vil vi ved den øvre quantant til $\mathbf{u}$ forstå mængden

$$Q_{\mathbf{u}} = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \mid y_i \geq u_i \quad for \quad i = 1, 2, \ldots, k\right\}.$$

Såfremt $S \subset \mathbb{R}^k$ er en konveks mængde, vil vi ved den øvre rand af S forstå m ængden

$$\left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k \mid \overline{S} \cap Q_u = \{\mathbf{u}\}\right\},$$

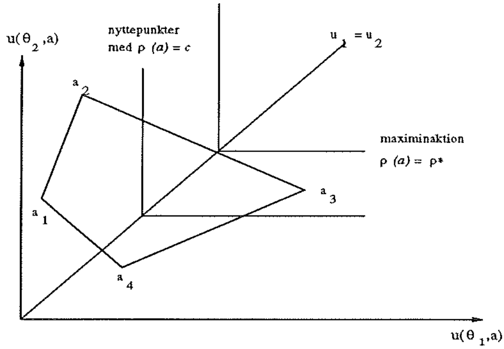
hvor $\overline{S}$ angiver afslutningen af S. Såfremt parameterrummet for et beslutningsproblem er endeligt, finder vi nu, at mængden af admissible aktioner netop svarer til nyttemængdens øvre rand, d.v.s. de admissible aktioner er netop alle Bayesaktionerne.

I Figur 10.9 har vi angivet nytteværdien svarende til $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$. Vi ser, at nyttefunktionen svarende til maximinreglen kan bestemmes ved at vælge et punkt $\mathbf{u}$ på halveringslinien $u_1 = u_2$ og forskyde den øvre quantant til $\mathbf{u}$ mod NE langs halveringslinien, indtil den øvre quantant kun har ét punkt fælles med nyttemængden. Vi bemærker i øvrigt, at maximinaktionen er en blandet aktion, blandet af de simple aktioner a_2 og a_4. Mængden af admissible aktioner for beslutningstageren er netop mængden af blandinger $(a_2, a_4)_p$, for $0 \geq p \geq 1$.

Vender vi os nu til modstanderens valg af aktion, ser vi, at såfremt beslutningstageren vælger aktionen a, og modstanderen vælger aktionen $(\theta_1, \theta_2)_w$, vil beslutningstagerens nytte være givet ved

$$\eta(a; w) = wu(\theta_1, a) + (1-w)u(\theta_2, a),$$

Figur 10.9. Geometrisk bestemmelse af nyttepunktet svarende til maximin-aktionen for $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$.



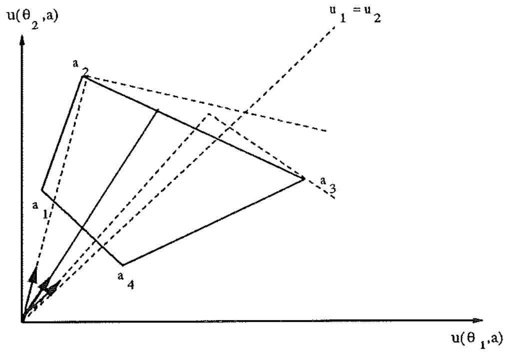
altså det indre produkt imellem vektoren $(w, 1 - w)$ og $\mathbf{u}(\theta, a)$. Nyttepunkter, der ligger på en linie (almindeligt: hyperplan) vinkelret på vektoren $(w, 1 - w)$ har altså samme nytte over for aktionen $(\theta_1, \theta_2)_w$. Sikkerhedsniveauet ved benyttelse af aktionen $(\theta_1, \theta_2)_w$ fås da ved at konstruere normalen til $(w, 1 - w)$ og parallelforskyde denne normal, indtil den netop tangerer nyttemængden. En tangent til nyttemængdens øvre rand vinkelret på vektoren $(w, 1 - w)$ skærer vinkelhalveringslinien i punktet $(\tau((\theta_1, \theta_2)_w), \tau((\theta_1, \theta_2)_w))$. Det maksimale sikkerhedsniveau for modstanderen opnås da ved at vælge en aktion $(\theta_1, \theta_2)_w$ således, at tangenten til nyttemængdens øvre rand skærer vinkelhalveringslinien så langt nede som muligt.

I Figur 10.10 har vi illustreret modstanderens valg af aktion for det problem, der blev behandlet i Figur 10.9. Ved sammenligning af de to figurer ser vi til illustration af Sætning 10.3.1, at såfremt modstanderen vælger den aktion, der maksimerer hendes sikkerhedsniveau, vil beslutningstagerens maximinaktion netop maksimere beslutningstagerens nytte. I øvrigt vil enhver aktion $(a_2, a_4)_p$ maksimere beslutningstagerens nytte for dette valg af modstanderens aktion.

Den her skitserede geometriske bestemmelse af bslutningstagerens maximinaktion og den tilsvarende minimaxaktion for modstanderen kan beskrives ved et lineært programmeringsproblem.

Lad beslutningstageren råde over aktionerne $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, og lad

Figur 10.10. Geometrisk bestemmelse af modstanderens maksimale sikkerhedsniveau for $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$.



modstanderen have mulighed for at benytte aktionerne $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$, og lad endelig beslutningstageren have nyttefunktionen $u(\theta, a) \geq 0$. Såfremt beslutningstageren har mulighed for at benytte blandede aktioner $a \in \mathcal{A}^*$, finder vi nytten af at anvende aktionen

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)_{p_1, p_2, \ldots, p_m},$$

når modstanderen anvender aktionen θ_i, er

$$u(\theta_i, a) = \sum_{j=1}^{m} u(\theta_i, a_j) p_j \qquad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{10.3.10}$$

hvor

$$\sum p_j = 1 \qquad \text{og} \qquad p_j \geq 0 \qquad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.3.11}$$

Beslutningstagerens maximinløsning a_0 tilfredsstiller

$$u(\theta_i, a_0) \geq v \qquad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{10.3.12}$$

hvor v angiver beslutningstagerens maximinnytte.

Såfremt vi kendte v, kunne vi omskrive (10.3.12) til

$$\sum_{j=1}^{m} u(\theta_i, a_j) x_j \geq 1 \qquad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{10.3.13}$$

hvor vi har sat

$$x_j = p_j/v,$$

d.v.s.

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = 1/v. \tag{10.3.14}$$

Maximinnytten kan nu bestemmes som det største v, der tilfredsstiller ovenstående betingelser, d.v.s. at vi skal minimere

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \tag{10.3.15}$$

under betingelserne

$$\sum_{j=1} u(\theta_i, a_j)x_j \geq 1 \qquad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{10.3.16}$$

og

$$x_j \qquad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.3.17}$$

Dette problem er et simpelt lineært programmeringsproblem; når løsningen $x_j, j = 1, 2, \ldots, m$ til dette problem er bestemt, kan beslutningstagerens maximinaktion bestemmes af

$$p_j = x_j / \sum x_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Vi bemærker desuden, at modstanderens optimeringsproblem netop er det duale programmeringsproblem.

Såfremt mængden af beslutningstagerens eller modstanderens aktioner er mere end endelig, vanskeliggøres bestemmelsen af mximinaktioner, men man kan dog i mange situationer bestemmer en maximinaktion ved analytiske metoder, fx variationsregning.

Ofte er det muligt på en simpel måde at bestemme modstanderens "bedste" (eventuelt blandede) aktion, og beslutningstagerens maximinaktion er da den aktion, der maksimerer beslutningstagerens nytte over for dette valg af modstanderens aktion. Påstandens rigtighed fremgår af

Sætning 10.3.2 ***Bestemmelse af maximinaktion som Bayesløsning til mindst gunstig apriorifordeling***

Lad $w_0 \in \Theta^*$ været givet. Såfremt $a_0 \in \mathcal{A}^*$ tilfredsstiller

$$\eta(a_0; w_0) = \sup_{a_0 \in \mathcal{A}^*} \eta(a_0; w_0), \tag{10.3.18}$$

og såfremt

$$\eta(a_0; w_0) \leq u(\theta, a_0) \qquad \text{for alle} \quad \theta \in \Theta, \tag{10.3.19}$$

da vil a_0 være en maximinaktion for beslutningstageren, og w_0 vil maksimere modstanderens minimale sikkerhedniveau.
Bevis:
Sætningen følger af ulighederne

$$\tau^* \leq \sup_a \eta(a; w_0) = \eta(a_0; w_0) \leq \rho(a_0) \leq \rho^*, \tag{10.3.20}$$

der sammenholdt med (10.3.6) viser, at $\rho^* = \tau^*$, hvorfor maximinaktionen eksisterer, og der må gælde

$$\tau^* = \sup_a \eta(a; w_0) = \eta(a_0; w_0) = \rho(a_0) = \rho^*.$$

□

Vi bemærker, at størrelsen

$$\eta(a_0) = \eta(a; w_0)$$

netop angiver beslutningstagerens maksimale nytte, såfremt modstanderen vælger aktionen $w_0 \in \mathcal{A}^*$. I praksis benyttes sætningen på den måde, at man gætter på modstanderens aktion w_0, hvorefter a_0 bestemmes således, at (10.3.18) er opfyldt. Såfremt (w_0, a_0) tilfredsstiller (10.3.19), vil a_0 være den søgte maximinaktion. Modstanderens aktion w_0 kaldes den <u>mindst gunstige apriorifordeling</u> for beslutningstageren.

I en del tilfælde kan man imidlertid komme ud for, at der blandt modstanderens blandede aktioner ikke kan findes en aktion, som er værst for beslutningstageren; man kan blot angive en følge af blandede aktioner for modstanderen (d.v.s. sandsynlighedsfordelinger på Θ), der er mere og mere ugunstige for beslutningstageren, men denne følge af sandsynlighedsfordelinger konvergerer ikke mod en sandsynlighedsfordeling på Θ. I disse tilfælde erstattes Sætning 10.3.2 af

Sætning 10.3.3 ***Bestemmelse af maximinaktion som grænseværdi for Bayesløsning for følge af apriorifordelinger***

Lad $\{w_1, w_2, \ldots\}$ med $w_n \in \Theta^*$ være en given følge, og lad $a_n \in \mathcal{A}^*$ tilfredsstille

$$\eta(a_n; w_n) = \sup_{a \in \mathcal{A}^*} \eta(a; w_0) \qquad \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{10.3.21}$$

Såfremt

$$\eta(a_n, w_n) \to C \qquad \text{for} \quad n \to \infty,$$

og såfremt der findes en aktion $a_0 \in \mathcal{A}^*$, således at

$$u(\theta, a_0) \geq C \qquad \text{for alle} \quad \theta \in \Theta,$$

da vil a_0 være en maximinaktion for beslutningstageren.

Bevis:

Sætningen vises ved at opstille de med (10.3.20) analoge uligheder og derefter foretage en grænseovergang i denne kæde af uligheder. □

En aktion $a \in \mathcal{A}^*$, for hvilken

$$u(\theta, a) = C \qquad \text{for alle} \quad \theta \in \Theta,$$

siges at have konstant nytte eller at være en nytteudjævner. Vi finder således specielt følgende korrollar til Sætning 10.3.3

Korollar 10.3.1 ***Hvis der findes en apriorifordeling og en nytteudjævner, sådan at nytteudjævneren er Bayesløsning overfor denne apriorifordeling, da er denne nytteudjævner en maximinaktion.***

(Resultatet gælder også, hvis der findes en følge af apriorifordelinger sådan at nytteudjævneren er optimal overfor grænseværdien af følgen.)

Formelt kan korollaret udtrykkes som følger:
Lad $a_0 \in \mathcal{A}^*$ være en nytteudjævner. Såfremt det gælder, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes en aktion $w_0 \in \Theta^*$, således at

$$\sup_{a \in \mathcal{A}^*} \eta(a; w_0) - \varepsilon \leq \eta(a_0; w_0) \tag{10.3.22}$$

da er a_0 en maximinaktion for beslutningstageren.

□

Korollaret er naturligvis specielt gyldigt, hvis der for $\varepsilon = 0$ gælder lighedstegn i (10.3.22), d.v.s. hvis der findes en blandet aktion for modstanderen, således at nytteudjævneren er beslutningstagerens bedste valg over for denne aktion. Når vi har formuleret korollaret i den mere generelle form, skyldes det atter, at den mindst gunstige blandede aktion i nogle tilfælde fås som grænsefordeling af en følge af sandsynlighedsfordelinger over Θ uden dog selv at svare til en sandsynlighedsfordeling.

I afsnit 12 vil vi give eksempler på anvendelsen af Sætning 10.3.2 og 10.3.3.

Vi skal slutte dette afsnit med ganske kort at nævne andre kriterier til sammenligning af beslutningstagerens aktioner ved beslutning under usikkerhed.

Laplacekriteriet

Lad Θ være endelig, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$. En aktion a_i siges at være <u>bedre end (Laplace)</u> en aktion a_j, hvis

$$\sum_{\nu=1}^{k} u(\theta_\nu, a_j) < \sum_{\nu=1}^{k} u(\theta_\nu, a_i),$$

Såfremt $u(\cdot, \cdot)$ er en nyttefunktion, er Laplacekriteriet ensbetydende med at antage, at naturen (modstanderen) vælger en værdi af parameteren, således at alle værdier vælges med lige stor sandsynlighed, og at beslutningstagerens aktioner vurderes ved at betragte nytten over for netop denne blandede modstanderaktion.

Minimax regretkriteriet

Lad regretfunktionen for beslutningsproblemet være givet ved (10.1.2). En aktion a_i siges at være bedre end (minimaxregret) en aktion a_j, hvis

$$\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, a_i) < \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, a_j),$$

dvs. hvis den maksimale regret ved anvendelse af a_i er mindre end den maksimale regret ved anvendelse af a_j. Bestemmelsen af den bedste (minimaxregret) aktion for beslutningstageren er analog med bestemmelsen af maximinaktionen. Vi minder dog om, at selv om gevinstfunktionen er præferencetro, behøver regretfunktionen ikke at være præferencetro; selv hvis gevinstfunktionen er en nyttefunktion, kan man ikke slutte, at præferencestrukturen også gælder differenser af nytteværdier. Det er derfor sjældent i overensstemmelse med beslutningstagerens præferencemønster at erstatte en nyttefunktion med en regretfunktion.

Eksempel 10.3.4 ***Avisdrengens problem***

Til illustration af de nævnte kriterier vil vi bestemme beslutningstagerens valg af aktion for det lagerproblem, vi behandlede i Eksempel 10.1.1.

Vi betragter derfor gevinstfunktionen

$$u(\theta, a) = \begin{cases} S\theta - Ca + R(a-\theta) & \text{for } \theta \le a \\ (S-C)a - T(\theta - a) & \text{for } \theta > a, \end{cases}$$

hvor $R < C < S$, og hvor m angiver den maksimale efterspørgsel efter varen.

I Figur 10.11 har vi illustreret gevinstfunktionen som funktion af θ for en fastholdt værdi af a. Idet vi sætter

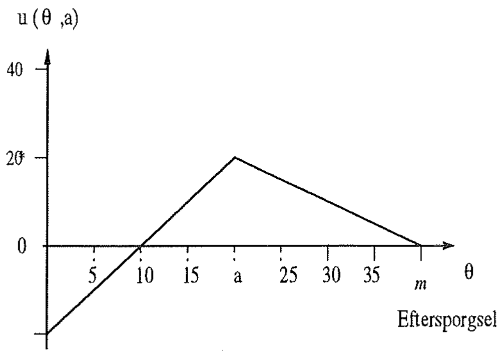
$$\theta_b = \frac{T}{S+T-R} m,$$

finder vi

$$\rho(a) = \begin{cases} -(C-R)a = u(0,a) & \text{for} \quad \theta_b < a \le m \\ (S+T-C)a - Tm = u(m,a) & \text{for} \quad a < \theta_b, \end{cases}$$

idet minimum antages enten for $\theta = 0$ eller $\theta = m$.

Figur 10.11. Nettogevinsten ved forskellige værdier af efterspørgslen for en given lagerstørrelse a.



I Figur 10.12 har vi vist forløbet af $\rho(a)$ som funktion af lagerstørrelsen a. Vi finder, at den maksimale værdi af den minimale gevinst antages for $a = \theta_b$. Da lagerstørrelsen skal være heltallig, vælger vi $a_0 = [\theta_b]$ eller $a_0 = [\theta_b] + 1$ afhængigt af, hvilken af disse aktioner der giver den største værdi af $\rho(a)$.

Gevinstfunktionen svarende til den maksimale lagerbeholdning fås ved at indsætte den optimale aktion a_0 i det almindelige udtryk for gevinstfunktionen.

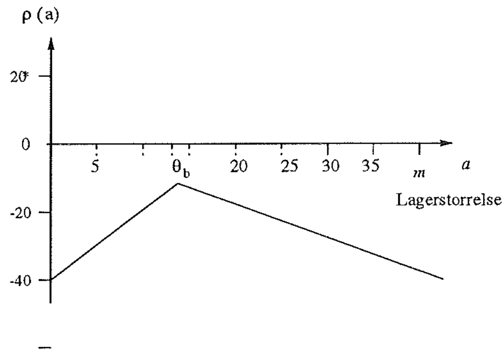
Havde beslutningstageren i stedet valgt at benytte en minimaxregretaktion, ville hun altså betragte regretfunktionen

$$R(\theta, a) = \begin{cases} (C - R)(a - \theta) & \text{for} \quad \theta \leq a \\ (S + T - C)(\theta - a) & \text{for} \quad a < \theta \leq m. \end{cases}$$

Forløbet af regretfunktionen som funktion af θ er skitseret i Figur 10.13. Vi ser, at den minimale regret $R = 0$ opnås for $a = \theta$, d.v.s. såfremt lagerstørrelsen netop tilfredsstiller efterspørgselen. Sætter vi

$$\theta_c = \frac{S + T - C}{S + T - R} m, \tag{10.3.23}$$

Figur 10.12. Den minimale nettogevinst som funktion af lagerstørrelsen a.



finder vi

$$\max_\theta R(\theta,a) = \begin{cases} (S+T-C)(m-a) = R(m,a) & \text{for} \quad a < \theta_c \\ (C-R)a = R(0,a) & \text{for} \quad \theta_c \le a. \end{cases}$$

I Figur 10.14 har vi vist forløbet af den maksimale regret som funktion af lagerbeholdningen a. Vi ser, at den mindste maksimale regret opnås for $a = \theta_c$. Da lagerbeholdningen skal være heltallig vælger vi $a_0 = [\theta_c]$ eller $a_0 = [\theta_c] + 1$ afhængigt af, hvilken af disse aktioner der giver den mindste værdi af $\max_\theta R(\theta, a)$. Vi bemærker i øvrigt, at den optimale lagerbeholdning θ_c netop tilfredsstiller

$$R(0,\theta_c) = R(m,\theta_c).$$

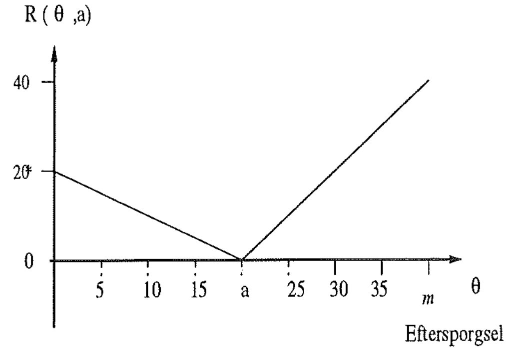
Gevinstfunktionen svarende til den optimale (minimaxregret) lagerbeholdning er da

$$u(\theta,\theta_c) = \begin{cases} (S-R)\theta - (C-R)\theta_c & \text{for} \quad \theta \le \theta_c \\ (S+T-C)\theta_c - T\theta & \text{for} \quad \theta > \theta_c. \end{cases} \tag{10.3.24}$$

Vi skal til slut beskrive bestemmelsen af den optimale (Laplace) lagerbeholdning. Idet der gælder

$$\sum_{\theta=0}^{a} c = c(a+1) \quad \text{og} \quad \sum_{\theta=0}^{a} \theta = \tfrac{1}{2}a(a+1),$$

Figur 10.13. Beslutningstagerens regret som funktion af efterspørgselen for en given lagerbeholdning a.



finder vi for

$$L(a) = \sum_{\theta=0}^{m} u(\theta, a), \tag{10.3.25}$$

at

$$L(a) = \tfrac{1}{2}(S + R + T - 2C)a(a + 1) + (S + T - C)(m - a)a - \tfrac{1}{2}Tm(m + 1),$$

altså et andengradspolynomium i a.

Såfremt $u(\theta, a)$ er en nyttefunktion, vil $L(a)/(m + 1)$ angive beslutningstagerens nytte ved at vælge lagerstørrelsen a, når efterspørgselen θ er en UD(m)-fordelt stokastisk variabel.

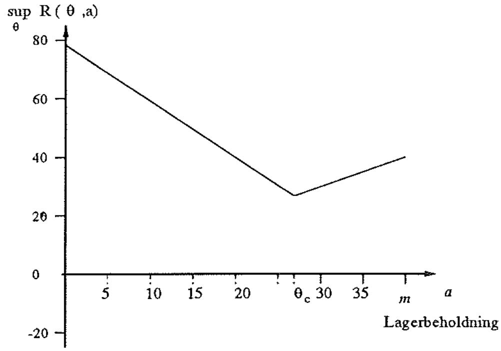
Maksimumsværdien af $L(a)$ antages for $a = \theta_\ell$, hvor

$$\theta_\ell = \frac{S + T - C}{S + T - R}(m + \tfrac{1}{2}) + \frac{R - C}{2(S + T - R)},$$

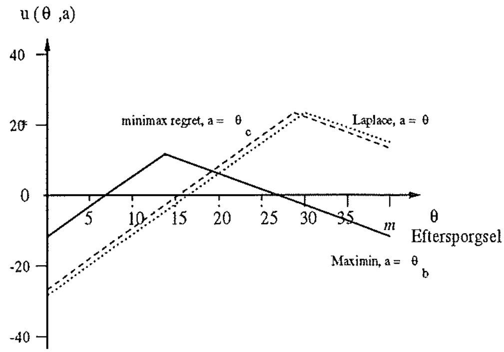
og gevinstfunktionen, såfremt beslutningstageren vælger den optimale (Laplace) lagerstørrelse $a = \theta_\ell$, er da

$$u(\theta, \theta_\ell) = \begin{cases} (S - R)\theta - (C - R)\theta_\ell & for \quad \theta < \theta_\ell \\ (S + T - C)\theta_\ell - T\theta & for \quad \theta_\ell < \theta. \end{cases} \tag{10.3.26}$$

Figur 10.14. Den maksimale regret som funktion af lagerbeholdningen a.



Figur 10.15. Gevinstfunktionen som funktion af efterspørgselen ved en lagerbeholdning bestemt i overensstemmelse med maximin-, minimaxregret- og Laplacekriteriet.



Figur 10.15 viser gevinstfunktionens forløb svarende til de tre valg af lagerbeholdning, $a = \theta_b$, $a = \theta_c$ og $a = \theta_\ell$.

□

10.4 Robusthed af den optimale løsning

Ved anvendelser i praksis vil beslutningstageren ofte have vanskeligheder med at specificere gevinst- eller nyttefunktionen præcist. Endvidere vil en eventuel apriorifordeling i mange tilfælde være usikkert bestemt. I praksis vil man derfor ikke nøjes med at bestemme den optimale løsning til et givet problem, men man vil også undersøge, hvorledes nytten af den optimale løsning ændres, hvis forudsætningerne ændres en smule.

Den følgende sætning viser, at Bayesnytten er en konveks funktion af apriorifordelingen, og man kan derfor håbe, dels at Bayesnytten ikke ændrer sig nævneværdigt, hvis apriorifordelingen ændres, og dels at apriorinyttem af Bayesaktionen i et givet problem ikke ændres ret meget ved ændringer i apriorifordelingen.

Sætning 10.4.1 ***Bayesnytten er en konveks funktion af aprioritætheden***

Lad $\eta^*(w)$ angive Bayesnytten svarende til aprioritætheden w. Da gælder

$$\eta^*(\alpha w_1 + (1-\alpha)w_2) \le \alpha\eta^*(w_1) + (1-\alpha)\eta^*(w_2). \tag{10.4.1}$$

Bevis:
Idet vi indfører betegnelsen

$$\eta(a; w) = \int u(\theta, a)w(\theta)\nu\{d\theta\},$$

finder vi

$$\eta(a; \alpha w_1 + (1-\alpha)w_2) = \alpha\eta(a; w_1) + (1-\alpha)\eta(a; w_2). \tag{10.4.2}$$

Vi har nu

$$\begin{aligned} \eta^*(\alpha w_1 + (1-\alpha)w_2) &= \sup\nolimits_a \{\alpha\eta(a; w_1) + (1-\alpha)\eta(a; w_2)\} \\ &\le \alpha \sup \eta(a; w_1) + (1-\alpha) \sup \eta(a; w_2) \\ &= \alpha\eta^*(w_1) + (1-\alpha)\eta^*(w_2), \end{aligned}$$

hvorved sætningen er bevist. □

10.5 Referencer

Blackwell, D. and Girshick, M. A. (1954): *Theory of Games and Statistical Decisions.* Wiley, New York

Dantzig, G. B. (1956): Constructive proof of the min-max theorem. *Pacific Journal of Mathematics* **6**, pp. 25-33

Haywod, O. G. Jr.: Military decision and game theory, *Journal of the Operations Research Society of America*, **2** (1954), pp. 365-385

Lindley, D. V. (1971): *Making Decisions.* Wiley, New York.

Luce, R. D. and Raiffa, H. (1957): *Games and Decisions.* Wiley, New York.

Rockafeller, R. T. (1970): *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton.

Afsnit 11

Empirisk Bayes estimation

fil: empbay.tex 1998-04-27

11.1 Empirisk Bayes estimation for den endimensionale normalfordeling.

Bayes-betragtningerne er baseret på en fuldt specificeret apriorifordeling. Såfremt apriorifordelingen blot afspejler beslutningstagerens subjektive tiltro til "chancen"for forekomst af forskellige parameterværdier kan man naturligvis fortolke apriorifordelingen som indeholdende al tilgængelig information om aprioriusikkerheden på parameteren, men til gengæld vil aposteriorifordelingen også kun have en subjektiv fortolkning.

I mange tilfælde vil apriorifordelingen imidlertid have en frekvensfortolkning, og parametrene i apriorifordelingen kan estimeres fra statistiske data, således som det er illustreret i de foregående afsnit. Det er klart, at parametrene i apriorifordelingen er behæftet med en vis estimationsusikkerhed, og man kan derfor overveje, i hvilket omfang denne estimationsusikkerhed overføres til aposteriorifordelingen.

Det følger af bemærkning 2 til Sætning 8.3.1, at såfremt antallet af observationer svarende til en bestemt parameterværdi vokser mod uendeligt, da vil aposteriorifordelingen snævre sig sammen omkring denne parameterværdi, såfremt blot apriorifordelingen har tillagt positiv sandsynlighed til denne værdi.

Når bare antallet af observationer svarende til en bestemt parameterværdi er stort nok, er det åbenbart ikke særlig betydningsfuldt, om apriorifordelingen er nøjagtigt bestemt, da en klassisk estimator i dette tilfælde vil give et nøjagtigt skøn over parameterværdien.

For at illustrere situationen svarende til et mere begrænset antal observationer vil vi betragte den simultane estimation af gruppeparametrene i den simple normalfordelingssituation.

Antag at vi har observationerne $X_{ij}, i = 1,2,..,k; \quad j = 1,2...,n$, hvor index i angiver hvilken gruppe, der har frembragt observationen, og index j angiver gentagelsen indenfor gruppe. Vi antager at observationerne indenfor en gruppe er indbyrdes uafhængige og identisk fordelt, $X_{ij}|\theta_i \in \mathrm{N}(\theta_i, \sigma^2)$, svarende til den sædvanlige model

$$X_{ij} = \theta_i + \epsilon_{ij} \tag{11.1.1}$$

hvor ϵ_{ij} er indbyrdes uafhængige, $\epsilon_{ij} \in \mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

Vi ønsker nu at estimere de k parametre θ_i ved en funktion

$$d(\cdot) = (d_1(\cdot), d_2(\cdot), \ldots, d_k(\cdot))^T$$

af observationssættet $\mathbf{X}$. Vi indfører betegnelsen

$$L(\boldsymbol{\theta}, d(\mathbf{X})) = \frac{1}{k\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}(\theta_i - d_i(\mathbf{X}))^2 \tag{11.1.2}$$

for den gennemsnitlige estimationsfejl, når de sande værdier er

$(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k)^T$, når observationssættet antager værdien $\mathbf{X}$, og man benytter estimatoren $d(\cdot) = (d_1(\cdot), d_2(\cdot), \ldots, d_k(\cdot))^T$. Vi har normeret med σ^2 for at gøre målet for estimationsfejlen invariant under skalatransformationer af $\mathbf{X}$.

Det er naturligt at udjævne effekten af den tilfældige variation af $\mathbf{X}$ for fastholdte værdier af $\boldsymbol{\theta}$ ved at betragte den forventede gennemsnitlige estimationsfejl

$$R(\boldsymbol{\theta}, d) = \mathsf{E}_{\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}}[L(\boldsymbol{\theta}, d(\mathbf{X}))] \tag{11.1.3}$$

Såfremt det yderligere antages, at $\boldsymbol{\theta}$ varierer tilfældigt, nemlig at θ_i er uafhængige og $\theta_i \in \mathrm{N}(\mu, \gamma\sigma^2)$, kan man passende betragte den apriori forventede gennemsnitlige estimationsfejl

$$\eta((\mu, \gamma), d) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}[R(\boldsymbol{\theta}, d)]\,, \tag{11.1.4}$$

der angiver den forventede gennemsnitlige estimationsfejl under hensyntagen såvel til den tilfældige variation af $\mathbf{X}$ som af $\boldsymbol{\theta}$.

Såfremt parametrene μ, γ og σ^2 var kendt, ville man vælge en estimator, $d(\cdot)$ således at $\eta((\mu, \gamma), d)$ blev mindst mulig.

Der gælder

Sætning 11.1.1 ***Bayesløsning ved simultan estimation***

Lad fordelingen af observationssættet $\mathbf{X}$ være givet ved (11.1.1), hvor $\epsilon_{ij} \in \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ er uafhængige, og $\theta_i \in \mathrm{N}(\mu, \gamma\sigma^2)$ er indbyrdes uafhængige og uafhængige af ϵ_{ij}. Da antager $\eta((\mu, \gamma), d)$ sit minimum for $d = d^B$, hvor

$$d_i^B(\mathbf{X}) = \widetilde{\theta}_i^B \stackrel{\mathrm{DEF}}{=} w\mu + (1-w)\overline{X}_{i.} \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{11.1.5}$$

med

$$w = \frac{1}{1 + n\gamma} \quad \text{og} \quad \overline{X}_{i.} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}/n; \qquad i = 1, 2, \ldots, k \tag{11.1.6}$$

Der gælder

$$\boxed{\eta((\mu, \gamma), d^B) = \frac{1}{n}\,\frac{n\gamma}{1 + n\gamma} = \frac{1}{n}\,(1 - w) \qquad (11.1.7)}$$

Bevis:

Vi har

$$\begin{aligned}
\eta((\mu,\gamma),d) &= \frac{1}{k\sigma^2}\,\mathsf{E}_{\theta}\mathsf{E}_{\mathbf{X}|\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\theta_i - d_i(\mathbf{X})\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{k\sigma^2}\,\mathsf{E}_{\mathbf{X}}\mathsf{E}_{\theta|\mathbf{X}}\left[\sum_{i=1}^{k}\left\{(\theta_i - \mathsf{E}\,[\theta_i|\mathbf{X}])^2 + (\mathsf{E}\,[\theta_i|\mathbf{X}] - d_i(\mathbf{X}))^2\right\}\right]
\end{aligned}$$

idet produktleddene forsvinder på grund af relationen

$$\mathsf{E}_{\theta|\mathbf{X}}\left[\theta_i - \mathsf{E}\,[\theta_i|\mathbf{X}]\,\right] = 0$$

Minimum fås derfor ved at minimere det sidste led i summen, dvs for

$$d_i(\mathbf{X})^B = \mathsf{E}\,[\theta_i|\mathbf{X}]$$

Men da aposterioriforventningsværdien af θ_i kun afhænger af $\overline{X}_{i\cdot}$, har vi

$$\mathsf{E}\,[\theta_i|\mathbf{X}] = \mathsf{E}\,[\theta_i|\overline{X}_{i\cdot}] = d_i^B(\mathbf{X})$$

Vi finder nu

$$\begin{aligned}
\eta\big((\mu,\gamma),d^B\big) &= \frac{1}{k\sigma^2}\,\mathsf{E}_{\mathbf{X}}\mathsf{E}_{\theta|\mathbf{X}}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\theta_i - \mathsf{E}\,[\theta_i|\mathbf{X}]\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{k\sigma^2}\,\mathsf{E}_{\mathbf{X}}\left[\sum_{i=1}^{k}\mathsf{V}\,[\theta_i|\mathbf{X}]\right] \\
&= \frac{1}{k\sigma^2}\mathsf{E}_{\mathbf{X}}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\sigma^2}{n}\,\frac{n\gamma}{1+n\gamma}\right] = \frac{1}{n}\,\frac{n\gamma}{1+n\gamma}
\end{aligned}$$

□

Til sammenligning betragter vi nu den estimator, man ville benytte under modellen med systematiske gruppeeffekter, nemlig maksimum likelihood estimatoren $\theta_i^{ML} = \overline{X}_{i\cdot}$ for gruppeparameteren θ_i,

$$d_i^{ML}(\mathbf{X}) = \widehat{\theta}_i^{ML} \stackrel{\text{DEF}}{=} \overline{X}_{i\cdot}\quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{11.1.8}$$

Der gælder

Sætning 11.1.2 ***Aprioriestimationsfejlen for ML-estimatoren***

Under antagelserne fra Sætning 11.1.1 er

$$\boxed{\eta((\mu,\gamma), d^{ML}) = R(\boldsymbol{\theta}, d^{ML}) = \frac{1}{n}}$$

hvor maksimum likelihood estimatoren d^{ML} er givet ved (11.1.8).

Bevis:

Vi har:

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\theta}, d^{ML}) &= \frac{1}{k\sigma^2} \mathsf{E}_{\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}}\left[\sum_{i=1}^{k}(\theta_i - \overline{X}_{i\cdot})^2\right] = \frac{1}{k\sigma^2}\sum_{i=1}^{k} \mathsf{V}\left[\overline{X}_{i\cdot}|\boldsymbol{\theta}\right] \\ &= \frac{1}{k\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Da $R(\boldsymbol{\theta}, d^{ML})$ ikke afhænger af $\boldsymbol{\theta}$, vil forventningsværdien med hensyn til fordelingen af $\boldsymbol{\theta}$ ligeledes være $1/n$.

□

Under den systematiske model har ML-estimatoren, $\widehat{\theta}_i^{ML}$, de egenskaber, der sædvanligvis kræves af en god estimator: estimatoren er central og variansminimal, men alligevel (eller måske netop derfor) er aprioriforventningen af den gennemsnitlige estimationsfejl større end for estimatoren $\widetilde{\theta}_i^B$.

Den stokastiske sammenhæng mellem de enkelte θ_i, som er specificeret i apriorifordelingen af $\boldsymbol{\theta}$, udtrykker at parameterværdierne ikke varierer vilkårligt, men at de i gentagne stikprøver vil gruppere sig omkring μ i overenstemmelse med hyppighederne i en normalfordeling med varians $\gamma\sigma^2$. Bayesestimatoren

$$\widetilde{\theta}_i^B = w\mu + (1-w)\widehat{\theta}_i^{ML}$$

udnytter denne information ved at trække de fundne gruppegennemsnit $\widehat{\theta}_i^{ML}$ ind mod tyngdepunktet μ. Vi minder om (jvf. afsnit 8.3.7), at "krympningsfaktoren", $1-w$, er bestemt som koefficienten til θ i regressionen af θ på $\widehat{\theta}_i^{ML}$ i den simultane fordeling af θ og $\widehat{\theta}_i^{ML}$. Vi har nemlig

$$1 - w = \frac{\mathsf{COV}[\widehat{\theta},\theta]}{\mathsf{V}\,[\widehat{\theta}]} = \frac{\mathsf{V}\,[\mathsf{E}\,[\widehat{\theta}|\theta]]}{\mathsf{E}\,[\mathsf{V}\,[\widehat{\theta}|\theta]] + \mathsf{V}\,[\mathsf{E}\,[\widehat{\theta}|\theta]]} = \frac{n\gamma}{1+n\gamma}$$

Relationen

$$\boxed{\eta((\mu,\gamma),d^B) = (1-w)\eta((\mu,\gamma),d^{ML}) \qquad (11.1.9)}$$

svarende til (8.3.14) viser, at reduktionen i den apriori forventede gennemsnitlige estimationsfejl ved at benytte Bayesestimatoren d^B i stedet for maksimum likelihood estimatoren d^{ML} er proportional med krympningsfaktoren $(1-w)$. Jo stærkere krympning, dvs jo mindre værdi af $(1-w)$, desto større er effekten ved at benytte Bayesestimatoren.

Dette er ikke overraskende, da krympningsfaktoren $(1-w)$ jo netop er lille, når variansen mellem parameterværdierne θ er lille i forhold til måleusikkerheden σ^2/n ved bestemmelsen af de enkelte parameterværdier.

Såfremt man ikke kender apriorifordelingens parametre (μ,γ), kan man udnytte hele observationssættet $\mathbf{X}$ til estimation af μ,γ og σ^2, således som det er beskrevet i afsnit 5.3. Med betegnelserne fra afsnit 5.3 har vi

$$\widehat{\mu} = \overline{X}_{..} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{X}_{i.}, \qquad \widehat{\sigma}^2 = SAK_1/\{k(n-1)\}$$

med

$$SAK_1 \in \sigma^2\chi^2(k(n-1)) \quad \text{og} \quad SAK2 \in \sigma^2(1+n\gamma)\chi^2(k-1)\ .$$

Idet SAK_1 og SAK_2 er uafhængige, og

$$\mathsf{E}\left[\frac{k-3}{SAK_2}\right] = \frac{1}{\sigma^2(1+n\gamma)}$$

finder vi, at

$$\mathsf{E}\left[\frac{\widehat{\sigma}^2}{SAK_2/(k-3)}\right] = \frac{1}{1+n\gamma} = w\ .$$

Vi vil imidlertid indføre estimatoren

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{SAK_1}{k(n-1)+2} \qquad (11.1.10)$$

og benytte

$$\widehat{w} = \frac{\widetilde{\sigma}^2}{SAK_2/(k-3)} \qquad (11.1.11)$$

Vi bemærker, at $\widehat{w}$ kan udtrykkes ved den sædvanlige F-teststørrelse som

$$\widehat{w} = \frac{k-3}{k-1}\,\frac{k(n-1)}{k(n-1)+2}\,\frac{1}{F}\ .$$

Indsættes $\widehat{\mu}$ og $\widehat{w}$ i udtrykket

$$\mathsf{E}\left[\theta_i|\overline{X}_{i.}\right] = w\mu + (1-w)\overline{X}_{i.}$$

for aposterioriforventningsværdien fås estimatoren

$$d_i^{EB}(\mathbf{X}) = \widetilde{\theta}_i^{EB} = \widehat{w}\widehat{\mu} + (1-\widehat{w})\overline{X}_{i.} \qquad (11.1.12)$$

Estimatoren kaldes en empirisk Bayes-estimator, da den udnytter et estimat for apriorifordelingen baseret på den empiriske (den observerede) fordeling af $\overline{X}_{i.}$.

Egenskaberne ved den empiriske Bayes-estimator fremgår af

Sætning 11.1.3 ***Apriori estimationsfejlen for den empiriske Bayes-estimator***

Under antagelserne fra sætning 11.1.1 er

$$\boxed{\eta((\mu,\gamma),d^{EB}) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2(k-3)}{\{k(n-1)+2\}(1+n\gamma)}\right)}$$

Bevis:
Vi har

$$k\ \eta((\mu,\gamma),d^{EB}) = \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{k}\{\overline{X}_{..} + (1-\widehat{w})(\overline{X}_{i.}-\theta_i)\}^2\right]$$

$$= \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{k}\{\widehat{w}(\overline{X}_{..}-\overline{X}_{i.}) + (\overline{X}_{i.}-\theta_i)\}^2\right]$$

$$= \mathsf{E}\left[\widehat{w}^2\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_{i.}-\theta_i)^2 + 2\widehat{w}\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_{..}-\overline{X}_{i.})(\overline{X}_{i.}-\theta_i)\right]$$

Men nu er

$$\widehat{w}^2 \sum_{i=1}^{k} (\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2 = \frac{1}{n} \frac{(k-3)^2 \widetilde{\sigma}^4}{SAK_2}$$

hvorfor vi har

$$\mathsf{E}\left[\widehat{w}^2 \sum_{i=1}^{k} (\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2\right] = \frac{1}{n} \frac{(k-3)f}{(1+n\gamma)(f+2)} \sigma^2$$

med $f = k(n-1) + 2$.

Endvidere er

$$\mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{k} (\overline{X}_{i.} - \theta_i)^2\right] = \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}} \mathsf{E}_{\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}} \left[\sum_{i=1}^{k} (\overline{X}_{i.} - \theta_i)^2\right] = k \frac{\sigma^2}{n}$$

og endelig har vi, idet $\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}}[\theta_i] = w\mu + (1-w)\overline{X}_{i.}$, at

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\widehat{w} \sum_{i=1}^{k} (\overline{X}_{..} - \overline{X}_{i.})(\overline{X}_{i.} - \theta_i)\right] &= \mathsf{E}_{\mathbf{X}} \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}} \left[\widehat{w} \sum_{i=1}^{k} (\overline{X}_{..} - \overline{X}_{i.})(\overline{X}_{i.} - \theta_i)\right] \\
&= -\mathsf{E}_{\mathbf{X}}\left[w\widehat{w} \sum_{i=1}^{k} (\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2\right] \\
&= -\frac{1}{1+n\gamma} \frac{k-3}{n} \mathsf{E}_{\mathbf{X}}[SAK_1/(f+2)] \\
&= -\frac{1}{1+n\gamma} \frac{k-3}{n} \frac{1}{f+2}
\end{aligned}$$

hvorefter resultatet følger ved addition af de enkelte led.

□

Bemærkning 1 ***Den forventede estimationsfejl for den empiriske Bayesestimator er mindre end for maksimum likelihood estimatoren***

Ved sammenligning med sætning 11.1.2 ser vi, at såfremt $k > 3$, vil den empiriske Bayesestimator d^{EB} have en mindre apriori forventet estimationsfejl, end maksimum likelihood estimatoren d^{ML}. Jo mindre værdi af γ, desto større er forskellen mellem de apriori forventede estimationsfejl for de to estimatorer.

Det kan iøvrigt vises, at også den forventede estimationsfejl $R(\boldsymbol{\theta}, d^{EB}) < R(\boldsymbol{\theta}, d^{ML})$ se f.eks. Efron og Morris (1972 a).

Vi bemærker endelig, at estimatet $\widehat{w}$ for w ikke nødvendigvis er mindre end 1. Estimatoren d^{EB} kan derfor forbedres ved at tvinge estimatet for w til at være mindre end 1. Der gælder således, at

$$\eta((\mu, \gamma), \widetilde{d}^{EB}) < \eta((\mu, \gamma), d^{EB})$$

hvor $\widetilde{d}^{EB}$ fremkommer af d^{EB} ved at erstatte $\widehat{w}$ med

$$\widehat{w}^{+} = \begin{cases} \widehat{w} & \text{for } \widehat{w} < 1 \\ 1 & \text{for } \widehat{w} \geq 1 \end{cases}$$

□

Eksempel 11.1.1 ***Simultan estimation af ballemiddelværdier***

Til illustration af de foregående betragtninger vil vi betragte data fra eksempel 5.3.1 og antage at formålet er at estimere renheden i hver af de 7 undersøgte baller.

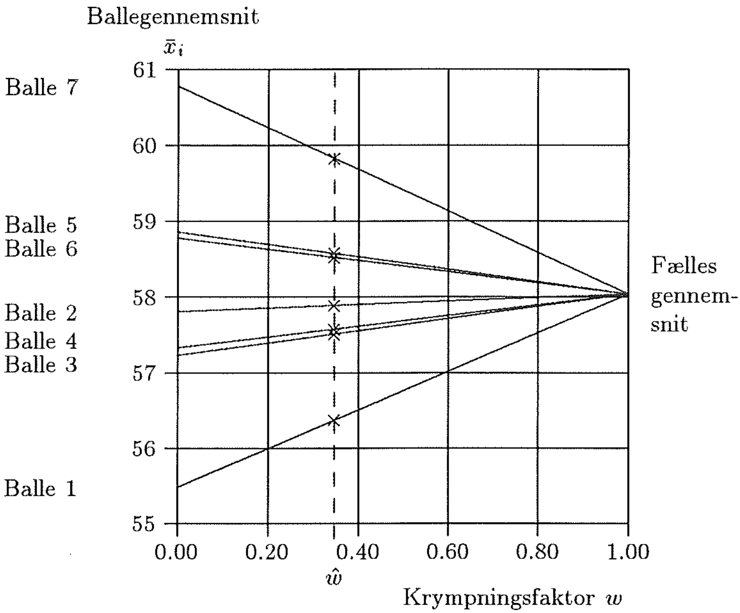
I eksemplet fandt vi $sak_1 = 131.47220$, $sak_2 = 65.9626$, $\widetilde{\sigma}^2 = sak_1/23 = 5.7162$; $sak_2/4 = 16.4907$.

Ved indsættelse i (11.1.11) fås

$$\widehat{w} = 5.7162/16.4907 = 0.3466$$

De 7 estimater for ballernes renhed kan da bestemmes ved (11.1.12).

Figuren illustrererer betydningen af "krympningsfaktoren" w for de 7 individuelle renhedsestimater. For $w = 0$ føres man til at bruge de 7 individuelle ballegennemsnit, for $w = 1$ føres man til det fælles gennemsnit.



Vi har $sak_1 = 131.47220$, $sak_2 = 65.9626$, $\tilde{\sigma}^2 = sak_1/23 = 5.7162$ $sak_2/4 = 16.4907$ hvorfor $\hat{w} = 5.7162/16.4907 = 0.3466$.

□

11.2 Empirisk Bayesestimation for flerdimensionale parametre.

Vi betragter modellen $\mathbf{X}_i|\boldsymbol{\theta}_i \in \mathrm{N}_p(\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\Sigma})$, $i + 1, 2, \ldots, k$, hvor $\mathbf{X}_i$ antages uafhængige for givet θ_i.

Lad $\delta_i(\mathbf{X}) = (\delta_{i1}(\mathbf{X}), \delta_{i1}(\mathbf{X}), \ldots, , \delta_{ip}(\mathbf{X}))^T$ angive en estimator for den p-dimensionale parameter $\boldsymbol{\theta}_i$.

Idet vi ønsker en simultan estimation af $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, indfører vi betegnelserne

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta} &= (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \text{ for den } p \times k\text{-dimensionale parametermatrix} \\
\boldsymbol{\delta} &= (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k) \text{ for den } p \times k\text{-dimensionale matrix af estimater} \\
\mathbf{X} &= (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k) \text{for den } p \times k\text{-dimensionale matrix af observationer}
\end{aligned}$$

Endvidere indfører vi den gennemsnitlige estimationsfejl ved benyttelse af $d(\mathbf{X})$, når den sande værdi er $\boldsymbol{\theta}$

$$L(\boldsymbol{\theta}, d(\mathbf{X})) = \frac{1}{pk} \operatorname{tr}\{(\theta - d(\mathbf{X}))^T \Sigma^{-1} (\theta - d(\mathbf{X}))\} \tag{11.2.1}$$

I lighed med det foregående afsnit har vi skaleret fejlen med $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ for at sikre, at L er invariant under lineære transformationer af $\mathbf{X}$.

For $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$ bliver afvigelsen netop kvadratafvigelsessummen,

$$L\big(\boldsymbol{\theta}, d(\mathbf{X})\big) = \frac{1}{pk} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} \big(\theta_{ij} - d_{ij}(\mathbf{X})\big)^2$$

Endelig indfører vi den forventede gennemsnitlige estimationsfejl

$$R(\boldsymbol{\theta}, d) = \mathsf{E}_{\,\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}, d) \tag{11.2.2}$$

Vi har da

Lemma 11.2.1 ***Forventet gennemsnitlig estimationsfejl for den flerdimensionale ML-estimator***

Lad $\boldsymbol{\delta}^{ML}$ angive maksimum likelihood estimatoren under den systematiske model, $\delta_i^{ML}(\mathbf{X}) = X_i$. Da gælder under ovennævnte model:

$$\boxed{R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}^{ML}) = 1}$$

Bevis:
Lemmaet er en direkte konsekvens af at $\mathsf{D}\,[\mathbf{X}_i|\theta_i] = \Sigma$

□

Under den tilfældige model antager vi desuden, at $\boldsymbol{\theta}_i \in \mathrm{N}_p(\mu, \boldsymbol{\Sigma}_0)$, hvor θ_i er indbyrdes uafhængige, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Under denne model betragter vi endvidere den apriori forventede gennemsnitlige estimationsfejl

$$\eta((\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0), d) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}[R(\boldsymbol{\theta}, d)] \tag{11.2.3}$$

Lemma 11.2.2 ***Forventet estimationsfejl for Bayesestimatoren***

Lad Bayes-estimatoren d^B være givet ved

$$d_i^B(\mathbf{X}) = \mathsf{E}\,[\theta_i|\mathbf{X}] = \mathbf{W}\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I} - \mathbf{W})X_i \tag{11.2.4}$$

med $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_0 + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}$, da er

$$\boxed{\eta((\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0), d^B) = \frac{1}{p}\ \mathrm{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{W}) = 1 - \frac{1}{p}\ \mathrm{tr}(\mathbf{W})} \tag{11.2.5}$$

Bevis:
Lemmaet vises ved at bemærke, at

$$\mathrm{tr}[(\boldsymbol{\theta} - \mathsf{E}\,[\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}])^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \mathsf{E}\,[\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}])] = \mathrm{tr}[(\boldsymbol{\theta} - \mathsf{E}\,[\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}])(\boldsymbol{\theta} - \mathsf{E}\,[\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}])\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]$$

samt at $\mathsf{D}\,[\theta_i|\mathbf{X}] = (\mathbf{I} - \mathbf{W})\boldsymbol{\Sigma}$, jvf. sætning 8.5.1 □

Vi ser, at den apriori forventede gennemsnitlige estimationsfejl ved benyttelse af Bayes-estimatoren d^B er mindre end ved fejlen ved benyttelse af maximaliseringsestimatoren d^{ML}. Forskellen, $\mathrm{tr}(\mathbf{W})/p$ er større, desto større værdi af $\mathrm{tr}(\mathbf{W})$.

For at vurdere den apriori forventede gennemsnitlige estimationsfejl i situationer, hvor apriorifordelingen ikke er kendt, men estimeres fra datasættet anfører vi

Lemma 11.2.3 ***Den forventede estimationsfejl***

Betragt en estimator $\widehat{\boldsymbol{\delta}}$ af formen

$$\widehat{\delta}_i(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{W}}\overline{\mathbf{X}} + (\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{W}})X_i \tag{11.2.6}$$

hvor $\widehat{\mathbf{W}}$ er en funktion af $\mathbf{X}$, og hvor

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbf{X}_i$$

Da gælder

$$\boxed{\begin{aligned}\eta((\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0), \widehat{\boldsymbol{\delta}}) &= \frac{1}{p}\,\mathrm{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{W}) \\ &+ \frac{1}{pk}\{\mathrm{tr}(\mathbf{W}) + \mathsf{E}_{\mathbf{X}}[\,\mathrm{tr}((\widehat{\mathbf{W}} - \mathbf{W})\mathbf{S}(\widehat{\mathbf{W}} - \mathbf{W})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1})]\}\end{aligned}}$$

hvor

$$\mathbf{S} = (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}\mathbf{e}_k)(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}\mathbf{e}_k)^T$$

med $\mathbf{e}_k = (1, 1, \ldots, 1)$ angiver den empiriske dispersionsmatrix for $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$.

Bevis:

Lemmaet vises ved at bemærke, at

$$\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\theta} - d^B + d^B - \widehat{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\theta} - d^B + \mathbf{W}(\boldsymbol{\mu} - \overline{\mathbf{X}}\mathbf{e}_k) + (\widehat{\mathbf{W}} - \mathbf{W})(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}\mathbf{e}_k)$$

og at udnytte lemma 11.2.1 samt relationen

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\,[\mathrm{tr}\{\mathbf{e}_k^T(\mu - \overline{\mathbf{X}})^T\mathbf{W}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}(\mu - \overline{\mathbf{X}})\mathbf{e}_k\}] \\ &\quad = \mathsf{E}\,[\mathrm{tr}\{(\boldsymbol{\mu} - \overline{\mathbf{X}})\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T(\boldsymbol{\mu} - \overline{\mathbf{X}})^T\mathbf{W}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}\}] \\ &\quad = \mathrm{tr}\{(\boldsymbol{\Sigma}_0 + \boldsymbol{\Sigma})\mathbf{W}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}\} \\ &\quad = \mathrm{tr}\{(\boldsymbol{\Sigma}_0 + \boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{\Sigma}_0 + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}\} = \mathrm{tr}(\mathbf{W})\end{aligned}$$

idet

$$\mathbf{D}\,[\overline{X}] = \frac{1}{k}\,(\boldsymbol{\Sigma}_0 + \boldsymbol{\Sigma}), \quad \text{og} \quad \mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_0 + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}$$

□

Det fremgår af lemmaet, at såfremt vi ønsker at reducere den apriori forventede gennemsnitlige estimationsfejl, skal vi vælge et estimat $\widehat{\mathbf{W}}$, der sikrer en lille værdi af

$$\mathsf{E}_{\mathbf{X}}\left[\operatorname{tr}((\widehat{\mathbf{W}}-\mathbf{W})\mathbf{S}(\widehat{\mathbf{W}}-\mathbf{W})^T\mathbf{\Sigma}^{-1})\right]$$

Såfremt $\mathbf{\Sigma}$ er kendt, behøver vi blot estimere $\mathbf{\Sigma}_0$ for at bestemme $\widehat{\mathbf{W}}$.

Idet $\mathbf{S} \in \mathrm{Wis}_p\big(k-1, (\mathbf{\Sigma}_0+\mathbf{\Sigma})\big)$, har vi

$$\mathsf{E}\,[\mathbf{S}^{-1}] = \frac{1}{k-p-2}\,(\mathbf{\Sigma}_0+\mathbf{\Sigma})^{-1}$$

hvorfor $\mathsf{E}\,[(k-p-2)\mathbf{\Sigma}\mathbf{S}^{-1}] = \mathbf{W}$, og det er således naturligt at betragte estimatoren d^{EB} bestemt ved

$$d_i^{EB}(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{W}}_1\overline{\mathbf{X}} + (\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{W}}_1)\mathbf{X}_i \tag{11.2.7}$$

med

$$\widehat{\mathbf{W}}_1 = (k-p-2)\mathbf{\Sigma}\mathbf{S}^{-1} \tag{11.2.8}$$

Der gælder

Sætning 11.2.1 ***Forventet estimationsfejl for den empiriske Bayes-estimator***

Med ovennævnte betegnelser gælder:

$$\boxed{\eta((\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}_0),d^{EB}) = 1-\frac{k-p-2}{kp}\operatorname{tr}(\mathbf{W}) = \eta((\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}_0),d^{B}) + \frac{p+2}{kp}\operatorname{tr}(\mathbf{W}) \quad (11.2.9)}$$

Bevis:
Sætningen følger af lemma 11.2.3 ved at benytte ovenstående udtryk for $\mathsf{E}\,[\mathbf{S}^{-1}]$ samt at $\mathsf{E}\,[\mathbf{S}] = (k-1)(\mathbf{\Sigma}_0+\mathbf{\Sigma})$.

□

I praksis vil $\mathbf{\Sigma}$ imidlertid være ukendt, men der vil foreligge et estimat $\widehat{\mathbf{\Sigma}}$ for $\mathbf{\Sigma}$ med en fordeling, der er uafhængig af $\mathbf{S}$. Dette er således tilfældet, når $\mathbf{\Sigma}$ som vanligt estimeres ved variationen indenfor grupper.

Der gælder da

Sætning 11.2.2 ***Den forventede estimationsfejl for den empiriske Bayesestimator med ukendt dispersionsmatrix***

Lad $\widehat{\mathbf{W}}_2$ være givet ved $\widehat{\mathbf{W}}_2 = (k-p-2)\widehat{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{S}^{-1}$, hvor fordelingen af $\widehat{\mathbf{\Sigma}}$ er uafhængig af $\mathbf{S}$, og betragt estimatoren $\widetilde{d}^{EB}$ bestemt ved

$$\widetilde{d}_i^{EB}(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{W}}_2\overline{\mathbf{X}} + (\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{W}}_2)X_i \tag{11.2.10}$$

Da gælder

$$\boxed{\begin{aligned} \eta((\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}_0), \widetilde{d}^{EB}) &= \eta((\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}_0), \widehat{yd}^{EB}) \\ &+ \frac{k-p-2}{pk} \, \mathsf{E}_{\widehat{\mathbf{\Sigma}}}\big[\mathrm{tr}\{(\widehat{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{\Sigma}^{-1} - \mathbf{I})\mathbf{W}(\widehat{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{\Sigma}^{-1} - \mathbf{I})\}\big] \end{aligned}}$$

Bevis:
Beviset følger af lemma 11.2.3 ved indsættelse af $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{W}}_2$.

Man får

$$\begin{aligned} \eta((\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}_0), d^{EB}) &= \frac{1}{p}\mathrm{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{W}) + \frac{p+2}{k}\,\frac{1}{p}\,\mathrm{tr}(\mathbf{W}) \\ &+ (1 - \frac{p+2}{k})\,\frac{1}{p}\,\mathsf{E}_{\widehat{\mathbf{\Sigma}}}[\mathrm{tr}\{(\widehat{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{\Sigma}^{-1} - \mathbf{I})\mathbf{W}(\widehat{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{\Sigma}^{-1} - \mathbf{I})\}] \end{aligned}$$

hvorefter resultatet følger ved benyttelse af resultatet fra sætning 11.2.1

□

Korollar 11.2.1 ***Dispersionsmatrix proportional med kendt matrix***

Såfremt $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{V}$, hvor $\mathbf{V}$ er kendt, er estimatet for σ^2 baseret på $SAK_1 \in \sigma^2\chi^2(f)$. Vælger vi $\widetilde{\sigma}^2 = SAK_1/(f+2)$ og $\widehat{\mathbf{\Sigma}} = \widetilde{\sigma}^2\mathbf{V}$, har vi

$$\mathsf{E}\,[\widehat{\mathbf{\Sigma}}] = \mathsf{E}\,[\widehat{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\widehat{\mathbf{\Sigma}}] = \frac{f}{f+2}\,\mathbf{\Sigma}$$

således at vi finder

$$\boxed{\begin{aligned} \eta((\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}_0), \widetilde{d}^{EB}) &= \eta((\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}_0), d^{EB}) + \frac{k-p-2}{pk}\,\frac{2}{f+2}\,\mathrm{tr}(\mathbf{W}) \\ &= 1 - \frac{k-p-2}{pk}\,\frac{2}{f+2}\,\mathrm{tr}(\mathbf{W}) \qquad (11.2.11) \end{aligned}}$$

□

Korollar 11.2.2 ***Dispersionsmatrix en diagonalmatrix***

Såfremt $\mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_p^2)$, er estimatet for σ_j^2 baseret på $SAK_{1j} \in \sigma_j^2\chi^2(f)$. Vælger vi $\widetilde{\sigma}_j^2 = SAK_{1j}/(f+2)$ og $\widehat{\mathbf{\Sigma}} =$ $\mathrm{diag}(\widetilde{\sigma}_j^2)$, har vi i lighed med korollar 1, at

$$\mathsf{E}\,[\widehat{\mathbf{\Sigma}}] = \mathsf{E}\,[\widehat{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\widehat{\mathbf{\Sigma}}] = \frac{f}{f+2}\,\mathbf{\Sigma}$$

således at vi igen finder $\eta((\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}_0), \widetilde{d}^{EB})$ givet ved (11.2.11)

□

Korollar 11.2.3 ***Dispersionsmatrix ukendt***

Såfremt $\mathbf{\Sigma}$ er ukendt, er estimatet for $\mathbf{\Sigma}$ baseret på $\mathbf{SAK}_1 \in \mathrm{Wis}_p(f, \mathbf{\Sigma})$.

Vælger vi $\widehat{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{SAK}_1/(f+p+1)$, har vi

$$\mathsf{E}\,[\widehat{\mathbf{\Sigma}}] = \mathsf{E}\,[\widehat{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\widehat{\mathbf{\Sigma}}] = \frac{f}{f+p+1}\,\mathbf{\Sigma}$$

således at vi finder

$$\begin{aligned}\eta((\boldsymbol{\mu},\Sigma_0),\tilde{d}^{EB}) &= \eta((\boldsymbol{\mu},\Sigma_0),d^{EB}) + \frac{k-p-2}{pk}\,\frac{p+1}{f+p+1}\,\mathrm{tr}(\mathbf{W}) \\ &= 1-\frac{k-p-2}{pk}\,\frac{f}{f+p+1}\,\mathrm{tr}(\mathbf{W}) \qquad (11.2.12)\end{aligned}$$

□

Udtrykkene viser fordelen ved at benytte den empiriske Bayes-estimator frem for maksimum likelihood stimatoren d^{ML}. Det ses, at gevinsten er proportional med $\mathrm{tr}(\mathbf{W})$. Idet $\mathbf{W} = (\mathbf{I} + \Sigma_0\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1}$ (jvf bemærkning til Sætning 8.5.1) ser vi, at fordelen ved at benytte Bayes-estimatet eller de empiriske Bayes estimater frem for maksimum likelihood estimaterne for den systematiske model er størst, når $\boldsymbol{\Gamma} = \Sigma_0\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ er lille, dvs når variationen imellem grupper er lille i forhold til variationen indenfor grupper, eller med andre ord, når parameterværdierne θ_i ligner hinanden mere indbyrdes, end usikkerheden på bestemmelsen af den enkelte θ_i- værdi ved maksimum likelihood estimatoren.

Bemærkning 1 ***Estimatoren er ikke altid positiv definit***

Estimatoren $\widehat{\mathbf{W}}_1$ bestemt ved (11.2.8) er ikke nødvendigvis positiv definit. Estimationsfejlen kan mindskes ved at korrigere $\widehat{\mathbf{W}}_1$ således at den bliver positiv definit.

Indfører vi $\widehat{\mathbf{W}}_3$ som den symmetriske positive definite matrix, der minimerer afstanden

$$\Delta_S(\widehat{\mathbf{W}}_1,\widehat{\mathbf{W}}_3) = \mathrm{tr}\{(\widehat{\mathbf{W}}_1-\widehat{\mathbf{W}}_3)\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\widehat{\mathbf{W}}_1-\widehat{\mathbf{W}}_3)\}$$

gælder at

$$\eta((\boldsymbol{\mu},\Sigma_0),d^{EB+}) < \eta((\boldsymbol{\mu},\Sigma_0),d^{EB})$$

hvor d^{EB+} er bestemt ved

$$d_i^{EB+}(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{W}}_3\overline{\mathbf{X}} + (\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{W}}_3)_i,\ i=1,2,\ldots,k$$

For $\widehat{\mathbf{W}}_1 = (k-p-2)\mathbf{\Sigma}\mathbf{S}^{-1}$ kan $\widehat{\mathbf{W}}_3$ konstrueres ud fra egenvektorer og egenværdier for $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$:

Lad $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}^{-1/2} = \mathbf{G}\mathbf{E}\mathbf{G}^T$, hvor $\mathbf{G}$ er en $p \times p$ dimensional ortogonal matrix og $\mathbf{E}$ er diagonalmatricen med elementet e_{ii} lig med den i'te største egenværdi for $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$. Vi erstatter nu de egenværdier e_{ii}, der er større end $(k-p-2)$ med værdien $(k-p-2)$ for at sikre at egenværdierne for $\widehat{\mathbf{W}}_3$ ikke overstiger 1. Vi danner nemlig diagonalmatricen $\mathbf{E}_S$ med elementer

$$e_{ii}^S = \begin{cases} e_{ii} & \text{hvis } e_{ii} > k-p-2 \\ k-p-2 & \text{hvis } e_{ii} \leq k-p-2 \end{cases} \tag{11.2.13}$$

og $\widehat{\mathbf{W}}_3 = \mathbf{G}\mathbf{E}_S^{-1}\mathbf{G}^T$.

Dette valg sikrer at estimaterne $\widehat{\mathbf{W}}_3$ og $(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{W}}_3)$ ikke er outrerede.

Metoden kan også benyttes i situationen svarende til korollar 11.2.1 til sætning 11.2.2, og det gælder også i denne specielle situation, at den apriori forventede gennemsnitlige estimationsfejl formindskes ved at benytte den egenværdikorrigerede estimator, se f.eks. Efron og Morris (1972 b).

□

11.3 Referencer

Efron, B. and Morris, C. : Limiting the risk of Bayes and empirical Bayes estimators, *J.Amer.Statist.Ass.* **67**, (1972 a) pp. 103-109.
Efron, B. and Morris, C. :Empirical Bayes on vector observations: An extension of Stein's method. *Biometrika* **59** (1972 b) pp. 335-347.

Afsnit 12

Beslutninger under anvendelse af statistiske data

fil: stabesla.tex 1998-05-12

12.1 Introduktion, beslutningsregler

Vi vil i dette afsnit udvide betragtningerne fra afsnit 10 til at omfatte situationer, hvor der er mulighed for at foretage en observation af en stokastisk variabel X med værdimængden $\mathcal{X}$ og med en tæthed (eller frekvensfunktion) $g(\cdot|\theta)$, der kendes for alle værdier af "naturens tilstand", θ.

Beslutningstageren vil udnytte observationen af den stokastiske variabel ved sit valg af aktion, sådan at han vil vælge forskellige aktioner for forskellige udfald af observationen.

Definition 12.1.1 ***Statistisk beslutningsproblem***

Ved et statistisk beslutningsproblem vil vi forstå et beslutningsproblem $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot))$, udvidet med triplet $\{X, \mathcal{X}, \{g(\cdot|\theta)\}_{\theta\in\Theta}\}$.

I lighed med afsnit 10.3 vil vi sige, at der foreligger et statistisk beslutningsproblem under <u>usikkerhed</u>, såfremt problemet er givet ved komponenterne

$$(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), X, \mathcal{X}, \{g(\cdot|\theta)\}_{\theta\in\Theta}) \tag{12.1.1}$$

og vi siger i analogi med afsnit 10.2 at der foreligger et statistisk beslutningsproblem under <u>risiko</u>, såfremt beslutningstageren yderligere kan specificere sin apriorividen om parameteren θ i form af en apriorifordeling på Θ, dvs såfremt beslutningsproblemet er givet ved komponenterne

$$(\theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot), w(\cdot), X, \mathcal{X}, \{g(\cdot|\theta)\}_{\theta\in\Theta}) \tag{12.1.2}$$

□

For et givet beslutningsproblem vil beslutningstagerens valg af aktion kunne beskrives ved en afbildning

$$d : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$$

der til ethvert udfald $x \in \mathcal{X}$ tilordner en aktion $a = d(x)$.

Definition 12.1.2 ***Beslutningsregel***

En <u>beslutningsregel</u> eller en <u>decisionsregel</u> er en afbildning $d(\cdot)$ af værdimængden for observationerne ind i beslutningstagerens aktionsrum.

□

Idet vi indfører symbolet $\mathcal{F}(A; B)$ for mængden af afbildninger fra en mængde A ind i en mængde B ser vi, at mængden af beslutningsregler svarende til observationsrummet $\mathcal{X}$ og aktionsmængden $\mathcal{A}$ kan udtrykkes som

$$\mathcal{D} = \mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{A})$$

Der gælder at mængden $\mathcal{F}(A; B)$ er ækvivalent med mængden B^A, hvilket giver et indtryk af mægtigheden af mængden af beslutningsregler.

Betragter vi et beslutningsproblem med parameterrum Θ, aktionsrum $\mathcal{A}$ og gevinstfunktion $u(\cdot,\cdot)$ ser vi, at valget af en bestemt beslutningsregel $d(\cdot)$ fører til en <u>sammensat konsekvens</u>. For en bestemt værdi θ vil beslutningstageren modtage den stokastisk varierende gevinst $u(d(X), \theta))$, hvis fordeling er bestemt af $g(\cdot|\theta)$. En sammenligning mellem to beslutningsregler, selv for samme værdi af parameteren, vil således være en sammenligning mellem sammensatte konsekvenser. Vi vil derfor i det følgende antage at beslutningstageren har en konsistent præferencestruktur på mængden af sammensatte konsekvenser, d.v.s. at gevinstfunktionen $u(\cdot,\cdot)$ er en nyttefunktion.

Såfremt $u(\cdot,\cdot)$ er en nyttefunktion, finder vi nytten svarende til parameterværdien θ og beslutningsreglen $d(\cdot)$ ved udtrykket

$$u_1(\theta, d) = \mathrm{E}_{X|\theta}[u(\theta, d(X)] = \int u(\theta, d(x))g(x|\theta)\mu\{dx\} \tag{12.1.3}$$

Den herved etablerede afbildning

$$u_1 : \Theta \times \mathcal{F}(\mathcal{X};\mathcal{A}) \to \Theta \times \mathcal{A}^* \to \mathbb{R}$$

kan benyttes til at vurdere beslutningstagerens præferencer overfor beslutningsregler $d \in \mathcal{F}(\mathcal{X};\mathcal{A})$, ganske som vi i afsnit 10.2 sammenlignede aktionerne $a \in \mathcal{A}$. I mangel af en bedre betegnelse vil vi også benævne funktionen $u_1(\cdot,\cdot)$ givet ved (12.1.3) for nyttefunktionen. Det burde fremgå af sammenhængen, hvorvidt vi betragter nyttefunktionen $u_1(\cdot,\cdot)$ med en beslutningsregel som andet argument, eller nyttefunktionen $u(\cdot,\cdot)$ med en aktion som andet argument.

Det er naturligt at forsøge at indføre en partiel ordning af beslutningsreglerne i analogi med den ordning af aktionerne, vi indførte i afsnit 10.2.

Definition 12.1.3 ***Ordning af beslutningsregler***

En beslutningsregel d_1 siges at være bedre end en anden regel d_2, såfremt

$$u_1(\theta, d_2) \leq u_1(\theta, d_1) \quad \text{for alle } \theta \in \Theta$$

og såfremt

$$u_1(\theta, d_2) < u_1(\theta, d_1) \quad \text{for mindst eet } \theta \in \Theta$$

To beslutningsregler d_1 og d_2 siges at være ækvivalente, hvis

$$u_1(\theta, d_2) = u_1(\theta, d_1) \quad \text{for alle } \theta \in \Theta$$

□

Tilsvarende indfører vi

Definition 12.1.4 ***Admissible beslutningsregler***

En beslutningsregel $d(\cdot) \in \mathcal{D}$ siges at være admissibel, hvis der ikke findes nogle beslutningsregel i $\mathcal{D}$, som er bedre end d. □

Det er klart, at man kan kan nøjes med at undersøge de admissible beslutningsregler, hvis man blot kan afgrænse disse.

Ved abstrakte vurderinger af beslutningsregler vil det i en række tilfælde være bekvemt at supplere mængden af beslutningsregler til at inkludere blandede beslutningsregler.

Definition 12.1.5 ***Blandede og efterrandomiserede beslutningsregler***

Lad d_1 og d_2 være beslutningsregler. Ved den blandede beslutningsregel, $(d_1, d_2)_p$, vil vi forstå den regel, der fremkommer, når beslutningstageren med sandsynligheden p vælger reglen d_1 og med sandsynligheden $1-p$ vælger reglen d_2.

Tilsvarende vil vi ved den blandede regel, $(d_1, d_2, \ldots)_{p_1, p_2, \ldots}$ med $\Sigma p_j = 1$, forstå den regel, der fremkommer, når beslutningstageren med sandsynligheden p_j vælger reglen d_j. □

Definitionen udvides let til vilkårlige sandsynlighedsmål på mængden af beslutningsregler, således at vi almindeligt kan udtrykke mængden af blandede beslutningsregler ved

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{A})^*$$

For fuldstændighedens skyld nævner vi endelig de efterrandomiserede beslutningsregler, der fremkommer ved at man til ethvert udfald $x \in \mathcal{X}$ knytter en blandet aktion $a \in \mathcal{A}$. Mængden af efterrandomiserede beslutningsregler kan symboliseres ved $\mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{A}^*)$. Som hovedregel gælder, at mængden af efterrandomiserede beslutningsregler er mindre omfattende, end mængden af blandede regler.

Eksempel 12.1.1 ***Beslutningsregler ved valg af piloteringspæle***

En entrepenør står over for at skulle vælge piloteringspæle til en bygning. Det vides at den faste grund enten befinder sig i 10 meters dybde θ_1, eller

Tabel 12.1. Nytteværdien ved valg af piloteringspæle

Dybde af fast lag	Pælelængde a	
	a_1 10 m	a_2 15 m
θ_1: 10 m	0	-100
θ_2: 15 m	-400	-25

i 15 meters dybde θ_2. Han har valget mellem at benytte pæle af 10 meters længde a_1, eller 15 meter lange pæle a_2. Aktionernes nytteværdier fremgår af tabel 12.1.

Endvidere har entrepenøren mulighed for at foretage en grov bestemmelse af dybden af det faste lag ved at foretage en primitiv ekkomåling. Karakteristikken for ekkomåleudstyret fremgår af tabel 12.2, der angiver sandsynligheden for de tre mulige måleresultater $x_1 = 10$ m, $x_2 = 10$ m og $x_3 = 15$ m for hver af de betragtede jorddybder.

Tabel 12.2. Sandsynlighedsfordelingen for resultatet af ekkomålingen for en given dybde af det faste lag.

Dybde af fast lag	Resultat af ekkomåling x		
	10 m	12 m	15 m
θ_1: 10 m	0.6	0.3	0.1
θ_2: 15 m	0.1	0.2	0.7

Da der til hvert af de tre udfald x_1, x_2, x_3 er knyttet to mulige aktioner a_1, a_2, finder vi ialt 2^3 forskellige beslutningsregler. Nytten svarende til beslutningsreglen $d(\cdot)$, når den sande dybde er θ_i, fås som

$$u_1(\theta_i, d) = \sum_{j=1}^{3} u(\theta_i, d(x_j))g(x_j|\theta_i)$$

hvor $g(x_j|\theta_i)$ er angivet i tabel 12.2.

De otte beslutningsregler og de tilsvarende værdier af nyttefunktionen er vist i tabel 12.3.

Tabel 12.3. Entreprenørens beslutningsregler og de tilsvarende værdier af nyttefunktionen

Regel d_ν	Valg af aktion, hvis målingen er			Nytte	
	x_1 10 m	x_2 12 m	x_3 15 m	$u_1(\theta_1, d_\nu)$	$u_1(\theta_2, d_\nu)$
d_1	a_1	a_1	a_1	0	-400.0
d_2	a_1	a_1	a_2	-10	-137.5
d_3	a_1	a_2	a_1	-30	-325.0
d_4	a_1	a_2	a_2	-40	-62.5
d_5	a_2	a_1	a_1	-60	-362.5
d_6	a_2	a_1	a_2	-70	-100.0
d_7	a_2	a_2	a_1	-90	-287.5
d_8	a_2	a_2	a_2	-100	-25.0

Nyttemængden svarende til de otte beslutningsregler og blandinger imellem de otte regler er skitseret i Figur 12.1.

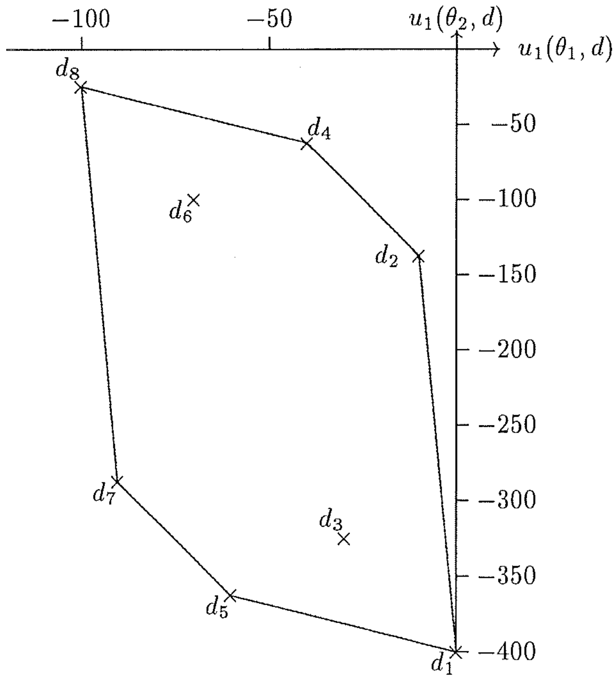
Det fremgår af figuren, at reglerne d_1, d_2, d_4 og d_8 er admissible; endvidere er blandinger mellem d_1 og d_2, mellem d_2 og d_4, og mellem d_4 og d_8 admissible. Vi bemærker endvidere, at nyttemængden svarende til beslutningsproblemet uden observationer er linien, der forbinder d_1 og d_8. Vi har således opnået en ganske væsentlig udvidelse af nyttemængden ved at inddrage informationen fra ekkomålingen. □

Mængden af mulige beslutningsregler, som beslutningstageren skal sammenligne, kan i mange tilfælde være ganske betydelig. Den følgende sætning viser, hvorledes denne mængde ofte kan reduceres ved at indskrænke sig til at betragte regler baseret på sufficiente størrelser.

Sætning 12.1.1 ***Det er tilstrækkeligt at betragte regler, baseret på sufficiente stikprøvefunktioner***

Betragt et statistisk beslutningsproblem givet ved (12.1.1) eller (12.1.2). Såfremt der findes en stokastisk variabel $T = T(X)$, der er sufficient for

Figur 12.1. Nyttemængden svarende til entreprenørens beslutningsregler ved valg af piloteringspæle.



parameteren θ, da vil der til enhver regel $d : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ eksistere en (eventuelt efterrandomiseret) regel

$$d_0 : T(\mathcal{X}) \to \mathcal{A}^*$$

der er baseret på observation alene af den sufficiente størrelse $T(X)$ og som er ækvivalent med d.

Bevis:
Lad reglen $d : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ være givet. Den efterrandomiserede regel d_0 bestemmes således at for enhver værdi af T, f.eks. $T = t$ vælges aktionen $d(x)$ i overensstemmelse med den betingede fordeling af X for givet $T = t$. (Denne fordeling er jo uafhængig af θ på grund af sufficiensen). Nytten af den herved definerede blandede aktion er

$$u(\theta, d_0(t)) = \mathsf{E}_{X|t}[u(\theta, d(X))]$$

og nytten svarende til den herved definerede beslutningsregel, $d_0 : T(\mathcal{X}) \to \mathcal{A}^*$, er

$$u_1(\theta, d_0(\cdot)) = \mathsf{E}_{T|\theta}[u(\theta, d_0(T)] = \mathsf{E}_{X|T}\mathsf{E}_{T|\theta}[u(\theta, d(X))] = \mathsf{E}_{X|\theta}[u(\theta, d(X))]$$

□

Eksempel 12.1.2 ***Beslutningsregel baseret på to gentagne observationer***

En produktionsproces producerer en række emner, således at afvigende emner optræder i overensstemmelse med en Bernoulliproces med parameteren θ. Det overvejes nu om man skal justere processen, eller om man skal fortsætte med at producere på det nuværende niveau θ. Det skønnes at gevinsten ved at fortsætte med at producere på niveauet θ uden at foretage justering er

$$u(\theta, a_1) = A + B\theta, \quad \text{hvor} \quad B < 0$$

mens gevinsten (inklusiv justeringsudgiften) ved at producere efter en justering er

$$u(\theta, a_2) = C$$

idet justeringen vides at sikre et bestemt procesniveau.

Man tager nu to emner tilfældigt ud af processen og ønsker da på grundlag af disse emners kvalitet at træffe beslutning om, hvorvidt processen skal justeres, eller ej. Idet vi lader $X_i = 0$ såfremt emnet er tilfredsstillende, og

$X_i = 1$ for et afvigende emne, har vi observationsrummet $\mathcal{X} = \{0,1\}\times\{0,1\}$ og den simultane tæthed af de to observationer er

$$g(x_1, x_2|\theta) = \theta^{x_1+x_2}(1-\theta)^{2-x_1-x_2} \quad \text{for} \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$$

Antag nu, at virksomheden ønsker at anvende beslutningsreglen d: juster, hvis begge de undersøgte emner er afvigende, eller hvis det første er tilfredsstillende og det andet er afvigende; ellers undlades justering. Nytten svarende til denne beslutningsregel er

$$u_1(\theta, d) = (1-\theta)(A + B\theta) + \theta C$$

Beregningen fremgår af tabel 12.4

Tabel 12.4. Bestemmelse af nytten svarende til en beslutningsregel ved justering af en produktionsproces

Observation (x_1, x_2)	Aktion $a = d(x_1, x_2)$	Sandsynlighed $g(x_1, x_2\|\theta)$	Gevinst $u(\theta, a)$
$(0,0)$	juster ej	$(1-\theta)^2$	$A + B\theta$
$(1,0)$	juster ej	$\theta(1-\theta)$	$A + B\theta$
$(0,1)$	juster	$\theta(1-\theta)$	C
$(1,1)$	juster	θ^2	C

Imidlertid er størrelsen $T(x_1, x_2)$ sufficient for θ med $T|\theta \in \mathrm{B}(2, \theta)$. Endvidere har vi $\mathsf{P}\;[X_1 = 0, X_2 = 1 | X_1 + X_2 = 1] = 0.5$, og den til d svarende efterrandomiserede regel er da

$$d_0(t) = \begin{cases} \text{juster ej} & \text{for } t = 0 \\ \text{juster med ssh } 0.5 & \text{for } t = 1 \\ \text{juster} & \text{for } t = 2 \end{cases}$$

Nytten svarende til reglen d_0 er

$$u(\theta, d_0) = (1-\theta)^2(A + B\theta) + 2\theta\{0.5(A + B\theta) + 0.5C\} + \theta^2 C$$

der reduceres til ovenstående udtryk for $u_1(\theta, d)$.

□

I en række tilfælde kan en forelagt beslutningsregel forbedres ved en teknik (Rao-Blackwellisering), foreslået af Rao og Blackwell:

Sætning 12.1.2 ***Forbedring af beslutningsregel, Rao-Blackwellisering***

Betragt et statistisk beslutningsproblem givet ved (12.1.1) eller (12.1.2), hvor aktionsrummet $\mathcal{A}$ er en konveks delmængde af $\mathbb{R}^k$. Såfremt nytten $u(\theta, a)$ er en konkav funktion af a for ethvert θ, og såfremt der findes en stikprøvefunktion $T = T(X)$, der er sufficient for θ, da gælder for enhver beslutningsregel $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, at reglen $d_0 : T(\mathcal{X}) \to \mathcal{A}$, defineret ved

$$d_0(t) = \mathsf{E}_{X|T}[d(X)]$$

er bedre end d, eller evt. ækvivalent med d.
Bevis:
Det følger af Jensens ulighed at

$$\mathsf{E}_{X|T=t}[u(\theta, d(X))] \leq u(\theta, d_0(t))$$

for ethvert θ og ethvert t, hvorfor

$$u_1(\theta, d) = \mathsf{E}_T[\mathsf{E}_{X|T=t}[u(\theta, d(X))]] \leq \mathsf{E}_T[u(\theta, d_0(T))] = u_1(\theta, d_0)$$

□

Eksempel 12.1.3 ***Rao-Blackwellisering ved kvadratisk tab***

Vi betragter en situation, hvor parameterrummet og aktionsrummet begge er den reelle akse, og hvor gevinstfunktionen svarer til et kvadratisk estimationstab,

$$u(\theta, a) = -(\theta - a)^2$$

Antag nu at beslutningstageren har mulighed for at observere en række uafhængige $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$-fordelte variable $X_1, X_2, \ldots, X_n$. For at give et ekstremt eksempel på indholdet af sætningen betragter vi den grove beslutningsregel

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$$

der svarer til at beslutningstageren bruger den første observation som skøn over den sande værdi af θ. Vi har

$$u_1(\theta, d) = -\sigma^2$$

Idet $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ er sufficient for θ finder vi at

$$d_0(t) = \mathsf{E}_{X_1,\ldots,X_n|T=t}[X_1]$$

er en mindst lige så god estimator som $d(\cdot)$.

Det gælder, at $d_0(t) = t/n$ og

$$u_1(\theta, d_0) = -\mathsf{E}_{T|\theta}[(T/n - \theta)^2] = -\mathsf{V}_{T|\theta}[T/n] = -\sigma^2/n$$

altså en kraftig forbedring af nytten

$\square$

12.2 Beslutninger under risiko

fil: stabeslb.tex 1998-05-12

Vi vil i dette afsnit betragte bestemmelsen af en optimal regel for beslutningstageren i et beslutningsproblem under risiko, dvs. et beslutningsproblem, hvor der foreligger en apriorifordeling for parameteren. Vi forestiller os altså, at beslutningstageren står over for et spil $(\Theta, \mathcal{A}, u(\cdot,\cdot))$ og at han desuden har en apriorividen om parameterværdien udtrykt ved en tæthed (eller frekvensfunktion) $w(\cdot)$ over Θ, samt endelig at han har mulighed for at observere en stokastisk variabel X med værdimængde $\mathcal{X}$ og med en tæthed (eller frekvensfunktion), der for enhver værdi af θ givet ved $g(\cdot|\theta)$.

Idet vi antager, at gevinstfunktionen $\{u(\cdot, a)\}a \in \mathcal{A}$ er en nyttefunktion, er det klart, hvad vi vil forstå ved en optimal beslutningsregel. Idet vi som før indfører nyttefunktionen svarende til en beslutningsregel $d \in \mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{A})$

$$u_1(\theta, d) = \mathsf{E}_{X|\theta}[u(\theta, d(X))] \quad \text{for} \quad \theta \in \Theta$$

finder vi apriorinytten svarende til en beslutningsregel d ved

$$\eta_1(d) = \mathsf{E}_\theta[u_1(\theta, d)] = \int u_1(\theta, d) w(\theta) \nu\{d\theta\} \tag{12.2.1}$$

Definition 12.2.1 ***Bayes- beslutningsregel, Bayesnytte***

Betragt et statistisk beslutningsproblem under risiko med mængden af beslutningsregler $\mathcal{D} = \mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{A})$ med de tilsvarende apriorinytter $\eta_1(\cdot)$. En optimal beslutningsregel er da en regel $d_0 \in \mathcal{D}$, der tilfredsstiller

$$\eta_1(d_0) = \sup_{d \in \mathcal{D}} \eta_1(d)$$

□

Såfremt d_0 er en optimal beslutningsregel, kalder vi d_0 en Bayesregel, og den tilsvarende nytte

$$\eta_1^* = \sup_{d \in \mathcal{D}} \eta_1(d)$$

kaldes Bayesnytten.

12.2.1 Ekstensiv form analyse

Det fremgår af (12.2.1) at såfremt vi har bestemt nyttefunktionen $u_1(\theta, d)$ svarende til enhver beslutningsregel $d \in \mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{A})$, da vil bestemmelsen af Bayesreglen formelt kunne gennemføres ved de metoder, der blev angivet i afsnit 10.2.

I tilfældet med endeligt mange parameterværdier θ vil man endvidere kunne bestemme Bayesbeslutningsreglen ud fra kendskabet til $u_1(\theta, d)$ ved en geometrisk betragtning af nyttemængden svarende til de blandede beslutningsregler $d \in \mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{A})^*$. Den geometriske bestemmelse, der er skitseret i figur 10.5, kan umiddelbart overføres til statistiske beslutningsproblemer.

Nedenstående eksempel viser den direkte bestemmelse af Bayesreglen ud fra kendskabet til nyttefunktionen $\{u_1(\cdot, d)\} d \in \mathcal{D}$.

Eksempel 12.2.1 ***Ekstensiv form analyse for piloteringseksemplet***

Vi betragter atter den situation, der blev skitseret i eksempel 12.1.1. Med baggrund i geologiske kort over området og undersøgelser af nabobebyggelsernes piloteringsforhold skønner entrepenøren apriori, at der er 70 % chance for at det faste lag ligger i 10 meters dybde, og 30 % chance for at laget ligger i 15 meters dybde. Han ønsker nu at supplere denne viden med en lydmåling.

For at afgøre hvilken beslutningsregel, han bør vælge, bestemmer entrepenøren nu apriorinytten (12.2.1) svarende til enhver af de mulige beslutningsregler. Man finder

$$\eta_1(d) = 0.7 u_1(\theta_1, d) + 0.3 u_1(\theta_2, d)$$

hvor $u_1(\theta, d)$ er bestemt i tabel 12.3. Apriorinytten svarende til de otte beslutningsregler er vist i tabel 12.5. Vi ser at den optimale beslutningsregel (Bayes-reglen) er regel d_4: vælg 10-meters pæle, hvis lydmålingen viser en dybde af 10 meter, ellers vælg 15-meters pæle. (For fuldstændighedens skyld har vi angivet apriorinytten svarende til samtlige beslutningsregler. Vi behøver dog kun at sammenligne apriorinytten svarende til de admissible regler d_1, d_2, d_4 og d_8).

Vi kunne naturligvis også have bestemt Bayesreglen geometrisk ved betragtning af nyttemængden i figur 12.1 på side 873. Det fremgår iøvrigt

Tabel 12.5. Entreprenørens beslutningsregler og de tilsvarende værdier af apriorinytten

Regel d_ν	Valg af aktion, ved observation			Nytte		Apriori-nytte
	x_1	x_2	x_3	$u_1(\theta_1, d_\nu)$	$u_1(\theta_2, d_\nu)$	$\eta_1(d)$
d_1	a_1	a_1	a_1	0	-400.0	-120.00
d_2	a_1	a_1	a_2	-10	-137.5	-48.25
d_3	a_1	a_2	a_1	-30	-325.0	-118.50
d_4	a_1	a_2	a_2	-40	-62.5	-46.75
d_5	a_2	a_1	a_1	-60	-362.5	-150.75
d_6	a_2	a_1	a_2	-70	-100.0	-79.00
d_7	a_2	a_2	a_1	-90	-287.5	-149.25
d_8	a_2	a_2	a_2	-100	-25.0	-77.50

såvel af den geometriske, som af den analytiske bestemmelse, at apriorinytten svarende til reglen d_2 ikke er væsentligt mindre end Bayesnytten $\eta_1^* = -46.75$. □

12.2.2 Præposteriorianalyse

Den direkte bestemmelse af Bayesreglen ved en ekstensiv form analyse kan let blive ganske omfattende, og det er derfor nærliggende at søge andre metoder til bestemmelse af Bayesreglen, der ikke forudsætter en eksplicit bestemmelse af funktionen $u_1(\cdot, \cdot)$, for samtlige mulige beslutningsregler.

Såfremt man allerede havde observeret værdien af X, $X = x$, kunne beslutningstageren benytte Bayes' sætning og opdatere sin apriorividen om parameteren til en aposteriorifordeling af θ efter observation af $X = x$. Efter denne opdatering ville han stå i en situation svarende til den, der er beskrevet i afsnit 10.2. Beslutningstageren skal jo blot vælge en aktion blandt aktionerne i A, og hans aktuelle viden om parameteren θ er udtrykt ved fordelingen af θ (aposteriorifordelingen). At denne fordeling er fremkommet som resultat af en opdatering af apriorifordelingen berører ikke hans valg af aktion. Han vil vælge den aktion, der optimerer hans forventede nytte under hensyntagen til den aktuelle viden om parameteren.

Ideen i en præposterioranalyse er, at man - før observation af udfaldet af X - for ethvert udfald x af X bestemmer aposteriorifordelingen for θ svarende til dette udfald, og bestemmer den optimale aktion $a^* = a^*(x)$ under denne fordeling af θ. Herved fremkommer der en beslutningsregel (nemlig en tilordning af en aktion til enhver observation). Beslutningsreglen er konstrueret således, at den valgte aktion er optimal i aposteriorifordelingen af θ svarende til pågældende observation. Nedenstående sætning viser, at hele beslutningsreglen er optimal, dvs. at vi opnår det samme resultat, som hvis vi havde gennemsøgt samtlige beslutningsregler i en ekstensiv-form analyse.

Til brug for beskrivelsen af præposteriorianalysen indfører vi aposteriorinytten af en aktion, efter observation af x:

Definition 12.2.2 ***Aposteriorinytte***

Lad et statistisk beslutningsproblem være givet ved komponenterne (12.1.2). For enhver observation $x \in \mathcal{X}$ og enhver aktion $a \in \mathcal{A}$ er aposteriorinytten af aktionen a, når x er observeret, givet ved

$$\eta(a|x) \overset{\text{DEF}}{=} \mathsf{E}_{\theta|X=x}[u(\theta, a)] \tag{12.2.2}$$

□

Størrelsen $\eta(a|x)$ kaldes også aposteriorinytten af a for givet x.

Sætning 12.2.1 ***Bestemmelse af optimal regel ved præposteriorianalyse***

Lad et statistisk beslutningsproblem være givet ved komponenterne (12.1.2). Da vil reglen $d_0(\cdot)$, bestemt ved

$$\eta(d_0(x)|x) = \sup_{a \in \mathcal{A}} \eta(a|x) \tag{12.2.3}$$

være en Bayesregel med Bayesnytten

$$\eta_1^* = \mathsf{E}_X[\eta(d_0(X)|X)] \tag{12.2.4}$$

Bevis:
Vi søger en regel, der maksimerer

$$\eta_1(d) = \int u_1(\theta, d) w(\theta) \nu\{d\theta\}$$

Ved benyttelse af (12.1.3) finder vi

$$
\begin{aligned}
\eta_1(d) &= \int \Big[\int u(\theta, d(x)) g(x|\theta) \mu\{dx\} \Big] w(\theta) \nu\{d\theta\} \\
&= \int \Big[\int u(\theta, d(x)) g(x|\theta) w(\theta) \nu\{d\theta\} \Big] \mu\{dx\}
\end{aligned}
$$

idet vi forudsætter at det er tilladt at ombytte integrationsrækkefølgen.

Benytter vi nu Bayes' sætning finder vi

$$
\begin{aligned}
\eta_1(d) &= \int [\int u(\theta, d(x)) h(\theta|x) \nu\{d\theta\}] k(x) \mu\{dx\} \qquad (12.2.5) \\
&= \int \eta(d(x)|x) k(x) \mu\{dx\}
\end{aligned}
$$

der viser at apriorinytten svarende til en beslutningsregel er forventningsværdien af den til enhver observation svarende forventede nytte i aposteriorifordelingen af θ.

Bayesreglen d_0 bestemmes som den beslutningsregel $d \in \mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{A})$, der maksimerer $\eta_1(d)$, dvs., vi skal til ethvert $x \in \mathcal{X}$ knytte en aktion $a \in \mathcal{A}$ således at (12.2.5) bliver størst mulig. Det er imidlertid klart, at integralet (12.2.5) opnår sin største værdi, når integranden maksimeres for ethvert x, dvs., hvis vi til ethvert x knytter den aktion, der maksimerer aposteriorinytten $\eta(a|x)$. Udtrykket for η_1^* fås nu ved indsættelse af den optimale regel i (12.2.5). □

Verbalt kan indholdet af sætningen udtrykkes:

Den optimale beslutningsregel kan bestemmes som den regel, der fremkommer ved at maksimere aposteriorinytten svarende til enhver observation x. Bayesnytten er den forventede værdi (i den marginale fordeling af X) af den optimale aposteriorinytte.

Såfremt vi ønsker at bestemme Bayes-beslutningsreglen ved en præposteriorianalyse, skal vi således for ethvert $x \in \mathcal{X}$ blot analysere et simpelt beslutningsproblem under risiko (men med forskellige fordelinger af θ for forskellige værdier af x), og vi kan derfor direkte overføre de metoder og resultater, der er beskrevet i afsnit 10.2. Svarende til enhver observation

x kan den optimale aktion bestemmes ved betragtning af nyttemængden, ved analyse af et beslutningstræ, eller ved analytiske metoder.

I det følgende eksempel vil vi illustrere hvorledes Bayesreglen kan betemmes ved hjælp af et beslutningstræ.

Eksempel 12.2.2 ***Præposteriorianalyse for piloteringseksemplet***

Vi betragter atter piloteringseksemplet fra de tidligere eksempler. Entrepenørens apriorifordeling for den sande dybde af det faste lag var bestemt ved

$$w(\theta_1) = 0.7 \quad \text{og} \quad w(\theta_2) = 0.3$$

og karakteristika for ekkomålingen fremgår af tabel 12.2. De simultane sandsynligheder for de mulige kombinationer af ekkomåling og sand dybde fås som

$$f(\theta_i, x_j) = g(x_j|\theta_i)w(\theta_i)$$

Den simultane fordeling er angivet i tabel 12.6.

Tabel 12.6. De simultane sandsynligheder for kombinationer af ekkomålingsresultat og sand dybde

Dybde af fast lag	Resultat af ekkomåling x_1 10 m	x_2 12 m	x_3 15 m	Marginal tæthed $w(\theta)$
θ_1: 10 m	0.42	0.21	0.07	0.70
θ_2: 15 m	0.03	0.06	0.21	0.30
Marginal tæthed $k(x)$	0.45	0.27	0.28	1.00

Aposteriorisandsynlighederne for θ efter observation af $X = x$ fås da som de relative fordelinger indenfor søjlerne i tabel 12.6. Aposteriorisandsynlighederne er angivet i tabel 12.7.

Vi kan nu bestemme aposteriorinytten af aktionen a, når x er observeret ved

$$\eta(a|x) = u(\theta_1, a)h(\theta_1, x) + u(\theta_2, a)h(\theta_2, x)$$

hvor $h(\theta_j|x)$ fremgår af tabel 12.7.

Tabel 12.7. Aposteriorisandsynlighederne $h(\theta_j|x_i)$ for dybden af det faste lag svarende til de mulige resultater af ekkomålingen

Ekkomåling	Dybde af fast lag	
	θ_1 : 10 m	θ_2: 15 m
x_1 : 10 m	0.933	0.067
x_2 : 12 m	0.778	0.222
x_3 : 15 m	0.250	0.750

Eksempelvis er aposteriorinytten ved at benytte 10-meters pæle, når lydmålingen viste 12 meter

$$\eta(a_1|x_2) = 0 \times 0.778 - 400 \times 0.222 = -88.8$$

På tilsvarende måde bestemmes aposteriorinytten af aktionerne a_1 og a_2 svarende til enhver af de mulige ekkomålinger x_1, x_2 og x_3. De beregnede værdier af aposteriorinytten er angivet i beslutningstræet, tabel 12.8. Beslutningstræet udfyldes nu fra højre mod venstre ved først at bestemme den optimale aktion svarende til ethvert observeret måleresultat. For resultatet x_2 fås eksempelvis

$$\eta(a_1|x_2) = -88.8 < \eta(a_2|x_2) = -83.3$$

således at den foretrukne aktion, når x_2 er observeret, er a_2: vælg 15-meter pæle. Ved en tilsvarende analyse af grenene svarende til x_1 og x_3 finder man sluttelig Bayesreglen

$$d_0(x) = \begin{cases} a_1 & \text{for } x = x_1 \\ a_2 & \text{for } x = x_2 \text{ og } x = x_3 \end{cases}$$

Reglen er naturligvis den samme, som vi fandt ved ekstensiv form analysen, og Bayesnytten

$$\eta_1(d_0) = \Sigma_{i=1}^3 k(x_i)\eta(d_0(x_i)|x_i) = -46.8$$

svarer naturligvis også til det resultat, vi tidligere fandt. □

Tabel 12.8. Et beslutningstræ for entrepenørens valg af piloteringspæle efter en ekkomåling

Ekkomåling $\{x, k(x)\}$	Pælevalg $\{a, \eta(a\|x)\}$	Sand dybde $\{\theta, h(\theta\|x), u(\theta, a)\}$
{10 m, 0.45 }	{10 m, -26.8}	{10m, 0.933, 0 }
		{15m, 0.067, -400}
	{15 m, -95.0}	{10m, 0.933, -100}
		{15m, 0.067, -25}
{12 m, 0.27 }	{10 m, -88.8}	{10m, 0.778, 0 }
		{15m, 0.222, -400}
	{15 m, -83.3}	{10m, 0.778, -100}
		{15m, 0.222, -25}
{15 m, 0.28 }	{10 m, -300.}	{10m, 0.250, 0 }
		{15m, 0.750, -400}
	{15 m, -43.8}	{10m, 0.250, -100}
		{15m, 0.750, -25}

12.2.3 Bayes beslutningsregler for nogle simple gevinstfunktioner for modeller med målestøj

I det følgende vil vi benytte sætning 12.2.1 til at bestemme løsningen til de statistiske beslutningsproblemer, der svarer til de simple gevinstfunktioner, der blev betragtet i afsnit 10.2.

Vi vil indledningsvis betragte de sædvanlige modeller, hvor der til enhver tilstand θ er mulighed for at foretage n observationer $X_1, X_2, \ldots, X_n$, der for givet θ er uafhængige og identisk fordelte med en tæthed, der afhænger af θ. Gevinstfunktionen $u(\cdot, \cdot)$ er en funktion af parameteren θ, ligesom apriorifordelingen $w(\cdot)$ angiver tætheden (eller frekvensfunktionen) for denne parameter θ. Vi kalder sådanne modeller for målestøjmodeller, idet modellerne udtrykker at vi foretager gentagne observationer af interesseparameteren θ, hvor alle observationer er behæftet med målestøj. For en given værdi af θ er observationerne uafhængige og identisk fordelt. Støjens indflydelse kan mindskes ved at foretage en række gentagne observationer (for samme værdi af θ).

En anden klasse af modeller, modeller for endelige populationer, vil blive behandlet i afsnit 12.2.4.

Vi indleder med at betragte avisdrengens problem.

Sætning 12.2.2 ***Avisdrengens problem***

Betragt et statistisk beslutningsproblem givet ved komponenterne (12.1.2), hvor

$$u(\theta, a) = \begin{cases} -(b-c)(a-\theta) & \text{for } \theta \le a \\ -c(\theta - a) & \text{for } a < \theta \end{cases}$$

med $0 < c < b$, og antag at a og θ kan antage alle reelle værdier i et interval.

Bayesreglen er da for ethvert x bestemt som løsningen a til

$$\int_{\theta \leq a} h(\theta|x)\nu\{d\theta\} = c/b$$

hvor $h(\cdot|x)$ angiver aposteriorifordelingen af θ for givet $X = x$.

Aposteriorinytten svarende til Bayesreglen er

$$\eta(d_0(x)|x) = b \int_{\theta \leq a} (\theta - \mathsf{E}\,[\theta|x])h(\theta|x)\nu\{d\theta\}$$

Bevis:
Sætningen følger direkte af sætning 10.2.3 og sætning 12.2.5.

□

Tabel 12.9 angiver løsningen til avisdrengens problem for en række almindelige stikprøvefordelinger under de konjugerede apriorifordelinger. Tabellen angiver desuden udtryk for aposteriorinytten samt den marginale fordeling af stikprøveresultatet.

Tabel 12.11 angiver Bayesnytten svarende til avisdrengens problem for de stikprøvefordelinger, for hvilke der kan angives et simpelt udtryk for Bayesnytten,

$$\eta_1(d_0) = \int \eta(d_0(x)|x)k(x)\mu\{dx\}$$

Tabel 12.9. Bayesreglen svarende til avisdrengens problem, dvs svarende til nyttefunktionen $u(\theta,a) = -(b-c)(a-\theta)$ for $\theta \le a$ og $u(\theta,a) = -c(\theta - a)$ for $a < \theta$

Stikprøvefordeling	Apriorifordeling	Bestemmelse af a $c/b =$	Aposteriorinytte $\eta(d_0(x)\|x)$ (bestemmelsen af a er angivet i den foregående kolonne
$\mathrm{B}(n,\theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha,\beta)$ (α,β) helt.	$\mathrm{Bet}(a;\alpha+x,\beta+n-x)$	$-\frac{b(\alpha+x)}{\alpha+\beta+n}\binom{\alpha+\beta+n-1}{\alpha+x}a^{\alpha+x}(1-a)^{\beta+n-x}$
$\mathrm{NB}(n,\theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha,\beta)$ (α,β) helt.	$\mathrm{Bet}(a;\alpha+n,\beta+x)$	$-\frac{b(\alpha+n)}{\alpha+\beta+n+x}\binom{\alpha+\beta+n+x-1}{\alpha+n}a^{\alpha+n}(1-a)^{\beta+x}$
$\mathrm{P}(n\theta)$	$\mathrm{G}(\alpha,1/\beta)$ α helt.	$\mathrm{G}(a;\alpha+x,1/(\beta+n))$ $(a^* = a(\beta+n))$	$-\frac{b(\alpha+x)}{(\alpha+x-1)!(\beta+n)}(a^*)^{\alpha+x}\exp(-a^*)$
$\mathrm{G}(n,\theta)$	$\mathrm{RG}(\alpha,\beta)$ α helt.	$\mathrm{RG}(a;\alpha+n,\beta+x)$ $(a^* = (\beta+x)/x)$	$-\frac{b(\beta+x)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-1)!}(a^*)^{\alpha+n-1}\exp(-a^*)$
$\mathrm{RPar}(\theta,n)$	$\mathrm{Par}(\beta,\mu)$	$\mathrm{Par}(a;\max\{\beta,x\},n+\mu)$ $(a^* = \max\{\beta,x\}/a)$	$-\frac{b(n+\mu)\max\{\beta,x\}}{(n+\mu-1)}(1-a^*)(a^*)^{n+\mu-1}$
$\mathrm{N}(n\theta,n\sigma^2)$	$\mathrm{N}(\mu,\sigma_0^2)$	$\mathrm{N}(a;\mu_1,\sigma_1^2)$ $(a^* = (a-\mu_1)/\sigma_1))$ $\mu_1 = (\mu/\sigma_0^2 + x/\sigma^2)\sigma_1^2$ $1/\sigma_1^2 = 1/\sigma_0^2 + n/\sigma^2$	$-\frac{b\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-(a^*)^2/2)$

Tabel 12.10. Marginale fordelinger svarende til kombinationerne af stikprøvefordeling og apriorifordeling i Tabel 12.9

Stikprøvefordeling	Apriorifordeling	Marginal fordeling af x $k(x)$
$\mathrm{B}(n,\theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha,\beta)$	$\mathrm{Pl}(n,\alpha,\beta+\alpha)$
$\mathrm{NB}(n,\theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha,\beta)$	$\mathrm{NPl}(n,\alpha,\beta+\alpha)$
$\mathrm{P}(n\theta)$	$\mathrm{G}(\alpha,1/\beta)$	$\mathrm{NB}(\alpha,\beta/(\beta+n))$
$\mathrm{G}(n,\theta)$	$\mathrm{RG}(\alpha,\beta)$	$\mathrm{RBet}(\alpha,n,\beta)$
$\mathrm{RPar}(\theta,n)$	$\mathrm{Par}(\beta,\mu)$	$\mathrm{BPar}(\beta,\mu,n)$
$\mathrm{N}(n\theta,n\sigma^2)$	$\mathrm{N}(\mu,\sigma_0^2)$	$\mathrm{N}(n\mu,n\sigma^2+n^2\sigma_0^2)$

Tabel 12.11. Bayesnytten svarende til avisdrengens problem, dvs svarende til nyttefunktionen $u(\theta, a) = -(b-c)(a-\theta)$ for $\theta \leq a$ og $u(\theta, a) = -c(\theta - a)$ for $a < \theta$

Stik-prøve-fordeling	Apriori-fordeling	Bayesregel $d_0(x) =$	Bestemmelse af a^* $c/b =$	Bayesnytte $\eta_1(d_0)$
$\mathrm{G}(n, \theta)$	$\mathrm{RGam}(\alpha, \beta)$ α heltal.	$\frac{\beta+x}{a^*}$	$\mathrm{RGam}(1/a^*; \alpha + n, 1)$	$-\frac{b\beta}{(\alpha-1)(\alpha+n-1)!}(a^*)^{\alpha+n-1}\exp(-a^*)$
$\mathrm{RPar}(\theta, n)$	$\mathrm{Par}(\beta, \mu)$	$\frac{\max(\beta,x)}{a^*}$	$\mathrm{Par}(1/a^*; 1, n + \mu)$	$-\frac{b(n+\mu)\mu n\beta}{(\mu-1)(n+1)(n+\mu-1)}(1-a^*)(a^*)^{n+\mu-1}$
$\mathrm{N}(n\theta, n\sigma^2)$	$\mathrm{N}(\mu, \sigma_0^2)$	$\mu_1 + a^*\sigma_1$ $\mu_1 = (\mu/\sigma_0^2 + x/\sigma^2)\sigma_1^2$ $1/\sigma_1^2 = 1/\sigma_0^2 + n/\sigma^2$	$\mathrm{N}(a^*; 0, 1)$	$-\frac{b\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{(-(a^*)^2/2\}$

For normalfordelte observationer med ukendt forventningsværdi og varians finder man

Sætning 12.2.3 ***Avisdrengens problem for normalt fordelte obs. med ukendt varians***

Betragt et statistisk beslutningsproblem givet ved komponenterne (12.1.2), hvor

$$u(\theta, a) = \begin{cases} -(b-c)(a-\theta) & \text{for } \theta \leq a \\ -c(\theta - a) & \text{for } a < \theta \end{cases}$$

med $0 < c < b$, og antag at $\mathcal{A} = \mathbb{R}$. Såfremt beslutningen baseres på observation af n uafhængige $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$-fordelte variable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ og såfremt apriorifordelingen af θ og σ^2 er således at $\sigma^2 \in \mathrm{RGam}(\alpha, \beta)$ og den betingede fordeling af θ for givet σ^2 er en $\mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2/m)$-fordeling, da er Bayesreglen:

$$d_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_1 + a^* \sqrt{\beta_1/\{(2\alpha+n)(m+n)\}}$$

$$\mu_1 = \frac{m\mu_0 + n\bar{x}.}{m+n} \tag{12.2.6}$$

med $\bar{x}. = \Sigma_{i=1}^n x_i/n$ og

$$\beta_1 = \Sigma_{i=1}^n (x_i - \bar{x}.)^2 + 2\beta + \frac{nm}{n+m}(\bar{x}. - \mu_0)^2 \tag{12.2.7}$$

og hvor a^* er c/b-fraktilen i t-fordelingen, dvs.

$$\mathrm{T}(a^*; 2\alpha + n, 0, 1) = c/b$$

Aposteriorinytten svarende til Bayesreglen er

$$\begin{aligned} \eta(d_0(\underline{x})|\underline{x}) \quad = \quad & \frac{-b\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{(2\alpha+n)(m+n)}} \; \frac{2\alpha+n+(a^*)^2}{2\alpha+n-1} \; \frac{(2\alpha+n]^{\alpha+n/2}}{\mathrm{B}(0.5, \alpha+n/2)} \\ & \times \{2\alpha+n+(a^*)^2\}^{-\alpha-(n+1)/2} \end{aligned}$$

og Bayesnytten er

$$\begin{aligned} \eta(d_0) \quad = \quad & \frac{-b\mathsf{E}\,\left[\sqrt{\beta_1}\right]}{\sqrt{(2\alpha+n)(m+n)}} \; \frac{2\alpha+n+(a^*)^2}{2\alpha+n-1} \; \frac{(2\alpha+n]^{\alpha+n/2}}{\mathrm{B}(0.5, \alpha+n/2)} \\ & \times \{2\alpha+n+(a^*)^2\}^{-\alpha-(n+1)/2} \end{aligned}$$

hvor $\mathsf{E}\,[\sqrt{\beta_1}]$ angiver forventningsværdien af β_1 i den marginale fordeling af observationerne,

$$\mathsf{E}\left[\sqrt{\beta_1}\right] = \sqrt{2\beta}\;\frac{\mathrm{B}(\alpha - 1/2, n/2)}{\mathrm{B}(\alpha, n/2)}$$

Bevis:
Vi bemærker først, at vi kan nøjes med at betragte beslutningsregler baseret på de sufficiente størrelser. Det følger nu af tabel 8.3, at den marginale aposteriorifordeling for (θ, σ^2) for givet (t, z) er en

$$\mathrm{T}(2\alpha + n, \mu_1, \sqrt{\beta_1/[(2\alpha + n)(m + n)]})\text{-fordeling}$$

med μ_1 givet ved 12.2.6 og β_1 givet ved (12.2.7). Beslutningsreglen og aposteriorinytten følger da af sætning 10.2.3.

Idet den marginale fordeling af størrelsen $Y = \beta_1 - 2\beta$ er en RBet$(\alpha, n/2, 2\beta)$-fordeling finder vi endelig udtrykket for Bayesnytten.

□

Sætning 12.2.4 ***Kvadratisk tab***

Betragt et statistisk beslutningsproblem givet ved komponenterne (12.1.2), hvor

$$u(\theta, a) = -(\theta - a)^2\,,$$

og antag at a og θ kan antage alle reelle værdier i et interval.

Bayesreglen $d_0(x)$ er da for ethvert x givet ved aposterioriforventningsværdien

$$d_0(x) = \mathsf{E}\,[\theta | X = x]$$

og aposteriorinytten svarende til Bayesreglen er

$$\eta(d_0(x)|x) = -\mathsf{V}\,[\theta | X = x]$$

Endelig er Bayesnytten

$$\eta_1(d_0) = -\{\,\mathsf{V}\,[\theta] - \mathsf{V}_{\theta}[\mathsf{E}\,[\theta|X]]\,\}$$

Bevis:
Sætningen følger direkte af sætning 10.2.5.

Udtrykket for Bayesnytten fås af

$$\eta_1(d_0) = -\mathsf{E}_X[\mathsf{V}_{\theta|X}[\theta]]\,,$$

der omformes ved benyttelse af sætning 0.1.1 i Oversigt over fordelinger med anvendelser i Statistik, IMM 1998.

□

Bemærkning 1 ***Beslutning under kvadratisk tab for endimensionale eksponentielle familier***

For de sædvanlige endimensionale eksponentielle familier af fordelinger, som vi har betragtet i afsnit 5 og i afsnittene 6.2 gælder jvf. Sætning 8.3.1 og (8.3.13), at aposterioriforventningsværdien af μ er

$$\boxed{d_0(\bar{x}) = \mathsf{E}\,[\mu|\bar{x}] = \frac{m/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n} = wm + (1-w)\bar{x}\,,}$$

hvor

$$w = \frac{1/\gamma}{1/\gamma + n}$$

og hvor m angiver apriorimiddelværdien af μ.

Endvidere finder vi af (8.3.8), at aposteriorinytten er

$$\boxed{\eta(d_0(\bar{x})|\bar{x}) = -\mathsf{V}\,[\mu|\bar{x}] = -\frac{\mathsf{E}\,[V(\mu)|\bar{x}]}{1/\gamma + n} = -\frac{1}{n}\,(1-w)\,\mathsf{E}\,[V(\mu)|\bar{x}]}$$

Bayesnytten $\eta_1(d_0)$ er præposteriorivariansen af μ (med modsat fortegn). Det følger da af (8.3.18), at

$$\boxed{\eta_1(d_0) = -\frac{\mathsf{E}\,[V(\mu)]}{1/\gamma + n} = -\frac{1}{n}\,(1-w)\,\mathsf{E}\,[V(\mu)]}$$

Tabel 12.12 angiver Bayesreglen ved kvadratisk tab for de almindelige stikprøvefordelinger under de konjugerede apriorifordelinger. Tabellen angiver desuden udtryk for aposteriorinytten samt for Bayesnytten svarende til de samme fordelinger. □

Bayesreglen, den tilsvarende aposteriorinytte og Bayesnytten svarende til kvadratisk tab

$$u(\mu, a) = -(\mu - a)^2$$

Stikprøve-fordeling af $X_i \mid \theta$	Struktur-fordeling $w(\cdot)$	Bayesregel $d_0(\bar{x}) = \mathsf{E}\,[\mu \mid \bar{x}]$	Aposteriorinytte $\eta(d_0(\bar{x}) \mid \bar{x}) = -\mathsf{V}\,[\mu \mid \bar{x}]$	Bayesnytte $\eta_1(d_0) = \mathsf{E}_{\,\bar{x}}[\eta(d_0(\bar{x}) \mid \bar{x})]$
$\mathrm{B}(1,p)$	$p \in \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$	$\pi_1 = \dfrac{\pi/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{1/\gamma + n + 1}$	$-\dfrac{\pi(1-\pi)}{(1+\gamma)}\,\dfrac{1}{(1/\gamma + n)}$
$\mathrm{Geo}(1,p)$	$p \in \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$	$\psi_1 = \dfrac{\psi/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\dfrac{\psi_1(1+\psi_1)}{1/\gamma + n - 1}$	$-\dfrac{\psi(1+\psi)}{(1-\gamma)}\,\dfrac{1}{(1/\gamma + n)}$
$\mathrm{P}(\mu)$	$\mu \in \mathrm{G}(\alpha, 1/\beta)$	$m_1 = \dfrac{m\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\dfrac{m_1}{1/\gamma + n}$	$-\dfrac{m}{1/\gamma + n}$
$\mathrm{Ex}(\mu)$	$\mu \in \mathrm{RGam}(\alpha, 1/\beta)$	$m_1 = \dfrac{m/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\dfrac{m_1^2}{1/\gamma + n - 1}$	$-\dfrac{m^2}{(1-\gamma)}\,\dfrac{1}{(1/\gamma + n)}$
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mathrm{N}(m, \sigma_0^2)$	$m_1 = \dfrac{m/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\dfrac{\sigma^2}{1/\gamma + n}$	$-\dfrac{\sigma^2}{1/\gamma + n}$

Tabel 12.12. Bayesreglen svarende til kvadratisk tab

Sætning 12.2.5 ***Estimation af en fraktil under kvadratisk tab***

Betragt et statistisk beslutningsproblem givet ved komponenterne (12.1.2), hvor $\theta = (\mu, \sigma)$ med $\mu \in \mathbb{R}$ og $\sigma \in \mathbb{R}_+$ og med

$$u((\mu,\sigma),a) = -(b\mu + c\sigma - a)^2/\sigma^2$$

med givne værdier af b og c og med $\mathcal{A} = \mathbb{R}$.

Såfremt beslutningen baseres på observation af n uafhængige $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-fordelte variable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ og såfremt apriorifordelingen af μ og σ^2 er således at $\sigma^2 \in \mathrm{RGam}(\alpha, \beta)$ og den betingede fordeling af μ for givet σ^2 er en $\mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2/m)$-fordeling, da er Bayesreglen:

$$d_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b\mu_1 + c\sqrt{0.5\beta_1}\;\frac{\Gamma(\alpha + (n+1)/2)}{\Gamma(\alpha + n/2 + 1)}$$

hvor

$$\mu_1 = \frac{m\mu_0 + n\overline{x}.}{m+n} \tag{12.2.8}$$

med $\overline{x}. = \Sigma_{i=1}^n x_i/n$ og

$$\beta_1 = \Sigma_{i=1}^n (x_i - \overline{x}.)^2 + 2\beta + \frac{nm}{n+m}(\overline{x}. - \mu_0)^2 \tag{12.2.9}$$

Aposteriorinytten og Bayesnytten svarende til Bayesreglen er

$$\eta(d_0(x)|x) \;=\; -\frac{b^2}{m+n} - c^2\left\{1 - \frac{\Gamma^2(\alpha + (n+1)/2)}{\Gamma(\alpha + n/2)\Gamma(\alpha + n/2 + 1)}\right\} \tag{12.2.10}$$

Bevis:
Vi bemærker først, at vi kan nøjes med at betragte beslutningsregler baseret på de sufficiente størrelser $(T, Z) = (\Sigma X_i, \Sigma(X_i - \overline{X}.)^2)$.

Ved differentiation af aposteriorinytten med hensyn til a ser vi, at den optimale aktion for $T = t$ og $Z = z$ bestemmes af

$$a\mathsf{E}\,[\sigma^{-2}|t,z] = b\mathsf{E}\,[\mu/\sigma^2|t,z] + c\mathsf{E}\,[\sigma^{-1}|t,z]$$

Ved anvendelse af relationerne i afsnit 8.3.9 finder vi da

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[\sigma^{-2}|t,z] &= \frac{2\Gamma(\alpha+n/2+1)}{\beta_1\Gamma(\alpha+n/2)} \\
\mathsf{E}\,[\mu/\sigma^{2}|t,z] &= \mu_1\mathsf{E}\,[\sigma^{-2}|t,z] \\
\mathsf{E}\,[\sigma^{-1}|t,z] &= \sqrt{\frac{2}{\beta_1}}\,\frac{\Gamma(\alpha+(n+1)/2)}{\Gamma(\alpha+n/2)}
\end{aligned}
$$

der ved indsættelse fører til den optimale beslutningsregel.

□

fil: stabeslc.tex 1998-05-12 Aposteriorinytten kan nu bestemmes af

$$\eta(d_0(\underline{x})|\underline{x}) = -b^2 \ \mathsf{E}\left[\frac{(\mu-\mu_1)^2}{\sigma^2}|t,z\right] - c^2 \ \mathsf{E}\left[1-\kappa/\sigma|t,z\right]$$

hvor

$$\kappa = \frac{\mathsf{E}\left[\sigma^{-1}|t,z\right]}{\mathsf{E}\left[\sigma^{-2}|t,z\right]} = \sqrt{\beta_1/2}\ \frac{\Gamma(\alpha+(n+1)/2)}{\Gamma(\alpha+n/2+1)}$$

Idet

$$\mathsf{V}\left[\mu|t,z\right] = \sigma^2/(n+k)$$

finder vi da udtrykket (12.2.10) for aposteriorinytten. Da aposteriorinytten er uafhængig af de observerede værdier af T og Z, vil Bayesnytten ligeledes være givet ved (12.2.10).

□

Eksempel 12.2.3 ***Estimation af fejlintensitet ved kvadratisk tab***

Ved produktionen af syntetisk klæde er man interesseret i antallet af fejl pr. meter klæde. På basis af stikprøveundersøgelser af en lang række produktioner har man fastslået at det gennemsnitlige antal fejl pr meter μ varierer fra produktion i overensstemmelse med en G(3, 1/2)-fordeling, uden at man har kunnet identificere og fjerne variationskilden. Udtrykt ved momenterne i apriorifordelingen har man altså

$$m_0 = \mathsf{E}\left[\mu\right] = 3/2 = 1.5 \ \ [\text{fejl/m}]$$

og

$$\gamma_0 = \frac{\mathsf{V}\left[\mu\right]}{\mathsf{E}\left[V_P(\mu)\right]} = 1/2$$

For at vurdere det gennemsnitlige antal fejl i en ny produktion vil man udtage en stikprøve bestående af 10 prøver, hver på en meter tilfældigt fra produktionen. Man anser en kvadratisk tabsfunktion $u(\mu, a) = -(\mu - a)^2$ for passende, og ønsker nu at bestemme den optimale beslutningsregel (estimator). (Vi antager at den nye produktion er så stor, at vi kan behandle problemet ved en målestøjsmodel. Vi vil senere (i eksempel 12.2.6 og eksempel 12.2.7 behandle estimationsproblemet ved en model for en endelig population).

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ angive antallet af fejl i de 10 prøver. For en given produktion μ, modelleres fordelingen af X_i ved uafhængige P(μ)-fordelte variable. Det fremgår da af tabel 12.12, at den optimale regel er

$$d_0(\bar{x}) = \frac{2 \times (3/2) + 10\bar{x}}{2 + 10}$$

med den tilhørende aposteriorinytte

$$\eta(d_0(\bar{x})|\bar{x}) = -\frac{3 + 10\bar{x}}{(2 + 10)^2}$$

Den optimale aktion kan fortolkes som et vægtet gennemsnit mellem apriorimiddel og stikprøvegennemsnit ved

$$d_0(\bar{x}) = m_1 = w m_0 + (1 - w)\bar{x} = 0.1667 \times 1.5 + 0.8333\ \bar{x}$$

idet

$$w = \frac{1/\gamma_0}{1/\gamma_0 + n} = \frac{2}{2 + 10} = 1/6 = 0.1667$$

Aposteriorinytten kan tilsvarende udtrykkes som

$$\eta(d_0(\bar{x})|\bar{x}) = -\ \frac{1 - w}{n}\ V_P(m_1) = -m_1(1 - w)/10\ ,$$

således at vi har

$$\eta(d_0(\bar{x})|\bar{x}) = -0.08333\ (0.1667 \times 1.5 + 0.8333\ \bar{x})$$

Såfremt man ved undersøgelse af en stikprøve på 10 prøver fra et parti ialt finder 30 fejl, svarende til $\bar{x} = 3$ [fejl/m], vil man altså benytte estimatet

$$d_0(\bar{x} = 3.0) = 0.1667 \times 1.5 + 0.8333 \times 3.0 = 0.25 + 2.5 = 2.75\ \ [\text{fejl/m}]$$

Den forventede nytte efter denne observation er

$$\eta(2.75|\bar{x} = 3.0) = -2.75 \times 0.08333 = -0.2292[\text{fejl/m}]^2$$

Såfremt man ialt havde fundet 6 fejl i de 10 prøver svarende til $\bar{x}$ = 0.6 [fejl/m], ville man benytte estimatet

$$d_0(\bar{x} = 0.6) = 0.1667 \times 1.5 + 0.8333 \times 0.6 = 0.25 + 0.5 = 0.75\ \ [\text{fejl/m}]$$

Den forventede nytte efter denne observation er

$$\eta(0.75|\bar{x} = 0.6) = -0.75 \times 0.08333 = -0.0625[\text{fejl/m}]^2$$

Vi bemærker, at da aposteriorivariansen afhænger af det observerede stikprøvegennemsnit, vil også aposteriorinytten afhænge af stikprøveresultatet. Før stikprøven udtages vil man imidlertid være interesseret i den forventede nytte ved at udnytte stikprøveinformationen. Denne forventede nytte fås ved at vægte de mulige aposteriorinytter med de sandsynligheder, hvormed de forskellige stikprøveresultater vil forekomme. Fordelingen af mulige stikprøvetotaler er givet ved den marginale fordeling, der er en NB$(3, 2/(2+10))$-fordeling. Denne vægtning er udført i tabel 12.12, der viser at apriorinytten (Bayesnytten) ved at bruge reglen $d_0(\cdot)$ er

$$\eta_1(d_0) = -\frac{3/2}{2+10} = -0.125[\text{fejl/m}]^2$$

Til sammenligning kan anføres, at apriorinytten svarende til den optimale aktion uden observationer $a^* = \mathsf{E}[\mu] = 1.5$ er $\eta(a^*) = -0.375$. Vi har således opnået en formindskelse af tabet.

□

Sætning 12.2.6 ***Det generaliserede avisdrengsproblem for normaltfordelte observationer***

Betragt et statistisk beslutningsproblem givet ved komponenterne (12.1.2), og antag at nyttefunktionen er

$$u(\mu, a) = \begin{cases} -l_1(a-\mu)^{\nu_1} & \text{for } \mu \le a \\ \\ -l_2(\mu - a)^{\nu_2} & \text{for } a < \mu \end{cases}$$

og at tætheden $g(\cdot|\mu)$ er tætheden for en $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-fordeling, samt at apriorifordelingen for μ er en $\mathrm{N}(\mu_0, \gamma_0\, \sigma^2)$-fordeling.

Bayesreglen $d_0(\bar{x})$ svarende til n observationer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er da

$$\boxed{d_0(\bar{x}) = \mu_1 + z\,\sqrt{\gamma_1}\,\sigma \qquad (12.2.11)}$$

med

$$\mu_1 = \frac{\mu_0/\gamma_0 + n\bar{x}}{1/\gamma_0 + n}$$

og

$$\gamma_1 = \frac{1}{1/\gamma_0 + n}$$

og z er løsning til

$$\nu_1 \, \mathrm{m}_{\nu_1 - 1}(-z) = \rho \, \nu_2 \, \mathrm{m}_{\nu_2 - 1}(z) \tag{12.2.12}$$

med

$$\rho = (l_2/l_1)(\sqrt{\gamma_1}\,\sigma)^{\nu_2 - \nu_1}$$

hvor m_ν er defineret i (10.2.39).

Bevis:

Det følger af afsnit 8.3.7, at aposteriorifordelingen af μ efter observation af stikprøveresultatet $x_1; x_2; \ldots; x_n$ er en $\mathrm{N}(\mu_1, \gamma_1\,\sigma^2)$-fordeling. Bayesreglen fås da af sætning 10.2.5, der også angiver aposteriorinytten

$$\eta(d_0(\bar{x})|\bar{x}) = -(\sqrt{\gamma_1}\,\sigma)^{\nu_1} l_1 \, \mathrm{m}_{\nu_1}(-z) - (\sqrt{\gamma_1}\,\sigma)^{\nu_2} l_2 \, \mathrm{m}_{\nu_2}(z)$$

Da aposteriorinytten ikke afhænger af observationerne, er Bayesnytten identisk med aposteriorinytten. □

Korollar 12.2.1 ***Approksimativ løsning til det generaliserede avisdrengsproblem***

Betragt beslutningsproblemet angivet i sætning 12.2.6.
Såfremt $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ gælder

$$d_0(\underline{x}) = \bar{x} + z\sigma/\sqrt{n} + (\mu_0 - \bar{x})/(n\gamma_0) + \mathrm{O}(n^{-3/2})$$

og

$$\eta^* = -(\sigma/\sqrt{n})^\nu \{l_1 \mathrm{m}_\nu(-z) + l_2 \mathrm{m}_\nu(z)\}\{1 + \mathrm{O}(n^{-1})\} \tag{12.2.13}$$

hvor z er løsning til

$$\frac{\mathrm{m}_{\nu-1}(-z)}{\mathrm{m}_{\nu-1}(z)} = \rho \tag{12.2.14}$$

med

$$\rho = l_2/l_1$$

Løsningen til 12.2.14 er tabelleret i Tabel 12.13 og Tabel 12.14 på side 904.

For $\nu_2 < \nu_1$ gælder

$$\boxed{\begin{aligned} d_0(\bar{x}) &= \bar{x} + \sigma/\sqrt{n}\left\{m - (\nu_1 + \nu_2 - 1)\frac{\ln m}{m}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m}\ln\left(\frac{l_2}{l_1}\ \sigma^{\nu_2-\nu_1}\frac{\nu_2\Gamma(\nu_2)}{\nu_1\sqrt{2\pi}}\right)\right\} + \mathrm{O}(n^{-1/2}m^{-2}) \end{aligned}}$$

med

$$m = \sqrt{(\nu_1 - \nu_2)\ln(n)}$$

og

$$\eta^* = -(\sigma m/\sqrt{n})^{\nu_1} l_1\{1 - \nu_1(\nu_1 + \nu_2 - 1)(\ln m)/m^2 + \mathrm{O}(m^{-2})\}$$

Bevis:
Vi har

$$\gamma_1 = \frac{1}{1/\gamma_0 + n} = \frac{1}{n}(1 + 1/(n\gamma_0))^{-1} = \frac{1}{n}\{1 - 1/(n\gamma_0) + \mathrm{O}(n^{-2})\}$$

således at vi får

$$\mu_1 = (\mu_0/\gamma_0 + n\bar{x})\gamma_1 = \bar{x} + (\mu_0 - \bar{x})/(n\gamma_0) + \mathrm{O}(n^{-2})$$

og

$$\sqrt{\gamma_1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\{1 - 1/(2\,n\gamma_0) + \mathrm{O}(n^{-2})\}$$

For $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ reduceres (12.2.12) til (12.2.14), og den optimale beslutningsregel bliver derfor

$$d_0(\bar{x}) = \mu_1 + z\sqrt{\gamma_1}\,\sigma$$

der ved indsættelse af udviklingen for μ_1 og $\sqrt{\gamma_1}$ fører til udviklingen af $d_0(\bar{x})$.

For $\nu_2 < \nu_1$ benytter vi udviklingerne

$$\mathrm{m}_\nu(z) = \phi(z)\Gamma(\nu+1)z^{-\nu-1}\{1 + \mathrm{O}(z^{-2})\}$$

for $z \to \infty$ og

$$\begin{aligned}\mathrm{m}_\nu(-z) &= z^\nu(1 + \nu(\nu-1)/(2z^2) + \mathrm{O}(z^{-4})) \\ &\quad + \phi(z)\Gamma(\nu+1)(-z)^{-\nu-1}(1 - (\nu+2)(\nu+1)/(2z^2) + \mathrm{O}(z^{-4}))\end{aligned}$$

for $z \to \infty$, der ved indsættelse og nogen reduktion fører til udviklingen af $d_0(\bar{x})$.

□

Tabel 12.13 og tabel 12.14 angiver løsningen til (12.2.14) for udvalgte kombinationer af ρ og ν. Der gælder symmetrirelationen $z(\rho) = -z(1/\rho)$, hvorfor løsningen kun er tabelleret for $\rho > 1$. Tabellen indeholder desuden de tilsvarende værdier af $\mathrm{m}_\nu(-z)$ og $\mathrm{m}_\nu(z)$ til brug for bestemmelse af Bayesnytten (12.2.13).

Bemærkning 1 ***Størrelsesorden af korrektioner til stikprøvegennemsnittet***

Udviklingen af $d_0(\bar{x})$ viser at første-ordens approximationen til den optimale aktion ganske enkelt er det observerede stikprøvegennemsnit, korrektionen hidrørende fra gevinstfunktionens asymmetri er af størrelsesordenen $1/\sqrt{n}$ og først derefter (af størrelsesordenen $1/n$) kommer korrektionen hidrørende fra apriorifordelingen.

□

Eksempel 12.2.4 ***Avisdrengens problem ved normalt fordelte observationer med kendt og med ukendt varians***

En virksomhed fremstiller et kemisk produkt i nogenlunde ensartede partier. Undervejs i produktionen har man mulighed for at korrigere tilsætningen af et bestemt enzym, såfremt den indledende recept ikke var tilfredsstillende. For at vurdere den nødvendige ekstra mængde udtages der ialt 10 stikprøver forskellige steder i produktionen og stikprøverne analyseres. Stikprøveresultatet $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ er direkte en indikator for den nødvendige mængde μ. Såfremt den krævede tilsætningsmængde er μ gælder der nemlig at $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ er uafhængige $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-fordelte.

Tabel 12.13. Hjælpefunktionen $m_\nu(\cdot)$
Tabel over løsningen z til
$m_{\nu-1}(-z) = \rho m_{\nu-1}(z)$
hvor $m_\nu(\cdot)$ er det ufuldstændige moment af ν'te orden for normalfordelingen:

$$m_\nu(z) = \int_z^\infty (u-z)^\nu \phi(u)du$$

	ρ						
ν	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
1.0	0.0	0.4307	0.6745	0.8416	0.9674	1.0676	1.1503
2.0	0.0	0.2760	0.4363	0.5492	0.6360	0.7065	0.7658
3.0	0.0	0.2170	0.3436	0.4331	0.5023	0.5587	0.6063
4.0	0.0	0.1843	0.2919	0.3681	0.4272	0.4753	0.5160
5.0	0.0	0.1628	0.2580	0.3255	0.3777	0.4204	0.4564
6.0	0.0	0.1475	0.2337	0.2948	0.3421	0.3808	0.4135

Tabel over $m_\nu(z)$, hvor z er løsning til
$m_{\nu-1}(-z) = \rho m_{\nu-1}(z)$

	ρ						
ν	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
1.0	0.3989	0.2200	0.1492	0.1116	0.0886	0.0731	0.0621
2.0	0.5000	0.3151	0.2361	0.1909	0.1612	0.1401	0.1242
3.0	0.7979	0.5238	0.4049	0.3356	0.2893	0.2558	0.2303
4.0	1.5000	1.0043	0.7878	0.6607	0.5752	0.5130	0.4653
5.0	3.1915	2.1615	1.7100	1.4440	1.2645	1.1333	1.0324
6.0	3.1915	2.2440	1.8166	1.5600	1.3843	1.2545	1.1536

Tabel over $m_\nu(-z)$, hvor z er løsning til
$m_{\nu-1}(-z) = \rho m_{\nu-1}(z)$

	ρ						
ν	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
1.0	0.3989	0.6508	0.8236	0.9533	1.0560	1.1407	1.2124
2.0	0.5000	0.7611	0.9543	1.1106	1.2433	1.3591	1.4622
3.0	0.7979	1.1851	1.4762	1.7162	1.9230	2.1064	2.2719
4.0	1.5000	2.2006	2.7307	3.1708	3.5528	3.8936	4.2030
5.0	3.1915	4.6475	5.7531	6.6743	7.4770	8.1952	8.8494
6.0	3.1915	4.4880	5.4497	6.2399	6.9216	7.5271	8.0753

Tabel 12.14. Hjælpefunktionen $m_\nu(\cdot)$ (fortsat)
Tabel over løsningen z til
$m_{\nu-1}(-z) = \rho m_{\nu-1}(z)$
hvor $m_\nu(\cdot)$ er det ufuldstændige moment af ν'te orden for normalfordelingen:

$$m_\nu(z) = \int_z^\infty (u-z)^\nu \phi(u) du$$

(fortsat)

	ρ					
ν	8.0	9.0	10.0	13.0	16.0	20.0
1.0	1.2806	1.2816	1.3352	1.4652	1.5647	1.6684
2.0	0.8168	0.8616	0.9015	0.9999	1.0770	1.1589
3.0	0.6474	0.6835	0.7158	0.7959	0.8590	0.9264
4.0	0.5511	0.5821	0.6098	0.6786	0.7329	0.7911
5.0	0.4876	0.5151	0.5397	0.6008	0.6491	0.7009
6.0	0.4418	0.4667	0.4890	0.5445	0.5884	0.6355

Tabel over $m_\nu(z)$, hvor z er løsning til
$m_{\nu-1}(-z) = \rho m_{\nu-1}(z)$

	ρ					
ν	8.0	9.0	10.0	13.0	16.0	20.0
1.0	0.0538	0.0473	0.0422	0.0317	0.0252	0.0197
2.0	0.1117	0.1017	0.0934	0.0754	0.0634	0.0526
3.0	0.2100	0.1935	0.1798	0.1493	0.1286	0.1093
4.0	0.4272	0.3961	0.3700	0.3117	0.2717	0.2341
5.0	0.9517	0.8855	0.8298	0.7051	0.6190	0.5375
6.0	1.0723	1.0050	0.9482	0.8192	0.7289	0.6422

Tabel over $m_\nu(-z)$, hvor z er løsning til
$m_{\nu-1}(-z) = \rho m_{\nu-1}(z)$

	ρ					
ν	8.0	9.0	10.0	13.0	16.0	20.0
1.0	1.2744	1.3289	1.3774	1.4969	1.5900	1.6881
2.0	1.5554	1.6407	1.7193	1.9245	2.0965	2.2905
3.0	2.4234	2.5635	2.6940	3.0412	3.3394	3.6838
4.0	4.4886	4.7520	4.9996	5.6635	6.2399	6.9128
5.0	9.4529	10.015	10.543	11.964	13.205	14.663
6.0	8.5725	9.0452	9.4815	10.650	11.663	12.845

Da en overdosis af det pågældende enzym har visse uønskede virkninger er det af interesse at undgå at overdosere. Man benytter derfor en tabsfunktion, der udtrykker at man skønner det 3 gange så dyrt at overestimere tilsætningsmængden med en enhed, end at underestimere:

$$u(\mu, a) = \begin{cases} -3(a-\mu) & \text{for } \mu \leq a \\ -(\mu - a) & \text{for } a < \mu \end{cases}$$

Til illustration af beregningerne vil vi behandle problemet, såvel svarende til den simple situation med kendt (fast) målestøj σ^2, som den mere sammensatte situation med varierende målestøj.

Fast varians: Vi antager først at variansen på stikprøveresultaterne σ^2 er kendt, $\sigma^2 = 25$. Desuden har man erfaring for at den nødvendige tilsætningsmængde μ varierer fra produktion til produktion i overensstemmelse med en $\mathrm{N}(20, 125)$-fordeling. Med den sædvanlige notation har man altså $\gamma_0 = 5$, idet apriorivariansen $\sigma_0^2 = 5\sigma^2$

Antag nu at en stikprøve bestående af 10 prøver gav anledning til $\bar{x} = 18$ og $\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 200$. (Vi har ikke brug for skønnet over stikprøvevariansen, da vi jo ved at den er $\sigma^2 = 25$, men vi noterer at stikprøvevariansen $s^2 = \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2/9 = 22.22$ ikke strider mod denne antagelse.

Vi finder da, at aposteriorifordelingen af μ er en $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$-fordeling med

$$\sigma_1^{-2} = \frac{1}{125} + \frac{10}{25}$$

dvs

$$\sigma_1^2 = (1.57)^2$$

og

$$\mu_1 = \left(\frac{20}{125} + \frac{180}{25}\right) 1.57^2 = 18.04$$

Den standardiserede aktion a^* bestemmes som 25 % fraktilen i normalfordelingen, dvs som løsning til

$$\Phi(a^*) = 0.25$$

Af normalfordelingstabellen finder man da $a^* = -0.67$, således at man finder den optimale aktion

$$d_0(\bar{x} = 18) = 18.04 - 0.67 \times 1.57 = 16.99$$

Den tilsvarende aposteriorinytte er

$$\eta(16.99|\bar{x} = 18) = -4\sigma_1\phi(a^*)$$

Ved beregning af normalfordelingstætheden finder man

$$\phi(-0.67) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.67^2/2) = 0.3187$$

således at man finder aposteriorinytten

$$\eta(16.99|\bar{x} = 18) = -4 \times 1.57 \times 0.3187 = -2.00$$

Det fremgår af tabel 12.9, at aposteriorinytten er uafhængig af stikprøveresultatet, således at Bayesnytten ligeledes er

$$\eta^* = -2.00$$

Varierende varians: Vi antager nu i stedet at prøvningsusikkerheden (produktionens inhomogenitet), σ^2, varierer fra parti til parti i overensstemmelse med en RGam$(5, 100)$-fordeling. Fordelingen har forventningsværdi $\mathsf{E}\,[\sigma^2] = 100/4 = 25$ og varians $\mathsf{V}\,[\sigma^2] = 25^2/3 = (14.4)^2$. Desuden antager vi at den nødvendige tilsætningsmængde for givet σ^2 variererer i overensstemmelse med en N$(20, 5\sigma^2)$-fordeling

Aposteriorifordelingsforholdene efter observation af 10 prøver med

$$\bar{x} = 18 \quad \text{og} \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 200$$

fremgår af tabel 8.3.

Man finder skalaparameteren β_1 i aposteriorifordelingen af σ^2

$$\begin{aligned}\beta_1 &= z + 2\beta + \frac{10/5}{1/5+10}(\bar{x} - 20)^2 \\ &= 200 + 200 + 19.61 = 419.61\end{aligned}$$

og formparameteren α_1 bliver

$$\alpha_1 = \alpha + n/2 = 5 + 5 = 10$$

hvorved man finder, at aposteriorifordelingen af σ^2 er en RGam$(10, 419.61/2)$-fordeling med forventningsværdi

$$\mathsf{E}\left[\sigma^2 | s^2 = 22.22, \bar{x} = 18\right] = 419.61/(2 \times 9) = 23.31$$

og varians

$$\mathsf{V}\left[\sigma^2 | s^2 = 22.22, \bar{x} = 18\right] = 23.31^2/8 = (8.24)^2$$

Vi bemærker, at stikprøvegennemsnittet også giver information om variansen, da nemlig placeringen af μ, (dvs. $\bar{x}$) i forhold til μ_0 også har information om σ^2 (svarende til en enkelt frihedsgrad). Aposteriorimiddelværdien bliver som før

$$\mu_1 = \left(\frac{20}{125} + \frac{180}{25}\right) 1.57^2 = 18.04$$

Idet parameteren

$$\sqrt{\frac{\beta_1}{(2\alpha + n)(m+n)}} = \sqrt{\frac{419.61}{10 \times (10 + 1/5)}} = 1.40$$

finder vi, at den marginale aposteriorifordeling af μ bliver en $\mathrm{T}(20, 18.04, 1.40)$-fordeling.
Vi bemærker, at T-aposteriorifordelingen har fået forøget frihedsgraderne med $n = 10$ i forhold til T-apriorifordelingen, svarende til den ekstra frihedsgrads information, vi fik ved inddragelse af leddet $(\bar{x} - 20)^2$ i bestemmelsen af β_1

Vi finder nu 25 % fraktilen i t-fordelingen med 20 frihedsgrader ved opslag i tabel over t-fordelingen. Man får $a^* = -0.687$, hvilket er lidt mere ekstremt, end den tilsvarende normalfordelingsfraktil, svarende til at t-fordelingen har tykkere haler, end normalfordelingen.

Den optimale aktion bliver da ifølge sætning 12.2.3

$$d_0(\bar{x} = 18, s^2 = 22.22) = 18.04 - 0.687 \times 1.40 = 17.08$$

og ved indsættelse i udtrykket for den tilsvarende aposteriorinytte fås

$$\eta(17.08 | \bar{x} = 18, s^2 = 22.22) = -1.86$$

Endelig finder man Bayesnytten til

$$\eta^* = -0.53$$

At Bayesnytten er nærmere ved nul i tilfældet med en varierende varians skyldes, at bidraget fra de nøjagtige produktioner (med en lille værdi af σ^2) vejer stærkere i middelgevinsten, end bidragene fra de mere inhomogene prouktioner (på grund af RGam-fordelingens skævhed). □

Eksempel 12.2.5 ***Det generaliserede avisdrengs problem ved normalt fordelte observationer med kendt varians***

Til illustration af beregningerne ved estimation under et asymmetrisk tab vil vi igen betragte situationen, der blev behandlet i Eksempel 12.2.4, idet dog nu vil antage at tabet ved fejlestimation er proportionalt med kvadratet på estimationsfejlen. Som tidligere vil vi antage, at det er 3 gange så dyrt at overestimere med en given mængde, som at underestimere med den samme mængde. Vi vil således antage, at gevinstfunktionen er givet ved

$$u(\mu, a) = \begin{cases} -3(a-\mu)^2 & \text{for } \mu \leq a \\ -(\mu - a)^2 & \text{for } a < \mu \end{cases}$$

Vi antager som tidligere, at målingerne $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ er uafhængige $\mathrm{N}(\mu, 5^2)$-fordelte for en given produktion, og at tilsætningsbehovet μ varierer fra produktion til produktion i overensstemmelse med en $\mathrm{N}(20, 5 \times 5^2)$-fordeling. Parametrene i aposteriorifordelingen af μ efter observation af $\bar{x}$ bliver da

$$\mu_1 = \frac{20/5 + 10\ \bar{x}}{1/5 + 10} = 0.02 \times 20 + 0.80 \times \bar{x}$$

og

$$\gamma_1 = \frac{1}{1/5 + 10} = 0.098 = (0.3131)^2$$

Den optimale beslutningsregel svarende til et observeret stikprøvegennemsnit $\bar{x}$ fås da af (12.2.11) som

$$d_0(\bar{x}) = 0.02 \times 20 + 0.80 \times \bar{x} - 0.4363 \times 0.3131 \times 5$$

idet den generaliserede 25 % fraktil ($\rho = 1/3$) svarende til $\nu - 1 = 2 - 1$ fås ved at benytte Tabel 12.13 for $\nu = 2$ og $\rho = 3$. Værdien $z = 0.4363$ der aflæses for $\rho = 3$ angiver 75 % fraktilen. Den ønskede 25 % fraktil er da $z = -0.4363$.

For $\bar{x} = 18.0$ får man da

$$d_0(\bar{x} = 18) = 18.04 - 0.4363 \times 1.57 = 17.36$$

For at bestemme aposteriorinytten benytter vi atter Tabel 12.13. Idet vi går ind i tabellen med værdierne $\nu = 2$ og $\rho = 3$ finder vi direkte af tabellen, at $m_2(0.4363) = 0.2361$ og $m_2(-0.4363) = 0.9543$. Vi får da aposteriorinytten svarende til den optimale beslutning efter $n = 10$ observationer

$$\begin{aligned}\eta(d_0(\bar{x} = 18.0)|\bar{x} = 18.0) &= -(1.57)^2\{3 \times \mathrm{m}_2(0.4363) + \mathrm{m}_2(-0.4363)\} \\ &= -(1.57)^2\{3 \times 0.2361 + 0.9543\} \\ &= -(1.57)^2\{0.7083 + 0.9543\} = -4.10\end{aligned}$$

Vi ser, at ved at benytte den generaliserede 25 % fraktil $z = -0.4363$ opnår vi at det forventede tab fra overestimation $(1.57)^2 0.7083$ er i balance med det forventede tab fra underestimation $(1.57)^2 0.9543$.

Da aposteriorinytten kun afhænger af aposteriorivariansen $\gamma_1\sigma^2$, og ikke af stikprøveresultatet $\bar{x}$, er Bayesnytten tilsvarende

$$\eta^* = -4.10$$

Havde vi i stedet benyttet det approximative resultat i korollaret til Sætning 12.2.6, havde vi fundet

$$\begin{aligned}d_0(\bar{x} = 18) &\simeq 18.0 - 0.4363 \times 5/\sqrt{10} + (20 - 18)/50 \\ &= 18.0 - 0.4363 \times 1.58 + 0.04 = 17.35\end{aligned}$$

med den approximative nytte

$$\eta(d_0(\bar{x} = 18.0)|\bar{x} = 18.0) \simeq -(5/\sqrt{10})^2\{3 \times 0.2361 + 0.9543\} = -4.16$$

Da stikprøvestørrelsen $n = 10$ er rimeligt stor i forhold til den relative aprioripræcision $1/\gamma_0 = 0.2$, er approximationen ganske god.

Ved sammenligning med resultatet svarende til den lineære tabsfunktion, $\nu = 1$ ser vi at den generaliserede 25 % fraktil $z = -0.4363$ ligger nærmere fordelingens tyngdepunkt, end 25 % fraktilen $u = -0.67$, der blev benyttet under den lineære tabsfunktion. Asymmetrien mellem over- og underestimationstab har altså ikke så stor effekt under den kvadratiske tabsfunktion, som under et lineært tab.

Til gengæld giver den kvadratiske tabsfunktion anledning til et større forventet tab ved denne stikprøvestørrelse, end den lineære tabsfunktion.

Dette skyldes indflydelsen fra store fejlestimationer. Denne effekt mindskes imidlertid ved større stikprøver. Ved betragtning af udtrykket for Bayesnytten finder vi at Bayesnytten går mod nul som $-(\sigma/\sqrt{n})^{\nu}$. Det vil sige, at for store stikprøver vil eksempelvis Bayesnytten svarende til en kvadratisk tabsfunktion være nærmere nul, end Bayesnytten svarende til en lineær tabsfunktion, idet aposteriorifordelingen vil være så koncentreret omkring den sande værdi, at indflydelsen fra fejlestimationer større end een enhed vil være forsvindende. □

I eksemplerne 12.2.4 og 12.2.5 har vi behandlet det samme problem under lidt varierende antagelser om apriorividen og tabsstruktur. I tabel 12.15 er resultaterne resumeret, og desuden er der foretaget en sammenligning med de resultater, man ville have fundet, såfremt beslutningen havde været baseret alene på apriorifordelingen.

Tabel 12.15. Avisdrengens problem ved normaltfordelte observationer under forskellige aprioriantagelser og forskellige tabsstrukturer. For givet μ antages $X_1, \ldots, X_{10}$ at være $N(\mu, \sigma^2)$-fordelt. Man observerer $\bar{x} = 18.0$, $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 200$

Gevinstfkt $\mu < a$ $a < \mu$	$-3(a-\mu)$ $-(\mu-a)$	$-3(a-\mu)$ $-(\mu-a)$	$-3(a-\mu)^2$ $-(\mu-a)^2$
Aprioriford. af σ^2	$\sigma^2 = 5^2$	$\sigma^2 \in \mathrm{RGam}(5, 100)$	$\sigma^2 = 5^2$
$\mathsf{E}[\sigma^2]$ $\mathsf{V}[\sigma^2]$	5^2 0	5^2 $(14.4)^2$	5^2 0
Aprioriford. af $\mu\|\sigma^2$	$\mathrm{N}(20, 5 \times 5^2)$	$\mathrm{N}(20, 5\sigma^2)$	$\mathrm{N}(20, 5 \times 5^2)$
Aprioriford. af μ	$\mathrm{N}(20, 5 \times 5^2)$	$\mathrm{T}(10, 20, 10)$	$\mathrm{N}(20, 5 \times 5^2)$
Aktion uden obs. a	$20 - 0.67\sqrt{125}$ 12.51	$20 - 0.70\sqrt{100}$ 13.00	$20 - 0.44\sqrt{125}$ 15.06
Bayesnytte uden obs	-14.25	-13.96	-208
Aposterioriford. af σ^2	$\sigma^2 = 5^2$	$\sigma^2 \in \mathrm{RGam}(10, 419.61)$	$\sigma^2 = 5^2$
$\mathsf{E}[\sigma^2]$ $\mathsf{V}[\sigma^2]$	5^2 0	$(4.83)^2$ $(8.24)^2$	5^2 0
Aposterioriford. af μ	$\mathrm{N}(18.04, (1.57)^2)$	$\mathrm{T}(20, 18.04, 1.40)$	$\mathrm{N}(18.04, (1.57)^2)$
Aktion efter obs. $d_0(\bar{x})$	$18.04 - 0.67 \times 1.57$ 16.99	$18.04 - 0.687 \times 1.40$ 17.08	$18.04 - 0.44 \times 1.57$ 17.35
Aposteriorinyt.	-2.00	-1.86	-4.10
Bayesnytte	-2.00	-0.53	-4.10

12.2.4 Bayes beslutningsregler for nogle simple tabsfunktioner for modeller for endelige populationer

Vi vil her give en diskussion af nogle simple modeller for beslutning under risiko, når beslutningen vedrører en endelig population, og beslutningen baseres på en stikprøve, udtaget ved simpel tilfældig udvælgelse fra populationen.

Vi vil antage at populationen består af N distinkte elementer $1, 2, \dots N$ med værdierne $y_1, y_2, \dots y_N$, og at apriorifordelingen af populationsværdierne er af formen

$$f_N(y_1, y_2, \dots, y_N; w(\cdot)) = \int \left[\prod_{i=1}^{N} g(y_i|\theta)\right] w(\theta)\nu\{d\theta\} \qquad (12.2.15)$$

I forbindelse med betragtninger af endelige populationer vil vi kalde fordelingen med tæthed $g(\cdot|\theta)$ for procesfordelingen, og fordelingen af θ med tæthed $w(\cdot)$ vil vi betegne apriorifordelingen af procesparameteren.

Vi antager, at der udtages en stikprøve af størrelsen n fra populationen. Værdierne af stikprøvens elementer vil blive betegnet $X_1, X_2, \dots, X_n$, og værdierne af de resterende elementer i populationen betegnes med $X'_1, \dots, X'_{N-n}$ med de resulterende udfald henholdsvis $x_1, x_2, \dots, x_n$ og $x'_1, \dots, x'_{N-n}$. For et givet stikprøveresultat $x_1, x_2, \dots, x_n$ gælder altså at værdierne $x_1, x_2, \dots, x_n$ og $x'_1, \dots, x'_{N-n}$ tilsammen udgør populationen $y_1, \dots, y_N$.

Det synes naturligt at skelne mellem situationer, hvor beslutningen vedrører hele populationen, og de situationer, hvor konsekvenserne af beslutningen kun afhænger af den ikke-undersøgte del af populationen, således som det for eksempel er tilfældet ved en destruktiv prøvning af stikprøven. I begge tilfælde vil vi antage at konsekvenserne kun afhænger af populationsværdierne, og således ikke af den indbyrdes rækkefølge af disse værdier.

Såfremt værdimængden for det enkelte populationselement er $\mathcal{X}$ har vi således et beslutningproblem med parameterrummet $\mathcal{X}^N$, aktionsmængden $\mathcal{A}$ og en nyttefunktion, der enten er af formen

$$u_r : \mathcal{X}^{N-n} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R} \qquad (12.2.16)$$

svarende til at aktionens konsekvenser kun afhænger af den ikke-undersøgte del af populationen, eller af formen

$$u_t : \mathcal{X}^N \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \tag{12.2.17}$$

svarende til at den valgte aktion har konsekvenser, der afhænger af hele populationen, inklusive stikprøven. Det sidste tilfælde vil sædvanligvis kunne reduceres til et udtryk af formen (12.2.16), idet stikprøveresultatet jo er kendt, når aktionen fastlægges.

En beslutningsregel er en afbildning

$$d : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{A}$$

dvs. at mængden af beslutningsregler som tidligere kan symboliseres ved $\mathcal{D} = \mathcal{F}(\mathcal{X}^n; \mathcal{A})$.

Såfremt konsekvenserne af beslutningen kun afhænger af den ikke-undersøgte del af populationen, kan problemet formuleres som et problem vedrørende *procesparameteren.*

Sætning 12.2.7 ***Ækvivalens med problem vedrørende procesparameteren***

Betragt et beslutningsproblem vedrørende en endelig population $y_1, y_2, \ldots y_N$ og antag at nyttefunktionen er af formen 12.2.16. Såfremt vi sætter

$$u_0(\theta, a) = \mathsf{E}\left[u_r(X_1', X_2', \ldots, X_{N-n}')|\theta\right] \tag{12.2.18}$$

vil det givne beslutningsproblem med apriorifordeling (12.2.15) være ækvivalent med et beslutningsproblem vedrørende procesparameteren θ i fremstillingen af aprioritætheden. Nyttefunktionen for det afledte problem er netop (12.2.18), og mængden af beslutningsregler er den samme for begge problemer.

Bevis:

Vi skal blot vise at apriorinytten svarende til en beslutningsregel er den samme for begge problemer. Apriorinytten $\eta_r(d)$ svarende til problemet

$$\{\mathcal{X}^n, \mathcal{A}, u_r(\cdot,\cdot), f_N(\cdot)\}$$

er

$$\eta_r(d) = \int_{\mathcal{X}^N} u_r(\mathbf{x}', d(\mathbf{x})) f_N(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \mu\{d\mathbf{x}', d\mathbf{x}\}$$

$$= \int_{\mathcal{X}^N} \int_{\Theta} u_r(\mathbf{x}', d(\mathbf{x})) \left[\prod_{i=1}^{N-n} g(x_i'|\theta) \right] \left[\prod_{i=1}^{n} g(x_i|\theta) \right] w(\theta) \nu\{d\theta\} \mu\{d\mathbf{x}', d\mathbf{x}\}$$

$$= \int_{\Theta} \int_{\mathcal{X}^n} u_0(\theta, d(\mathbf{x})) \left[\prod_{i=1}^{n} g(x_i|\theta) \right] w(\theta) \nu\{d\theta\} \mu\{d\mathbf{x}', d\mathbf{x}\}$$

der jo netop er apriorinytten svarende til problemet

$$\{\Theta, \mathcal{A}, u_0(\cdot, \cdot), w(\cdot)\}$$

□

Selv om det oprindelige beslutningsproblem principielt er et problem vedrørende de enkelte populationsværdier, kan vi altså tillade os at opfatte det som et beslutningsproblem vedrørende procesparameteren θ, og vi kan derfor løse problemet ved de metoder, der er angivet tidligere.

Vi vil her blot beskrive resultaterne svarende til en kvadratisk tabsfunktion

Sætning 12.2.8 ***Kvadratisk tab vedrørende resttotal***

Betragt et beslutningsproblem vedrørende en endelig population, og antag at apriorifordelingen er af formen (12.2.15) og at nytten svarende til en aktion kun afhænger af den ikke-undersøgte del af populationen. Såfremt nyttefunktionen er

$$u_r(x_1', x_2', \ldots, x_{N-n}'; a) = -\left[\left(\sum_{i=1}^{N-n} x_i' \right) - a \right]^2, \qquad (12.2.19)$$

da er den optimale beslutningsregel

$$d_0(\mathbf{x}) = \mathsf{E}\,[Z'|\mathbf{x}] \qquad (12.2.20)$$

med

$$Z' = \sum_{i=1}^{N-n} X_i'$$

Aposteriorinytten svarende til denne regel er

$$\eta(d_0(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = -\mathsf{V}\,[Z'|\mathbf{x}]\,,$$

og Bayesnytten er

$$\eta^* = -\mathsf{E}_{\,\mathbf{x}}[\mathsf{V}\,[Z'|\mathbf{x}]]\,,$$

hvor den yderste forventningsværdi bestemmes i den marginale fordeling af stikprøveresultatet.

Bevis:

Det følger af sætning 12.2.7, at problemet kan reformuleres til et problem vedrørende θ med gevinstfunktionen

$$u_0(\theta, a) = -\mathsf{E}\,[(z' - a)^2|\theta]$$

Resultatet følger da i analogi med beviset for sætning 12.2.4.

□

Bemærkning 1 ***Den optimale aktion er forventningsværdien i den prædiktive fordeling af summen af $N - n$ nye observationer fra samme gruppe***

Vi bemærker, at den optimale beslutningsregel (12.2.20) netop forventningsværdien i den prædiktive fordeling af summen af $N - n$ nye observationer fra samme gruppe.

□

Såfremt estimationsproblemet vedrører populationstotalen, kan man korrigere aktionen fra sætningen ved addition af stikprøvetotalen som vist i den følgende

Bemærkning 2 ***Tab afhængigt af populationstotalen***

Såfremt nyttefunktionen er

$$u_t(y_1, y_2, \ldots, y_N; a) = -\left[(\sum_{i=1}^{N} y_i) - a\right]^2$$

og såfremt apriorifordelingen har tætheden (12.2.15) som i ovenstående sætning, da er den optimale beslutningsregel

$$d_0^t(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{N-n} X_i'|\mathbf{x}\right]\,,$$

dvs estimatet for resttotalen

$$Z' = \sum_{i=1}^{N-n} X_i'$$

plus totalværdien $\sum x_j$ i stikprøven.

Aposteriorinytten svarende til denne regel er

$$\eta(d_0^t(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = -\mathsf{V}\,[Z'|\mathbf{x}]$$

og Bayesnytten er

$$\eta^* = -\mathsf{E}_{\mathbf{x}}[\mathsf{V}\,[Z'|\mathbf{x}]]\,,$$

hvor den yderste forventningsværdi bestemmes i den marginale fordeling af stikprøveresultatet.

Nytten er altså den samme som nytten ved estimation af resttotalen Z'. (Den del af populationen, som vi har i stikprøven, estimeres jo uden usikkerhed).

Bevis:

Idet

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = Z' + \sum_{j=1}^{n} x_j$$

finder vi, at aposteriorinytten ved at benytte aktionen a, når $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er observeret, er

$$\eta(a|\mathbf{x}) = -\mathsf{E}\,[\{Z' - (a - \sum_{j=1}^{n} x_j)\}^2|\mathbf{x}]\,, \qquad (12.2.21)$$

og vi skal derfor vælge $(a - \sum_{j=1}^{n} x_j)$ således, at (12.2.21) bliver størst mulig. Dette problem er imidlertid løst i sætningen, og vi får derfor

$$d_0^t(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} x_i = d_0^r(\mathbf{x}) = \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{N-n} X_i'|\mathbf{x}\right]$$

□

Bemærkning 3 ***Beslutning under kvadratisk tab vedrørende resttotal for endimensionale eksponentielle familier***

For de sædvanlige familier af fordelinger, som vi har betragtet i afsnit 5 og i afsnittene 6.2 gælder, at summen $z = (x_1 + \cdots + x_n)$ (eller gennemnsnittet $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ af observationerne i stikprøven er sufficient, og yderligere gælder jvf. (8.3.11) i Bemærkning 3 til Sætning 8.3.1, at forventningsværdien i den prædiktive fordeling af

$$Z' = \sum_{j=1}^{N-n} X'_j$$

efter observation af gennemsnittet $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ af n observationer er

$$\boxed{\begin{aligned} d_0(\bar{x}) &= \mathsf{E}\,[Z'|\bar{x}] = (N-n)m_1 \\ &= (N-n)\,\frac{m/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n} = (N-n)[wm + (1-w)\bar{x}]\,, \end{aligned}}$$

hvor

$$w = \frac{1/\gamma}{1/\gamma + n}\,,$$

og hvor m angiver apriorimiddelværdien af X_i.

Endvidere finder vi af (8.3.12), at variansen i den prædiktive fordeling af Z' er

$$\boxed{\begin{aligned} \eta(d_0(\mathbf{x})|\mathbf{x}) &= -\mathsf{V}\,[Z'|\bar{x}] = -(N-n)\,\mathsf{E}\,[V(\mu)|\bar{x}]\,\frac{1/\gamma + N}{1/\gamma + n} \\ &= (N-n)\,\mathsf{E}\,[V(\mu)|\bar{x}]\left[1 + (N-n)\,\frac{1-w}{n}\right] \end{aligned}}$$

Idet præposteriorimiddelværdien af $V(\mu)$ er $\mathsf{E}\,[V(\mu)]$ har vi da, at Bayes-nytten (præposteriorinytten) kan udtrykkes som

$$\boxed{\eta^* = -(N-n)\,\mathsf{E}\,[V(\mu)]\,\frac{1/\gamma + N}{1/\gamma + n}}$$

Tabel 12.16 viser Bayesløsningen og Bayesnytten svarende til estimation af restpopulationstotalen ved sætning 12.2.8 for de simple endimensionale fordelinger.

□

Optimale beslutningsregler ved simpel tilfældig udvælgelse fra en endelig population under kvadratisk tab vedrørende restpopulationen,

$$u_r(x_1', x_2', \ldots, x_{N-n}'; a) = -\left[\left(\sum_{i=1}^{N-n} x_i'\right) - a\right]^2$$

Stikprøvefordeling af $X_i \mid \theta$	Strukturfordeling $w(\cdot)$	Bayesregel $d_0(\bar{x})/(N-n) = \mathsf{E}\,[\mu \mid \bar{x}]$	Aposteriorinytte $\eta(d_0(\bar{x}) \mid \bar{x})/(N-n) = -\mathsf{V}\,[Z' \mid \bar{x}]/(N-n)$	Bayesnytte $\eta_1(d_0)/(N-n) = \mathsf{E}_{\bar{x}}[\eta(d_0(\bar{x}) \mid \bar{x})]/(N-n)$
$\mathrm{B}(1,p)$	$p \in \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$	$\pi_1 = \dfrac{\pi/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,\pi_1(1-\pi_1)\,\dfrac{1/\gamma + N}{1/\gamma + n + 1}$	$-\,\dfrac{\pi(1-\pi)}{(1+\gamma)}\,\dfrac{1/\gamma + N}{(1/\gamma + n + 1)}$
$\mathrm{Geo}(1,p)$	$p \in \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$	$\psi_1 = \dfrac{\psi/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,\psi_1(1+\psi_1)\,\dfrac{1/\gamma + N}{1/\gamma + n - 1}$	$-\,\dfrac{\psi(1+\psi)}{(1-\gamma)}\,\dfrac{1/\gamma + N}{(1/\gamma + n)}$
$\mathrm{P}(\mu)$	$\mu \in \mathrm{G}(\alpha, 1/\beta)$	$m_1 = \dfrac{m\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,m_1\,\dfrac{1/\gamma + N}{1/\gamma + n}$	$-m\,\dfrac{1/\gamma + N}{1/\gamma + n}$
$\mathrm{Ex}(\mu)$	$\mu \in \mathrm{RGam}(\alpha, 1/\beta)$	$m_1 = \dfrac{m/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,m_1^2\,\dfrac{1/\gamma + N}{1/\gamma + n - 1}$	$-\,\dfrac{m^2}{(1-\gamma)}\,\dfrac{1/\gamma + N}{(1/\gamma + n)}$
$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\mathrm{N}(m,\sigma_0^2)$	$m_1 = \dfrac{m/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,\sigma^2\,\dfrac{1/\gamma + N}{1/\gamma + n}$	$-\sigma^2\,\dfrac{1/\gamma + N}{1/\gamma + n}$

Tabel 12.16. Bayesreglen svarende til kvadratisk nytte ved est af restpopulation

Eksempel 12.2.6 ***Estimation af resttotal ved kvadratisk tab***

Vi betragter atter situationen i Eksempel 12.2.3. Vi vil imidlertid nu behandle problemet ved en model for en endelig population, idet vi antager, at produktionen er så lille, at stikprøven udgør en væsentlig andel af populationen.

Det vides, at fejl fordeler sig tilfældigt over produktionen i overensstemmelse med en Poisson-proces. Antallet af fejl varierer således fra meter til meter i klædet i overensstemmelse med en $P(\mu)$-fordeling, hvor det gennemsnitlige antal fejl pr meter μ vides at variere fra produktion til produktion i overensstemmelse med en $G(3, 1/2)$-fordeling med middelværdien

$$m_0 = \mathsf{E}\,[\mu] = 3/2 = 1.5 \quad \text{[fejl/meter]}$$

og

$$\gamma_0 = \frac{\mathsf{V}\,[\mu]}{\mathsf{E}\,[V_P(\mu)]} = 1/2$$

(svarende til $\alpha = 3$ og $\beta = 2$.)

For at vurdere det totale antal af fejl i en ny produktion på 200 [m], udtager man en stikprøve bestående af 10 prøver hver på én meter tilfældigt fra produktionen. Klædet skal bruges til videreforarbejdning, og for hver fejl i klædet skal der iværksættes en speciel proces. Af hensyn til ressourceplanlægningen er det derfor væsentligt at kende det totale antal fejl. Klædet forarbejdes i eet stykke og tabet ved en fejlestimation skønnes at afhænge kvadratisk af fejlestimationen, dvs at man benytter gevinstfunktionen

$$u_t(y_1, y_2, \ldots, y_{200}; a) = -\left[\left(\sum_{i=1}^{200} y_i\right) - a\right]^2$$

Antag nu, at man undersøger en stikprøve på 10 prøver á 1 meter og ialt finder 30 fejl. Det følger da af tabel 12.16, at estimatet for antallet af fejl i de resterende 190 meter svarende til $\bar{x} = 3$ [fejl/m] er

$$d_0^r(\bar{x} = 3) = 190 \times \frac{2 \times 3/2 + 30}{2 + 10} = 190 \times 2.75 = 522.5 \quad \text{[fejl]} \tag{12.2.22}$$

Estimatet for det totale antal fejl i de 200 meter bliver da

$$d_0^t(\bar{x} = 3) = 30 + d_0^r(\bar{x} = 3) = 552.5 \quad \text{[fejl]} \tag{12.2.23}$$

Den forventede nytte efter denne observation er jvf tabel 12.16

$$\eta(522.5|\bar{x}=3) = -190 \times 2.75\ \frac{2+200}{2+10} = -522.5 \times 16.83 = -8\ 795[\text{fejl}]^2$$

svarende til variansen i den prædiktive fordeling af det totale antal fejl i den ikke-undersøgte del.

Vi bemærker, at estimatet for antallet af fejl i den ikke-undersøgte del af partiet er det samme, som vi ville nå frem til, hvis vi blot havde bestemt aposteriorimiddelværdien af antallet af fejl pr meter som i Eksempel 12.2.3, og ganget op med længden af den ikke-undersøgte del.

Såfremt vi - før stikprøven var udtaget - ville vurdere den forventede nytte ved brug af denne beslutningsregel, ville vi bestemme Bayesnytten (præposteriorinytten). Bayesnytten findes af tabel 12.16 som

$$\eta^* = -190\ \frac{3}{2}\ \frac{2+200}{2+10} = -190 \times 1.5 \times 16.83 = -4\ 795.5\ [\text{fejl}]^2 \qquad (12.2.24)$$

Vi noterer, at Bayesnytten på det nærmeste afhænger kvadratisk af partistørrelsesn, nemlig gennem faktoren $(N-n)(1/\gamma+N)$, idet estimationsusikkerheden på μ jo indgår med vægten $N-n$ i skønnet over populationstotalen.

Såfremt stikprøven gøres større, vil Bayesnytten nærme sig nul, dels fordi usikkerheden vedrører en mindre del af produktionen (faktoren $N-n$ bliver mindre), og dels fordi man får et mere nøjagtigt skøn over procesparameteren μ (nævneren $1/\gamma+n$ bliver større).

□

Til sammenligning med resultatet i sætning 12.2.8 angiver vi løsningen til beslutningsproblemet, når tabet afhænger af kvadratsummen af afvigelserne mellem populationens enkeltværdier og den valgte aktion.

Sætning 12.2.9 *Kvadratisk tab ved estimation af enkeltværdier*

Betragt et beslutningsproblem vedrørende en endelig population og antag at apriorifordelingen er af formen (12.2.15), og at nytten svarende til en aktion kun afhænger af den ikke-undersøgte del af populationen. Såfremt nyttefunktionen er

$$u_r(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{N-n}; a) = -\sum_{i=1}^{N-n} (x'_i - a)^2 \tag{12.2.25}$$

da er den optimale beslutningsregel

$$d_0(\mathbf{x}) = \int \left\{ \int x' g(x'|\theta)\mu\{dx'\} \right\} w_n(\theta|\mathbf{x})\nu\{d\theta\} = \mathsf{E}_{\theta|\mathbf{x}}[\mathsf{E}\,[X'|\theta]] = \mathsf{E}\,[X'|\mathbf{x}] \tag{12.2.26}$$

Den tilsvarende aposteriorinytte er

$$\eta(d_0(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = -(N-n)\mathsf{V}\,[X'|\mathbf{x}] \tag{12.2.27}$$

og Bayesnytten er

$$\eta^* = -(N-n)\mathsf{E}_{\mathbf{x}}[\mathsf{V}\,[X'|\mathbf{x}]]$$

hvor den yderste forventningsværdi bestemmes i den marginale fordeling af stikprøveresultatet.

Bevis:

Vi finder

$$u_0(\theta, a) = -\mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{N-n} (X'_i - a)^2|\theta\right] = -(N-n)\mathsf{V}\,[X'|\theta] - (N-n)(\mathsf{E}\,[X'|\theta] - a)^2$$

Da det første led alene afhænger af θ, er det tilstrækkeligt at betragte det sidste led for at bestemme den optimale regel. Bayesreglen fås da som middelværdien af X' i aposteriorifordelingen af θ, dvs

$$d_0(\underline{x}) = \mathsf{E}_{\theta|\mathbf{x}}[\mathsf{E}\,[X'|\theta]]$$

Aposteriorinytten bliver da

$$\eta(d_0(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = -(N-n)\{\mathsf{E}_{\theta|\mathbf{x}}[\mathsf{V}\,[X'|\theta]] + \mathsf{V}_{\theta|\mathbf{x}}[\mathsf{E}\,[X'|\theta]]\}\,,$$

der reduceres til (12.2.27). Bayesnytten fås endelig ved at bestemme forventningsværdien af (12.2.27) i den marginale fordeling af $\underline{X}$.

□

Bemærkning 1 *Den optimale aktion er forventningsværdien i den prædiktive fordeling af en ny observationer fra samme gruppe*

Vi bemærker, at den optimale beslutningsregel (12.2.26) netop forventningsværdien i den prædiktive fordeling af en ny observation X' fra samme gruppe.

□

Bemærkning 2 ***Sammenligning med tabet ved estimation af restpopulation***

Sammenligner vi den forventede aposteriorinytte (12.2.27) svarende til gevinstfunktionen (12.2.25) med nytten svarende til gevinstfunktionen (12.2.19) ser vi, at aposteriorinytten svarende til (12.2.19) kan udtrykkes som

$$\begin{aligned}\eta(d_0(\mathbf{x})|\mathbf{x}) &= -(N-n)\{\mathsf{E}_{\theta|\mathbf{x}}[\mathsf{V}[X'|\theta]] + (N-n)\mathsf{V}_{\theta|\mathbf{x}}[\mathsf{E}[X'|\theta]]\} \\ &= -(N-n)\{\mathsf{V}[X'|\mathbf{x}] + (N-n-1)\mathsf{V}_{\theta|\mathbf{x}}[\mathsf{E}[X'|\theta]]\}\end{aligned}$$

Det første led på højre side er netop aposteriorinytten under gevinstfunktionen (12.2.25), mens det andet led udtrykker det yderligere tab, der hidrører fra at alle estimationsfejlene adderes før tabet opgøres.

□

Bemærkning 3 ***Beslutning under kvadratisk tab vedrørende enkeltværdier for endimensionale eksponentielle familier***

For de sædvanlige familier af fordelinger, som vi har betragtet i afsnit 5 og i afsnittene 6.2 gælder, at summen $z = (x_1 + \cdots + x_n)$ (eller gennemnsnittet $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ af observationerne i stikprøven er sufficient).

Ved at sætte $r = 1$ i udtrykket (8.3.11) i Bemærkning 3 til Sætning 8.3.1 finder vi, at forventningsværdien i den prædiktive fordeling af X' efter observation af gennemsnittet $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ af n observationer er

$$\boxed{\begin{aligned}d_0(\bar{x}) &= \mathsf{E}[X'|\bar{x}] = m_1 = \frac{m/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n} \\ &= (N-n)[wm + (1-w)\bar{x}]\,,\end{aligned}}$$

hvor

$$w = \frac{1/\gamma}{1/\gamma + n},$$

og hvor m angiver apriorimiddelværdien af X_i.

Idet

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}\,[X'|\bar{x}] &= \mathsf{E}\,[V(\mu)|\bar{x}](1 + \gamma_{\text{apost}}) \\
&= \mathsf{E}\,[V(\mu)|\bar{x}]\left(1 + \frac{1}{1/\gamma + n}\right) = \mathsf{E}\,[V(\mu)|\bar{x}]\frac{1/\gamma + n + 1}{1/\gamma + n}
\end{aligned}$$

har vi udtrykket for aposteriorinytten

$$\boxed{\eta(d_0(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = -(N-n)\mathsf{E}\,[V(\mu)|\bar{x}]\frac{1/\gamma + n + 1}{1/\gamma + n},}$$

og da præposteriorimiddelværdien af $V(\mu)$ netop er $\mathsf{E}\,[V(\mu)]$, finder vi udtrykket for Bayesnytten (præposteriorinytten)

$$\boxed{\eta^* = -(N-n)\,\mathsf{E}\,[V(\mu)]\,\frac{1/\gamma + n + 1}{1/\gamma + n}}$$

I tabel 12.17 har vi angivet den optimale aktion, aposteriorinytten og Bayesnytten svarende til nyttefunktionen (12.2.25). □

Optimale beslutningsregler ved simpel tilfældig udvælgelse fra en endelig population under kvadratisk tab vedrørende enkeltværdier,

$$u_r(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{N-n}; a) = -\sum_{i=1}^{N-n} (x'_i - a)^2$$

Stikprøve-fordeling af $X_i \mid \theta$	Struktur-fordeling $w(\cdot)$	Bayesregel $d_0(\bar{x})/(N-n) = \mathsf{E}\,[\mu \mid \bar{x}]$	Aposteriorinytte $\eta(d_0(\bar{x}) \mid \bar{x})/(N-n) = -\mathsf{V}\,[X' \mid \bar{x}]$	Bayesnytte $\eta_1(d_0)/(N-n) = \mathsf{E}_{\,\bar{x}}[\eta(d_0(\bar{x}) \mid \bar{x})]$
$\mathrm{B}(1,p)$	$p \in \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$	$\pi_1 = \dfrac{\pi/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,\pi_1(1-\pi_1)$	$-\,\dfrac{\pi(1-\pi)}{(1+\gamma)}\,\dfrac{1/\gamma+n+1}{(1/\gamma+n)}$
$\mathrm{Geo}(1,p)$	$p \in \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$	$\psi_1 = \dfrac{\psi/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,\psi_1(1+\psi_1)\,\dfrac{1/\gamma+n+1}{1/\gamma+n-1}$	$-\,\dfrac{\psi(1+\psi)}{(1-\gamma)}\,\dfrac{1/\gamma+n+1}{(1/\gamma+n)}$
$\mathrm{P}(\mu)$	$\mu \in \mathrm{G}(\alpha, 1/\beta)$	$m_1 = \dfrac{m\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,m_1\,\dfrac{1/\gamma+n+1}{1/\gamma+n}$	$-m\,\dfrac{1/\gamma+n+1}{1/\gamma+n}$
$\mathrm{Ex}(\mu)$	$\mu \in \mathrm{RGam}(\alpha, 1/\beta)$	$m_1 = \dfrac{m/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,m_1^2\,\dfrac{1/\gamma+n+1}{1/\gamma+n-1}$	$-\,\dfrac{m^2}{(1-\gamma)}\,\dfrac{1/\gamma+n+1}{(1/\gamma+n)}$
$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\mathrm{N}(m,\sigma_0^2)$	$m_1 = \dfrac{m/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$	$-\,\sigma^2\,\dfrac{1/\gamma+n+1}{1/\gamma+n}$	$-\sigma^2\,\dfrac{1/\gamma+n+1}{1/\gamma+n}$

Tabel 12.17. Bayesnytte svarende til kvadratisk nytte ved est af enkeltv.

Eksempel 12.2.7 ***Estimation af enkeltværdier ved kvadratisk tab***

Vi betragter atter situationen i Eksempel 12.2.6. Vi antager imidlertid nu, at den videre forarbejdning af klædet foregår i stykker på 1 meter, hvorfor tabet på grund af fejlestimation fremkommer ved addition af tabene hidrørende fra de enkelte estimationsfejl. Vi betragter således gevinstfunktionen

$$u_r(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{190}; a) = -\sum_{i=1}^{190}(x'_i - a)^2$$

Antag nu (som i eksempel 12.2.6) at man undersøger en stikprøve på 10 prøver á 1 meter og ialt finder 30 fejl. Det følger da af tabel 12.17, at estimatet for antallet af fejl pr meter svarende til $\bar{x} = 3$ [fejl/m] er

$$d_0(\Sigma x_i = 30) = \frac{2 \times 3/2 + 30}{2 + 10} = 2.75 \text{ [fejl /m]} \tag{12.2.28}$$

altså essentielt samme estimat, som vi fandt i eksempel 12.2.6.

Den forventede nytte efter denne observation er

$$\eta(2.75|\Sigma x_i = 30) = -190 \times 2.75 \; \frac{2 + 10 + 1}{2 + 10} = -522.5 \times 1.0833 = -566.04,$$

svarende til 190 gange variansen på estimatet af antallet af fejl i en enkelt ikke-undersøgt meter.

Såfremt vi - før stikprøven var udtaget - ville vurdere den forventede nytte ved brug af denne beslutningsregel, ville vi bestemme Bayesnytten (præposteriorinytten). Bayesnytten findes af tabel 12.17 som

$$\eta^* = -190 \; \frac{3}{2} \; \frac{2 + 10 + 1}{2 + 10} = -190 \times 1.5 \times 1.0833 = -1.625$$

□

12.3 Tovalgsproblemer under risiko

fil: stabesld.tex 1998-05-12

Vi vil afslutte diskussionen af de statistiske beslutningsproblemer under risiko med en lidt mere indgående gennemgang af tovalgsproblemer, dvs. problemer, hvor beslutningstageren kun har to mulige aktioner a_1 og a_2. Vi vil antage at beslutningsproblemet er givet ved komponenterne (12.1.2) med $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$, og at nyttefunktionen er

$$u(\theta, a) = \begin{cases} u_1(\theta) & \text{for } a = a_1 \\ u_2(\theta) & \text{for } a = a_2 \end{cases} \tag{12.3.1}$$

En beslutningsregel $d \in \mathcal{F}(\mathcal{X}; \{a_1, a_2\})$ er karakteriseret ved en spaltning af observationsmængden $\mathcal{X}$ i to mængder, nemlig dels de observationer, der ifølge beslutningsreglen giver anledning til aktionen a_1, og dels de observationer, der giver anledning til at vælge aktionen a_2. Vi vil indføre notationen

$$\mathrm{C}(d) = d^{-1}(a_1) = \{x \in \mathcal{X} : d(x) = a_1\} \tag{12.3.2}$$

Ved benyttelse af (12.3.1) finder vi nu nytten svarende til en parameterværdi θ og beslutningsreglen $d(\cdot)$

$$\begin{aligned} u_1(\theta, d) &= \int u(\theta, d(x)) g(x|\theta) \mu\{dx\} \\ &= \int_{x \in \mathrm{C}} u_1(\theta) g(x|\theta) \mu\{dx\} + \int_{x \in \mathcal{X} - \mathrm{C}} u_2(\theta) g(x|\theta) \mu\{dx\} \\ &= u_1(\theta) \mathsf{P}\,[X \in \mathrm{C}|\theta] + u_2(\theta)\{1 - \mathsf{P}\,[X \in \mathrm{C}|\theta]\} \\ &= u_2(\theta) + l(\theta) \mathsf{P}\,[X \in \mathrm{C}|\theta] \end{aligned} \tag{12.3.3}$$

hvor

$$l(\theta) = u_1(\theta) - u_2(\theta) \tag{12.3.4}$$

og $\mathrm{C} = d^{-1}(a_1)$, dvs at

$$\mathsf{P}\,[X \in \mathrm{C}|\theta] = \mathsf{P}\,[d(X) = a_1|\theta]$$

Det følger af (12.3.3), at nytten svarende til beslutningsreglen $d(\cdot)$ alene afhænger af beslutningsreglen $d(\cdot)$ igennem størrelsen $\mathsf{P}\left[d(X) = a_1 | \theta\right]$ som funktion af θ.

Funktionen

$$P(d, \theta) = \mathsf{P}\left[d(X) = a_1 | \theta\right] \tag{12.3.5}$$

kaldes ofte beslutningsreglens operationskarakteristik.

> Vi bemærker, at funktionen $1 - P(d, \theta)$ angiver styrkefunktionen for det test vedrørende parameteren θ, der har kritisk område $\mathcal{X} - \mathrm{C}$, dvs det test, der fremkommer ved at lade a_1 svare til accept af en hypotese vedrørende θ, og a_2 svare til forkastelse af hypotesen.

Sætning 12.3.1 ***Præposteriorilløsning til tovalgsproblemet***

Betragt et statistisk tovalgsproblem med nyttefunktionen (12.3.1). Bayesreglen er givet ved

$$d_0(x) \quad = \quad \begin{cases} a_1 & \text{for } \lambda(x) \geq 0 \\ a_2 & \text{for } \lambda(x) < 0 \end{cases} \tag{12.3.6}$$

med

$$\lambda(x) = \mathsf{E}\left[l(\theta) | X = x\right] \tag{12.3.7}$$

Den tilsvarende Bayesnytte er

$$\eta_1^* = \int_{\lambda(x) \geq 0} \lambda(x) k(x) \mu\{dx\} + \int u_2(\theta) w(\theta) \nu\{d\theta\}$$

Bevis:

Det følger af sætning 10.2.2, at i stedet for at bestemme Bayesløsningen til problemet med nyttefunktionen (12.3.1), kan vi lige så godt bestemme den regel, der svarer til nyttefunktionen

$$u^0(\theta, a) = u(\theta, a) - u_2(\theta)$$

dvs

$$u^0(\theta, a) \quad = \quad \begin{cases} l(\theta) & \text{for } a = a_1 \\ 0 & \text{for } a = a_2 \end{cases} \tag{12.3.8}$$

Apriorinytten svarende til denne nyttefunktion er

$$\eta_1^0(d) = \int l(\theta)P(\theta, d)w(\theta)\nu\{d\theta\}$$

hvor $w(\cdot)$ angiver aprioritætheden for θ. Apriorinytten svarende til reglen $d(\cdot)$ og nyttefunktion (12.3.1) er

$$\eta_1(d) = \eta_1^0(d) + \eta(a_2)$$

hvor

$$\eta(a_2) = \int u(\theta, a_2)w(\theta)\nu\{d\theta\} = \int u_2(\theta)w(\theta)\nu\{d\theta\}$$

For nyttefunktionen (12.3.8) finder vi aposteriorinytten ved at vælge a_1, når $X = x$ er observeret

$$\lambda(x) = \eta^0(a_1|x) = \int l(\theta)h(\theta|x)\nu\{d\theta\}$$

Vi bemærker at

$$\lambda(x) = \eta^0(a_1|x) = \mathsf{E}\,[l(\theta)|X = x) = \mathsf{E}\,[u_1(\theta) - u_2(\theta)|X = x)$$

der viser, at $\lambda(x)$ måler forskellen i nytte (målt med fortegn) ved at vælge a_1 frem for a_2, når x er observeret. Vi bør derfor vælge a_1, når $\lambda(x) \geq 0$. □

I mange beslutningsproblemer vil det gælde at $l(\theta) = u_1(\theta) - u_2(\theta)$ kun skifter fortegn én gang, dvs at der er et interval, $\theta \leq \theta_0$, hvor eksempelvis aktionen a_1 er den foretrukne, og tilsvarende at a_2 foretrækkes for $\theta > \theta_0$.

Såfremt det gælder, at sammenhængen mellem observationen x og parameteren θ er monoton i den forstand at store værdier af x indikerer store værdier af θ, vil den optimale beslutningsregel være af formen $d_0(x) = a_1$ for $x \leq c$.

For nærmere at præcisere, hvad vi vil forstå ved en monoton sammenhæng mellem observation og parameter indfører vi følgende

Definition 12.3.1 *Totalt positiv funktion*

En funktion $f(x, y)$ af to variable $x \in \mathbb{R}$ og $y \in \mathbb{R}$ siges at være totalt positiv i x og y såfremt $f(x, y) \geq 0$ og såfremt determinanten

$$\begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) \end{vmatrix} \geq 0 \tag{12.3.9}$$

for $x_1 \leq x_2$, og $y_1 \leq y_2$.

□

En udførlig beskrivelse af teorien for total positive funktioner er givet i S.Karlin: Total Positivity, Vol. I, Stanford University Press (1968).

Der gælder følgende simple resultat

Sætning 12.3.2 ***Nødvendig og tilstrækkelig betingelse for total positivitet***

Funktionen $f(x, y) \geq 0$ er totalt positiv, hvis og kun hvis forholdet

$$h(x) = \frac{f(x, y_1)}{f(x, y_2)}$$

er en aldrig voksende funktion af x for $x \in \{x \in \mathbb{R} : f(x, y_2) > 0\}$ og $y_1 < y_2$

Bevis:

Beviset er umiddelbart.

□

Sætning 12.3.2 er baggrunden for

Definition 12.3.2 ***Monoton likelihood-kvotient***

En familie af sandsynlighedstætheder $\{g(x|\theta)\}_{\theta \in \Theta}$ siges at have mon-ton likelihood-kvotient, såfremt familien er total positiv i x og θ.

□

Bemærkning 1 ***En endimensional eksponentiel familie har monoton likelihood kvotient***

Vi bemærker, at en endimensional eksponentiel familie af sandsynlighedstætheder af formen

$$g(x|\theta) = d(x) \exp\{\vartheta x - \kappa(\vartheta)\}$$

har monoton likelihood-kvotient. Vi erindrer desuden om, at såfremt $X_1, \ldots, X_n$ er en stikprøve, hvis tætheder hidrører fra en eksponentiel familie, da vil tæthederne for den sufficiente stikprøvefunktion $t(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ligeledes tilhøre en eksponentiel familie. Såfremt tæthederne for X_i har monoton likelihood-kvotient, da vil også tæthederne for t have monoton likelihood-kvotient. □

Vi kan nu formulere en tilstrækkelig betingelse for at et beslutningsproblem er monotont.

Sætning 12.3.3 ***Tilstrækkelig betingelse for monotonicitet af tovalgsproblem***

Betragt et statistisk tovalgsproblem med nyttefunktionen (12.3.1) Såfremt den betingede fordeling af observationerne for givet θ tilhører en familie med monoton likelihood-kvotient og såfremt gevinstfunktionen tilfredsstiller

$$u_1(\theta) \geq u_2(\theta) \quad \text{for} \theta \leq \theta_0$$

da vil Bayesreglen være af formen

$$d_0(x) \quad = \quad \begin{cases} a_1 & \text{for } x \leq c \\ a_2 & \text{for } x > c \end{cases}$$

hvor c er bestemt af

$$c = \sup \ \{x \in \mathbb{R} : \lambda(x) \geq 0\} \tag{12.3.10}$$

Bevis:
Da den total positive egenskab bevares ved multiplikation med funktioner, der alene afhænger af én af de variable, vil også aposteriorifordelingen $h(\theta|x)$ være total positiv.

Det følger da af de variationsformindskende egenskaber ved total positive funktioner at såfremt $l(\theta)$ kun har ét fortegnsskift, da vil

$$\lambda(x) = \int l(\theta) h(\theta|x) \nu\{d\theta\}$$

højst have ét fortegnsskift.

For illustrationens skyld anfører vi beviset:

Lad $\theta_0 \in \mathbb{R}$ være bestemt således at

$$\begin{array}{ll} l(\theta) \geq 0 & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ l(\theta) < 0 & \text{for } \theta > \theta_0 \end{array}$$

og sæt

$$\lambda_1(x) = \int_{\theta \leq \theta_0} l(\theta) h(\theta|x) \nu\{d\theta\}$$

og

$$\lambda_2(x) = -\int_{\theta > \theta_0} l(\theta) h(\theta|x) \nu\{d\theta\}$$

Vi har da

$$\lambda(x) = \lambda_1(x) - \lambda_2(x) \tag{12.3.11}$$

samt $\lambda_1(x) \geq 0$ og $\lambda_2(x) \geq 0$.

Lad nu $x_1 \leq x_2$ og betragt udtrykket

$$\begin{aligned} \Delta &= \lambda_1(x_1)\lambda_2(x_2) - \lambda_2(x_1)\lambda_1(x_2) \\ &= -\int_{\theta_1 \leq \theta_0} \int_{\theta_2 > \theta_0} l(\theta_1) l(\theta_2) \delta(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2) \nu\{d\theta_1\} \nu\{d\theta_2\} \end{aligned}$$

med

$$\delta(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2) = h(\theta_1|x_1)h(\theta_2|x_2) - h(\theta_1|x_2)h(\theta_2|x_1)$$

Da $\theta_1 \leq \theta_2$ og $x_1 \leq x_2$ i hele integrationsområdet følger det af (12.3.9) at $\delta(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2) \geq 0$. Endvidere gælder at $l(\theta_1) \geq 0$ og $l(\theta_2) \leq 0$ i hele integrationsområdet, hvorfor vi har $\Delta \geq 0$, dvs

$$0 \leq \lambda_2(x_1)\lambda_1(x_2) \leq \lambda_1(x_1)\lambda_2(x_2) \tag{12.3.12}$$

Antag nu at der gælder

$$\lambda(x_1) \leq \lambda(x_2) \tag{12.3.13}$$

Vi får da af (12.3.11) og (12.3.13)

$$0 < \lambda_1(x_1) < \lambda_2(x_1)$$

og

$$0 < \lambda_2(x_2) < \lambda_1(x_2)$$

hvilket er i klar modstrid med (12.3.12). Antagelsen (12.3.13) kan derfor ikke være korrekt, og der gælder altså for $x_1 < x_2$

$$\lambda(x_2) \leq 0 \leq \lambda(x_1)$$

hvilket viser at $\lambda(\cdot)$ højst kan have ét fortegnsskift, og det fra ikke-negative til ikke-positive værdier af λ.

□

Bemærkning 1 ***Sætningen gælder også for stikprøver fra eksponentielle familier***

Vi bemærker at sætningen også gælder for en stikprøve $X_1, \ldots, X_n$ fra en eksponentiel familie, idet stikprøveresultatet kan reduceres til en sufficient stikprøvefunktion, hvis fordeling ligeledes vil tilhøre en eksponentiel familie jvf. diskussionen af de eksponentielle familier. □

Tovalgsproblemer under målefejlsmodeller

Sætning 12.3.4 ***Tovalgsproblemer med lineær nytte***

Betragt et statistisk tovalgsproblem under risiko med nyttefunktionen

$$u(\theta, a) = \begin{cases} A + B\theta & \text{for } a = a_1 \\ C + D\theta & \text{for } a = a_2 \end{cases} \tag{12.3.14}$$

hvor $B < D$ og lad

$$\theta_0 = \frac{A - C}{D - B} \tag{12.3.15}$$

Såfremt beslutningen træffes efter observation af en endimensional stokastisk variabel X, hvis tæthed tilhører en familie med monoton likelihood-kvotient, da vil Bayesreglen være

$$d_0(x) = \begin{cases} a_1 & \text{for } x \leq c \\ a_2 & \text{for } x > c \end{cases} \tag{12.3.16}$$

hvor den kritiske værdi c er bestemt som løsning til

$$\mathsf{E}\,[\theta | X = c] = \theta_0 \tag{12.3.17}$$

Aposteriorinytten svarende til Bayesreglen er

$$\eta_1(d_0(x)) \quad = \quad \begin{cases} A + B\mathsf{E}\,[\theta|X = x] & \text{for } \ x \leq c \\ C + D\mathsf{E}\,[\theta|X = x] & \text{for } \ x > c \end{cases} \tag{12.3.18}$$

og Bayesnytten er

$$\eta_1(d_0) = C + D\mathsf{E}\,[\theta] + (B - D)\int_{x \leq c} \{\mathsf{E}\,[\theta|X = x] - \theta_0\} k(x)\mu\{dx\}$$

Bevis:
Beviset følger umiddelbart ved at benytte Sætning 12.3.1

□

Tabel 12.18. Bayesreglen for tovalgsproblemer under målefejlsmodel
$u(\theta, a_1) = A + B\theta$, $u(\theta, a_2) = C + D\theta$ med $B < D$; ligevægtsværdi: $\theta_0 = (A - C)/(D - B)$.
Bayesreglen er: Vælg a_1 for $x \leq c$, vælg a_2 ellers.
Det kritiske stikprøveresultat fremgår af tabellen.

Stikprøvefordeling	Apriorifordeling	Kritisk stikprøveresultat, c	Aposterioriforventningsværdi $\mathsf{E}[\theta\|x]$ se også tabel 8.2
$\mathrm{B}(n, \theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha, \beta)$	$\theta_0(\beta + n) - (1 - \theta_0)\alpha$	$\frac{\alpha+x}{\alpha+\beta+n}$
$\mathrm{NB}^*(n, \theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha, \beta)$	$\frac{\theta_0}{1-\theta_0}(\beta + n) - \alpha$	$\frac{\alpha+x}{\alpha+\beta+n+x}$
$\mathrm{P}(n\theta)$	$\mathrm{G}(\alpha, 1/\beta)$	$\theta_0(\beta + n) - \alpha$	$\frac{\alpha+x}{\beta+n}$
$\mathrm{G}(n, \theta)$	$\mathrm{RG}(\alpha, \beta)$	$\theta_0(\alpha + n - 1) - \beta$	$\frac{\beta+x}{\alpha+n-1}$
$\mathrm{RPar}(\theta, n)$	$\mathrm{Par}(\beta, \mu)$	$\theta_0\left(1 - \frac{1}{n+\mu}\right)$, hvis $\beta < c$	$\frac{n+\mu}{n+\mu-1}\max\{x, \beta\}$
$\mathrm{N}(n\theta, n\sigma^2)$	$\mathrm{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$	$\theta_0(n + \sigma^2/\sigma_0^2) - \mu\sigma^2/\sigma_0^2$	$\frac{\mu\sigma^2+x\sigma_0^2}{\sigma^2+n\sigma_0^2}$

Tabel 12.19. Bayesnytte for tovalgsproblemer under målefejlsmodel
$u(\theta, a_1) = A + B\theta$, $u(\theta, a_2) = C + D\theta$; ligevægtsværdi: $\theta_0 = (A - C)/(D - B)$.
Det kritiske stikprøveresultat, c, er anført i tabel 12.18

Stikprøvefordeling	Apriorifordeling	Bayesnytte
$\mathrm{B}(n, \theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha, \beta)$	$C + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} D + (D - B) \left[\theta_0 \mathrm{Pl}(c; n, \alpha, \alpha+\beta) - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \mathrm{Pl}(c; n, \alpha+1, \alpha+\beta+1)\right]$
$\mathrm{NB}^*(n, \theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha, \beta)$	$C + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} D + (D - B) \left[\theta_0 \mathrm{NPl}(c; n, \alpha, \alpha+\beta) - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \mathrm{NPl}(c; n, \alpha+1, \alpha+\beta+1)\right]$
$\mathrm{P}(n\theta)$	$\mathrm{G}(\alpha, 1/\beta)$	$C + \frac{\alpha}{\beta} D + (D - B) \left[\theta_0 \mathrm{NB}(c; \alpha, \beta/(\beta+n)) - \frac{\alpha}{\beta} \mathrm{NB}(c; \alpha+1, \beta/(\beta+n))\right]$
$\mathrm{G}(n, \theta)$	$\mathrm{RG}(\alpha, \beta)$	$C + \frac{\beta}{\alpha-1} D + (D - B) \left[\theta_0 \mathrm{RBet}(c/\beta; \alpha, n, 1) - \frac{\beta}{\alpha-1} \mathrm{RBet}(c/\beta; \alpha-1, n, 1)\right]$
$\mathrm{RPar}(\theta, n)$	$\mathrm{Par}(\beta, \mu)$	$C + \frac{\beta}{\mu-1} D + (D - B) \left[\theta_0 \mathrm{BPar}(c/\beta; 1, \mu, n) - \frac{\beta}{\mu-1} \mathrm{BPar}(c/\beta; 1, \mu-1, n)\right]$ $C + \frac{\beta}{\mu-1} D$ for $\beta > c$
$\mathrm{N}(n\theta, n\sigma^2)$	$\mathrm{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$	$C + \mu D + (D - B) \left[\frac{\sigma_0^2 \sqrt{n}}{\sqrt{\sigma^2 + n\sigma_0^2}} \phi(u)) - (\mu - \theta_0)\Phi(u)\right]$ med $u = (c/n - \mu)\big/\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}$

Tabel 12.18 angiver det eksplicite udtryk for det kritiske stikprøveresultat for en række simple stikprøvefordelinger og de tilsvarende konjugerede apriorifordelinger og Tabel 12.19 angiver Bayesnytten for de samme fordelinger.

Nedenstående sætning giver en approximativ beskrivelse af Bayesløsningen til tovalgsproblemer med stikprøvefordelinger, der tilhører en eksponentiel familie.

Sætning 12.3.5 ***Det generelle tovalgsproblem under målefejlsmodel***

Lad et tovalgsproblem have gevinstfunktionen

$$
\begin{aligned}
u(\theta, a_1) &= \begin{cases} 0 & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ -l_1(\theta - \theta_0)^\mu & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases} \\
u(\theta, a_2) &= \begin{cases} -l_2(\theta_0 - \theta)^\nu & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ 0 & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

og antag, at beslutningen baseres på observation af en række uafhængige variable $X_1, \ldots, X_n$ med tætheden

$$g(x|\theta) = d(x)\exp\{\theta t(x) - \psi(\theta)\}$$

hvor $t(\cdot)$ er en voksende funktion, og hvor parametriseringen er valgt således at $\mathsf{E}\,[t(X)|\theta] = \theta$. Såfremt apriorifordelingen af θ har en tæthed $w(\theta)$, der er kontinuert i omegnen af θ_0 med

$$w(\theta_0) = w_0 > 0$$

da er Bayesreglen

$$
d_0(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} a_1 & \text{for } \displaystyle\sum_{i=1}^n t(x_i) \leq c \\ \\ a_2 & \text{for } \displaystyle\sum_{i=1}^n t(x_i) > c \end{cases}
$$

med

$$
c = \begin{cases} n\theta_0 + \sigma_0\sqrt{(\mu - \nu)n\ln(n)} + \mathrm{O}(\sqrt{n}\ln(\ln n)/\sqrt{\ln n}) & \text{for } \mu > \nu \\ \\ n\theta_0 + z\sigma_0\sqrt{n} + \mathrm{O}(1) & \text{for } \mu = \nu \end{cases}
$$

hvor

$$\sigma_0 = \sqrt{\mathsf{V}\left[t(X)|\theta = \theta_0\right]}$$

og z er løsning til

$$l_1 \mathrm{m}_\nu(-z) = l_2 \mathrm{m}_\nu(z) \tag{12.3.19}$$

og $\mathrm{m}_\nu(z)$ angiver det ufuldstændige moment i normalfordelingen

$$\mathrm{m}_\nu(z) = \int_0^\infty t^\nu \phi(t+z)dt \int_z^\infty (t-z)^\nu \phi(t)dt$$

Bayesnytten er

$$\eta_1^* = \begin{cases} -(w_0 l_1)/(\mu+1) \left\{\dfrac{(\mu-\nu)\ln n}{n}\right\}^{(\mu+1)/2} \{1 + \mathrm{o}(1/\ln n)\} & \text{for } \mu > \nu \\ -\dfrac{1}{\nu+1} w_0 \{\sigma_0/\sqrt{n}\}^{\nu+1} \{l_1 \mathrm{m}_{\nu+1}(-z) + l_2 \mathrm{m}_{\nu+1}(z)\}\{1 + \mathrm{O}(n^{-1/2})\} & \text{for } \mu = \nu \end{cases} \tag{12.3.20}$$

Løsningen til (12.3.19) og de tilsvarende funktionsværdier $\mathrm{m}_{\nu+1}(-z)$ og $\mathrm{m}_{\nu+1}(z)$ er givet i tabel 12.13 og tabel 12.14.

Såfremt apriorifordelingen er diskret i omegnen af θ_0, er Bayesnytten af formen

$$\eta_1^* \simeq -\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \exp(-\beta n)$$

Bevis:
Sætningen bevises ved en omhyggelig anvendelse af den centrale grænseværdisætning. Et udførligt bevis er givet af A.Hald: Asymptotic properties of Bayesian single sampling plans, Journ.Roy.Statist.Soc. B29 (1967), pp. 162-173 samt p.586.

□

Bemærkning 1 *Operationskarakteristikkurve (styrkefunktion) ved symmetriske potenser*

Vi bemærker, at såfremt $\nu = \mu$, da vil beslutningsreglens operationskarakteristik $P(d, \theta)$ for $\theta = \theta_0$ nærme sig

$$P(d, \theta_0) = \mathsf{P}\left[d(X) = a_1\right] \simeq \Phi(z) \tag{12.3.21}$$

med den generaliserede fraktil z bestemt som løsning til (12.3.19).

Fortolker vi tovalgsproblemet som et testproblem med hypotesen

$$H_0 : \theta \le \theta_0$$

mod alternativet

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

svarer aktionen a_2 således til forkastelse af H_0, og testets niveau α bestemmes som $\alpha = 1 - P(d, \theta_0)$. Det optimale test svarende til den anførte gevinstfunktion har altså approximativt et test på niveau $\alpha = 1 - \Phi(z)$. For $\nu = \mu = 1$ og $l_2 = 10\, l_1$, finder man af tabel 12.13 og tabel 12.14 at løsningen til (12.3.19) er $z = 0.9015$. Fra tabel over normalfordelingen finder vi $\Phi(0.9015) = 0.82$. Med denne omkostningsstruktur vil det optimale test altså have niveauet $\alpha \simeq 18\%$. Da det er 10 gange så dyrt, fejlagtigt at acceptere hypotesen, som fejlagtigt at acceptere hypotesen ($l_2 = 10\, l_1$), vælger vi altså i grænsetilfældet $\theta = \theta_0$ at acceptere 4.5 gange oftere, end vi forkaster ($\alpha/(1-\alpha) \simeq 4.5$).

Testniveauet er åbenbart bestemt således at det forventede tab hidrørende fra fejlagtig accept af hypotesen, $l_1 \mathrm{m}_{\nu+1}(-z) = 1 \times 1.7193$ er i nogenlunde balance med det forventede tab hidrørende fra fejlagtig forkastelse af hypotesen, $l_2 \mathrm{m}_{\nu+1}(z) = 10 \times 0.0934 = 0.934$

Såfremt de to tab vejer lige meget ($\nu = \mu = 1$ og $l_1 = l_2$), finder vi $z = 0$ med testniveauet $\alpha \simeq 1 - \Phi(0) = 0.5$. I denne symmetriske situation, vil man altså teste på et 50 % niveau.

□

12.3.1 Tovalgsproblemer vedrørende endelige populationer

fil: stabesle.tex 1998-05-12

Såfremt beslutningsproblemet vedrører en endelig population, hvis elementer er frembragt af en fordeling med tæthed (12.2.15), kan vi benytte sætning 12.2.7 til at reformulere problemet til et problem vedrørende procesparameteren θ i den sædvanlige repræsentation

$$f_N(y_1, y_2, \dots, y_N; w(\cdot)) = \int \left[\prod_{i=1}^{N} g(y_i|\theta)\right] w(\theta)\nu\{d\theta\}$$

af aprioritætheden.

Vi har derfor

Sætning 12.3.6 ***Ækvivalens med problem vedrørende procesparameteren***

Betragt et tovalgsproblem vedrøende en endelig population $y_1, y_2, \dots y_N$ og antag at konsekvenserne af en beslutning kun afhænger af værdierne af restpopulationens elementer

$$u_r(x'_1, x'_2, \dots, x'_{N-n}, a_1) = \sum_{i=1}^{N-n} u_1(x'_i)$$

og

$$u_r(x'_1, \dots, x'_{N-n}, a_2) = \sum_{i=1}^{N-n} u_2(x'_i)$$

hvor $u_1(\cdot) - u_2(\cdot)$ kun har ét fortegnsskift, fra positive til negative værdier.

Antag endvidere at apriorifordelingen har en tæthed af formen (12.2.15), hvor familien $\{g(\cdot|\theta)\}_{\theta\in\Omega}$ har monoton likelihood-kvotient, og at stikprøvefunk Såfremt også familien af betingede fordelinger af T for givet θ har monoton likelihood-kvotient, da er den optimale beslutningsregel betemt ved

$$d_0(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} a_1 & \text{for } T(x_1, \dots, x_n) \le c \\ a_2 & \text{for } T(x_1, \dots, x_n) > c \end{cases}$$

hvor c tilfredsstiller

$$c = \sup\{t : \lambda(t) \geq 0\} \tag{12.3.22}$$

med

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \int_{\Omega}[\int_{\mathbb{R}}\{u_1(x') - u_2(x')\}g(x'|\theta)\mu\{dx'\}]w_n(\theta|t)\nu\{d\theta\} \\ &= \mathsf{E}_T[\mathsf{E}_{\theta|T=t}[u_1(X') - u_2(X')|\theta]|T = t] \end{aligned} \tag{12.3.23}$$

Bayesnytten svarende til denne regel er

$$\eta^* = (N-n)\{\mathsf{E}[u_2(X')] + \int_{-\infty}^{c} \lambda(t)k_n(t)\mu\{dt\}\} \tag{12.3.24}$$

hvor $k_n(\cdot)$ angiver den marginale tæthed for T.
Bevis:
Betragter vi problemet som et problem vedrørende parameteren ω i repræsentationen (12.2.15) af apriorifordelingen for $y_1, \dots, y_n$, finder vi nyttefunktionen

$$u_0(\theta, a_1) = (N-n)\int u_1(z)g(x'|\theta)\mu\{dx'\}$$

og

$$u_0(\theta, a_2) = (N-n)\int u_2(x')g(x'|\theta)\mu\{dx'\}$$

Da $u_1(x') - u_2(x')$ højst har ét fortegnsskift, og da familien $\{g(\cdot|\theta)\}_{\theta\in\Omega}$ har monoton likelihood-kvotient, følger det af de variationsformindskende egenskaber ved total positive funktioner at

$$l(\theta) = u_0(\theta, a_1) - u_0(\theta, a_2)$$

højst har ét fortegnsskift.

Idet familien af fordelinger af den sufficiente stikprøvefunktion T har monoton likelihood-kvotient følger det nu af sætning 12.3.3 at Bayesbeslutningsreglen er

$$d_0(t) = \begin{cases} a_1 & \text{for } t \leq c \\ a_2 & \text{for } t > c \end{cases}$$

hvor c er bestemt ved (12.3.22) for

$$(N-n)\lambda(t) = \mathsf{E}[l(\theta)|T = t]$$

Bayesnytten fås da af Sætning 12.2.7

□

Korollar 12.3.1 ***Linear nytte***
Såfremt specielt gevinstfunktionen er af formen

$$u_1(z) = A + Bz$$

og

$$u_2(z) = C + Dz$$

med $B < D$ finder vi, at den optimale beslutningsregel er

$$d_0(t) = \begin{cases} a_1 & \text{for } \mathsf{E}\,[Z|T=t] \leq c \\ a_2 & \text{for } \mathsf{E}\,[Z|T=t] > c \end{cases} \tag{12.3.25}$$

med

$$\theta_0 = \frac{A-C}{D-B}$$

Bayesnytten bliver i dette tilfælde

$$\eta^* = (N-n)\{C + D\mathsf{E}\,[Z] + (C-B)\int_{t\leq c} (\theta \mathsf{E}\,[Z|t])k_n(t)\mu\{dt\} \tag{12.3.26}$$

hvor c er bestemt af

$$c = \sup\{t : \mathsf{E}\,[Z|t] \leq \theta_0\}$$

Tabel 12.20. Bayesaktion for tovalgsproblemer vedr endelige populationer
Udvælgelse af n elementer fra en population på N elementer.
$u_r(z_1, \ldots, z_{N-n}, a_1) = \sum(A + Bz_i)$; $u_r(z_1, \ldots, z_{N-n}, a_2) = \sum(C + Dz_i)$ med $B < D$.
$\theta_0 = (A - C)/(D - B)$. Den optimale regel er: Vælg a_1 for $t \leq c$, hvor c fremgår af tabellen.

Proces-fordeling	Apriori-fordeling af proces-parameter ω	Sufficient størrelse $t(x_1, \ldots, x_n)$	Kritisk stikprøve-resultat, c
$\mathrm{B}(1, \theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha, \beta)$	$\sum x_i$	$\theta_0(\beta + n) - (1 - \theta_0)\alpha$
$\mathrm{Ex}(\omega)$	$\mathrm{RG}(\alpha, \beta)$	$\sum x_i$	$(\alpha + n - 1)\theta_0 - \beta$
$\mathrm{Geo}^*(\omega)$	$\mathrm{Bet}(\beta, \alpha)$	$\sum x_i$	$(\alpha + n - 1)\theta_0 - \beta$
$\mathrm{N}(\omega, \sigma^2)$	$\mathrm{N}(\alpha, \beta)$	$\sum x_i$	$\left(\frac{\sigma^2}{\beta} + n\right)\theta_0 - \frac{\alpha\sigma^2}{\beta}$
$\mathrm{P}(\omega)$	$\mathrm{G}(\alpha, 1/\beta)$	$\sum x_i$	$(n + \beta)\theta_0 - \alpha$
$\mathrm{U}(0, \omega)$	$\mathrm{Par}(\beta, \mu)$	$\max x_i$	$2\left(1 - \frac{1}{n+\mu}\right)\theta_0$ og $beta < c$

Tabel 12.21. Bayesnytte for tovalgsproblemer vedr endelige populationer

Udvælgelse af n elementer fra en population på N elementer.

$u_r(z_1, \dots, z_{N-n}, a_1) = \sum(A + Bz_i)$; $u_r(z_1, \dots, z_{N-n}, a_2) = \sum(C + Dz_i)$ med $B < D$.

$\theta_0 = (A - C)/(D - B)$. Den optimale regel er angivet i tabel 12.20

Proces-fordeling	Apriori-fordeling af proces-parameter ω	Bayesnytte
$\mathrm{B}(1, \theta)$	$\mathrm{Bet}(\alpha, \beta)$	$(N-n)\left\{C + D\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + (D-B)\left[\theta_0 \mathrm{Pl}(c; n, \alpha, \alpha+\beta) - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{Pl}(c; n, \alpha+1, \alpha+\beta+1)\right]\right\}$
$\mathrm{Ex}(\omega)$	$\mathrm{RG}(\alpha, \beta)$	$(N-n)\left\{C + D\frac{\beta}{\alpha-1} + (D-B)\left[\theta_0 \mathrm{RBet}(c; \alpha, n, \beta) - \frac{\beta}{\alpha-1}\mathrm{RBet}(c; \alpha-1, n, \beta)\right]\right\}$
$\mathrm{Geo}^*(\omega)$	$\mathrm{Bet}(\beta, \alpha)$	$(N-n)\left\{C + D\frac{\beta}{\alpha-1} + (D-B)\left[\theta_0 \mathrm{NPl}(c; n, \beta, \alpha+\beta) - \frac{\beta}{\alpha}\mathrm{NPl}(c; n, \beta+1, \alpha+\beta)\right]\right\}$
$\mathrm{N}(\omega, \sigma^2)$	$\mathrm{N}(\alpha, \beta)$	$(N-n)\left\{C + \alpha D + (D-B)\left[(\theta_0 - \alpha)\Phi(u) + \sqrt{\frac{n\beta/\sigma^2}{1/\beta + n/\sigma^2}}\,\phi(u)\right]\right\}$ med $u = (c/n - \alpha)/\sqrt{\beta + \sigma^2/n}$
$\mathrm{P}(\omega)$	$\mathrm{G}(\alpha, 1/\beta)$	$(N-n)\left\{C + \frac{\alpha}{\beta}D + (D-B)\left[\theta_0 \mathrm{NB}(c; \alpha, \beta/(\beta+n)) - \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{NB}(c; \alpha+1, \beta/(\beta+n))\right]\right\}$
$\mathrm{U}(0, \omega)$	$\mathrm{Par}(\beta, \mu)$	$(N-n)\left\{C + \frac{\beta\mu}{2(\mu-1)}D + (D-B)\left[\theta_0 \mathrm{BPar}(c; \beta, \mu, n) - \frac{\beta}{2(\mu-1)}\mathrm{BPar}(c; \beta, \mu-1, n)\right]\right\}$

Tabel 12.20 angiver den optimale beslutningsregel (12.3.25) og Tabel 12.21 angiver den tilsvarende Bayesnytte (12.3.26) for tovalgsproblemer med lineær nytte og for en række familier af stikprøvefordelinger med monoton likelihood-kvotient for procesfordelingen.

12.4 Statistiske beslutninger under usikkerhed

I lighed med behandlingen af beslutningsproblemer under usikkerhed i afsnit 10.3, vil vi benytte maximinprincippet til at sikre en total ordning af beslutningsreglerne. Vi vil således lade $\rho_1(d)$ betegne den minimale gevinst ved anvendelse af beslutningsreglen $d(\cdot)$, dvs

$$\rho_1(d) = \inf_{\theta \in \Theta} u_1(\theta, d) = \inf_{\theta \in \Theta} \mathsf{E}\left[u(\theta, d(X))|\theta\right] \tag{12.4.1}$$

og benytte ordningsrelationen:

Definition 12.4.1 ***Maximin ordning af beslutningsregler***

En beslutningsregel $d_1(\cdot)$ siges at være bedre end (maximin) en regel $d_2(\cdot)$, såfremt der gælder at

$$\rho_1(d_2) < \rho_1(d_1)$$

□

Den herved indførte ordning af mængden $\mathcal{F}(\mathcal{X}; \mathcal{A})$ af beslutningsregler er fuldstændig, hvorfor vi kan søge at bestemme den bedste beslutningsregel (maximin), såfremt den eksisterer.

Definition 12.4.2 ***Maximin beslutningsregel***

En beslutningsregel $d_0(\cdot)$, der tilfredsstiller

$$\rho_1(d_0) = \sup_{d \in \mathcal{D}} \rho_1(d)$$

kaldes en maximinregel for beslutningstageren.

□

Sætning 10.3.2 og 10.3.3 overføres umiddelbart til sammenligning af beslutningsregler ved maximinprincippet, og vi har derfor følgende metoder til bestemmelse af en maximinregel:

Direkte metode For enhver beslutningsregel $d \in \mathcal{F}(\mathcal{X};\mathcal{A})$ (eventuelt $d \in \mathcal{F}(\mathcal{X};\mathcal{A})^*$) bestemmes $\rho_1(d)$ ved (12.4.1), hvorefeter maximinreglen findes ved sammenligning af $\rho_1(d)$ for samtlige beslutningsregler $d(\cdot)$. Sammenligningen kan udføres geometrisk ved betragtning af nyttemængden, eller analytisk ved betragtning af det analytiske udtryk for $u_1(d)$, evt ved lineær programmering.

Bestemmelse af den mindst gunstige apriorifordeling Det følger af sætning 10.3.2, at såfremt vi kan bestemme en fordeling af θ med tæthed $w_0(\cdot)$, sådan at Bayesreglen $d_0(\cdot)$ over for denne apriorifordeling tilfredsstiller

$$u_1(\theta, d_0) \geq \int u_1(\theta, d_0) w_0(\theta)\nu\{d\theta\} \tag{12.4.2}$$

for alle $\theta \in \Theta$, da vil reglen $d_0(\cdot)$ være en maximinregel.

Vi søger således at gætte den mindst gunstige apriorifordeling $w_0(\cdot)$, hvorefter Bayesreglen $d_0(\cdot)$ over for denne apriorifordeling bestemmes som anført i afsnit 12.2 og 12.3, og endelig forsøger vi at eftervise at (12.4.2) er opfyldt.

Bestemmelse af en nytteudjævner Det følger af sætning 10.3.3, at såfremt en nytteudjævner er grænseværdi for Bayesnytten svarende til en følge af apriorifordelinger, da vil nytteudjævneren være en maximinregel.

Som eksempel på bestemmelse af maximinløsningen ved *den direkte metode* anfører vi

Sætning 12.4.1 ***Det generelle tovalgsproblem under målefejlsmodel for normalt fordelte observationer***

Betragt et tovalgsproblem under usikkerhed med gevinstfunktionen

$$u(\theta, a_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ -l_1(\theta - \theta_0)^\mu & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$u(\theta, a_2) = \begin{cases} -l_2(\theta_0 - \theta)^\nu & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ 0 & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

og antag at beslutningen baseres på observation af en række uafhængige $N(\theta, \sigma^2)$-fordelte variable $X_1, \ldots, X_n$. Maximinreglen er da

$$d_0(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} a_1 & \text{for } \sum_{i=1}^n x_i \le c \\ \\ a_2 & \text{for } \sum_{i=1}^n x_i > c \end{cases}$$

med

$$c = \begin{cases} n\theta_0 + \sigma_0\sqrt{(\mu-\nu)n\ln(n)} + O(\sqrt{n}\ln(\ln n)/\sqrt{\ln n}) & \text{for } \mu > \nu \\ \\ n\theta_0 + z\sigma_0\sqrt{n} + O(1) & \text{for } \mu = \nu \end{cases}$$

hvor z er løsning til

$$l_1\phi(y^*(-z))\{y^*(-z)+z\}^{\nu+1} = l_2\phi(y^*(z))\{y^*(z)-z\}^{\nu+1} \tag{12.4.3}$$

med funktionen $y^*(z)$ bestemt som løsning til

$$(y-z)\phi(y) = \nu\{1-\Phi(y)\} \tag{12.4.4}$$

Den minimale nytte for denne regel er

$$\rho_1(d_0) = \begin{cases} -l_1\left\{\sigma\sqrt{\dfrac{(\mu-\nu)\ln n}{n}}\right\}^{\mu+1}\{1+o(1)\} & \text{for } \mu > \nu \\ \\ -(l_2/\nu)\,\{\sigma/\sqrt{n}\}^{\nu}\{y^*(z)-z\}^{\nu+1}\phi(y^*(z)) & \text{for } \mu = \nu \end{cases} \tag{12.4.5}$$

Bevis:
Vi vil indskrænke os til at skitsere beviset for tilfældet $\nu = \mu$.

Vi bemærker først, at tovalgsproblemet er monotont, og da enhver Bayesløsning er af formen

$$d_0(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} a_1 & \text{for } \sum_{i=1}^n x_i \le c \\ \\ a_2 & \text{for } \sum_{i=1}^n x_i > c \end{cases} \tag{12.4.6}$$

og samlingen af Bayesregler netop udgør de admissible regler, vil enhver admissibel regel også være af denne form, og det er derfor tilstrækkeligt at undersøge monotone beslutningsregler.

Såfremt beslutningsreglen $d(\cdot)$ er givet ved (12.4.6), finder vi nyttefunktionen svarende til $d(\cdot)$ som

$$u_1(\theta, d) = \begin{cases} -l_2(\theta_0 - \theta)^\nu\{1 - \Phi(y^*)\} & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ \\ -l_1(\theta - \theta_0)^\mu \Phi(y^*) & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

med den standardiserede afstand y^* mellem θ og det kritiske stikprøveresultat c/n

$$y^* = \frac{c - n\theta}{\sigma\sqrt{n}}$$

Indfører vi nu den standardiserede afstand mellem det kritiske stikprøveresultat c/n og ligevægtsværdien θ_0

$$z = \frac{c - n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}$$

finder vi ved differentiation af $u_1(\theta, d)$ med hensyn til θ, at $u\prime_1(\theta, d) = 0$ for

$$\nu(1 - \Phi(y^*)) = (y^* - z)\phi(y^*) \text{ for } y^* \leq 0$$

og

$$\mu\Phi(y^*)) = (z - y^*)\phi(y^*) \text{ for } y^* \geq 0$$

Det kan vises, at der kun er én løsning til hver af disse ligninger. Vi skal altså søge efter den minimale nytte blandt nytten svarende til løsningerne $y_1^* \leq 0$ og $y_2^* \geq 0$.

Vi finder at $y_1^* = y(z)$, hvor $y(z)$ angiver løsningen til (12.4.4), og endvidere finder vi for $\mu = \nu$, at $y_2^* = -y(-z)$, hvorfor vi har

$$\min_{\theta \leq \theta_0} u_1(\theta, d) = -l_2\{(y^*(z) - z)\sigma/\sqrt{n}\}^\nu\{1 - \Phi(y^*(z))\} \tag{12.4.7}$$

og

$$\min_{\theta > \theta_0} u_1(\theta, d) = -l_1\{(y^*(-z) + z)\sigma/\sqrt{n}\}^\nu\{1 - \Phi(y^*(-z))\} \tag{12.4.8}$$

Man kan nu vise at (12.4.7) er en voksende funktion af accepttallet c, og at (12.4.8) er en aftagende funktion, og dermed også af den normerede størrelse z. Den optimale værdi af c fås da fra den værdi z, der gør (12.4.7) og (12.4.8) lige store.

For at bestemme denne værdi løser vi derfor

$$l_2\{(y^*(z)-z)\}^\nu\{1-\Phi(y^*(z))\} = l_1\{(y^*(-z)+z)\}^\nu\{1-\Phi(y^*(-z))\}$$

med hensyn til z, hvilket netop fører til (12.4.3)

$\square$

Tabel 12.22. Løsningen z til (12.4.3) for forskellige kombinationer af ν og l_2/l_1

l_2/l_1	ν									
	0	1/3	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	7.0	10.0
2	0.431	0.339	0.312	0.260	0.228	0.206	0.177	0.143	0.123	0.105
4	0.842	0.671	0.619	0.518	0.455	0.412	0.353	0.285	0.246	0.210
6	1.07	0.858	0.795	0.667	0.587	0.531	0.455	0.369	0.318	0.271
8	1.22	0.988	0.916	0.772	0.680	0.616	0.528	0.428	0.369	0.314
10	1.34	1.09	1.01	0.852	0.752	0.681	0.584	0.474	0.409	0.348
20	1.67	1.38	1.29	1.10	0.972	0.882	0.759	0.616	0.532	0.453
40	1.97	1.66	1.56	1.34	1.19	1.08	0.931	0.757	0.654	0.557
60	2.14	1.81	1.71	1.47	1.31	1.19	1.03	0.839	0.726	0.618
80	2.25	1.92	1.81	1.57	1.40	1.28	1.10	0.898	0.777	0.662
100	2.33	2.00	1.89	1.64	1.47	1.34	1.16	0.943	0.816	0.695

Løsningen z til (12.4.3) for forskellige kombinationer af ν og l_2/l_1 er angivet i Tabel 12.22. Vi bemærker at såfremt z er løsning til (12.4.3) for $l_2/l_1 = \rho$, da vil $-z$ være løsning for $l_2/l_1 = 1/\rho$, og vi har derfor kun tabelleret løsningen for $l_2/l_1 > 1$.

Eksempel 12.4.1 ***Bestemmelse af maximinløsning ved opsøgning af den mindst gunstige apriorifordeling***

Antag at beslutningsproblemet er et kontrolproblem, hvor Θ er mængden af fordelinger på intervallet $[0,1]$ og $\mathcal{A} = [0,1]$ og

$$u(\theta, a) = -(\mu_1(\theta) - a)^2$$

hvor $\mu_1(\theta)$ angiver forventningsværdien i fordelingen θ. Til hjælp ved beslutningen har vi n uafhængige observationer $X_1, \ldots, X_n$ fra fordelingen θ.

Vi ønsker altså at estimere forventningsværdien af observationerne under en kvadratisk tabsfunktion.

Såfremt specielt θ var en $\mathrm{B}(1,p)$-fordeling, og apriorifordelingen over Θ var en $\mathrm{Be}(\alpha,\beta)$-fordeling af p, ville Bayesreglen være (jvf Tabel 12.12 for $\pi = \alpha/(\alpha+\beta)$ og $\gamma = 1/(\alpha+\beta)$)

$$d_0(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\alpha + \sum x_i}{\alpha+\beta+n} = \frac{\pi/\gamma + n\bar{x}}{1/\gamma + n}$$

og den tilsvarende Bayesnytte ville være (jvf Tabel 12.12)

$$\eta(d_0) = -\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+n)} = -\frac{\pi(1-\pi)}{(1+\gamma)(1/\gamma+n)}$$

En "ubehagelig" apriorifordeling fås for $\pi = 0.5$, $\gamma = 1/\sqrt{n}$, dvs. $\alpha = \beta = \sqrt{n}/2$ med den tilsvarende beslutningsregel

$$d_0(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{n}/2 + n\bar{x}}{\sqrt{n} + n} \tag{12.4.9}$$

og

$$\eta(d_0) = -\frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2} \tag{12.4.10}$$

Nytten svarende til reglen (12.4.9) for en vilkårlig fordeling $\theta \in \Theta$ med $\mathsf{E}[X] = \mu_1$ og $\mathsf{E}[X^2] = \mu_2$ er nu

$$u_1(\theta, d_0) = -\frac{\mu_2 - \mu_1 + 1/4}{(1+\sqrt{n})^2}$$

Ved at variere μ_1 og μ_2 i området $0 \leq \mu_2 \leq \mu_1 \leq 1$ finder vi

$$u_1(\theta, d_0) \geq -\frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}$$

hvor højre side svarer til $\mu_1 = \mu_2$, dvs til en fordeling θ, der placerer hele sandsynlighedsmassen i $x = 0$ eller $x = 1$.

Det følger da af sætning 10.3.2, at $d_0(\cdot)$ er en maximinregel.

□

Eksempel 12.4.2 ***Bestemmelse af maximinløsning ved bestemmelse af nytteudjævner***

Lad $\Theta = (0, \infty)$, $\mathcal{A} = [0, \infty)$ og antag at beslutningstageren har mulighed for at observere n uafhængige $\mathrm{P}(\theta)$-fordelte variable $X_1, \ldots, X_n$. Antag endelig at gevinstfunktionen er

$$u(\theta, a) = -(\theta - a)^2/\theta$$

Gevinstfunktionen er fremkommet ved at betragte middelkvadratafvigelsen $(\mathsf{E}[X] - a)^2$ og normere denne med variansen $\mathsf{V}[X] = \theta$.

Vi forsøger først at vurdere nytten svarende til den gængse estimator

$$d_0(x) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$$

Da

$$\mathsf{E}[X_i] = \mathsf{V}[X_i] = \theta$$

finder vi

$$u_1(\theta, d_0) = -\frac{1}{n\theta}\ \mathsf{V}[X_i] = -\frac{1}{n}$$

således at $d_0(\cdot)$ er en <u>nytteudjævner</u>.

For at bestemme Bayesreglen svarende til en $G(\alpha, 1/\beta)$-fordeling af θ, bemærker vi at Bayesreglen svarende til den anførte gevinstfunktion bestemmes ved at maximere

$$\begin{aligned}\eta(a|t) &= -\mathsf{E}\left[(\theta-a)^2/\theta|\sum X_i = t\right] \\ &= -\{\mathsf{E}\left[\theta|\sum X_i = t\right] + a^2\mathsf{E}\left[\theta^{-1}|\sum X_i = t\right] - 2a\}\end{aligned}$$

med hensyn til a. Maksimum findes for

$$d_B(t) = \{\mathsf{E}\left[\theta^{-1}|\sum X_i = t\right]\}^{-1}$$

Da aposteriorifordelingen af θ er en $G(\alpha + t, 1/(\beta + n))$-fordeling finder vi

$$d_B(t) = \frac{t + \alpha - 1}{\beta + n}$$

og Bayesnytten

$$\eta_1(d_B) = \eta(d_B(t)|\sum X_i = t) = -\frac{1}{\beta + n}$$

Lader vi nu parameteren $\beta \to 0$ i apriorifordelingen, vil Bayesnytten nærme sig nytten svarende til nytteudjævneren $d_0(\cdot)$, og vi finder da af sætning 10.3.3, at reglen $d_0(\cdot)$ er en maximinregel.

Vi bemærker at den grænsefunktion, der fremkommer ved at lade $\beta \to 0$ i $\mathrm{Gam}(\alpha, 1/\beta)$-tæthederne er $w(\theta) = \theta^{-1}$ for $\theta > 0$. Denne grænsefunktion er ikke en tæthed for en stokastisk variabel, da funktionen ikke er integrabel. Med en løs sprogbrug fortolker man dog ofte maximinreglen $d_0(\cdot)$ som en Bayesregel overfor den mindst gunstige "apriorifordeling" $w(\theta) = \theta^{-1}$ for $\theta > 0$. "Tætheden", der svarer til en ligelig fordeling af $\ln\theta$ afspejler således en ligelig fordeling af uvidenheden vedrørende $\ln\theta$.

□

Afsnit 13

Bestemmelse af stikprøvestørrelse

fil: stikprst.tex 1998-05-12

13.1 Indledning

Ofte står beslutningstageren i den situation, at han før dataindsamlingen påbegyndes har mulighed for at fastsætte antallet af observationer, der indsamles. Det vil da være naturligt at opveje de ressourcer, der anvendes på stikprøveindsamling og -behandling mod værdien af den information, der fås fra stikprøveresultatet.

Vi vil derfor udvide betragtningerne fra de tidligere afsnit til at omfatte situationer, hvor beslutningstageren har mulighed for observation af et antal n af observationer $X_1, \ldots, X_n$ med en fordeling, der afhænger af beslutningsparameteren θ

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_n, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n, (g_n(\cdot, \ldots, \cdot|\theta))_{\theta \in \Theta}\} \tag{13.1.1}$$

Såfremt specielt $X_1, \ldots, X_n$ er uafhængige og identisk fordelte for givet θ med individuel tæthed $g(\cdot|\theta)$, har vi det statistiske felt

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_n, \mathcal{X}^n, (g(\cdot|\theta)^n)_{\theta \in \Theta}\} \tag{13.1.2}$$

Vi antager at nyttereduktionen (udgiften) ved at foretage n observationer er givet ved funktionen $c(n)$, der kun afhænger af antallet af observationer, således at nyttefunktionen svarende til indsamling af n observationer og valg af aktionen a, når den sande værdi er θ, er

$$u_n(\theta, \alpha) = -c(n) + u_0(\theta, a) \tag{13.1.3}$$

hvor $u_0(\cdot, \cdot)$ angiver nytten svarende til en parameter-aktions kombination, såfremt der ikke foretages nogle observationer. Hvis vi sætter

$$c(0) = 0$$

gælder (13.1.3) også for $n = 0$.

For enhver værdi af n lader vi $\mathcal{D}_n$ betegne mængden af beslutningsregler, $\mathcal{D}_n = \mathcal{F}(\mathcal{X}^n; \mathcal{A})$. Nyttefunktionen svarende til $d \in \mathcal{D}_n$ er da

$$u(\theta, d; n) = -c(n) + u_D(\theta, d; n) \tag{13.1.4}$$

hvor

$$u_D(\theta, d; n) = \int u_0(\theta, d(\underline{x}))g_n(\underline{x}|\theta)\mu\{d\underline{x}\} \tag{13.1.5}$$

angiver den del af nytten, der påvirkes af beslutningsreglen. Vi vil derfor ofte benævne $u_D(\theta, d; n)$ <u>beslutningsnytten</u>.

Sætning 13.1.1 ***Beslutningsnytten er en ikke-aftagende funktion af stikprøvestørrelsen***

Betragt et statistisk beslutningsproblem med de statistiske felter (13.1.1) og med nyttefunktionen (13.1.3) svarende til en beslutning baseret på n observationer. Lad

$$\rho_D^*(n) = \sup_{d \in \mathcal{D}_n} \inf_{\theta \in \Theta} u_D(\theta, d; n) \tag{13.1.6}$$

med $u_D(\theta, d; n)$ givet ved (13.1.5). Lad endvidere $w(\cdot)$ angive en sandsynlighedstæthed for θ, og sæt

$$\eta_D^*(n) = \sup_{d \in \mathcal{D}_n} \int u_D(\theta, d; n) w(\theta) \nu\{d\theta\} \tag{13.1.7}$$

Da vil $\rho_D^*(n)$ og $\eta_D^*(n)$ være ikke-aftagende funktioner af n.

Sætningen siger, at hvadenten vi benytter et maximinprincip, eller et Bayesprincip, kan vi aldrig forværre den optimale beslutningsnytte ved at inddrage yderligere en observation.

Bevis:
Antag at $d_0 \in \mathcal{D}_n$ tilfredsstiller

$$\inf_\theta u_D(\theta, d_0; n) = \rho_D^*(n)$$

Vi kan da bestemme $d^* \in \mathcal{D}_{n+1}$ således at d^* giver samme beslutningsnytte som d_0, fx ved at se bort fra den sidste observation og bruge d_0:

$$d^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = d_0(x_1, \dots, x_n)$$

Der må da gælde

$$\inf_\theta u_D(\theta, d^*; n+1) = \rho_D^*(n)$$

hvorfor vi har

$$\rho_D^*(n+1) = \sup_{d \in \mathcal{D}_{n+1}} \inf_{\theta \in \Theta} u_D(\theta, d; n+1) \geq \inf_\theta u_D(\theta, d^*; n+1) = \rho_D^*(n)$$

hvorved monotoniciteten af $rho_D^*(n)$ er vist.

På tilsvarende måde ses, at såfremt $d_1 \in \mathcal{D}_n$ tilfredsstiller

$$\eta_D^*(n) = \int u_D(\theta, d_1; n) w(\theta) \nu\{d\theta\}$$

da kan vi bestemme en regel $d_1^* \in \mathcal{D}_{n+1}$ der giver anledning til samme nytte, hvorfor

$$\begin{aligned} \eta_D^*(n+1) &= \sup_{d \in \mathcal{D}_{n+1}} \int u_D(\theta, d; n+1) w(\theta) \nu\{d\theta\} \\ &\geq \int u_D(\theta, d_1^*; n) w(\theta) \nu\{d\theta\} \end{aligned}$$

□

Såfremt beslutningstageren anlægger en maximinbetragtning, vil han bestemme maximinnytten

$$\rho^*(n) = -c(n) + \rho_D^*(n) \tag{13.1.8}$$

for enhver stikprøvestørrelse $n = 0, 1, \ldots$, og vælge det antal observationer, der gør (13.1.8) størst mulig.

Såfremt beslutningstageren står overfor en statistisk beslutningssituation under risiko med aprioritætheden $w(\cdot)$ for θ, vil han bestemme Bayesnytten

$$\eta^*(n) = -c(n) + \eta_D^*(n) \tag{13.1.9}$$

for enhver stikprøvestørrelse $n = 0, 1, \ldots$, og vælge den stikprøvestørrelse, der gør (13.1.9) størst mulig.

I de tilfælde, hvor (13.1.8) eller (13.1.9) er givet ved et analytisk udtryk, kan den optimale stikprøvestørrelse bestemmes analytisk, som vist i de følgende eksempler.

Eksempel 13.1.1 ***Bestemmelse af optimal Bayes-stikprøvestørrelse ved kvadratisk tab (målefejlsmodel)***

En afgørende parameter for korrektionen af en given proces er fugtigheden i råmaterialet. Nytten ved at antage fugtigheden a, når den sande fugtighed er θ, antages at være

$$u_0(\mu, a) = -10 \ \ (\mu - a)^2$$

Man har imidlertid mulighed for at foretage fugtighedsmålinger af materialet, men på grund af råmaterialets inhomogenitet og målemetodens unøjagtighed er fugtighedsmålingerne behæftet med en vis usikkerhed. Såfremt middelfugtigheden i råmaterialet er μ, vil resultatet af en måling X kunne beskrives ved en Ex(μ)-fordelt variabel.

Fugtighedsmålingerne skønnes at koste een nytteenhed per måling, og nytten ved at foretage n fugtighedsmålinger, og derefter vælge aktionen a, er da

$$u_n(\mu, a) = -n - 10 \ \ (\mu - a)^2$$

Idet det formodes, at fugtigheden θ varierer fra leverance til leverance i overensstemmelse med en RGam(3, 10)-fordeling, dvs. $\gamma = 1/2$ og $m = 10/2 = 5$, finder vi af Tabel 12.12, at den optimale beslutningsregel for n observationer er

$$d_n(\bar{x}) = \frac{2 \times 5 + n\bar{x}}{2 + n}$$

hvor $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$. Tabel 12.12 viser at den tilsvarende Bayesbeslutningsnytte er

$$\eta^*(n) = -n - 10 \frac{5^2}{(1/2) \times (2+n)} = -n - \frac{500}{2+n}$$

Ved differentiation med hensyn til n finder vi $\eta^{*\prime}(n) = 0$ for $n = \sqrt{500} - 2 = 20.4$ og at denne værdi svarer til en maksimumsværdi af $\eta^*(n)$. Da stikprøvestørrelsen skal være heltallig, undersøger vi de to heltallige naboværdier. Vi får

$$\eta^*(20) = -20 - 1000/44 = -42.73$$

og

$$\eta^*(21) = -21 - 1000/46 = -42.74$$

således at den optimale stikprøvestørrelse er $n = 20$. □

Eksempel 13.1.2 ***Bestemmelse af optimal Bayes-stikprøvestørrelse ved kvadratisk tab (model for en endelig population)***

Vi betragter atter situationen fra eksempel 12.2.7, idet vi nu yderligere antager at beslutningstageren ønsker at fastlægge stikprøvestørrelsen således at han opnår en rimelig balance mellem udgifterne til estimation og tabet hidrørende fra en utilstrækkelig estimationsnøjagtighed.

Vi antager at udgifterne til udtagelse og undersøgelse af 1 meter klæde andrager 2.1 nytteenhed, således at nytten ved at udtage og undersøge n meter og derefter vælge aktionen a, er

$$u_n(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{200-n}; a) = -2.1n - \sum_{i=1}^{200-n} (x'_i - a)^2$$

Idet fejlene antages at være spredt over klædet i overensstemmelse med en P(μ)-fordeling, og idet apriorifordelingen af procesparameteren μ antages at være en G$(3, 1/2)$-fordeling, finder vi af Tabel 12.17 at den forventede nytte ved at udtage n meter og derefter vælge estimatet

$$d_n(\bar{x}) = \frac{2 \times (3/2) + n\bar{x}}{2+n}$$

er

$$\eta^*(n) = -2.1n - (200-n) \times 1.5 \times \left(1 + \frac{1}{2+n}\right)$$

Ved differentiation med hensyn til n finder vi

$$\eta^{*\prime}(n) = -2.1 + (200 - n) \times \frac{1.5}{(2+n)^2} + 1.5 \times \left(1 + \frac{1}{2+n}\right)$$

Vi har $\eta^{*\prime}(n) = 0$ for $n = \sqrt{505} - 2 = 20.5$. Det ses, at denne værdi svarer til en maksimumsværdi af $\eta^*(n)$. Da stikprøvestørrelsen skal være heltallig, undersøger vi de to heltallige naboværdier. Vi får

$$\eta^*(20) = -42 - (180) \times 1.5 \times \left(1 + \frac{1}{22}\right) = -342.273$$

og

$$\eta^*(21) = -44.1 - (179) \times 1.5 \times \left(1 + \frac{1}{23}\right) = -342.274$$

således at den optimale stikprøvestørrelse er $n = 20$. Der er dog ikke nævneværdig forskel på den totale nytte ved de to stikprøvestørrelser.

□

13.2 Asymptotiske resultater

For at give et indtryk af sammenhængen mellem stikprøvestørrelse og beslutningsnytte, skal vi i nedenstående sætninger angive den optimale stikprøvetørrelse for nogle simple beslutningsproblemer.

Vi betragter atter situationen fra sætning 12.2.6

Sætning 13.2.1 ***Det generaliserede avisdrengsproblem med normalt fordelte observationer***

Betragt et beslutningsproblem med beslutningsnytten

$$u(\mu, a) = \begin{cases} -l_1(a-\mu)^{\nu_1} & \text{for } \mu \leq a \\ -l_2(\mu - a)^{\nu_2} & \text{for } a < \mu \end{cases}$$

og antag, at beslutningstageren har mulighed for at observere en række uafhængige variable, der alle følger en $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-fordeling.

Såfremt apriorifordelingen for μ er en $N(\mu_0, \gamma_0\ \sigma^2)$-fordeling, da vil Bayesløsningen til problemet med nyttefunktionen

$$u_n(\nu, a) = -k \times n^s + t\, u(\mu, a)$$

for $t \to \infty$ have Bayesnytten

$$\eta^* = -\ \frac{2s + \nu_1}{\nu_1}\ k\, n_0^s(1 + \mathrm{o}(1)) \text{ for } \nu_2 \leq \nu_1$$

Såfremt $\nu_2 = \nu_1 = \nu$, betemmes den optimale stikprøvestørrelse n_0 ved

$$n_0^{(2s+\nu)/2} = t\ \frac{\nu\sigma^\nu}{2s\, k}\ \{l_1 \mathrm{m}_\nu(-z_0) + l_2 \mathrm{m}_\nu(z_0)\}\ \{1 + \mathrm{O}(n^{-1})\}$$

hvor z_0 er løsning til

$$\frac{\mathrm{m}_{\nu-1}(-z_0)}{\mathrm{m}_{\nu-1}(z_0)} = l_2/l_1$$

Såfremt $\nu_2 < \nu_1$ bestemmes n_0 ved

$$n_0 = \gamma^{2/(2s+\nu_1)}\{(2\ln\gamma)/(2s + \nu_1)\}^{\nu_1/(2s+\nu_1)}(1 + \mathrm{o}(1))$$

med

$$\gamma = \nu_1\{(\nu_1 - \nu_2)\sigma^2\}\nu_1/2\, l_1/(2s\, k)$$

Bevis:
Beviset følger af de approximationer, der blev angivet i korrollaret til sætning 12.2.6

□

Den følgende sætning supplerer sætning 12.3.5

Sætning 13.2.2 ***Optimal stikprøvestørrelse for tovalgsproblem under risiko***

Lad et tovalgsproblem have gevinstfunktionen

$$u(\theta, a_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ -l_1(\theta - \theta_0)^\mu & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$u(\theta, a_2) = \begin{cases} -l_2(\theta_0 - \theta)^\nu & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ 0 & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

og antag at beslutningen baseres på observation af en række uafhængige variable $X_1, \ldots, X_n$ med tætheden

$$g(x|\theta) = d(x)\exp\{\theta t(x) - \psi(\theta)\}$$

hvor $t(\cdot)$ er en voksende funktion, og hvor parametriseringen er valgt således at $\mathrm{E}[t(X)|\theta] = \theta$. Såfremt apriorifordelingen af θ har en tæthed $w(\theta)$, der er kontinuert i omegnen af θ_0 med

$$w(\theta_0) = w_0 > 0$$

da vil Bayesløsningen til problemet med nyttefunktionen

$$u_n(\theta, a) = -k \times n^s + t\, u(\theta, a)$$

for $t \to \infty$ have Bayesnytten

$$\eta^* = -\frac{2s + \mu + 1}{\mu + 1}\, k\, n_0^s(1 + \mathrm{o}(1)) \text{ for } \nu \leq \mu$$

For $\nu = \mu$ er den optimale stikprøvestørrelse n_0 bestemt af

$$n_0^{2s+\nu+1)/2} = \frac{w_0 t}{2s\, k}\, \{l_1 \mathrm{m}_{\nu+1}(-z) + l_2 \mathrm{m}_{\nu+1}(z)\}\{1 + \mathrm{O}(n^{-1/2})\}$$

med z givet ved (12.3.19) For $\nu < \mu$ er n_0 bestemt af

$$n_0 = \gamma^{2/(2s+\mu+1)}\{(2\ln\gamma)/(2s + \mu + 1)\}^{(\mu+1)/(2s+\mu+1)}\{1 + \mathrm{o}(1)\}$$

med

$$\gamma = \frac{w_0 l_1}{2s\, k}\, t\{(\mu - \nu)\sigma_0^2\}^{(\mu+1)/2}$$

Såfremt apriorifordelingen er diskret i omegnen af θ_0, vil

$$\eta^* = -k\, n_0^s\{1 + \mathrm{o}(1)\}$$

hvor

$$n_0 = (\kappa \ln t)\{1 + \mathrm{o}(1)\}$$

Bevis:
Beviset bygger på de approximationer, der blev angivet i Sætning 12.3.5 □

For maximinløsningen kan man supplere sætning 12.4.1 med

Sætning 13.2.3 ***Optimal stikprøvestørrelse for tovalgsproblem under usikkerhed***

Betragt et statistisk tovalgsproblem under usikkerhed med beslutningsnytten Betragt et tovalgsproblem under usikkerhed med gevinstfunktionen

$$u(\theta, a_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ -l_1(\theta - \theta_0)^\mu & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$u(\theta, a_2) = \begin{cases} -l_2(\theta_0 - \theta)^\nu & \text{for } \theta \leq \theta_0 \\ 0 & \text{for } \theta > \theta_0 \end{cases}$$

og antag at beslutningen baseres på observation af en række uafhængige $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$-fordelte variable $X_1, \ldots, X_n$.

Da vil maximinnytten for beslutningsproblemet med nyttefunktionen

$$u_n(\theta, a) = -k \times n^s + t\, u(\theta, a)$$

for $t \to \infty$ være givet ved

$$\rho^* = -\frac{2s + \mu}{\mu}\, k n_0^s \{1 + \mathrm{o}(1)\} \text{ for } \nu \leq \mu$$

Såfremt $\nu = \mu$ er den optimale stikprøvestørrelse n_0 bestemt af

$$n_0^{(2s+\mu)/2} = \frac{l_2 t}{2s\, k\sigma} \{\sigma(\{y^*(z) - z)\}^{\nu+1} \phi(y^*(z))$$

med z bestemt som løsning til (12.4.3) og hvor funktionen $y^*(z)$ er bestemt som løsning til (12.4.4).

For $\nu < \mu$ bestemmes den optimale stikprøvestørrelse n_0 ved

$$n_0 = \gamma^{2/(2s+\mu)} \{(2 \ln \gamma)/(2s + \mu)\}^{(\mu)/(2s+\mu)} \{1 + \mathrm{o}(1)\}$$

med

$$\gamma = \frac{\mu}{2s\, k}\, l_1\, t\{(\mu - \nu)\sigma^2\}^{\mu/2}$$

Bevis:
Sætningen følger af de approximationer, der blev angivet i sætning 12.4.1.
□

Indeks