

IKKE LINEÆR DYNAMIK

Undersøgelse af Cooperriders komplekse bogie med flanger
ved høj hastighed

Eksamensprojekt af

Preben Isaksen

ved

Laboratoriet for Anvendt Matematisk Fysik

og

Institut for Matematisk Modelling

Danmarks Tekniske Universitet

Marts 1994

FORORD

Denne rapport er resultatet af et eksamensprojekt udarbejdet ved Laboratoriet for Anvendt Matematisk Fysik under Institut for Matematisk Modellering, Danmarks Tekniske Universitet. Projektet er udført i perioden 1. oktober '93 til 25. marts '94 under vejledning af Hans True.

Baggrunden for projektet er min store interesse for modellering af komplekse dynamiske systemer. Hans True har altid haft stor interesse for modellering af dynamikken indenfor jernbanekøretøjer. Da jeg selv ønskede, at modellere systemer, der kunne relateres til den virkelige verden, var det nærliggende at søge interesserne forenet. Hvilket blev gjort ved dette eksamensprojekt.

Under arbejdet har Hans True altid med stor entusiasme og iver, støttet og inspireret til videre undersøgelser af opnåede resultater, dette vil jeg hermed gerne takke for. Når derimod resultaterne har været længe under vejs, vil jeg ligeledes takke Hans True for at kunne opmuntre mig til fortsat at forfølge de ønskede resultater.

Carsten Knudsen takkes for altid at ville diskutere opnåede resultater og de anvendte metoder.

Endelig takkes min familie for tålmodigt at lade mig prioritere dette eksamensprojekt højt. Specielt under den sidste del af arbejdet har jeg gjort god brug af denne tålmodighed.

Danmarks Tekniske Universitet
Marts 1994

Preben Isaksen
C879290.

ABSTRACT

I dette eksamensarbejde foretages numeriske undersøgelser af en toakslet jernbanebogie med flanger ved høj hastighed. Den ikke-lineære model der undersøges, er formuleret af Cooperrider i 1972.

Bogien kører med konstant hastighed på et retlinet horisontalt spor, og er uden påvirkning af ydre kræfter. For friktionskræfterne i kontaktplanet mellem hjul og skinne er Vermeulen og Johnsons ikke-lineære teori benyttet. Flangekræften er modelleret ved en stykkevis lineær funktion, det vil sige som en meget stiv fjeder med et 'dødt område'. Kun hastigheden varieres som bifurkationsparameter, mens alle andre parametre holdes konstant.

Resultaterne præsenteres som bifurkationsdiagrammer og returafbildninger understøttet af tidsserier og approximation af Lyapunoveksponenter og Floquet multipliers.

De numeriske metoder der anvendes, beskrives og diskuteres.

Der påvises asymmetriske periodiske, quasiperiodiske og kaotiske løsninger.

Faselåsning af periodiske løsninger med høj periode mellem quasiperiodiske løsninger påvises.

Det empiriske fænomen 'Period-adding' påvises og diskuteres.

Bifurkationer mellem periodiske og quasiperiodiske løsninger, bifurkationer mellem periodiske og kaotiske løsninger, bifurkationer mellem quasiperiodiske og kaotiske løsninger og bifurkationer mellem forskellige typer kaotiske løsninger diskuteres.

Til slut diskuteres kendte resultater fra tidligere rapporter ved andre hastigheder, ved hjælp af det udviklede programmel.

Forord.....	1
Abstract	2
1. Indledning	4
2. Synopsis.....	5
3. Model af konventionel hjulbogie.	6
3.1. Modellen	6
3.2. Frihedsgrader.....	6
3.3. Krybekræfter	8
3.4. Flangekræfter.....	8
3.5. Fjeder- og dæmperkræfter	9
3.6. Bevægelsesligninger	9
4. Løsningstyper.....	10
4.1. Stationære løsninger	10
4.2. Periodiske løsninger.....	10
4.3. Quasiperiodiske løsninger.....	10
4.4. Kaotiske løsninger.....	11
4.5. Stabile og ustabile løsninger.....	11
4.6. Symmetriske og asymmetriske løsninger	12
4.7. Bifurkationer	12
5. Numeriske metoder.....	14
5.1. Tidsserier og faseplansdiagrammer	14
5.2. Poincaré afbildninger.....	14
5.3. Returafbildninger	16
5.4. Bifurkationsdiagrammer	16
5.5. Floquet multipliers	17
5.6. Lyapunoveksponenter	17
5.6.1. Egenskaber ved lyapunoveksponenter.....	20
6. Resultater	21
6.1. Modellen for hastigheder under 203.3m/s	21
6.2. Bestemmelse af løsningstyper.....	24
6.2.1. $v=203.337\text{m/s}$	24
6.2.2. $v=203.342\text{m/s}$	26
6.2.3. $v=203.35\text{m/s}$	27
Figur 6.2.3.4. Bifurkationsdiagram.	29
6.2.4. $v=203.3925\text{m/s}$	30
6.2.5. $v=203.4015\text{m/s}$	31
6.2.6. $v=203.41\text{m/s}$	31
6.2.7. $v=203.5625\text{m/s}$	34
6.2.8. $v=203.58\text{m/s}$	36
6.2.9. $v=203.654\text{m/s}$	36

6.2.10.....	v=203.703
6.2.11.....	v=203.706
6.2.12.....	v=203.708
6.2.13.....	v=203.72
6.2.14.....	v=203.789
6.2.15.....	v=203.802
6.2.16.....	v=203.805
6.3. Bifurkationer	51
6.4. Asymmetriske løsninger	55
6.5. Videre undersøgelser	56
6.6. Period-adding.....	56
6.7. Fysiske forklaringer ?	57
6.8. Kendte resultater	58
6.8.1. $v=112\text{m/s}$	58
6.8.2. $v=250\text{m/s}$	58
7. Optimering af programmer.	59
8. Konklusion	60
9. Efterskrift	61
10. Referencer.....	62

1. INDLEDNING

Dette eksamensarbejde omhandler matematisk modellering af et komplekst dynamisk system. Modellering har altid været et vigtigt element i et udviklingsforløb. Tidligere bestod modellering næsten udlukkende i at opbygge fysiske modeller, men inden for de sidste årtier er flere og flere systemer suppleret med matematiske modeller.

Det er hovedsaglig den forøgede datakraft, der gør de ofte meget krævende beregninger mulige. Men en general øget forståelse for de matematiske modellers muligheder har også betydning for den øgede udbredelse.

I takt med den øgede datakraft er interessen for ikke-lineære dynamiske systemer forøget. Ikke-lineære systemer har altid spillet en vigtig rolle i beskrivelsen af naturen. Generelt er det kun ganske få ikke-lineære ligninger, der kan løses analytisk, hvorfor den øgede datakraft har muliggjort nye opdagelser de seneste år. Men kun gennem et tålmodigt studie af mange dynamiske systemer er de nu kendte universale regler og sammenhænge blevet formuleret.

De vigtigste kriterier for en matematisk model, er at den kan reproducere eksperimentale data. Indenfor jernbanedynamikken blev tidligere brugt sammenhænge i modellerne der var lineære. Dette resulterede i modeller, der ikke var i stand til at reproducere målte data med tilfredsstillende præcision. Idag benyttes ulineære sammenhænge i køretøjsdynamikken, med det resultat at eksperimentale data reproduceres langt bedre.

Køretøjsdynamik er et oplagt område for anvendelse og videreudvikling af metoderne indenfor ikke-lineære dynamiske systemer. Dynamikken i modellerne fra dette område viser et bredt spektrum af alle herlighederne fra ikke-lineær dynamik, på grund af de ikke lineære sammenhænge der findes i modellerne.

2. SYNOPSIS

Formålet med dette projekt er at undersøge dynamikken i en ikke-lineær model af en konventionel jernbanebogiede ved høj hastighed. Projektet har til formål, at illustrere metoder der anvendes indenfor ikke-lineær dynamik med udgangspunkt i den ikke-lineære model af bogiede.

I kapitel 3 opstilles ligningerne for modellen. De ikke lineære sammenhænge beskrives, men detaljerne udelades.

I kapitel 4 beskrives løsningstyperne til systemet, der beskrives, hvorledes det er muligt at bestemme de forskellige løsningstyper.

I kapitel 5 beskrives de anvendte numeriske metoder. Der lægges vægt på den praktiske anvendelse af metoderne, således at der også beskrives, hvornår metoderne må give op.

I kapitel 6 præsenteres de opnåede resultater. Resultaterne præsenteres hovedsagligt ved figurer og diagrammer. De visualiserede resultater diskuteres.

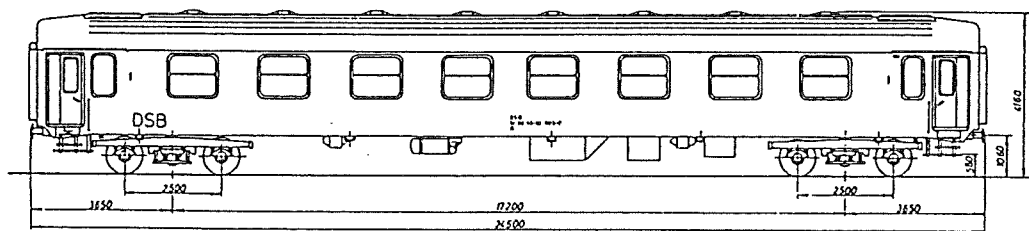
I kapitel 7 diskuteres det benyttede programmel.

I kapitel 8 diskuteres de opnåede resultater i en konklusion.

Som afslutning på projektet opsummeres projektets forløb, og der diskuteres hvilke metoder, der ikke er benyttet i dette projekt, men måske vil være fornuftige at afprøve på den undersøgte model.

3. MODEL AF KONVENTIONEL HJULBOGIE.

I dette kapitel opstilles Cooperriders model for en konventionel hjulbogiede med to aksler, konisk hjulprofil og flanger. De ikke-lineære krybekræfter og den stykkevis lineære flangekraft, der er af størst betydning for dynamikken, beskrives. For en detaljeret gennemgang af modellen henvises til [Cooperrider, N. K. '72 & Kaas-Petersen '86].



Figur 3.1. Passagervogn på to bogier.

3.1. Modellen

Modellen består af tre stive legemer; to hjulaksler og en ramme. Akslerne er ved hjælp af fjedre og dæmpere forbundet til rammen, og rammen er ved hjælp af fjedre og dæmpere forbundet til passagervognen. Vognen bevæger sig med konstant hastighed. Det antages at hjulene hele tiden er i kontakt med skinnerne. Det forudsættes, at bogien bevæger sig ad et retlinet horisontalt spor uden påvirkning af kræfter fra motor, bremsere og lignende. Skinnerne forudsættes at være retlinede og horisontale, og kontaktfladerne antages at være cirkelbuer.

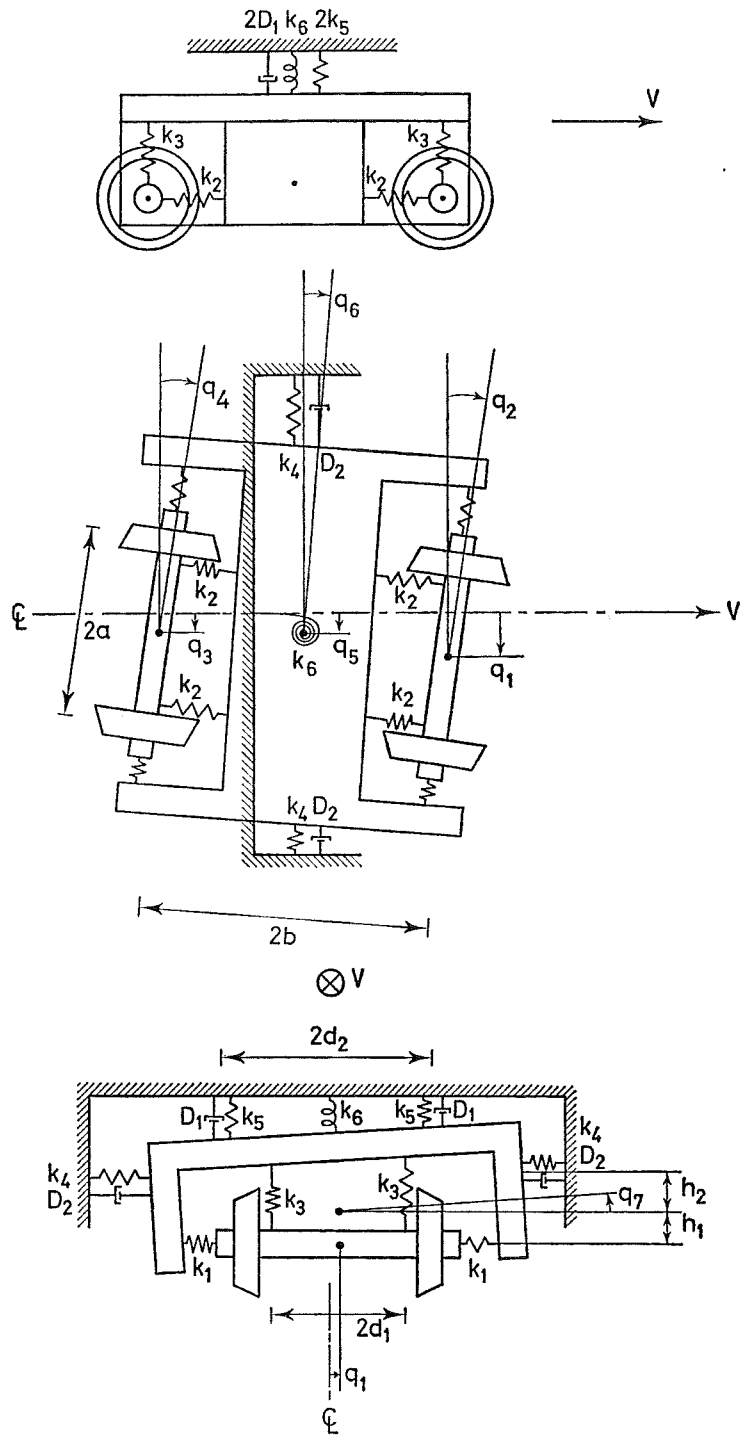
3.2. Frihedsgrader

Stive legemer, der bevæger sig frit i rummet, har ialt 6 frihedsgrader. Forskydning og drejning i rummets tre retninger. For et jernbanehjul sæt er der kun en svag kobling mellem horisontale og vertikale svingninger, hvorfor de vertikale frihedsgrader udelades, når den laterale dynamik undersøges.

Modellen tillades herefter at have ialt 7 frihedsgrader:

Laterale svingninger samt drejning af front- og bagaksel.

Laterale svingninger, drejning og rulning af rammen.



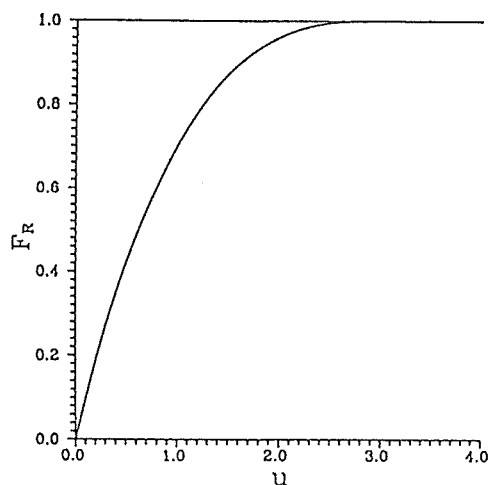
Figur 3.2.1. Model af bogie, med den anvendte notation. Hjulene er vist uden flange.

Der er tre kræfter, der påvirker bogien

3.3. Krybekræfter

Friktionskræfterne der opstår i kontaktfladen mellem hjul og skinne kaldes krybekræfter. Krybekræfterne spiller en stor rolle i jernbanekøretøjsdynamikken. Kræfterne er årsag til, at toget kan accelerere, men medvirker også til styring og centring af hjulsættet. Den relative hastighed mellem hjul og skinne i kontaktpunktet normeret af køretøjets hastighed kaldes krybet.

I denne model benyttes Vermeulen og Johnsons teori for sammenhængen mellem krybet og krybekræfterne (for argumenter og forudsætninger for at benytte denne sammenhæng henvises til [Kalker J.J. '91]).

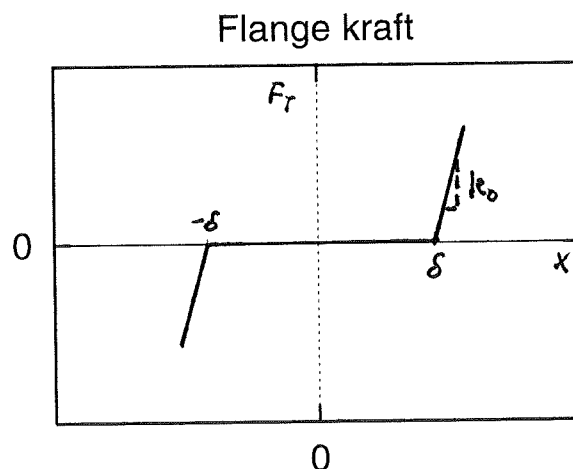


Figur 3.3.1. Krybekræfterne versus normaliseret kryb.

3.4. Flangekræfter

Ved store laterale svingninger vil hjulene have flangekontakt. Ved flangekontakt påvirkes hjulene af en stor lateral kraft.

Denne kraft modelleres ved en meget stiv fjeder med et 'dødt område'



Figur 3.4.1. Flangekræfter versus forskydningen.

3.5. Fjeder- og dæmperkræfter

Fjederkræfterne antages alle at afhænge lineært af forskydningen, og alle dæmperkræfterne antages at afhænge lineært af hastigheden.

3.6. Bevægelsesligninger

Newtons metode benyttes til at opstille bevægelsesligningerne for systemet.

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 q_1}{dt^2} + A_1 & & & + 2F_{xf} + F_T(q_1) = 0 \\
 m \frac{d^2 q_2}{dt^2} & + A_3 & & + 2aF_{yf} = 0 \\
 m \frac{d^2 q_3}{dt^2} + A_2 & & & + F_{xr} + F_T(q_3) = 0 \\
 m \frac{d^2 q_4}{dt^2} & & + A_4 & + 2aF_{yr} = 0 \\
 m \frac{d^2 q_5}{dt^2} - A_1 - A_2 & & + A_5 & = 0 \\
 m \frac{d^2 q_6}{dt^2} - bA_1 + bA_2 + A_3 + A_4 & & + A_6 & = 0 \\
 m \frac{d^2 q_7}{dt^2} - h_1 A_1 - h_1 A_2 & & - h_2 A_5 + A_7 & = 0
 \end{aligned}$$

Bevægelsesligningerne udgør hermed 7 andenordens koblede ikke-lineære differentiaalligninger, hvor A_i -ledene modellerer lineære fjedre og dæmpere og F_i -ledene modellerer ikke-lineariteterne fra krybe- og flangekræfterne. For de anvendte værdier af de indgående størrelser henvises til [Kaas-Petersen, C. '86]

Modellen ses at være symmetrisk omkring en midterakse parallel med skinnerne.

Ved variabeltransformationen $q_1 \rightarrow x_1$, $\dot{q}_1 \rightarrow x_2$, $q_2 \rightarrow x_3$, $\dot{q}_2 \rightarrow x_4, \dots$ haves 14 ikke-lineært koblede 1. ordens differentiaalligninger, hvor ikke-lineariteterne stammer fra krybe- og flangekræfterne.

Ligningerne beskriver et dynamisk autonomt parameterafhængigt system

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v), \quad x \in R^{14}, \quad v \geq 0, \quad t \geq 0$$

hvor hastigheden v er bifurkationsparameter.

4. LØSNINGSTYPER

I dette kapitel beskrives de forskellige løsningstyper, der optræder for et dynamisk autonomt parameterafhængigt system som Cooperriders bogie ved høj hastighed. Forskellige løsninger, der optræder i modellen diskuteres.

Ved en løsning til systemet, menes i denne rapport, den bevægelsesform systemet vil udvise efter et eventuelt transient forløb.

Det beskrives hvorledes de forskellige løsninger kan bestemmes.

4.1. Stationære løsninger

Stationære løsninger eller ligevægts løsninger til systemet bestemmes for funktionen f som

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha) = 0, \quad x \in R^n, \quad \alpha \in R$$

$x=0$ er den (eneste) stationære løsning til det modellerede system, hvor de variable x ikke ændrer sig i tiden. Løsningen svarer altså til, at der ikke findes nogen svingninger i bogien. Denne løsning eksisterer for alle hastigheder.

Ved hjælp af PATH er det muligt at identificere og følge stationære løsninger, når bifurkationsparameteren varieres.

4.2. Periodiske løsninger

Periodiske løsninger er en løsningstype, der gentager sig selv efter en periode T . Hvis x_0 er et punkt på den periodiske løsning ϕ haves

$$\phi(t + T, x_0) = \phi(t, x_0)$$

Periodiske løsninger identificeres som et periode n fixpunkt i en defineret Poincaré plan.

Det er muligt ved hjælp af PATH af identificere og følge periodiske løsninger, når bifurkationsparameteren varieres.

4.3. Quasiperiodiske løsninger

Quasiperiodiske løsninger er en løsningstype, hvor svingningen på en måde minder om en periodisk løsning, men en quasiperiodisk løsning vil aldrig gentage sit forløb.

Quasiperiodiske løsninger fremkommer ved, at der i systemet introduceres en ny frekvens, dog således at forholdet mellem en eventuelt eksisterende frekvens og den nye frekvens ikke er et rationelt forhold.

Quasiperiodiske løsninger kan identificeres ved at de (mindst) 2 største Lyapunov eksponenter begge har værdierne 0.

Det er ikke muligt at benytte PATH til at identificere quasiperiodiske løsninger.

4.4. Kaotiske løsninger

Deterministiske kaotiske løsninger er kendetegnet ved

- tilsyneladende tilfældighed
- følsomhed overfor begyndelsesbetingelser
- orden

Det er ikke muligt ved hjælp af PATH af identificere kaotiske løsninger.

Har en betragtet løsning mindst én positiv lyapunov eksponent er løsningen kaotisk.

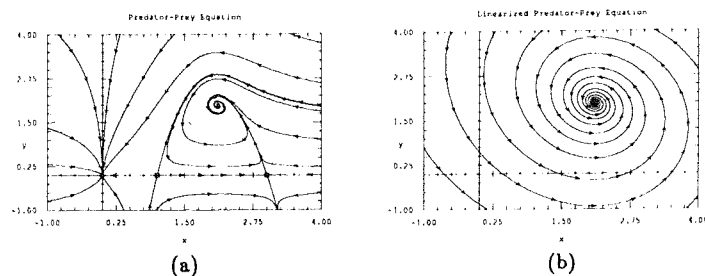
4.5. Stabile og ustabile løsninger

For alle de nævnte løsningstyper gælder der, at en løsning er stabil, hvis systemet efter en perturbation vender tilbage til denne løsning efter et transient forløb. Det vil sige, at kun stabile løsninger observeres fysisk. Ved integration af systemet for bogien frem i tid, vil der efter et (eventuelt meget langt) transient forløb opnås en stabil løsning.

Ustabile løsninger vil ikke ses igen efter en perturbation.

Det er muligt at linearisere løsningen omkring et punkt, og herefter lave en lineær stabilitets analyse. For den stationære løsning er dette punkt givet. For en periodisk løsning betragtes den diskrete Poincaré afbildning hvormed punktet, der lineariseres omkring er givet som et punkt i Poincaré planen. Det fremkomne resultat er uafhængig af af placeringen af Poincaré planen.

Lyapunov teoremet fortæller, at løsningen til den oprindelige ikke-lineære system i en omegn omkring det undersøgte punkt, vil forløbe som løsningen til det lineariserede system.



Figur 4.5.1. Originalt forløb og lineariseret forløb omkring et stationært punkt. Begge metoder kræver udregning af Jacobimatrizen hørende til det aktuelle punkt.

Løsningerne til de lineariserede systemer bestemmes ved udregning af egenverdierne λ_i for de respektive Jacobimatricer. Placeringen af egenverdierne i den komplekse plan bestemmer stabiliteten af løsningen.

For den stationære løsning vil løsninger til det lineariserede system være en sum af led af typen $ae^{\lambda t}$. Disse løsninger vil være stabile for $\text{Re}[\lambda] < 0$.

For Poincaré afbildningen vil løsninger til det lineariserede system være en sum af led af typen $a\lambda^k$. Løsningerne vil være stabile, hvis modulus af λ er mindre end 1. Egenverdierne hørende til Jacobimatricen for Poincaré afbildningen kaldes Floquet multipliers.

PATH benytter de nævnte metoder til at bestemme stabiliteten af stationære og periodiske løsninger.

De udregnede egenverdier er knyttet til bestemte retninger i faserummet ved egenvektorerne. Det er således muligt at have punkter på løsningen i faserummet, der er stabile (tiltrækkende) i en (eller flere) retninger og ustabile (frastødende) i en anden (eller andre) retninger såkaldte saddepunkter. Denne type løsninger betegnes også ikke-stabile løsninger (i engelsk sproget litteratur non-stable). Hvis alle retninger omkring et punkt på løsningen i faserummet er ustabile (frastødende) kaldes løsningen ustabil (un-stable).

Efter denne definition vil en ustabil løsning ved tidsomvending blive til en stabil løsning, således at den kan bestemmes ved at integrere systemet tilbage i tid.

De fundne ikke-stabile løsninger er alle 'sadler' således, at denne metode ikke kan benyttes.

I denne rapport skelnes ikke imellem ikke stabile og ustabile løsninger -de kaldes alle ustabile løsninger.

I denne rapport behandles kun observerede quasiperiodiske og kaotiske løsninger, altså stabile versioner af disse løsninger.

4.6. Symmetriske og asymmetriske løsninger

En asymmetrisk løsning er defineret således: hvis et punkt $(x_1, x_2, \dots, x_{14})$ på løsningskurven hører til en asymmetrisk løsning (uafhængig af løsningstype) så vil $(-x_1, -x_2, \dots, -x_{14})$ tilhøre en anden asymmetrisk løsning. De to løsninger vil have samme egenskaber med hensyn til type og stabilitet.

Modsat er en symmetrisk løsning defineret ved at punktet $(x_1, x_2, \dots, x_{14})$ og punktet $(-x_1, \dots, -x_{14})$ tilhører samme løsning.

4.7. Bifurkationer

Ændringer af løsningstype eller stabilitet sker ved bifurkationer. Derfor er det fundamentalt vigtigt for forståelse af et systems dynamik, at fastlægge ved hvilke parameterværdier bifurkationerne sker, samt bestemme bifurkationstypen.

Ved bifurkation af stationære eller periodiske løsninger kan bifurkationerne fastlægges ved kendskab til egenverdierne hhv. Floquet multiplernerne.

Ved bifurkation af quasiperiodiske eller kaotiske løsninger kan kendskab til Lyapunov eksponenterne fastlægge bifurkationen.

I appendix er vist hvorledes Lyapunov eksponenterne sig ved forskellige bifurkationstyper.

5. NUMERISKE METODER.

Dynamikken i modellen analyseres ved numeriske metoder når den uafhængige bifurkationsparameter, hastigheden v varieres.

Resultaterne præsenteres som

- tidsserier og faseplansdiagrammer
- bifurkationsdiagrammer
- returafbildninger
- approximering af lyapunoveksponenter og floquet multipliers

Der er benyttet eksisterende samt udviklet nyt programmel til at undersøge dynamikken i modellen.

Beskrivelser samt fordele og ulemper ved de benyttede metoder diskuteres i dette kapitel. Teorien bag de anvendte metoder er kort beskrevet, for fyldesgørende beskrivelser henvises til [Guchenheimer & Holmes '83, Thomsen & Steward '86]. I kapitlet er der lagt vægt på de praktiske problemer ved de anvendte metoder, hvilket sjældent fremgår af den teoretiske litteratur.

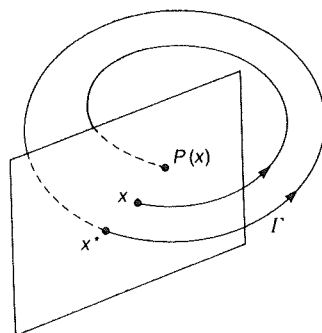
5.1. Tidsserier og faseplansdiagrammer

Til at approksimere løsninger til de opstillede differentiallyigninger benyttes integrationsroutinen LSODA. LSODAs vigtigste egenskab er, at den automatisk skifter mellem stive og ikke stive løsningsmetoder, når dette er påkrævet. Desuden har LSODA variabel steplængde og variabel orden. Der benyttes en tolerance på 10^{-9} for den største lokale fejl ved integration af differentiallyigningerne. Tids-skridtlængden ved integration varieres til den ønskede nøjagtighed opnås, hvorefter der som approximation mellem hvert integrationsskridt benyttes lineær approximation.

Tidsserier og faseplansdiagrammer er hurtige at beregne og giver et godt overblik over løsningstypen, men kræver store datamængder. Når tidsserier skal plottes, er det nødvendigt med mange punkter, så kurverne ikke bliver 'kantede'. En benyttet måde til at illustrere en svingning er at 'nøjes' med et udsnit af svingningen, f. eks. toppen af svingningerne. Ved at nøjes med disse punkter reduceres datamængden voldsomt.

5.2. Poincaré afbildninger

En klassisk teknik til undersøgelse af dynamiske systemer blev introduceret af Poincaré. Poincarés afbildning definerer en $(N - 1)$ dimensional diskret afbildning kaldet Poincaré afbildningen ud fra den N dimensionale kontinuerte afbildning.



Figur 5.2.1. Definition af Poincaré plan, vist for $N=3$.

Ved at introducere en $N-1$ dimensional hyperflade (eller 'snit') i det N dimensionale faserum vinkelret på løsnings-trajektorien¹ opnås den ønskede afbildning.

Definitionen af Poincaréafbildningen sikrer at egenskaberne ved den diskrete afbildning svarer til den underliggende kontinuerte løsnings-trajektories egenskaber.

De vigtigste kvaliteter ved Poincaréafbildningen er, at den reducerer antallet af dimensioner og forbinder kontinuerte og diskrete systemer.

Den $N-1$ dimensionale Poincaré plan, der benyttes ved afbildningen, kan defineres på flere måder for autonome systemer.

En mulig måde at definere en $N-1$ dimensional plan er ved at bestemme et punkt i planen og en N dimensional normalvektor til planen. Ved denne måde er der fuldt kontrol over, hvorledes planen er placeret i det N dimensionale faserum. Denne metode benytter PATH til at definere den benyttede plan.

Denne metode er meget beregningstung. Når det undersøges om løsnings-trajektorien har nået Poincaré planen udregnes en N dimensionel vektor fra det kendte punkt i planen til det aktuelle punkt på løsnings-trajektorien. Herefter udregnes det generaliserede N dimensionelle skalarprodukt mellem den netop udregnede vektor og normalvektoren til planen. Resultatet af dette produkt viser om planen er nået eller ej.

En anden mere beregningssimpel metode til bestemmelse af en Poincaré plan, er ved at definere planen som liggende ved et maximum for én af de variable.

Den herved definerede plan vil være en 'ikke-lineær' flade, der ikke er mulig at kontrollere den nøjagtige beliggenhed af for systemer med højere dimension. Men til trods for disse nævnte ukontrollerbare størrelser, er det den mest brugte metode ved højere ordens systemer; netop fordi de nødvendige beregninger er begrænsede. Metoden har også vist sin brugbarhed igennem mange år.

Beregningerne simplificeres til at bestemme et (bestemt) nulpunkt for den afledede af den udvalgte variabel.

¹Her betyder 'vinkelret på' ikke parallel med.

Poincaré afbildningen er en $N-1$ dimensional diskret afbildning, men for højere ordens systemer kan denne afbildning projiceres på en ønsket 1,2 eller 3 dimensional faseplan.

5.3. Returaftbildninger

Ved en Returaftbildning afbildes værdien af den undersøgte variabel ved den $(n+1)$ 'ste skæring med den definerede Poincaré plan som funktion af værdien ved den n 'te skæring.

Er der i systemet løsninger med højere periode kan returaftbildningen vise den $(n+m)$ 'te skæring som funktion af den n 'te skæring, hvor $m > 1$.

Udseendet af returaftbildningen kan fortælle noget om løsningstypen eller om en aktuel bifurkation.

Ved beregning af returaftbildninger, kan det være nødvendigt med mange punkter for at sige noget om løsningstypen eller en aktuel bifurkation, hvorved omfanget af beregningerne nemt bliver meget stort.

5.4. Bifurkationsdiagrammer

Et en-dimensionalt bifurkationsdiagram viser, hvorledes en af de variables værdier ændrer sig, når bifurkationsparameteren ændres. Med udgangspunkt i en Poincaré plan, vises hvilke værdier en variabel antager, for en given værdi af bifurkationsparameteren. Dette gøres for et større interval af bifurkationsparameteren. Den anvendte metode bruger maksimum værdien af en variabel som definition af planen.

Den anvendte metode er en brute force metode, der kun viser stabile løsninger for den givne parameter. Ved beregning af værdierne i Poincaré planen for næste parameter værdi, benyttes de sidst beregnede værdier for løsningen som begyndelses betingelser. Hermed sikres, at det er den samme (stabile) løsning der følges. De første beregnede værdier kasseres som værende et transient forløb.

Beregning af en-dimensionale bifurkationsdiagrammer giver et godt overblik over, hvorledes de stabile løsninger udvikler sig, når bifurkationsparameteren ændres.

Det er muligt at se, hvornår der sker bifurkationer, altså ændringer af løsningstypen.

Periode n løsninger ses som n punkter for den givne parameter værdi. Det er ikke muligt at skælne quasiperiodiske og kaotiske løsninger; de vil begge fremgå som en 'udtværing' over et større interval af den undersøgte variabel.

Ved den anvendte brute-force metode er det nødvendigt på forhånd at fastlægge, hvor lang transient der tillades at kassere. Tæt ved nogle bifurkationer kan den definerede transientlængde vise sig ikke at være tilstrækkelig. På bifurkationsdiagrammet vises hermed et transient forløb istedet for den ønskede løsning. Ved at beregne bifurkationsdiagrammet to gange, med bifurkationsparameteren varierende i hver sin retning, kan dette fænomen afsløres. Der er dog også mulighed for, at to stabile løsninger eksisterer samtidigt ved bestemte værdier

af bifurkationsparameteren. Så haves et hysteresefænomen. Der er ikke konstateret hysteresefor modellen i det undersøgte hastighedsinterval.

Det kræver mange punkter at lave et flot en-dimensionalt bifurkationsdiagram, der viser quasiperiodiske eller kaotiske løsninger! Det er derfor en meget beregningstung opgave, at lave disse diagrammer, og det skal være muligt at håndtere store datamængder.

Ved hjælp af programpakken PATH er det muligt at lave en og to dimensionelle bifurkationsdiagrammer, der viser stationære eller periodiske løsninger i en parameterplan. PATH benyttes til at følge periodiske løsninger som funktion af bifurkationsparameteren. PATH er udviklet af Ch. Kaas Petersen og indeholder en continuationroutine, der ved en kombination af integration (LSODA) og Newton iteration finder, og følger periodiske løsninger i parameterplanen. Periodiske løsninger identificeres som fix punkter i en defineret Poincaré plan. PATH kan ved denne teknik følge både stabile og ustabile løsninger, når bifurkationsparameteren varieres.

PATH kræver begyndelsesværdier og en periodetid der ligger 'tæt' på den ønskede løsning. Tæt skal her fortolkes således at Newton iterationerne vil konvergere. I kapitlet med resultater er problemer med at benytte PATH beskrevet.

5.5. Floquet multipliers

Når PATH følger periodiske løsninger bestemmes stabiliteten ved at udregne floquet multipliers, således at bifurkationspunkter kan bestemmes.

PATH sorterer multiplerner efter størrelse. Hvis udviklingen af multiplerner ønskes visualiseret, når bifurkationsparameteren ændres, er en anden sortering nødvendig.

Flere metoder er afprøvet, men den bedste viste sig at være udskrivning af multiplerner uden sortering! Ved herefter at afbilde alle de udregnede værdier af multiplerner som punkter i den komplekse plan ses udviklingen, når bifurkationsparameteren ændres, af alle multiplerner tydeligt.

5.6. Lyapunov eksponenter

Lyapunov eksponenter er en generalisering af egenverdierne i et ligevægtpunkt og de karakteristiske multipliers for periodiske løsninger. Eksponenterne kan bruges til at bekræfte eksistensen af quasi-periodiske og kaotiske løsninger, samt stabiliteten af disse løsninger.

Herudover kan stabiliteten af ligevægtpunkter og periodiske løsninger også bestemmes ud fra kendskab til lyapunov eksponenterne.

Ved at udregne et N dimensionalt systems N lyapunov eksponenter er det altså muligt at fastlægge, hvilken løsning der findes til et givet parametersæt samt stabiliteten af denne.

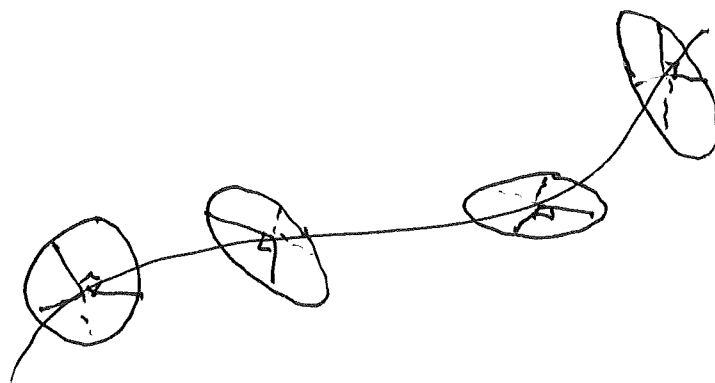
Bestemmelse af lyapunov eksponenter.

For et N dimensionalt system beskrevet ved dissipative sædvanlige differentialligninger (ODE).

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

er Lyapunov eksponenterne defineret således:

En infinitesimal N dimensionel ellipsoide udspændt af N ortogonale vektorer betragtes i det N dimensionale faserum. Ved integration af systemet frem i tid følges udviklingen af hovedakserne.



Figur 5.6.1. Forløbet af ellipsoide i faserummet

Den i'te Lyapunov eksponent er så defineret ved

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{P_i(t)}{P_i(0)} \right)$$

hvor $P_i(t)$ betegner længden af den i'te hovedakse for ellipsoiden til tiden t. Nummering af akserne er foretaget så

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$$

Lyapunov eksponenterne beskriver hvorledes vektorfeltet ekspanderer ($\lambda > 0$) eller kontraherer ($\lambda < 0$) lokalt nær løsningen.

Da ellipsoiden vil ændre orientering i faserummet, er det kun muligt at tale om, at en eksponent er knyttet lokalt til en bestemt retning i faserummet.

Definitionen af Lyapunov eksponenterne kan dog desværre ikke umiddelbart benyttes til udregning af de N eksponenter.

Følgende fakta vil alle give numeriske problemer

- Eksponentiel konvergens/divergens af ellipsoidens hovedakser
- 'Kollaps' af ellipsoiden når alle hovedakserne vil søge i den retning, hvor der er størst divergens
- Foldning af attraktoren.

For at komme ud over disse problemer benyttes gentagne reorthogonaliseringer af vektorerne, der udspænder ellipsoiden.

Til dette benyttes Gram-Schmidt reorthonormalisering (GSR).

Efter orthogonaliseringen men før normaliseringen er de betragtede vektorers længde identiske med længden af hovedakserne i ellipsoiden. Kaldes længden af vektorerne efter normeringen for ε gives

$$\lambda'_i = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^n \log\left(\frac{L_{i,s}}{\varepsilon}\right)$$

hvor $L_{i,s}$ er længden af den i 'te vektor efter m reorthogonaliseringer.

I grænsen gives

$$\lambda_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m dt} \sum_{s=1}^m \log\left(\frac{L_{i,s}}{\varepsilon}\right)$$

hvor dt er tiden mellem to orthonormaliseringer.

Valget af dt og ε er meget vigtig for konvergens af eksponenterne.

Tabel 5.6.1. viser hvorledes de forskellige løsningstyper kan indetificeres ved kendskab til Lyapunov eksponenterne.

Steady State	Attracting Set		Lyapunov Exponents	Dimension
	Flow	Poincaré Map		
Equilibrium point	point		$0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$	0
Periodic	circle	one or more points	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$	1
Two-periodic	torus	one or more closed curves	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $0 > \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$	2
K -periodic	K -torus	one or more $(K-1)$ -tori	$\lambda_1 = \dots = \lambda_K = 0$ $0 > \lambda_{K+1} \geq \dots \geq \lambda_n$	K
Chaotic	Cantor-like	Cantor-like	$\lambda_1 > 0$ $\sum \lambda_i < 0$	non-integer

5.6.1. Egenskaber ved lyapunov eksponenter.

For et system beskrevet ved N dissipative ODEs gælder der, at summen af de N lyapunov eksponenter er lig den tidsmidlede divergens af vektorfeltet.

$$\sum \lambda_i = \text{div} f(y)$$

Summen er altid negativ for dissipative systemer.

Ved kendskab til lyapunov eksponenterne er det muligt at udregne en fraktal dimension af løsningen.

Hvis j er det største tal således at $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq 0$ defineres lyapunov dimensionen D_L

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_j}{\lambda_{j+1}}$$

Ved kendskab til forløbet af de største lyapunov eksponenter når bifurkationsparameteren varieres over forskellige bifurkations typer, er det muligt at pejle sig ind på, hvilke bifurkationstyper der optræder i systemet.

Ved at studere konvergen af eksponenterne ved en kendt periodisk løsning for varierende værdier af ε og dt , er disse størrelser bestemt. Konvergen ønskes 'pæn' og hurtig $dt = 10^{-4}$ og $\varepsilon = 0.5$ hvilket svarer til 2 gange den karakteristisk periode.

Det vil fremgå af resultaterne, at udregning af lyapunov eksponenter for et system kræver utroligt mange beregninger, før en acceptabel konvergen opnås. Specielt nær bifurkationspunkter, hvor kendskabet til eksponenterne er vigtigst, vil udregningerne hurtigt blive uoverskuelige.

Istedet for at udregne samtlige N eksponenter, vil det ofte være muligt at opnå tilstrækkelig information ved kun at udregne de 2,3 eller 4 største eksponenter.

I appendix B er vist udskrifter af de udviklede programmer, der benyttes til at bestemme de beskrevne løsningstyper.

6. RESULTATER

Dynamikken i modellen er undersøgt over et kort hastighedsinterval, hvor mange forskellige bifurkationer påvises. Første del af nærværende kapitel er opdelt i afsnit, hvor løsningsstypen for én bestemt hastighed undersøges. For hver undersøgt hastighed kan løsningsstypen bestemmes ud fra kendskab til tidsserier, returafbildninger eller lyapunov eksponenterne. De forskellige undersøgte hastigheder er valgt ud fra de viste bifurkationsdiagrammer, således at bifurkationstyperne kan bestemmes.

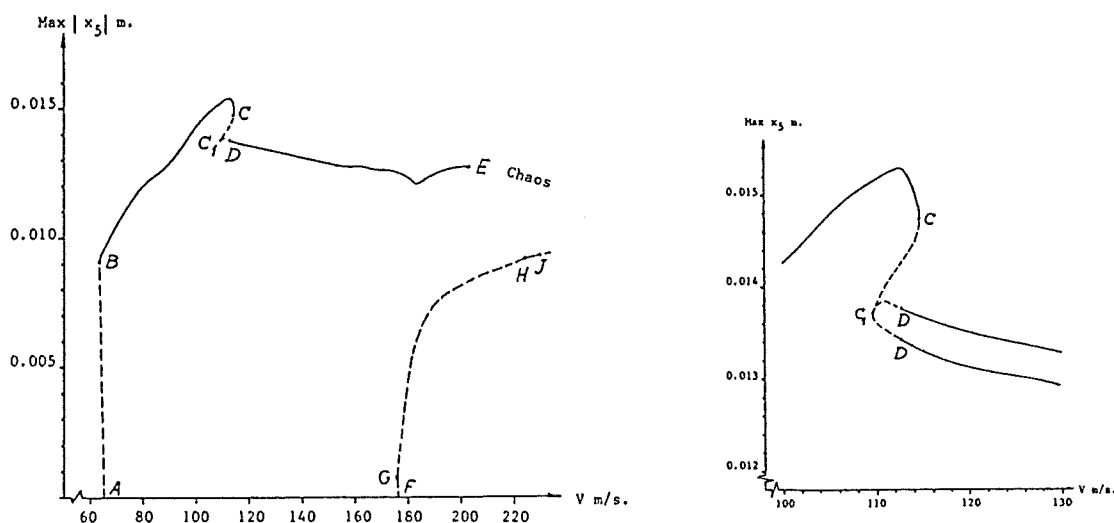
I anden del af kapitlet fastlægges de forskellige bifurkationer mellem de forskellige løsningsstyper, og forløbet af de forskellige løsningsstyper i det undersøgte interval diskuteres.

Men først en kort præsentation af kendte resultater, der ligger op til de videre undersøgelser.

6.1. Modellen for hastigheder under 203.3m/s

Modellen er tidligere undersøgt ved hastigheder lavere end 203.3m/s [XX]. Fra disse undersøgelser er det kendt, at den stationære (trivielle) løsning er ustabil for $v > 65.4$ m/s. Denne hastighed betegnes i jernbane dynamikken den kritiske hastighed. Ved denne hastighed sker en Hopf bifurkation, hvorved den stationære løsning bliver ustabil. En ustabil periodisk løsning med hurtigt stigende amplitude eksisterer i et kort hastighedsinterval. Ved en saddle-node bifurkation bliver denne stabil. For aftagende hastighed kan denne løsning følges til flangekontakt ved $v = 63.6$ m/s (et hysteresefænomen ses). Denne stabile periodiske løsning eksisterer til $v = 114.6$ m/s, hvor den mister sin stabilitet ved endnu en saddle-node bifurkation.

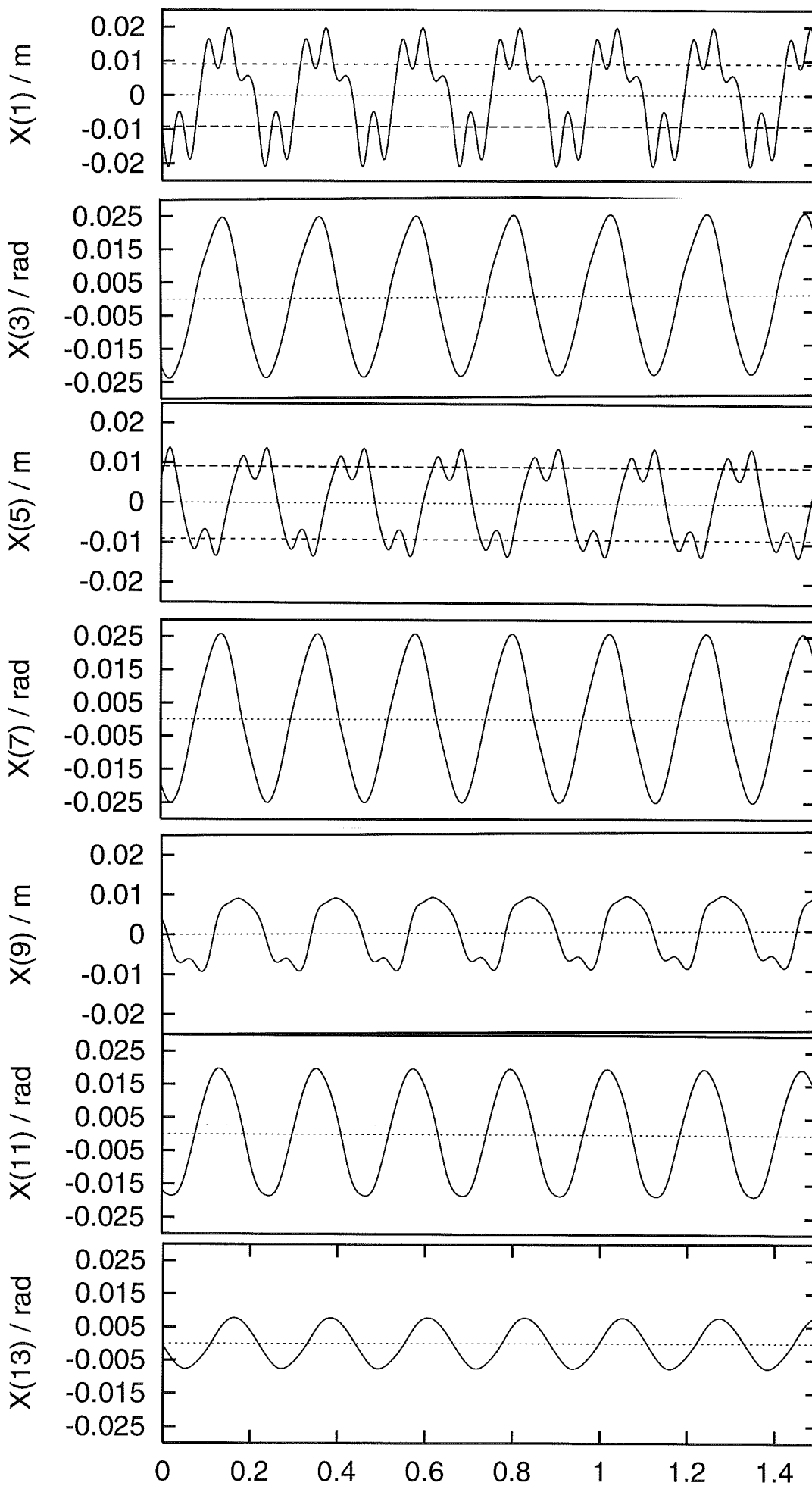
Endnu et hysteresefænomen ses og ved $v = 109.7$ m/s sker et symmetribrud, hvorved der dannes to asymmetriske ustabile løsninger. De to løsninger bliver stabile ved $v = 112.7$ m/s, og de eksisterer til $v = 203.3$ m/s uden i nævneværdigt grad hverken at ændre amplitude eller periode.



Figur 6.1.1. Bifurkationsdiagram for hastigheder under 203.3m/s.

De stabile løsninger er undersøgt ved $v = 203.337$ m/s umiddelbart inden de mister stabiliteten. For én af de to asymmetriske løsninger er svingningerne for alle de fysiske størrelser vist i figur 6.1.3. For x_1 og x_5 er flangeclearance indtegnet.

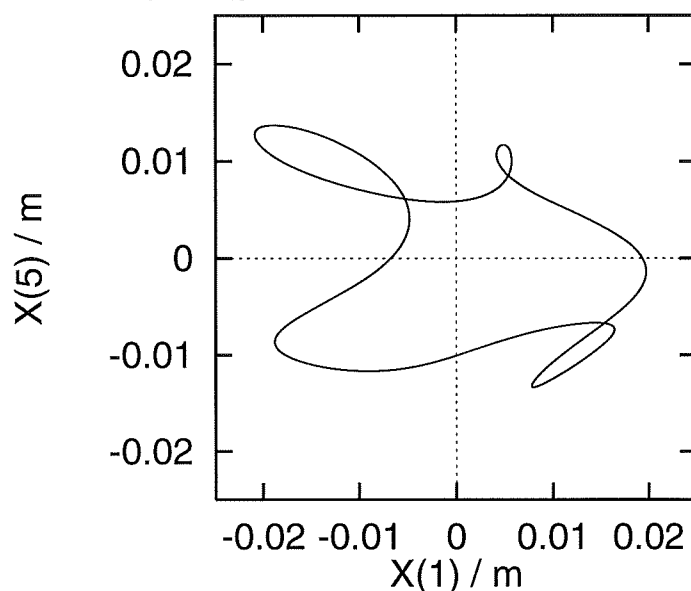
Periode 1 $v = 203.337\text{m/s}$



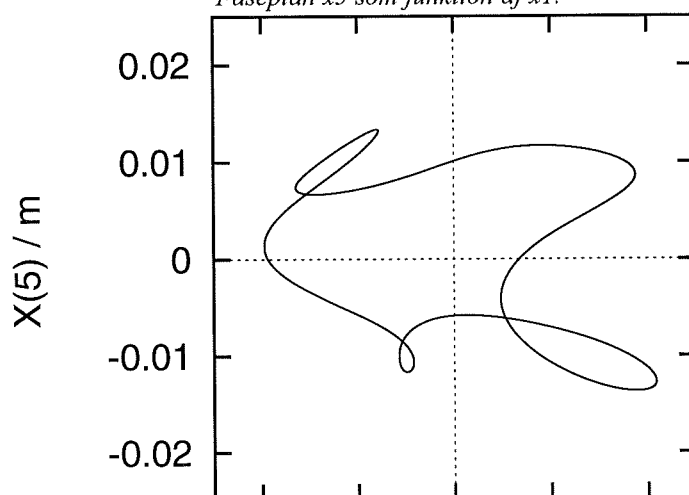
Af svingningerne for x_1 og x_9 fremgår det tydeligt, at løsningen er asymmetrisk. Det ses, at hjulenes laterale svingninger (x_1 og x_5) er meget kraftige med to flangekontakter for hvert max/min udsving.

På figur 6.1.4. ses løsningen i faseplanen x_1 x_5 . Den tilhørende stabile asymmetriske løsning er på samme måde vist på figur 6.1.5.

Det ses at de to løsninger er spejlinger af hinanden i linien $x_1=x_5$.



Figur 6.1.4. Asymmetrisk periodisk løsning.
Faseplan x_5 som funktion af x_1 .

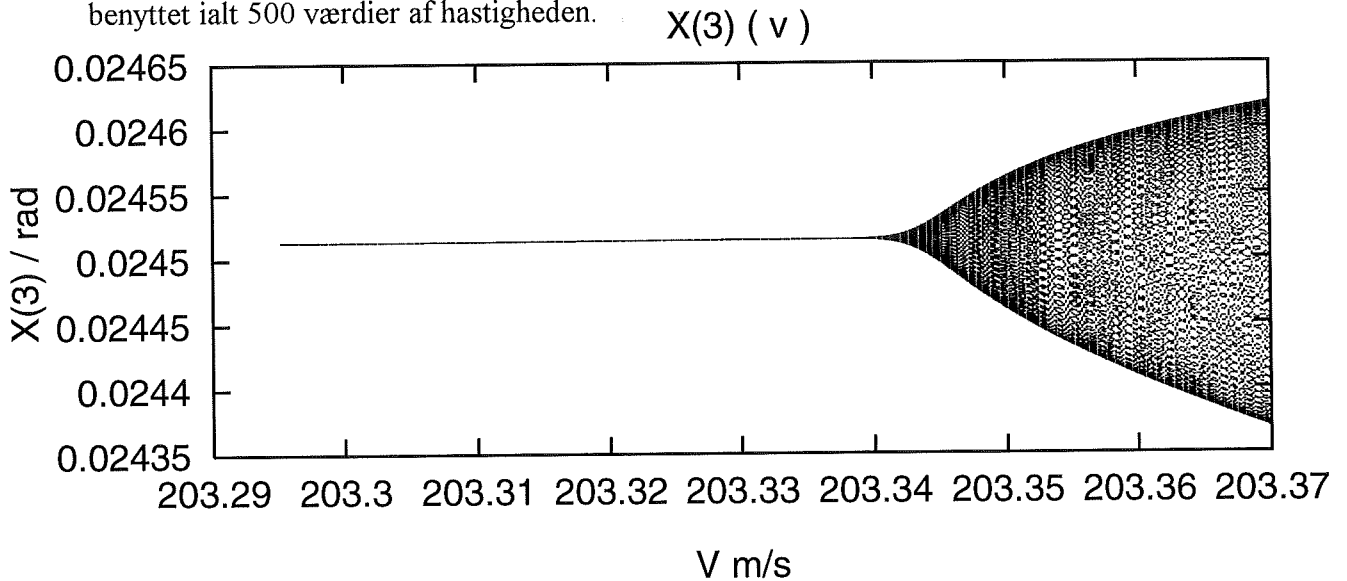


Figur 6.1.5. Assymmetrisk periodisk løsning.
Faseplan x_5 som funktion af x_1 .

I de følgende afsnit er svingningerne for frontakslens drejning x_3 analyseret. x_3 er valgt ud fra dens simple forløb fra figur 6.1.3. Idet alle de variable i systemet er koblede, vil bifurkationer, der eventuelt kan relateres til ændringer i andre variable, også påvirke x_3 og dermed kunne detekteres ved undersøgelse af x_3 .

6.2. Bestemmelse af løsningstyper

Figur 6.2.1. viser bifurkationsdiagrammet for løsninger omkring det første bifurkationspunkt. Bifurkationsdiagrammet er konstrueret af 100 punkter for hver hastighedsværdi. Der er benyttet ialt 500 værdier af hastigheden.

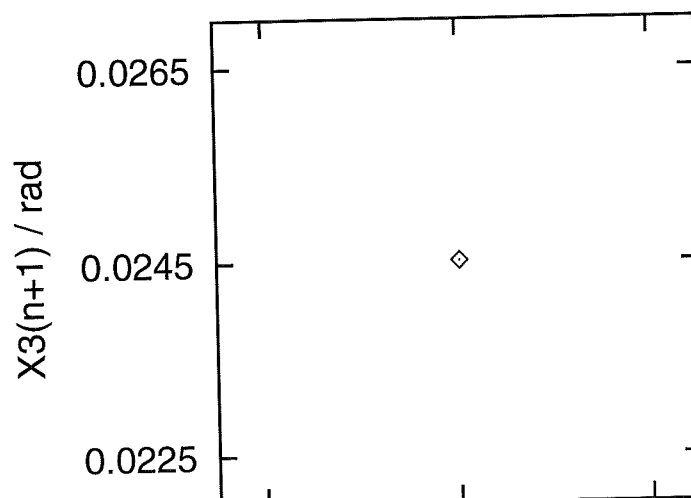


Figur 6.2.1. Bifurkationsdiagram.

Den periodiske løsning, der er meget svagt stigende i amplitude, bifurkerer ved $v=203.338$ m/s. Den dannede løsning vokser langsomt i amplitude til $v=203.44$ m/s for derefter at vokse hurtigt i bredden, det vil sige, at svingningens amplitude varierer over et større interval. Det fremgår af bifurkationsdiagrammet, at der i korte hastighedsintervaller findes periodiske løsninger med høj periode.

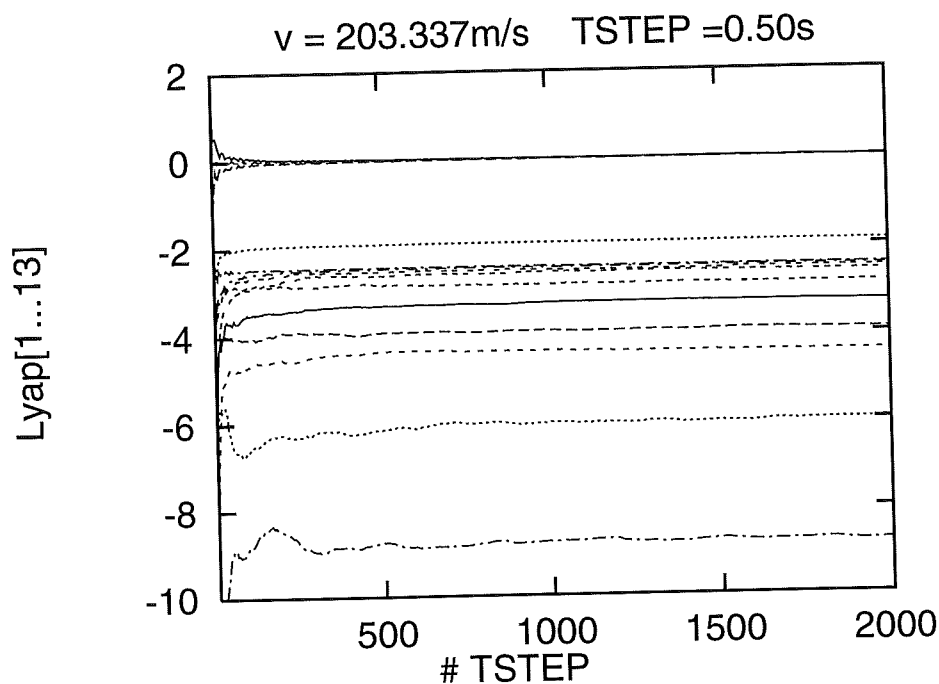
6.2.1. $v=203.337$ m/s

De udviklede programmer er benyttet til at konstruere en returafbildning. Figur 6.2.1.1 viser $x_3(n+1)$ som funktion af $x_3(n)$. Det fremgår tydeligt, at der er tale om et fixpunkt i Poincaré planen, idet figuren består af mere end 100 punkter.



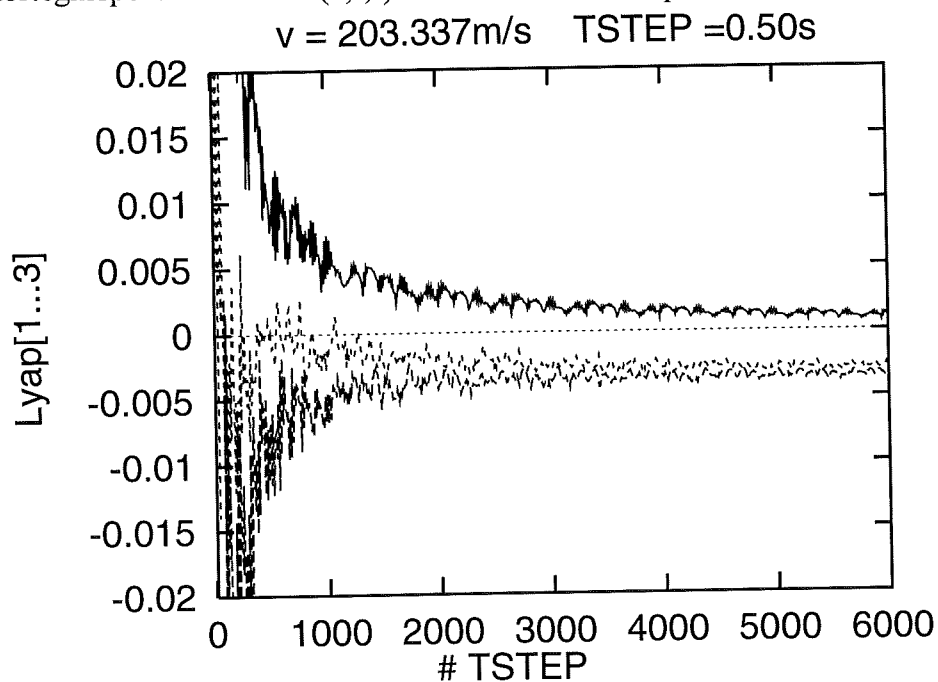
Figur 6.2.1.1. Returafbildning.

Alle 14 lyapunov eksponenter er udregnet og konvergensen af $\lambda_1 \dots \lambda_{13}$ er vist på figur 6.2.1.2. Af figuren ses flot konvergens af alle eksponenterne efter allerede 1000 reorthogonaliseringer og opsummeringer af eksponenterne. λ_{14} konvergerer på samme måde omkring en værdi på -



Figur 6.2.1.2.. Konvergens af lyapunov eksponenter.

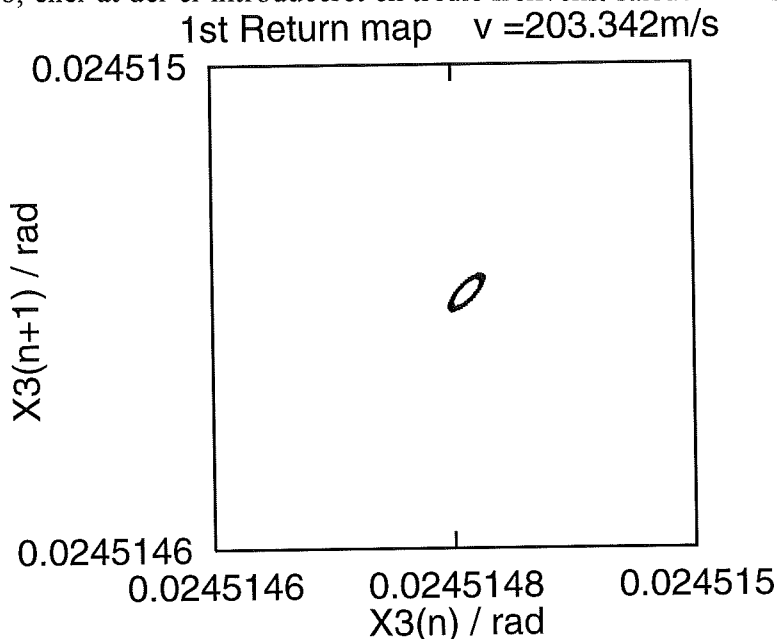
På figur 6.2.1.3. er konvergensen af $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ forstørret og forlænget. Alene ud fra denne figur er det ikke muligt at konstatere, at det er en periodisk løsning, men når resultatet er kendt, ses at fortegnsspektret vil være (0,-,-) for de tre største eksponenter.



Figur 6.2.1.3.. Konvergens af lyapunov eksponenter.

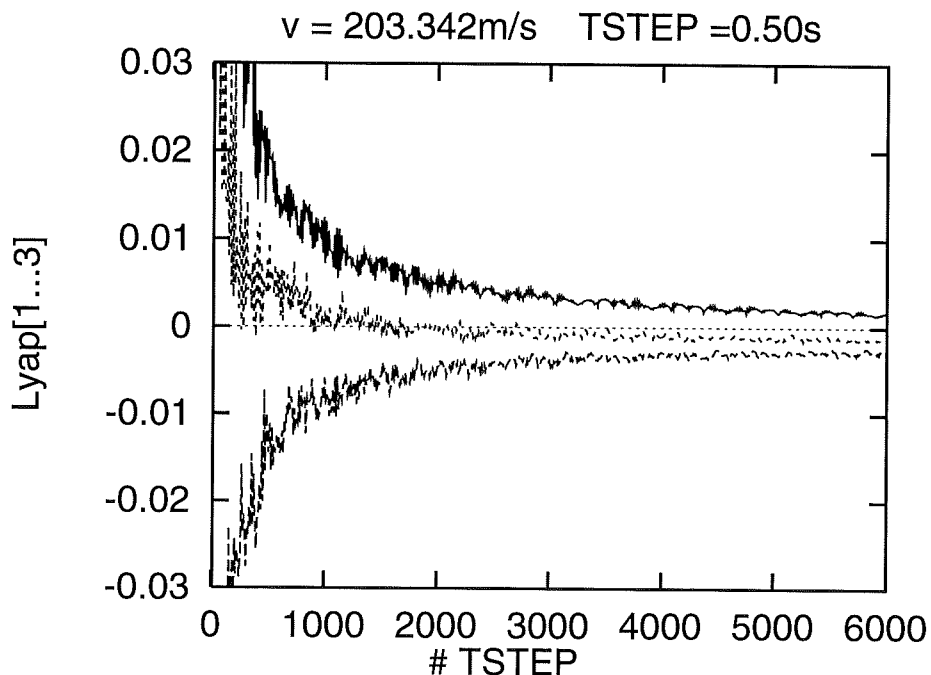
6.2.2. $v=203.342\text{m/s}$

Ved $v=203.342\text{m/s}$, umiddelbart efter bifurkationen, er konstrueret en returafbildning. For at få det viste billede, var det nødvendigt at bortkaste et transient forløb på mere end 3000s, hvilket svarer til godt 13.500 karakteristiske perioder ved et startpunkt på den ustabile periodiske løsning. Figuren viser et quasiperiodisk forløb. Det ses at afbildningen er meget lille i udstrækning. 'Cirklen' har lidt bredde, hvilket enten kan skyldes numeriske unøjagtigheder, fortsat transient forløb, eller at der er introduceret en tredje frekvens. således at løsningen ligger på en 3-torus.



Figur 6.2.2.1. Returafbildning.

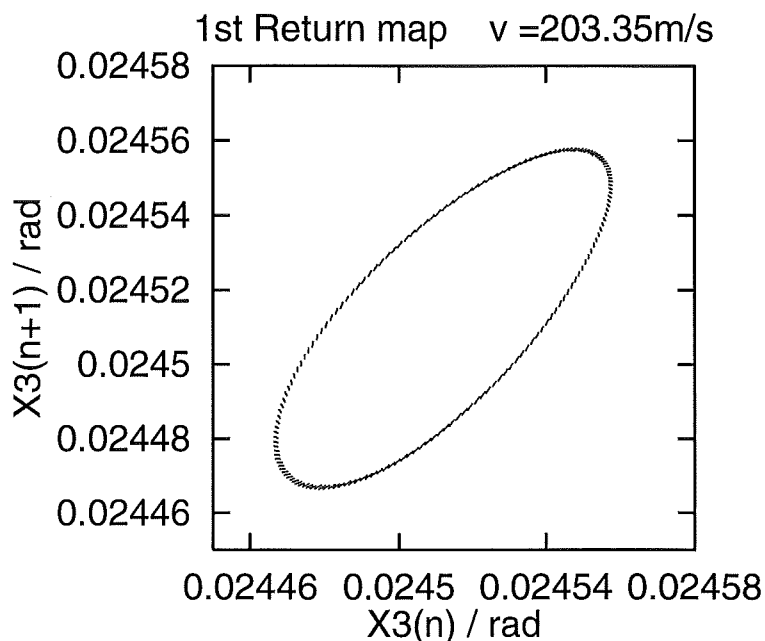
Konvergenen af lyapunov eksponenterne ses af figur 6.2.2.2. Der fremgår ikke klart af figuren om løsningen ligger på en 2- eller 3-torus.



Figur 6.2.2.2. Konvergens af lyapunov eksponenter.

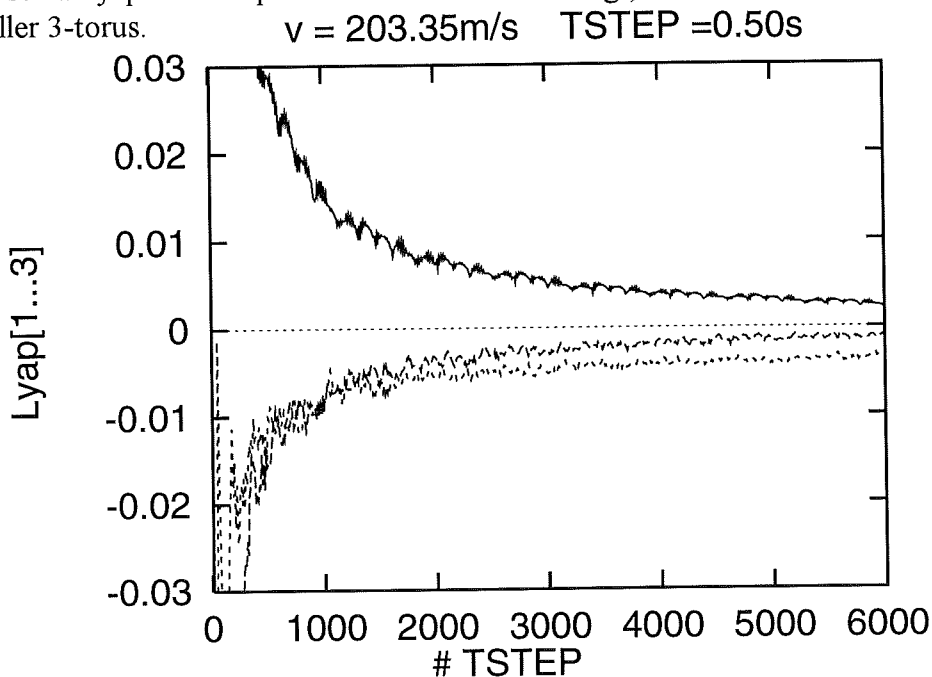
6.2.3. $v=203.35\text{m/s}$

Ved $v=203.35\text{m/s}$ haves også en quasiperiodisk løsning på en torus, hvilket fremgår af den udregnede returafbildning på figur 6.2.3.1, også denne 'cirkel' ses at have lidt bredde hvilket igen kan skyldes et fortsat transient forløb eller en tredje frekvens. Udstrækningen af 'cirklen' er nu så stor, at numeriske unøjagtigheder undgås.

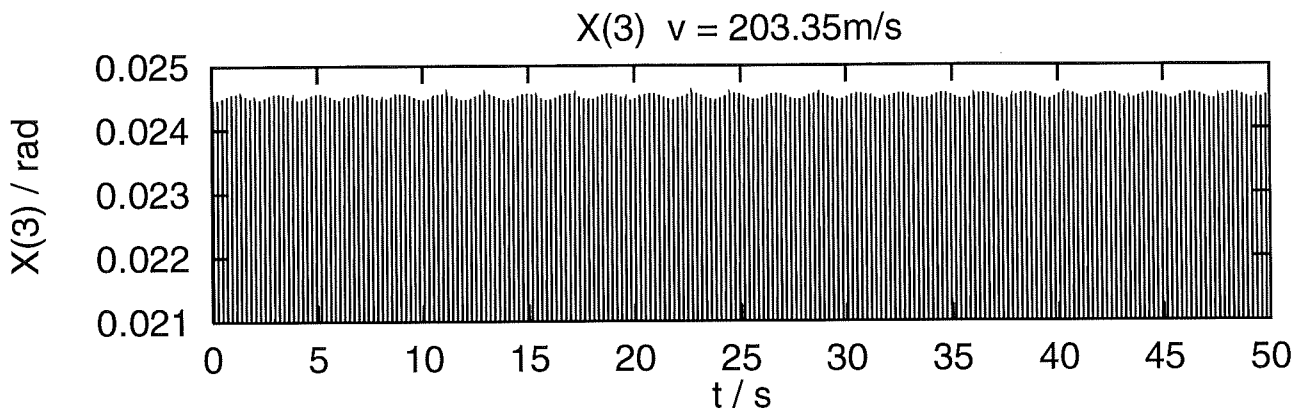


Figur 6.2.3.1. Returafbildning.

Konvergensten af de tre største lyapunov eksponenter er vist på figur 6.2.3.2. Udfra konvergensten af lyapunov eksponenterne er det ikke muligt, at bestemme om løsningen ligger på en 2- eller 3-torus.

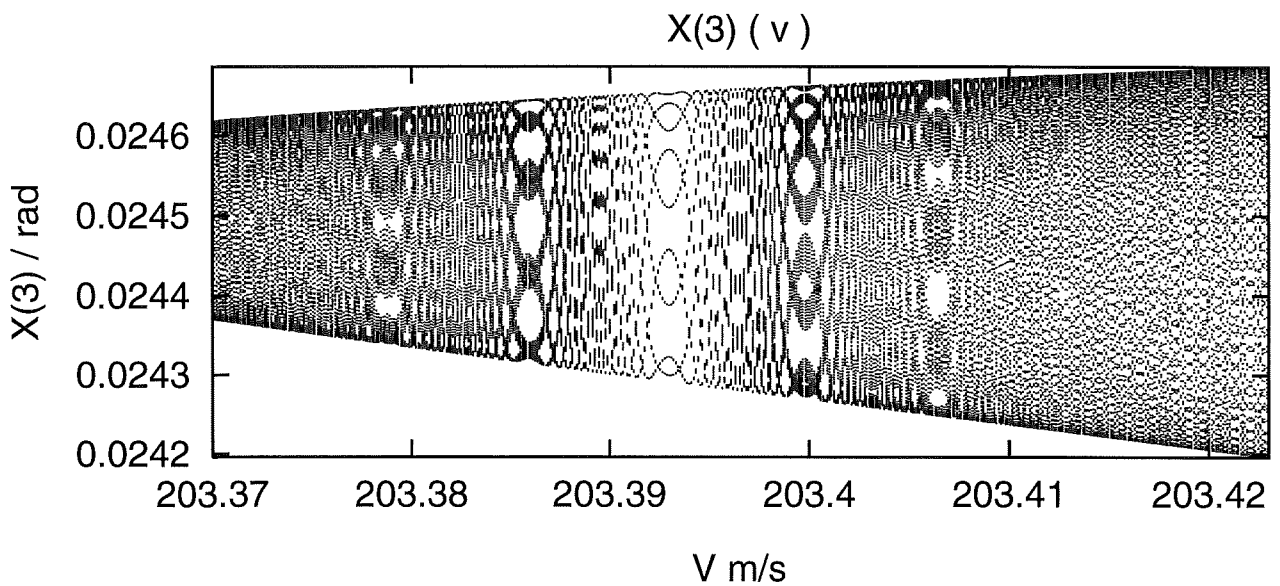


Figur 6.2.3.2. Konvergensten af lyapunov eksponenter.



Figur 6.2.3.3. Udsnit af tidsserie.

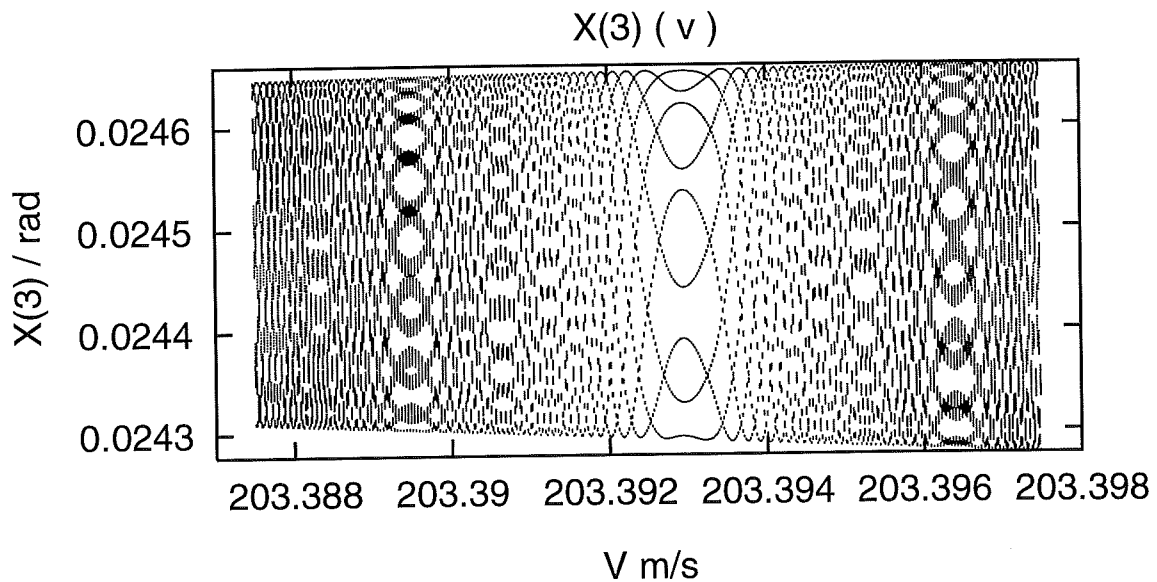
Hvis der for denne løsningen findes en 3. frekvens fremgår den ikke tydeligt.



Figur 6.2.3.4. Bifurkationsdiagram.

Bifurkationsdiagrammet for hastigheder $203.37\text{m/s} < v < 203.42\text{m/s}$ er vist på figur 6.2.3.4.. Det fremgår, at der findes en periode 9 ved $v=203.393\text{m/s}$.

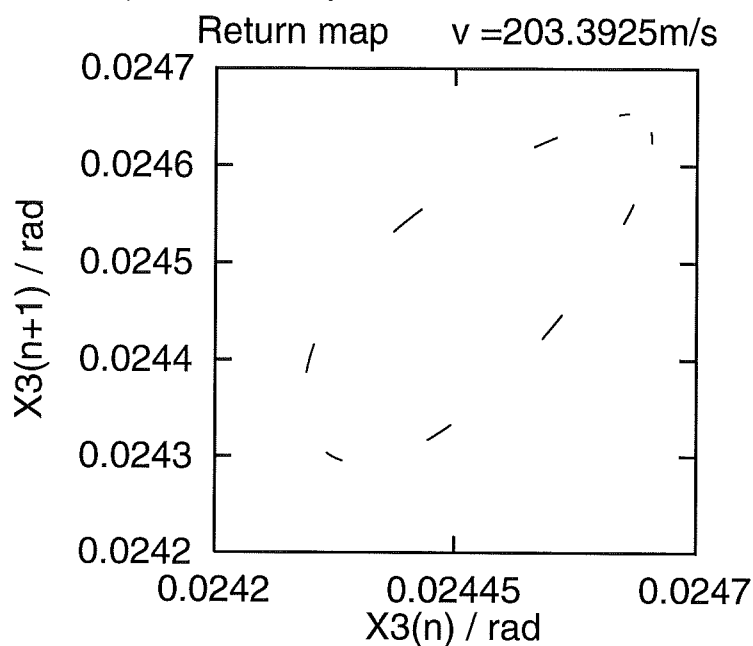
Detaljerne omkring periode 9 løsningen ses på figur 6.2.3.4. Heraf fremgår det, at der på begge sider af periode 9 løsningen ses løsninger som 'refleksioner' af denne løsning. De ses som 'udtværede' periode 9, 18, 27, ... løsninger.



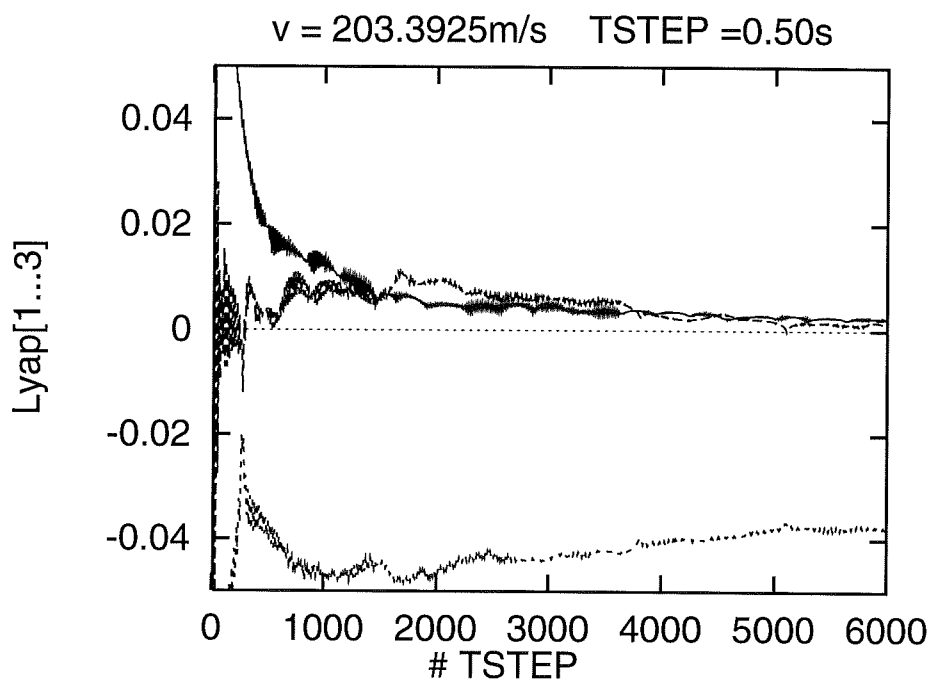
Et udsnit af en tidsserie er vist på figur 6.2.3.3. Heraf fremgår det, at den karakteristiske periodes frekvens på 0.22s er overlejret af en frekvens på ca 2s.

6.2.4. $v=203.3925\text{m/s}$

Ved $v=203.3925\text{m/s}$ haves igen en quasiperiodisk løsning på en 2-torus. Returaftbildningen ses ikke som en lukket cirkel, men af 9 buestykker. Dette forklares senere.



Figur 6.2.4.1. Returaftbildning.

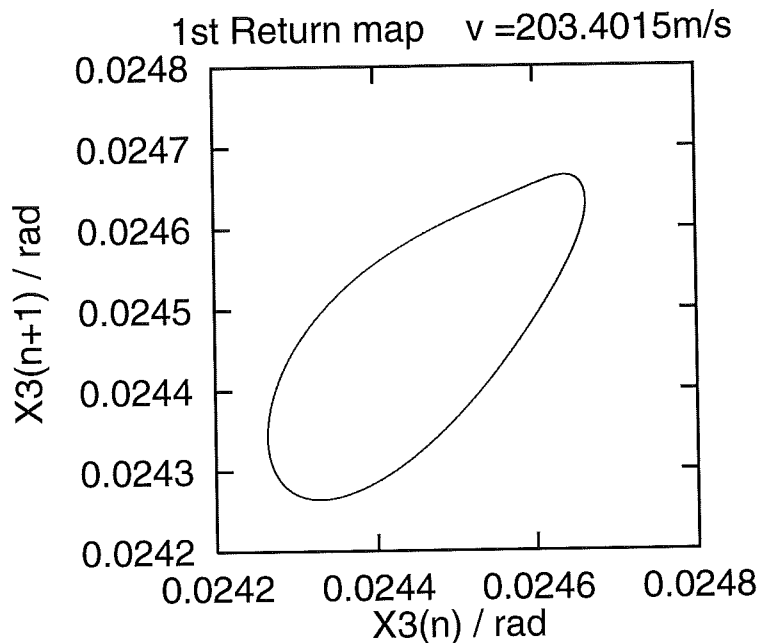


Figur 6.2.4.2. Konvergens af lyapunov eksponenter.

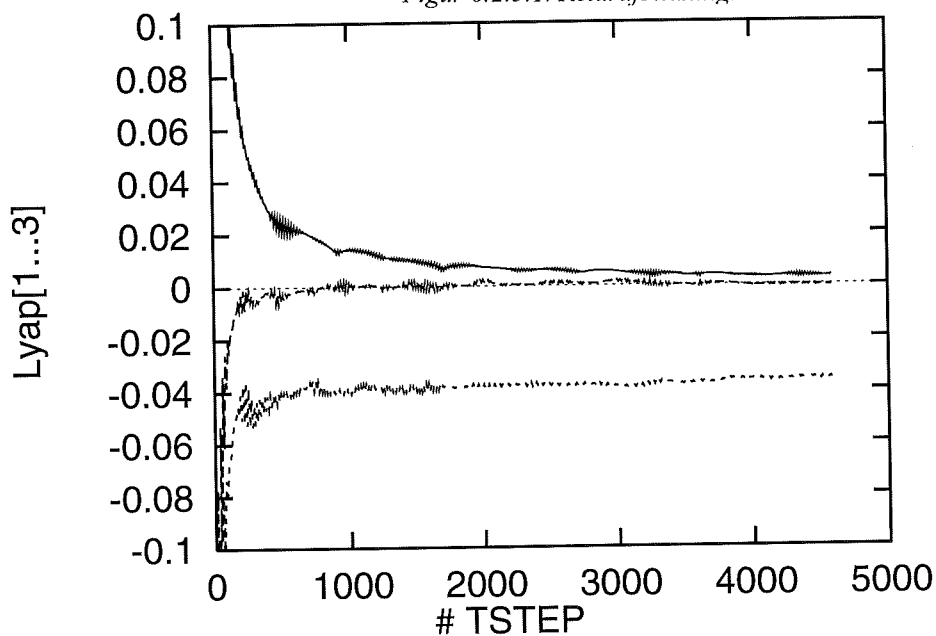
Konvergens af lyapunov eksponenterne viser tydeligt at løsningen ligger på en 2-torus.

6.2.5. $v=203.4015\text{m/s}$

Returafbildninger for $v=203.4015\text{m/s}$ er vist på figur 6.2.5.1. og lyapunov eksponenterne på figur 6.2.5.2. Ved denne hastighed ses løsningen tydeligt at ligge på en 2-torus.



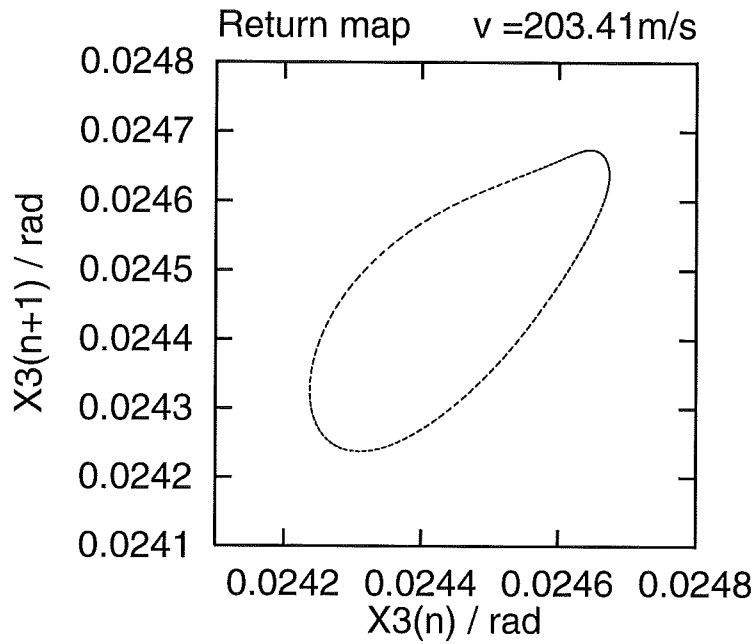
Figur 6.2.5.1. Returafbildning.



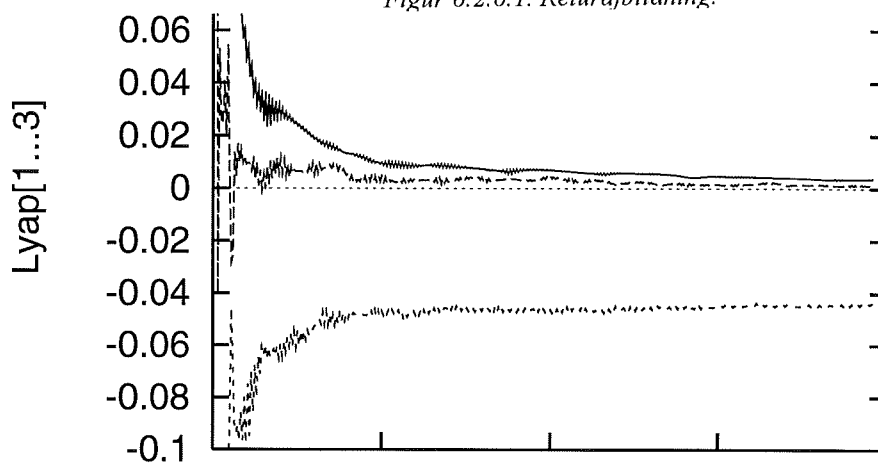
Figur 6.2.5.2. Konvergens af lyapunov eksponenter.

6.2.6. $v=203.41\text{m/s}$

Figur 6.2.6.1. viser, at også ved $v=203.41\text{m/s}$ haves en quasiperiodisk løsning på en 2-torus. Ligesom på figur 6.2.4.1 ses returafbildningen at bestå af buestykker.

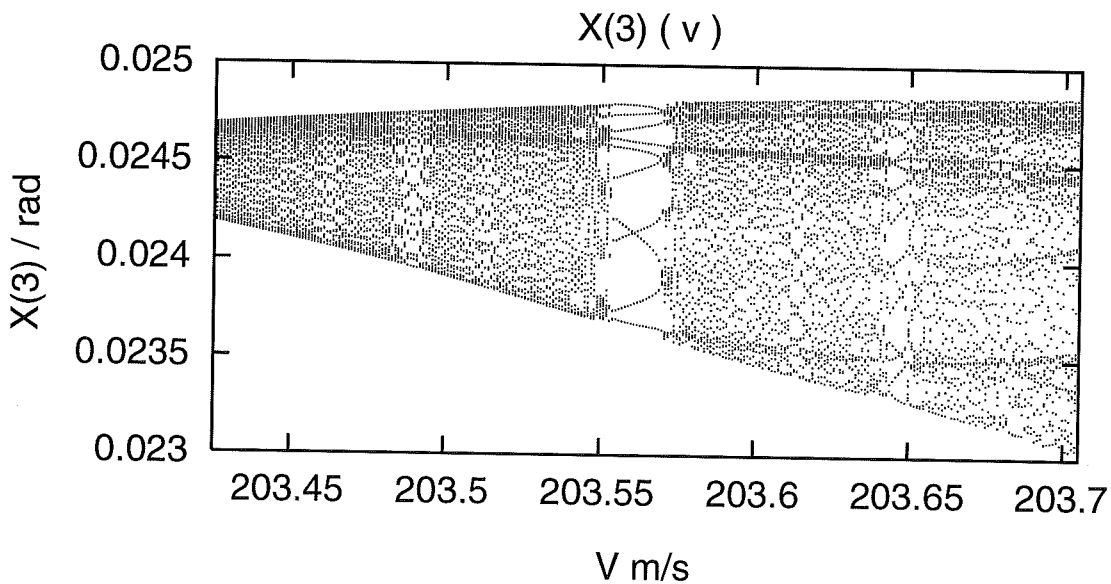


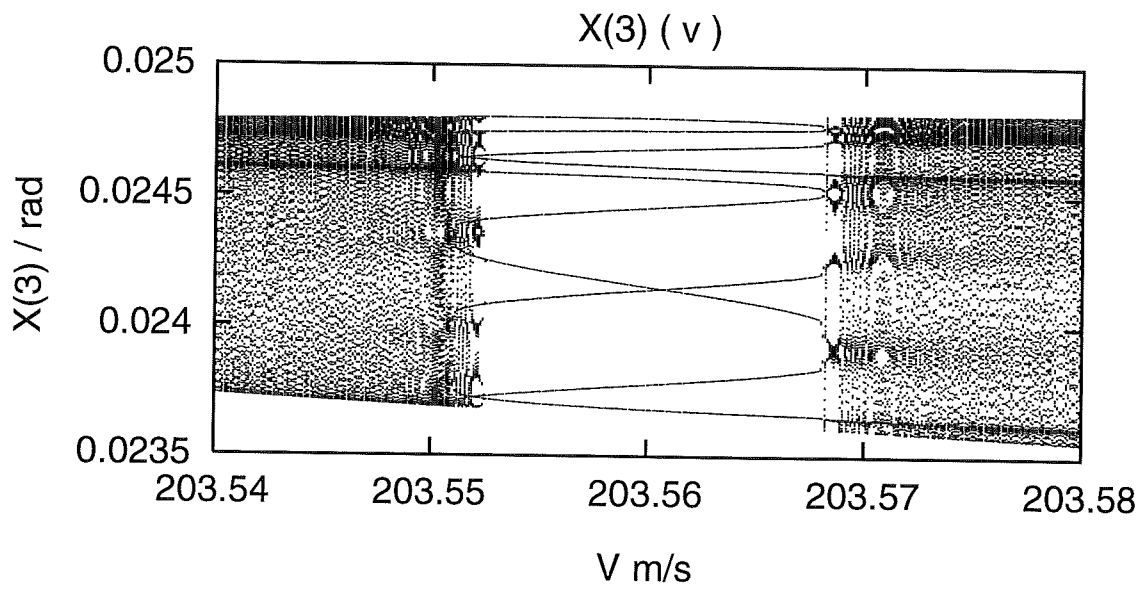
Figur 6.2.6.1. Returafbildning.



Figur 6.2.6.2. Konvergens af lyapunov eksponenter.

Bifurkationsdiagrammet i hastighedsintervallet $203.54 \text{ m/s} < v < 203.58 \text{ m/s}$ ses på figur 6.2.6.3. Der ses at være en periode 10 løsning omkring $v = 203.56 \text{ m/s}$. Omkring denne periodiske løsning ses nogen refleksioner af periode 10 løsningen, men ikke i samme omfang som omkring periode 9 løsningen. Ved $v = 203.64 \text{ m/s}$ ses en periode 20 løsning.

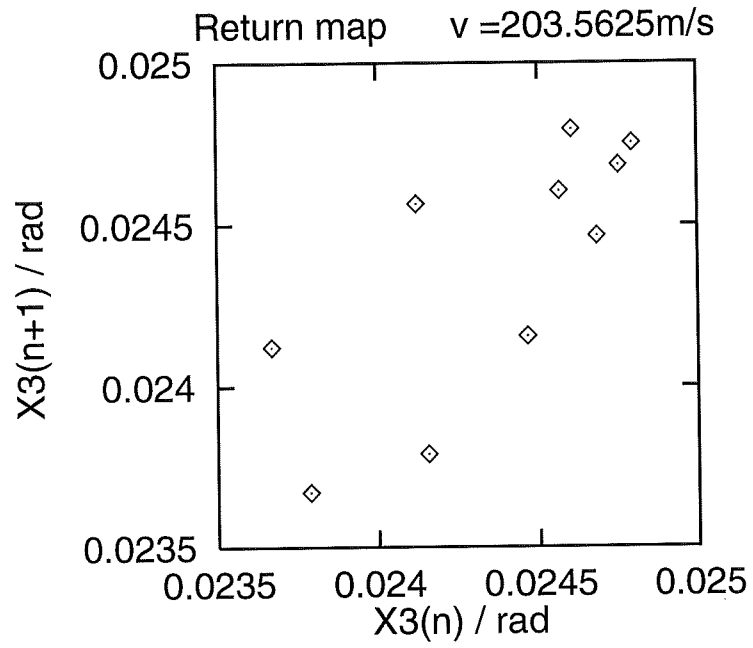




Figur 6.2.6.5. Bifurkationsdiagram.

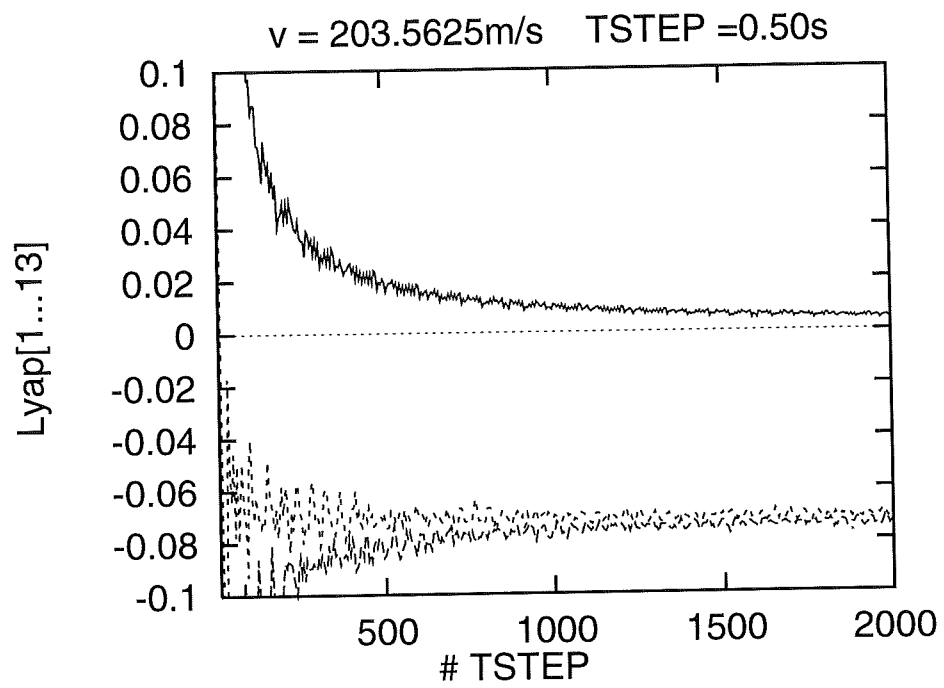
6.2.7. $v=203.5625\text{m/s}$

Ved $v=203.5625\text{m/s}$ haves en periode 10 løsning, hvilket bekræftiges af returafbildningen på figur 6.2.7.1. og konvergens af lyapunov eksponenterne på figur 6.2.7.2.



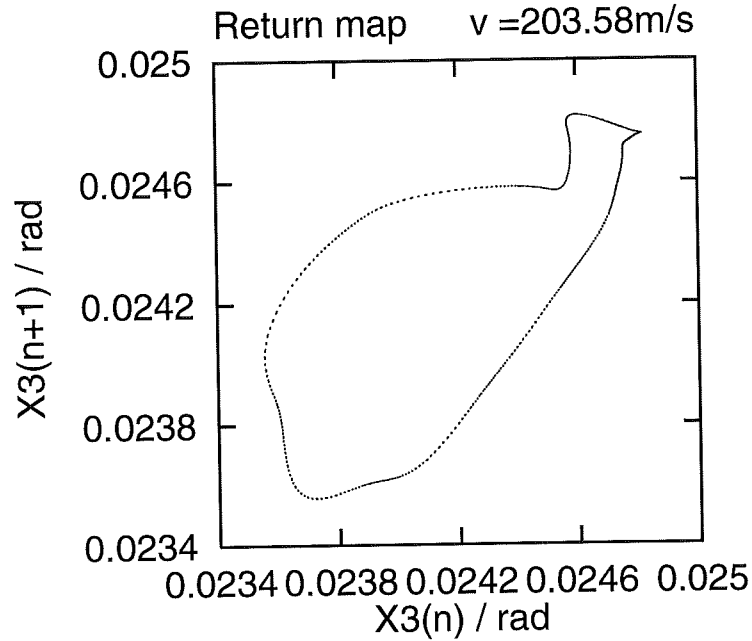
Figur 6.2.7.1. Returafbildning.

Figur 6.2.7.2. Konvergens af lyapunov eksponenter.

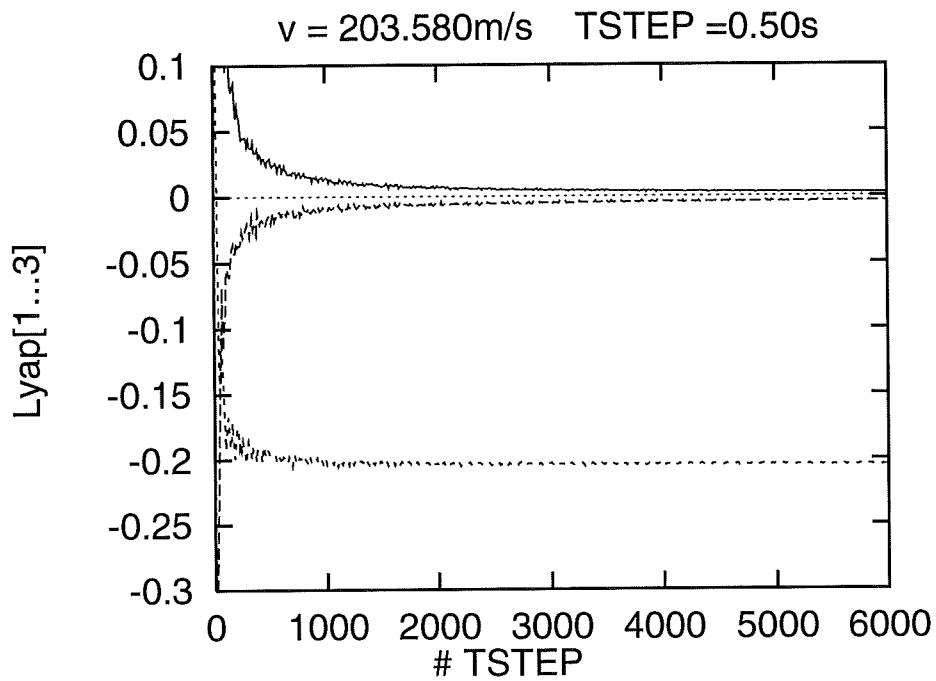


6.2.8. $v=203.58\text{m/s}$

I området efter periode 10 løsningen haves igen en quasiperiodisk løsning på en 2-torus, hvilket fremgår af figur 6.2.8.1. og figur 6.2.8.2.



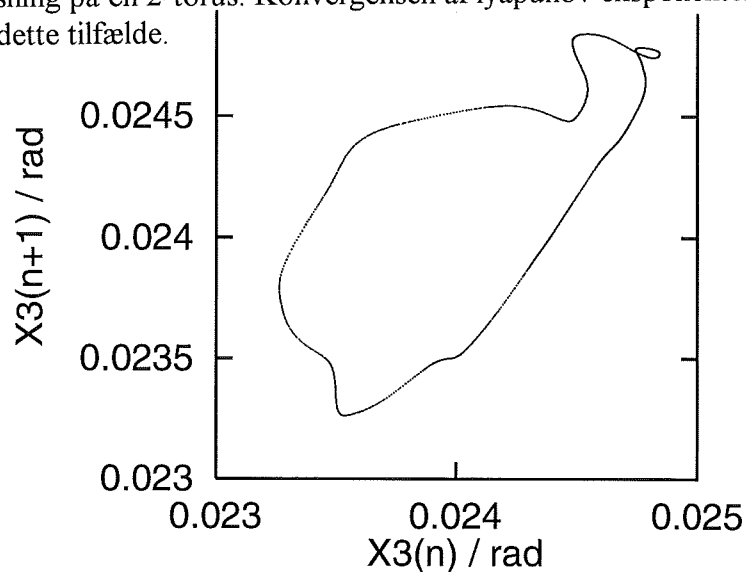
Figur 6.2.8.1. Returaftbildning.



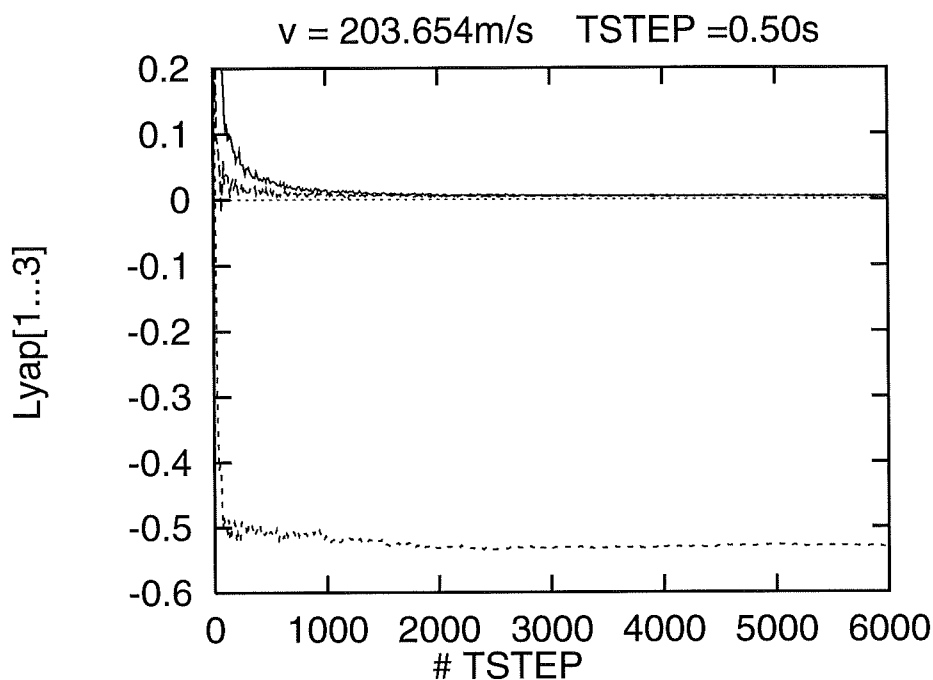
Figur 6.2.8.2. Konvergens af lyapunov eksponenter.

6.2.9. $v=203.654\text{m/s}$

Løsningen efter periode 20 løsningen ses af figur 6.2.9.1. og figur 6.2.9.2 igen at være en quasiperiodisk løsning på en 2-torus. Konvergensens af lyapunov eksponenterne ses at være særdeles hurtig i dette tilfælde.



Figur 6.2.9.1. Returafbildning.



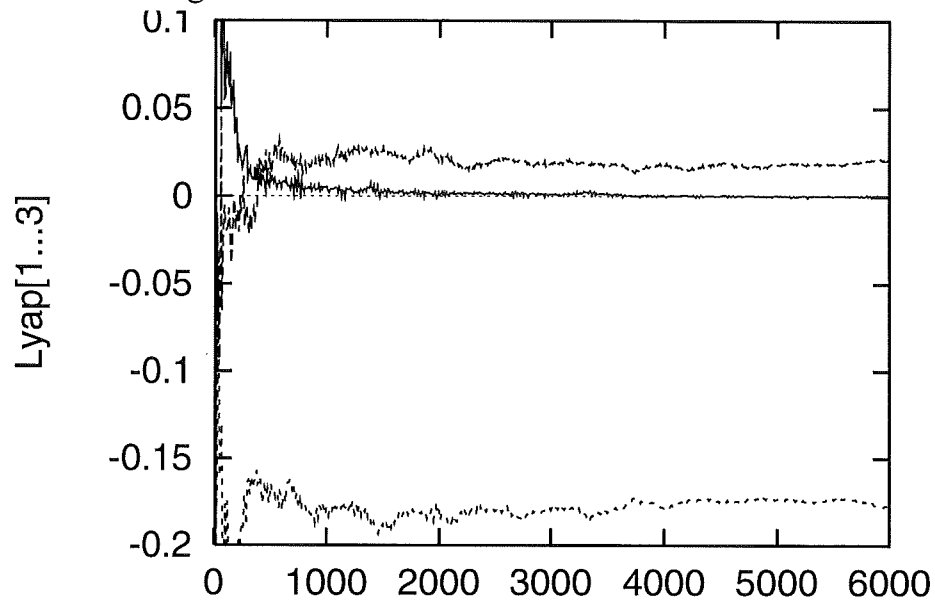
Figur 6.2.9.2. Konvergens af lyapunov eksponenter.

6.2.10. $v=203.703\text{m/s}$

Forløbet af bifurkationsdiagrammet fra $v=203.654\text{m/s}$ til $v=203.703\text{m/s}$ viser ikke den store ændring af løsningstype. Figur 6.2.10.1. viser derimod, at den største lyapunov eksponent er positiv, og dermed er løsningen nu kaotisk! Spektret for eksponenterne er $(+, 0, -, \dots)$.

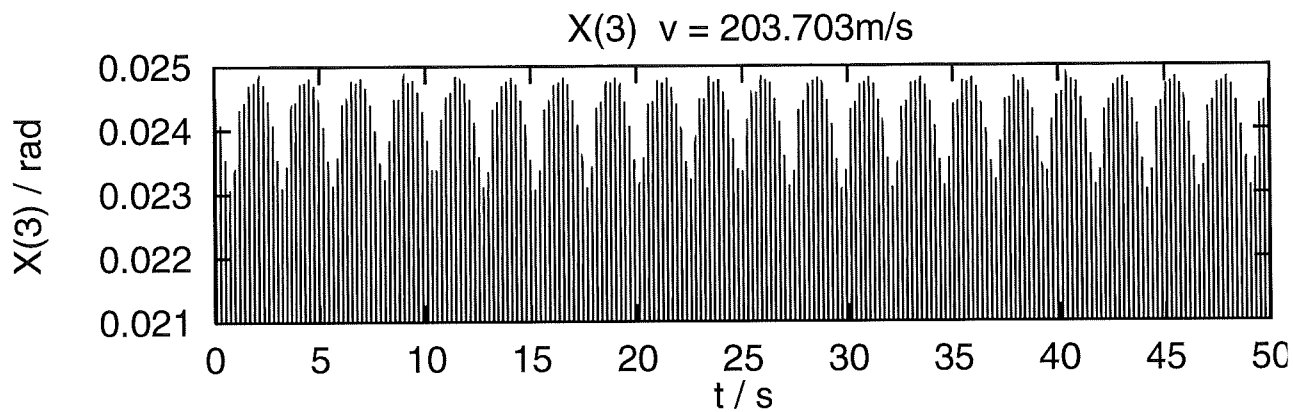
Lyapunovdimensionen udregnes til at være 2.11.

Returafbildningen er vist på figur 6.2.10.2, og afbildningen har nu kaotisk udseende med de karakteristiske foldninger.

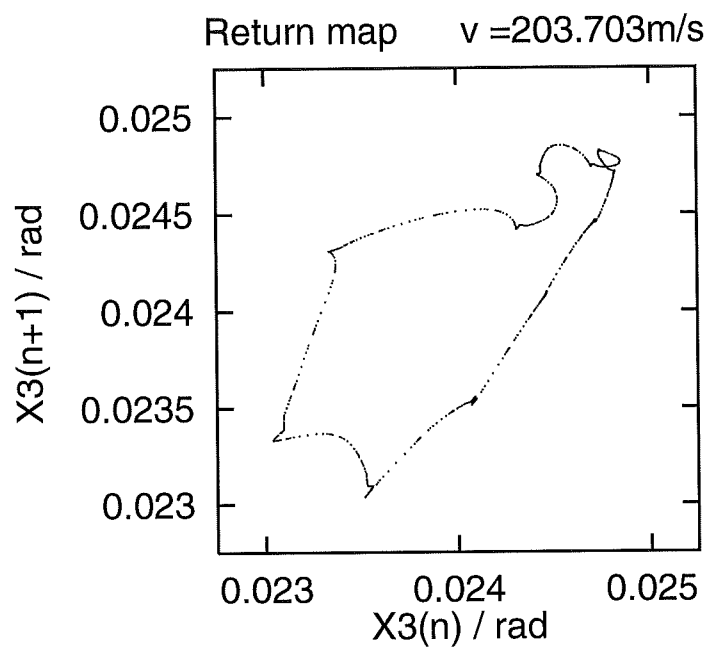


Figur 6.2.10.2. Returafbildning.

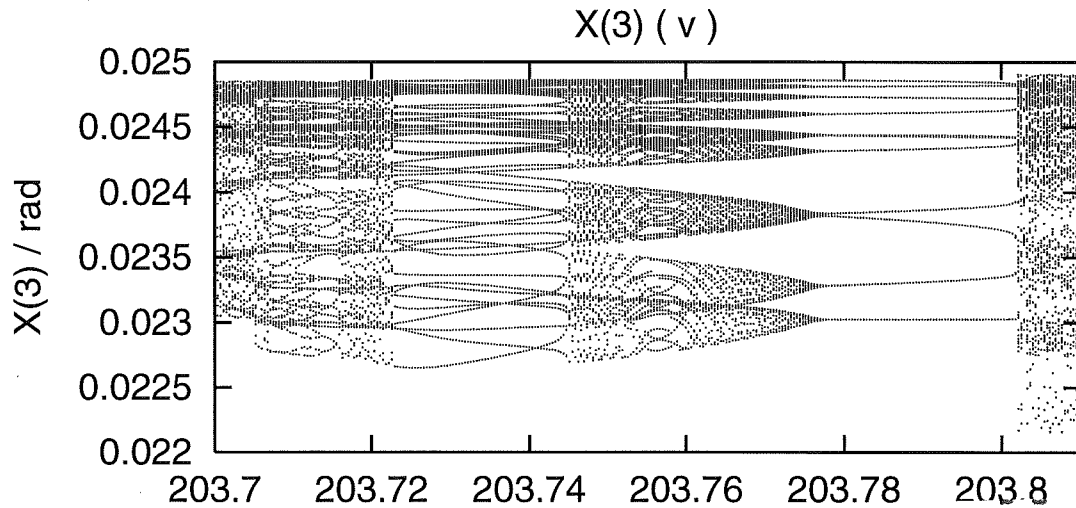
Et udsnit af tidsserien for x_3 er vist på figur 6.2.10.3, hvoraf det ses, at systemet indeholder to frekvenser. Den karakteristiske periodes frekvens synes ikke at variere meget i amplitude, hvorimod den overlejrrede frekvens svinger i amplitude.



Figur 6.2.10.3. Udsnit af tidsserie.



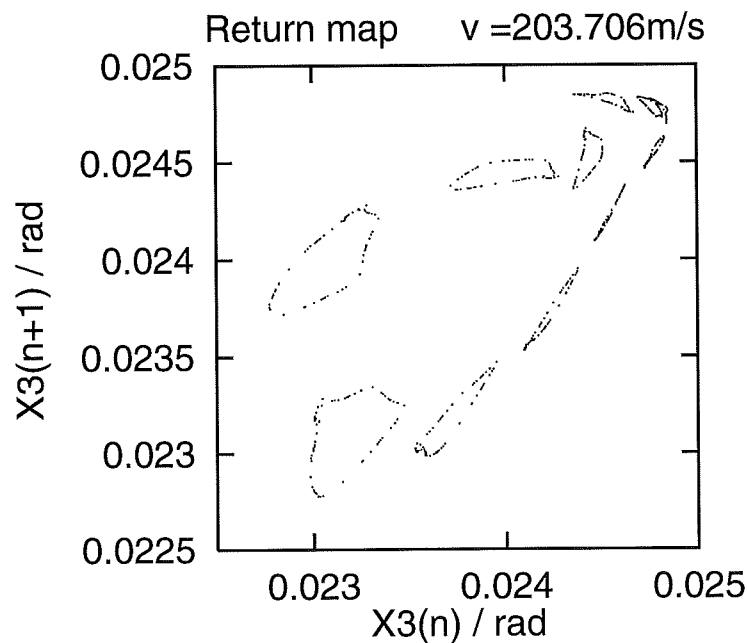
Bifurkationsdiagrammet for hastighedsintervallet $203.7\text{m/s} < v < 203.81\text{m/s}$ ses på figur 6.2.10.4. Ved $v=203.705\text{m/s}$ ses en pludselig ekspansion af løsningen. Herefter haves en periodisk løsning med periode 55, hvorefter løsningen snævres ind til 11 bånd, der ender i en periode 11 løsning. Denne løsning eksisterer indtil $v=203.801\text{m/s}$, hvor en bred løsning opstår.



Figur 6.2.10.4. Bifurkationsdiagram.

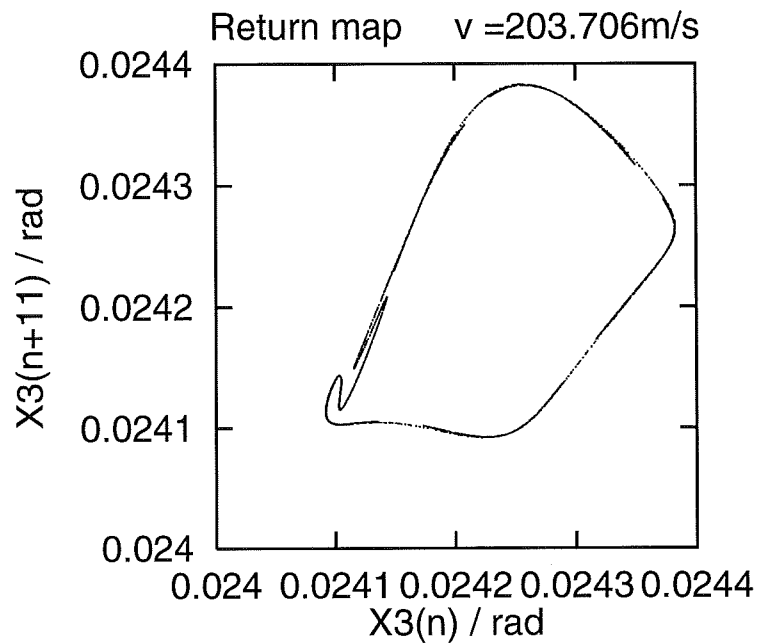
6.2.11. $v=203.706\text{m/s}$

Returafbildningen for $v=203.706\text{m/s}$ er vist på figur 6.2.11.1. Det ses at periode 11 løsningen har indflydelse idet afbildningen består af 11 selvstændige 'øer'. Dette kan forklares ved, at løsningen ligger på en 2-torus der først 'samles' ved 11'te skæring med Poincaré planen.



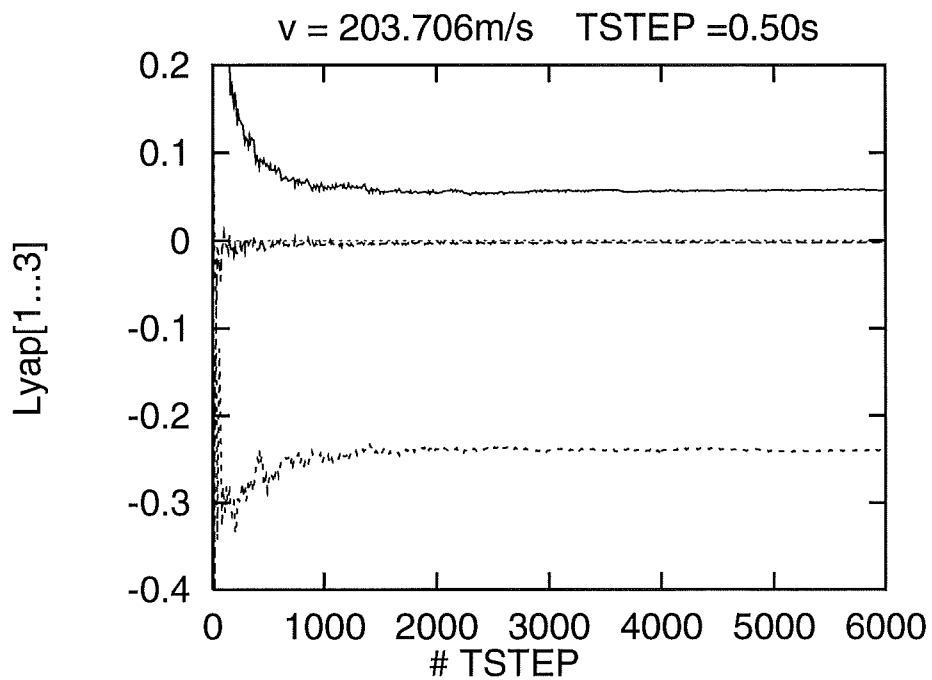
Figur 6.2.11.1. Returafbildning.

På figur 6.2.11.3. ses returafbildningen med den 11'te skæring af Poincaré planen. Det ses at afbildninger er en 'lukket' kurve. Dog ses tydelige tegn på kaos. Der er tydelige foldninger og punkterne fortættes visse steder.



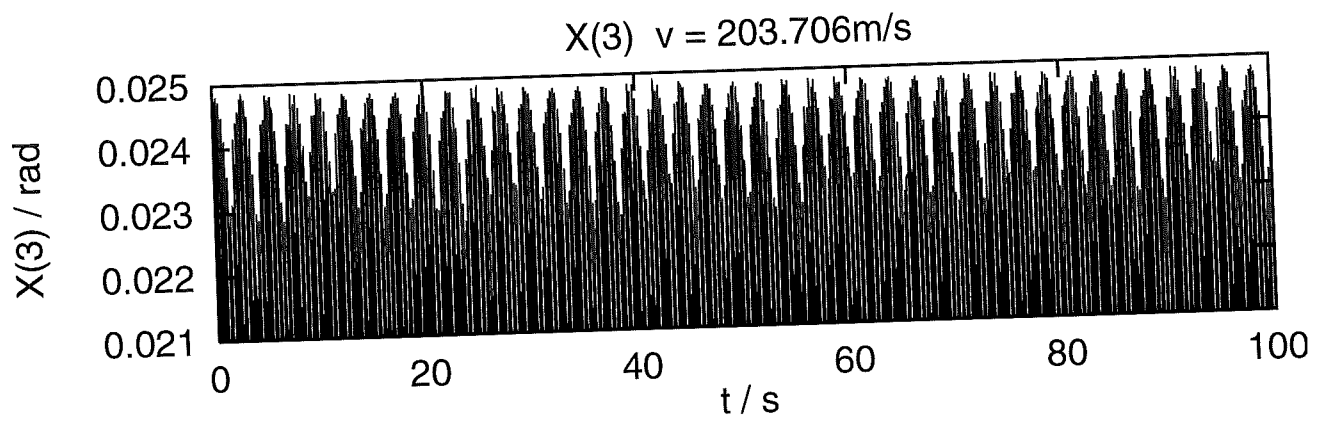
Figur 6.2.11.3. Returafbildning.

Af konvergensten af lyapunov eksponenterne på figur 6.2.11.4. ses at løsningen er kaotisk med lyapunov spektret (+,0,-,...). Lyapunovdimensionen udregnes til 2.25.



Figur 6.2.11.4. Konvergens af lyapunov eksponenter.

Et udsnit af en tidsserie er vist på figur 6.2.11.5. Udsnippet har de samme karakteristika som tidsserien på figur 6.2.11.3, men amplitudevaritionen af den overlejlrede frekvens synes større

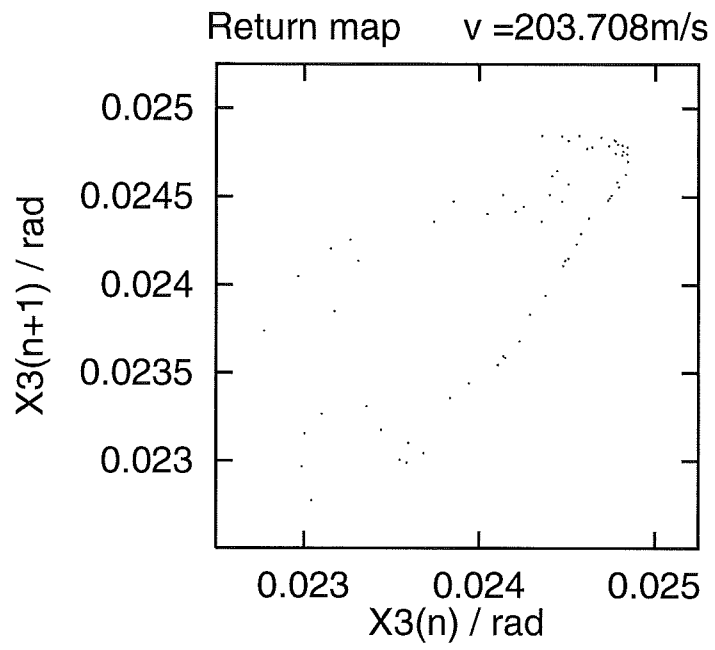


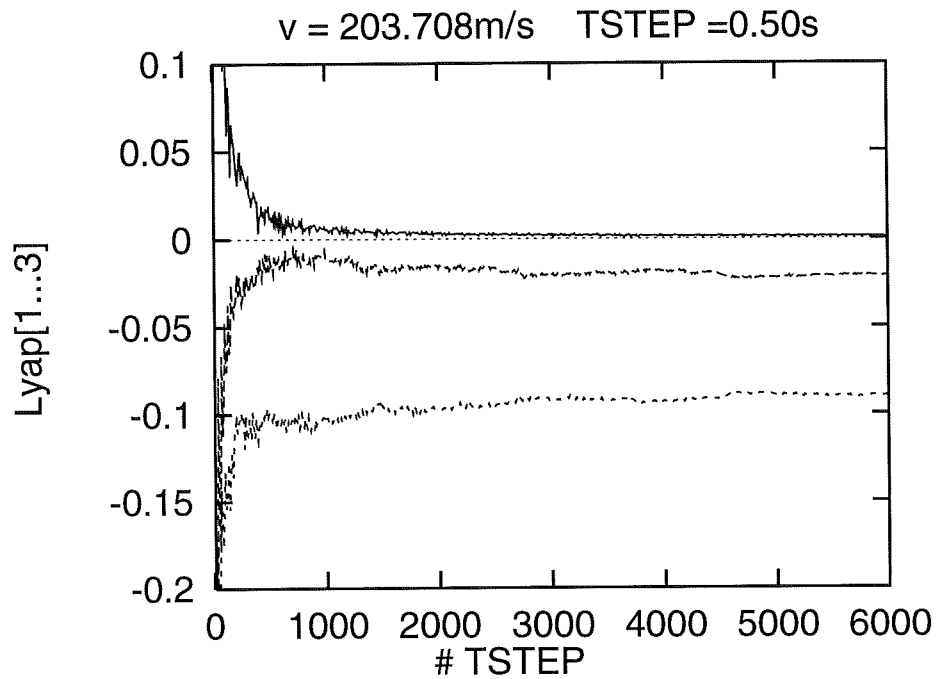
Figur 6.2.11.5. Udsnit af tidsserie.

6.2.12. $v=203.708\text{m/s}$

Ved $v=203.708\text{m/s}$ er løsningen en periodisk løsning med periode 67. hvilket ses af de følgende figurer.

Figur 6.2.12.1. Returafbildning.

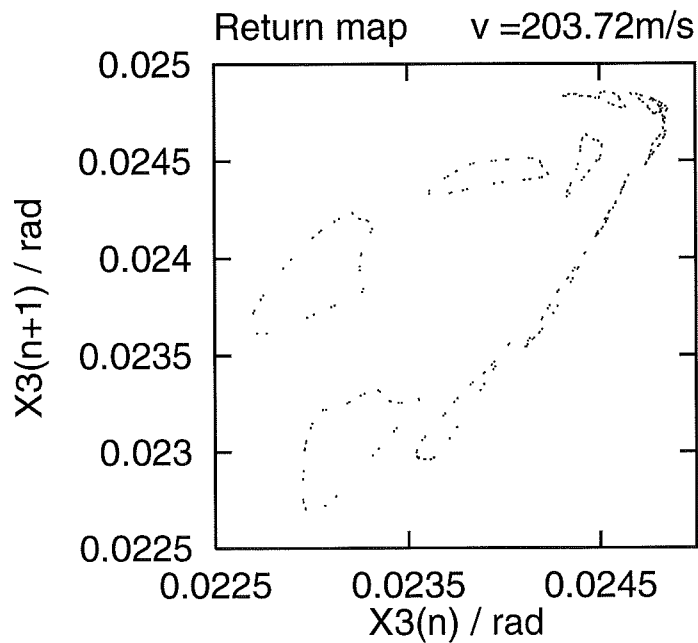




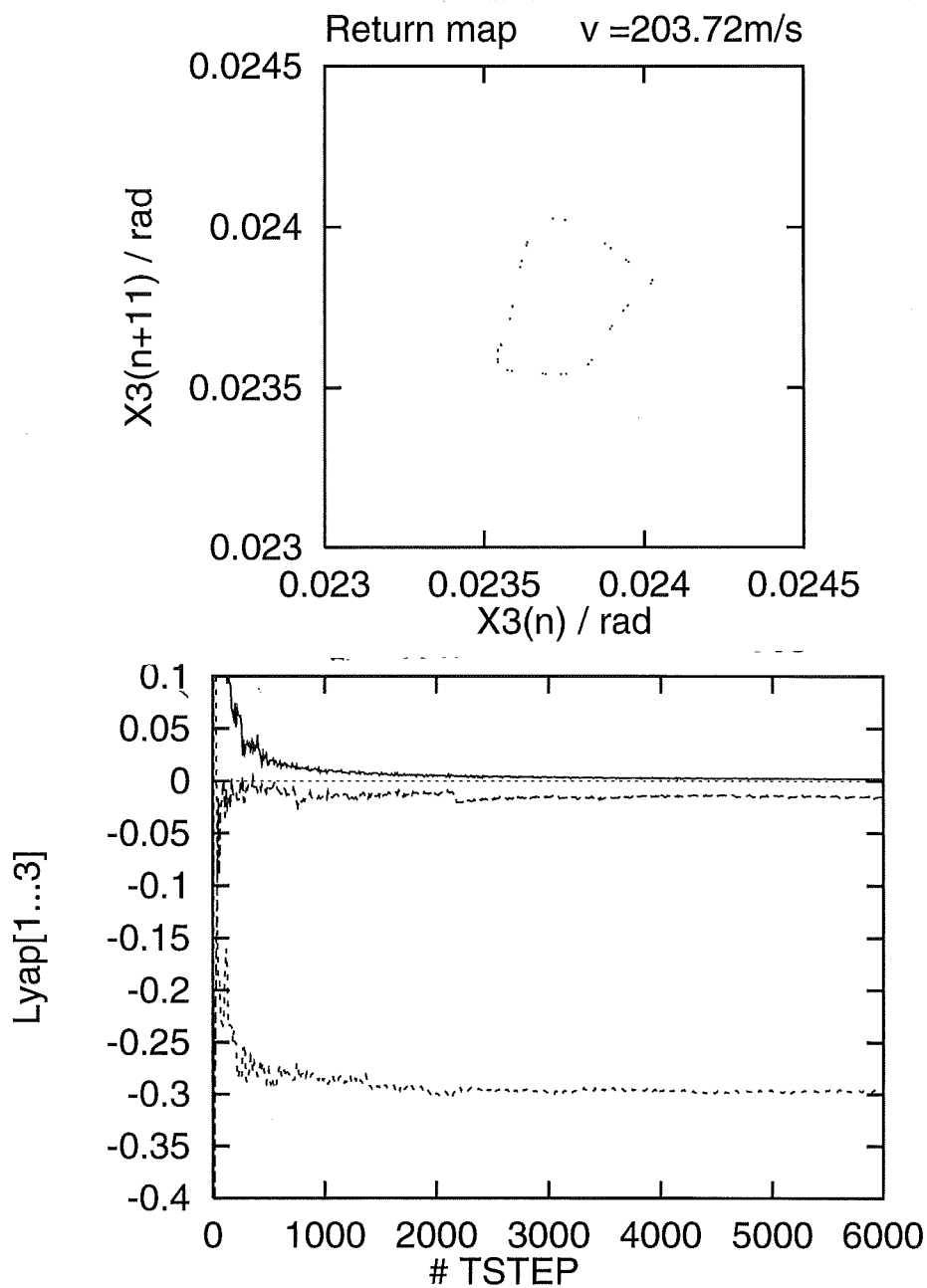
Figur 6.2.12.2. Konvergens af lyapunov eksponenter.

6.2.13. $v=203.72\text{m/s}$

Ved $v=203.72\text{m/s}$ er løsningen en periodisk løsning med periode 330. Returafbildningen viser igen hvorledes periode 11 løsningen spiller en stor rolle.



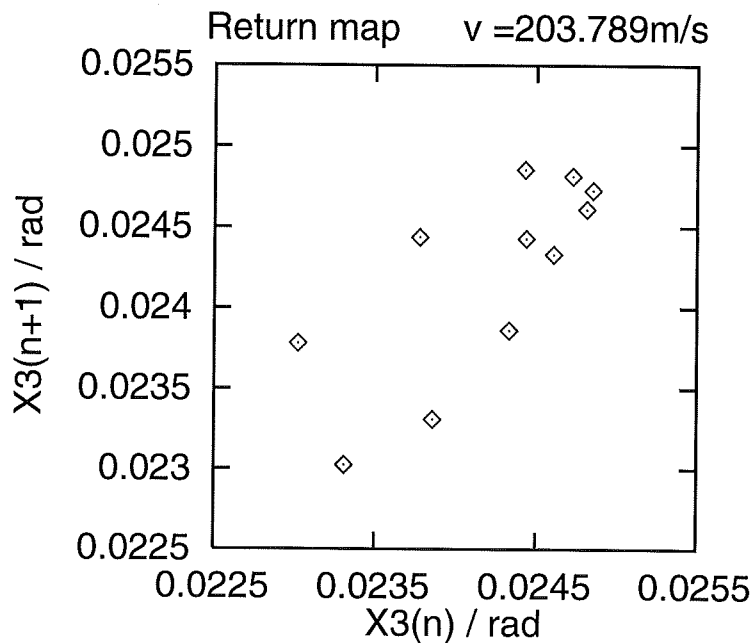
Figur 6.2.13.1. Returafbildning.



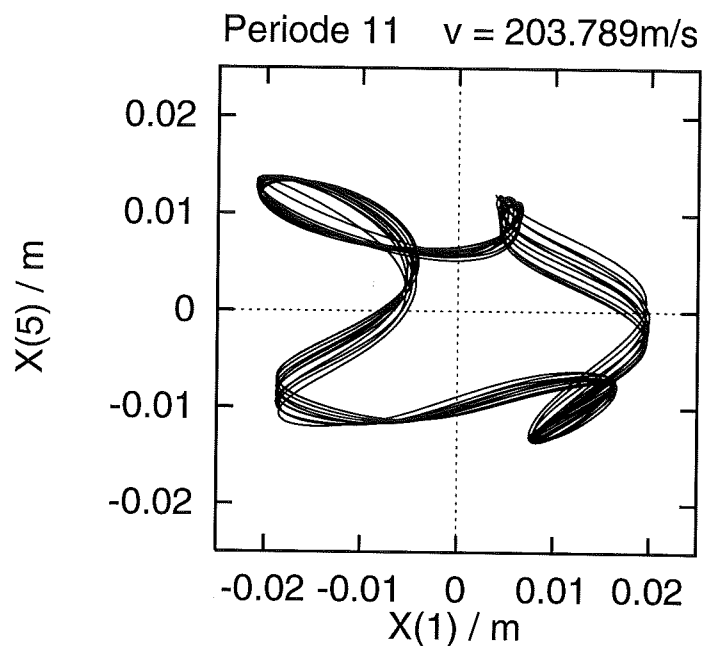
Figur 6.2.15.3. Konvergens af lyapunov eksponenter.

6.2.14. $v=203.789\text{m/s}$

En periode 11 løsning haves ved $v=203.789\text{m/s}$, hvilket fremgår af returafbildningen på figur 6.2.14.1.



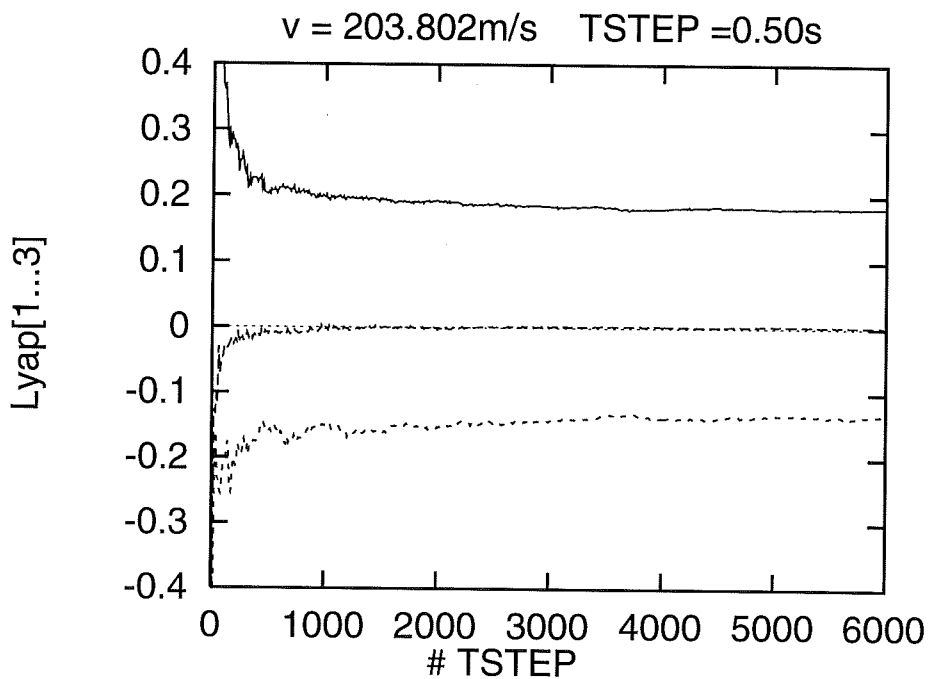
på figur 6.2.14.2 er denne løsning afbildet i faseplanen x_1, x_5 .



Figur 6.2.14.2. Faseplan.

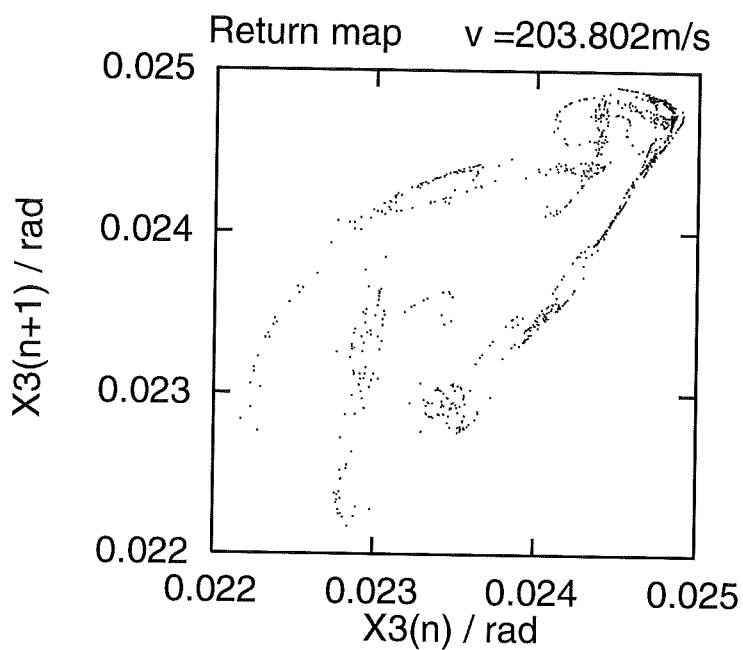
6.2.15. $v=203.802\text{m/s}$

Ved $v=203.801\text{m/s}$ ekspanderer løsningen til et bredt interval, og ved $v=203.802\text{m/s}$ viser lyapunov eksponenterne, at løsningen er kaotisk med spektret $(+, 0, -, \dots)$. Den 4. eksponent er ikke udregnet, så dimensionen kan ikke bestemmes.

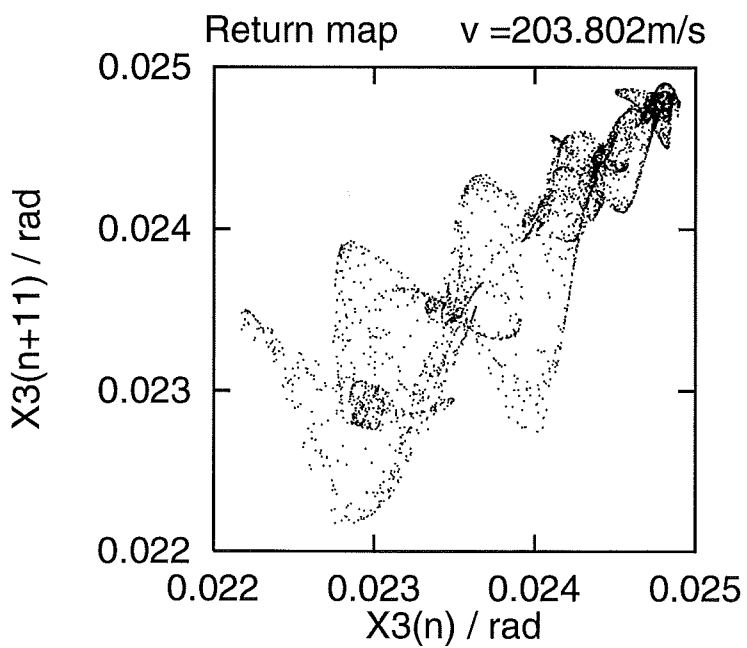


Figur 6.2.15.1. Konvergens af lyapunov eksponenter.

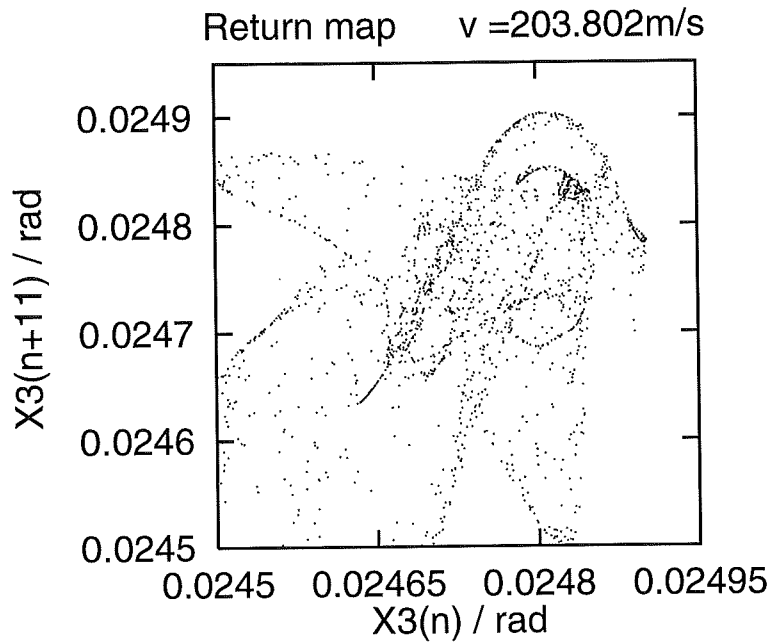
Returafbildningerne på figurerne er særdeles komplicerede.



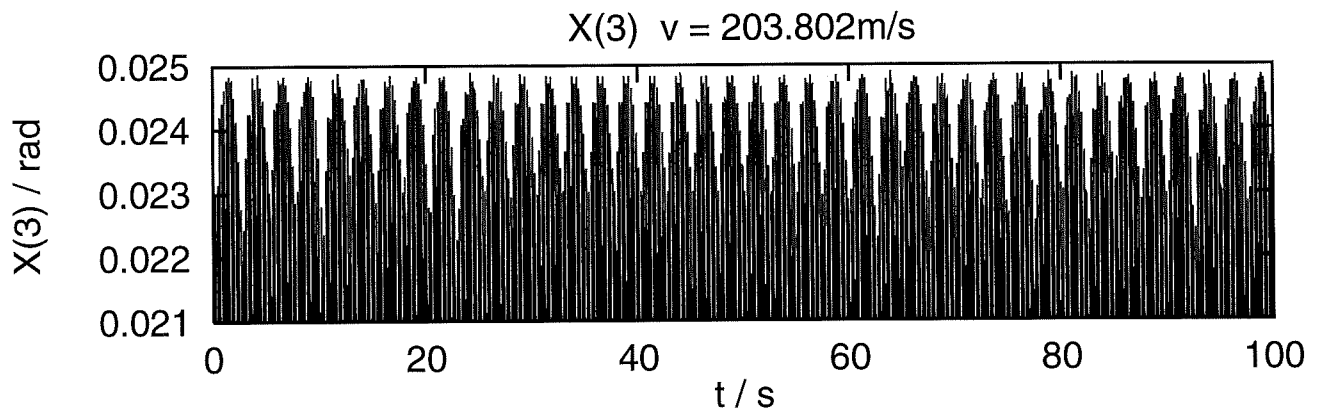
Figur 6.2.15.2. Returafbildning.



Figur 6.2.15.3. Returafbildning.



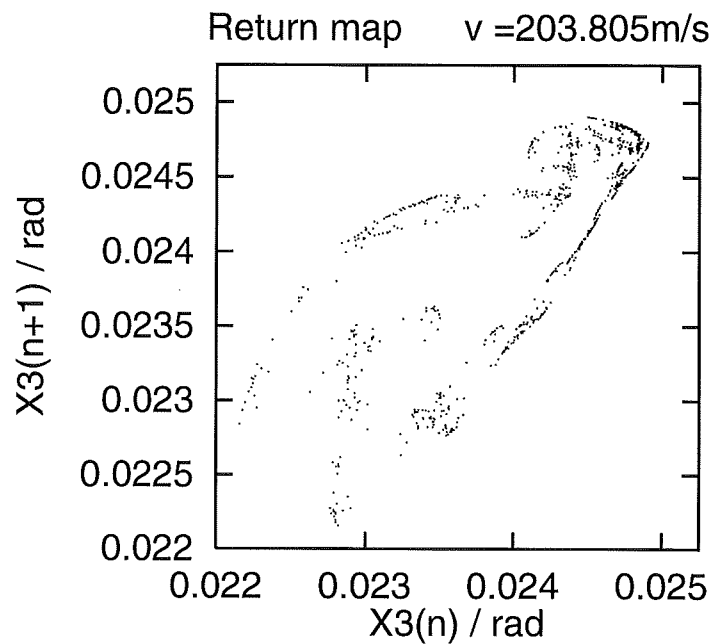
Figur 6.2.15.4. Returafbildning, forstørrelse af figur 6.2.15.3.
Et udsnit af en tidsserie er vist herunder.



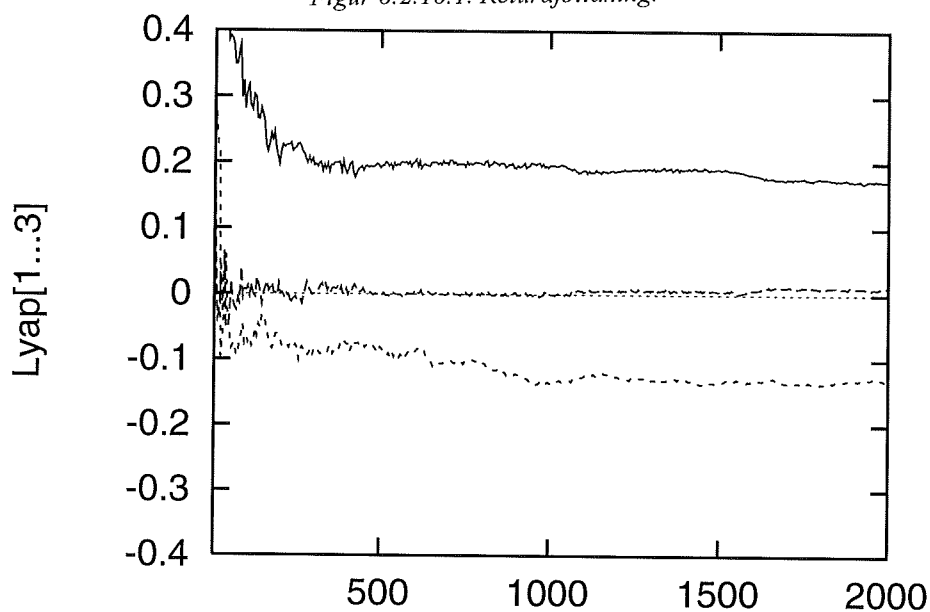
Figur 6.2.15.5.. Udsnit af tidsserie.

6.2.16. $v=203.805\text{m/s}$

Ved denne hastighed ser returafbildningen ud som på figur 6.2.16.1, og værdierne af lyapunov eksponenterne er også som ved $v=203.802\text{m/s}$. Lyapunov dimensionen udregnes til 3.03.



Figur 6.2.16.1. Returaftbildning.



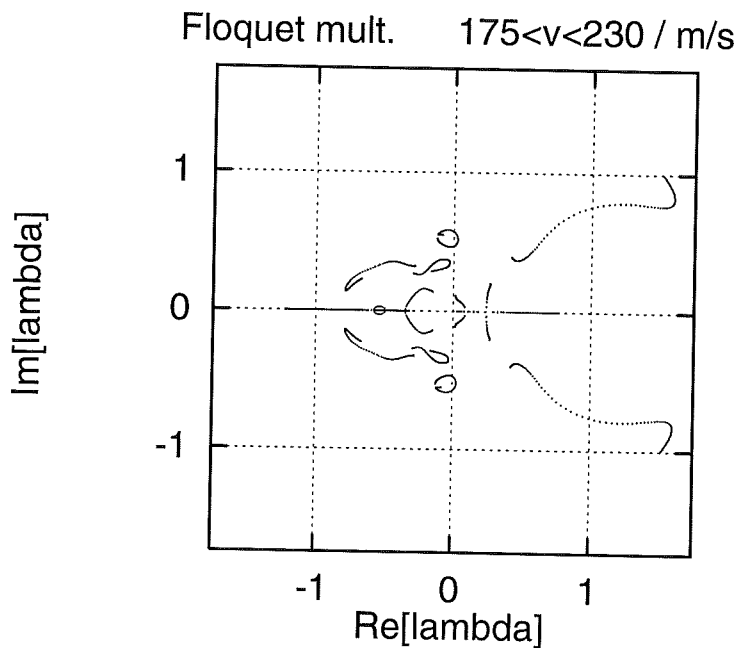
Figur 6.2.16.2. Konvergens af lyapunov eksponenter.

Konvergens $\lambda_1, \dots, \lambda_3$ ved udvalgte hastigheder er vist i appendix.

6.3. Bifurkationer

Ved hjælp af PATH er den ene af de to stabile løsninger fuldt fra $v=175\text{m/s}$ for voksende hastighed til bifurkationen ved $v=203.34\text{m/s}$. PATH følger herfra den nu ustabile periodiske løsning til $v = 218.09\text{m/s}$, hvor en ny bifurkation finder sted. Herefter eksisterer en ny ustabil periodisk løsning til $v > 300\text{m/s}$. Denne løsning har for hele forløbet en periode omkring 0.22s .

På figur 6.3.1. ses udviklingen af Floquet multipliers i den komplekse plan, når denne løsning følges med hastigheden som parameter.



Figur 6.3.1. Floquet multipliers.

Et komplekst konjugeret par af multipljerne ses at krydse enhedscirklen i 1. og 4. kvadrant ved 203.34m/s. Denne bifurkation kaldes en torusbifurkation. Bifurkationen er en overgang til en stabil quasiperiodisk løsning på en torus. Dette bekræfter resultaterne ved de undersøgte hastigheder umiddelbart efter bifurkationen.

Ved en torusbifurkation bliver der introduceret en ny frekvens i systemet, der overlejrer den eksisterende periodefrekvens.

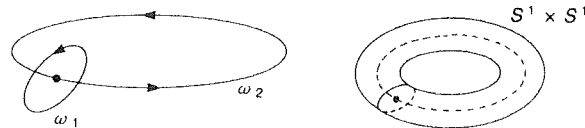
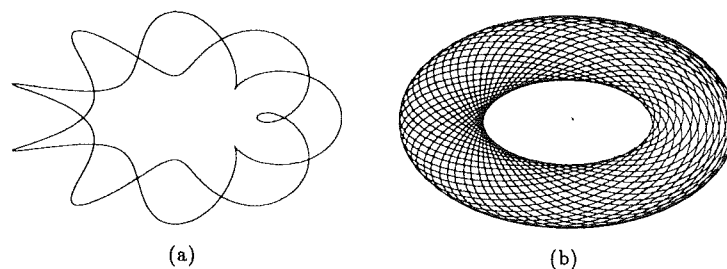


Figure 1.6: Two-periodic behavior lies on a two-torus $S^1 \times S^1$. Each S^1 represents one periodic component.



Figur 6.3.2. Løsningstrajektorie på en 2-torus.

Ved hjælp af figur 6.3.1. er det muligt, at bestemme hvordan løsningstrajektorien vil skære Poincaréplanen. Vinklen mellem den positive reelle akse og skæringspunktet i 1. kvadrant for enhedscirklen af Floquet multipljerne er den ændringsvinkel hvormed løsningstrajektorien vil skære Poincaré planen.

Vinklen er bestemt til ca 0.7 rad.

Kendes udseendet af Poincaré snittet, vil det være muligt at bestemme forløbet af løsningstrajektorien. Den $n+1$ 'te skærring fremkommer ved at addere vinkelen til det n 'te punkt i Poincaré planen langs den kendte kurve.

Efter knap 9 omgange vil løsningsstrajektorien være nået hen i nærheden af sig selv igen ved den bestemte vinkel. 9 gange den karakteristiske periode på 0.22s giver de ca 2s der fremgik af figur 6.2.3.3.

Den introducerede frekvens vil ændre sig med bifurkationsparameteren. For de fleste værdier vil der være et irrationelt forhold mellem de to frekvenser i systemet. Når dette er gældende vil der være quasiperiodiske løsninger til systemet. Men det sker, at forholdet bliver rationelt, således at løsningsstrajektoriens forløb på torus'en når tilbage til et tidligere besøgt punkt på kurven i Poincaré planen. Hermed haves en periodisk løsning til systemet, som oftest med en høj periode (også kaldet resonans).

Frekvenserne vil ikke variere kontinuerligt med bifurkationsparameteren, men systemet vil være tilbøjeligt til at fastholde bestemte frekvenser. Hermed haves fase-låsning af de periodiske løsninger.

På figur 6.2.1. ses netop periodiske baner med høj periode for små intervaller af bifurkationsparameteren.

Periode 9 og 10 løsninger kan også forklares med ovennævnte argument. Systemet kan dog fastholde de indgående frekvenser i større hastighedsintervaller.

Forklaringen på at nogle returafbildninger ved quasiperiodiske løsninger så ud til bestå af buestykker, skyldes at drejningsvinklen ligger så tæt ved resonans at 'cirklen' udfyldes meget langsomt.

På figur 6.3.1. ses en multiplifier at krydse enhedscirklen ved -1 når $v=218.09\text{m/s}$. Denne bifurkation er en periodedobblingsbifurkation, hvor der vil dannes en (ustabil) periode 2 løsning samtidigt med, at periode 1 løsningen stadig vil eksistere (omend den nu vil være mere ustabil).

I intervallet $v=203.654\text{m/s}$ til $v=203.703\text{m/s}$ sker en bifurkation, der får den quasiperiodiske løsning til at forsvinde og en kaotisk løsning dannes. Der er intet i bifurkationsdiagrammet der indikerer andet end, at det sker ved torus break-down. Teorierne omkring torus break-down leder i retning af, at der umiddelbart inden den kaotiske løsning dannes, vil være resonans eventuelt i et meget kort interval af bifurkationsparameteren.

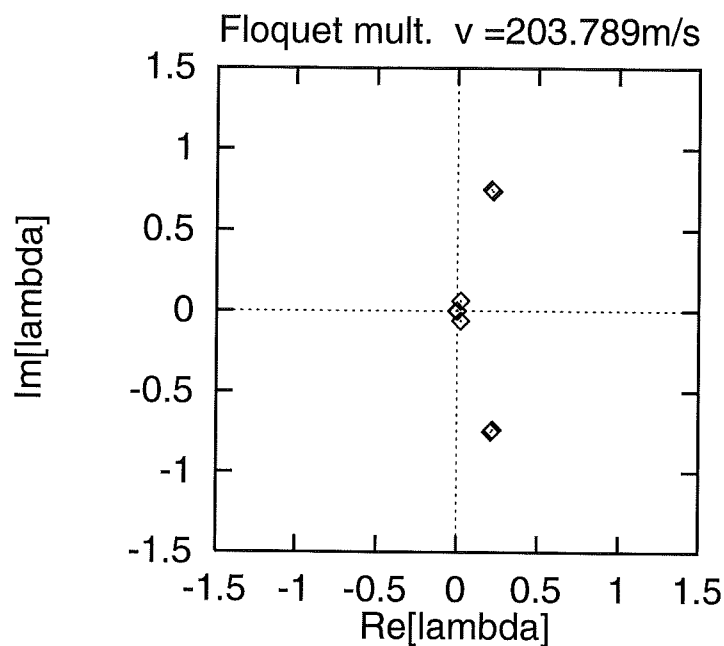
Ved $v=203.705\text{m/s}$ sker en ekspansion af løsningen og periode 11 løsningen gør sig gældende. En ekspansion betegnes som en krise. Denne bifurkation er ikke undersøgt nærmere.

Herefter snører løsningen ind til 11 bånd, der munder ud i den periodiske løsning. Dog ses også her periodiske løsninger, hvilket er et kendt fænomen i et kaotisk løsningsforløb. De periodiske løsninger betegnes som periodiske vinduer.

Ved hjælp af PATH, er det forsøgt at ramme og følge den stabile periode 11 løsning ved $v=203.789\text{m/s}$.

Punkter på løsningen var nemme at bestemme, men alligevel var mange forsøg forgæves. PATH bestemmer den benyttede Poincaré plan ud fra den givne tilstand af systemet. Forskellige startværdier af x , der fremkom ved forskellige transientlængder, gav heller ikke resultat. Først da periodetiden blev leveret med 10 cifres nøjagtighed kunne PATH

identificere den ønskede løsning. Men desværre var det ikke muligt for PATH, at følge løsningen med en minimum steplængde på 10^{-5} . PATH blev sat til at følge løsningen for både stigende og aftagende værdier af hastigheden. PATH kunne tage 1 hhv. 4 skridt i hver retning inden minimum steplængden prøvedes forgæves. De udregnede Floquet multipliere er vist på figur 6.3.3. Resultaterne fra køeslerne er vist i appendix.



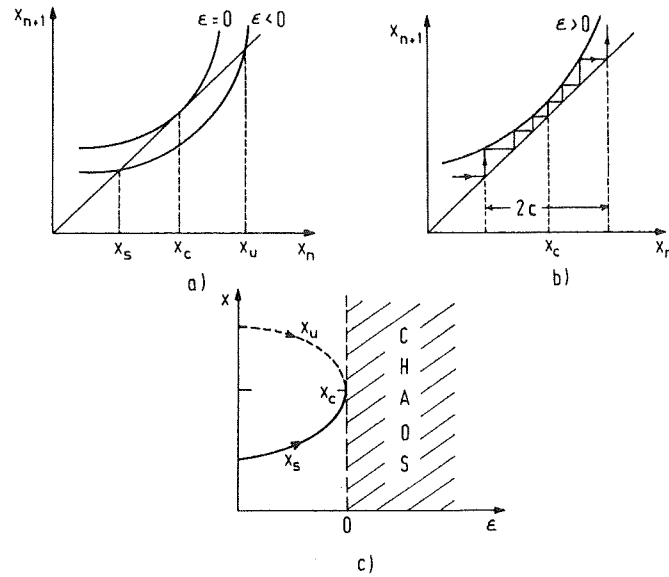
Figur 6.3.3. Floquet multipliers.

Omkring den stabile periode 11 løsning vil der være adskillige ustabile løsninger, der vil genere Newton iterationen. De få skridt, PATH trods alt tog, viser også, at periodetiden ændrer sig på 7 - 8 decimal.

Udskrift fra PATH er vist i appendix XX

Ved at betragte returafbildningen på figur XX er det muligt at få en idé om bifurkationstypen ved $v=203.801\text{m/s}$. Det ses af forstørrelsen på figur XX at der er en tunnel ved 45 grader linien ved $X_3=0.02465\text{rad}$. Dette tyder på en overgang til kaos ved intermittens.

Ved at studere den periodiske løsning umiddelbart inden overgangen til kaos på bifurkationsdiagrammet, ses der at være lodret tangent. Dette kunne tyde på en invers tangent bifurkation. Forholdene omkring denne type bifurkation er vist på figur 6.3.4.



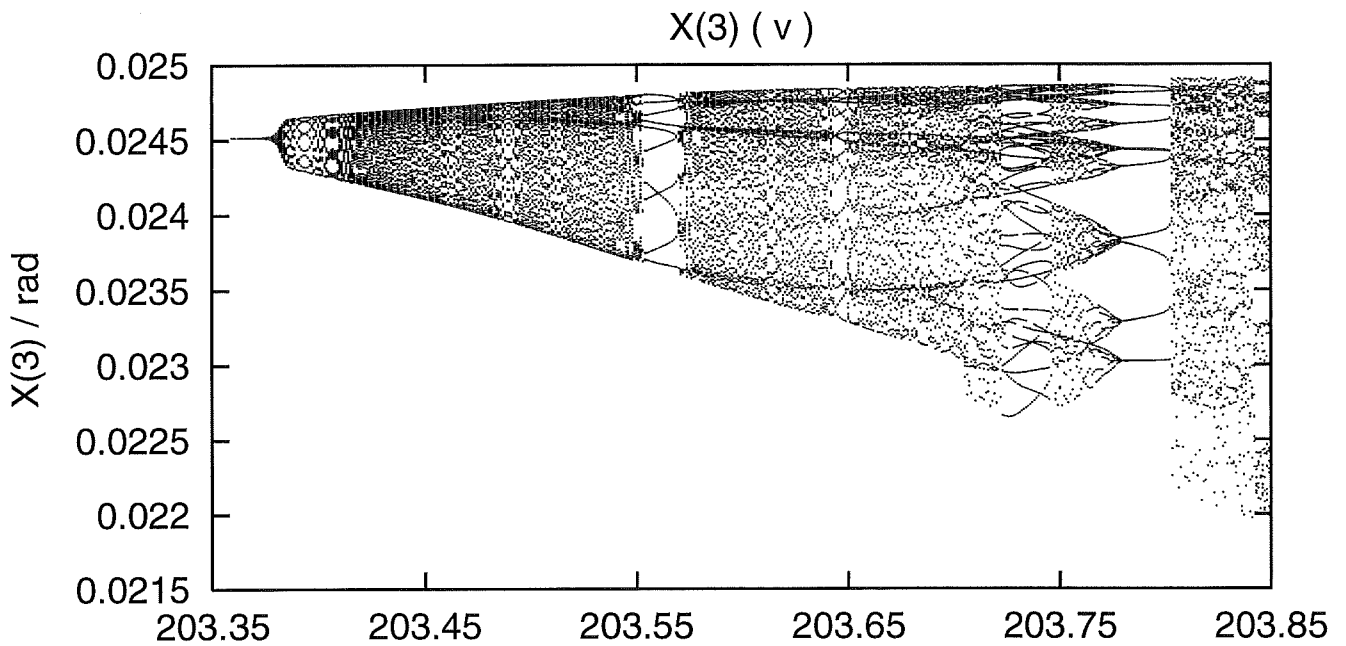
Figur 6.3.4. Forhold ved type I intermittens.

Hvis antagelserne er korrekte, sker denne overgang til kaos ved type I intermittens.

Det bekræftes af tidsserien på figur 6.2.15.5., hvor der omkring $t=40s$ synes at være et næsten periodisk forløb, hvilket er typisk for intermittens.

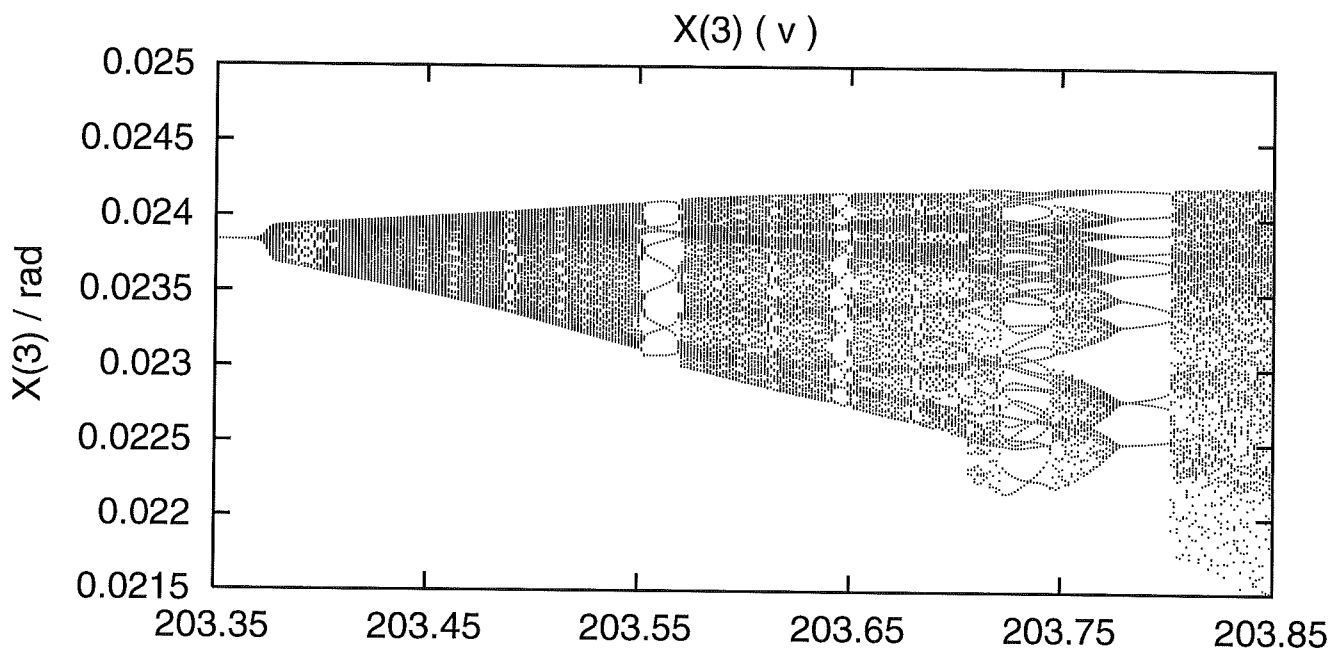
6.4. Asymmetriske løsninger

På figur 6.4.1. er vist det samlede forløb af bifurkationsdiagrammet i det analyserede hastighedsinterval.



Figur 6.4.1. Bifurkationsdiagram.

Det er indres, at det var en asymmetrisk løsning, der bifurkerede. For at undersøge om der dannes symmetriske løsninger i dette hastighedsinterval, er det tilsvarende diagram beregnet for den tilhørende asymmetriske løsning. Dette ses ikke at være tilfældet ved at betragte figur XX.

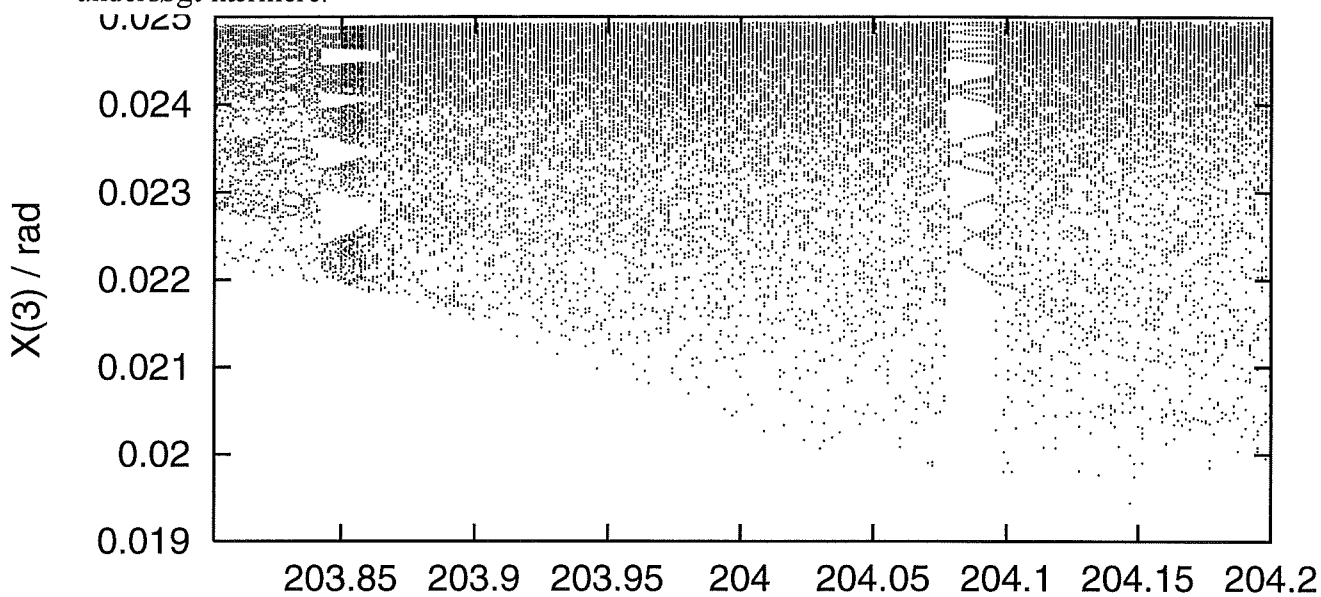


Figur 6.4.2. Bifurkationsdiagram.

Begge diagrammer er beregnet for stigende værdi af hastigheden. Dette forårsager at første del af diagrammerne viser et transient forløb, og ikke de stabile quasiperiodiske løsninger. Den korrekte start på diagrammet ses på figur 6.2.1, der er beregnet for aftagende hastighed.

6.5. Videre undersøgelser

Det videre forløb af bifurkationsdiagrammet for X_3 er vist på figur 6.5.1.. Det ses at løsningen vedbliver med at ekspandere. Omkring $v=204.075\text{m/s}$ er der et periodisk vindue med periode 12, hvor der sker bifurkationer, der minder om periodedoblinger. Det viste diagram er ikke undersøgt nærmere.

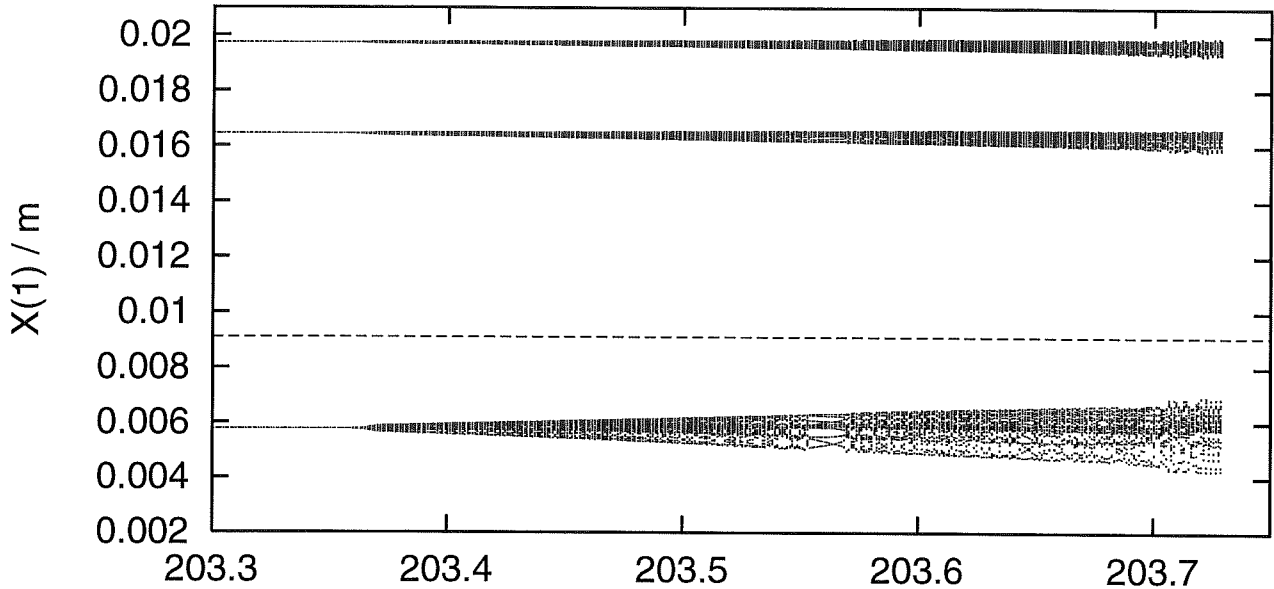


6.6. Period-adding

Det er vist ved bifurkationsdiagrammerne, at der findes en periodesekvens med forløbet 9,10,11,12. Sådanne sekvenser betegnes 'period-adding'. Det har ikke været muligt at finde teori om dette emne, men empiriske regler for hvorledes periodiske løsninger kan eksistere imellem løsningerne i sekvensen er set i [Matsumoto et al, 87]. De periodiske løsninger der observeres mellem periode 9,10,.. er så store og varierende at det ikke er muligt at lave noget tilsvarende for bogie modellen.

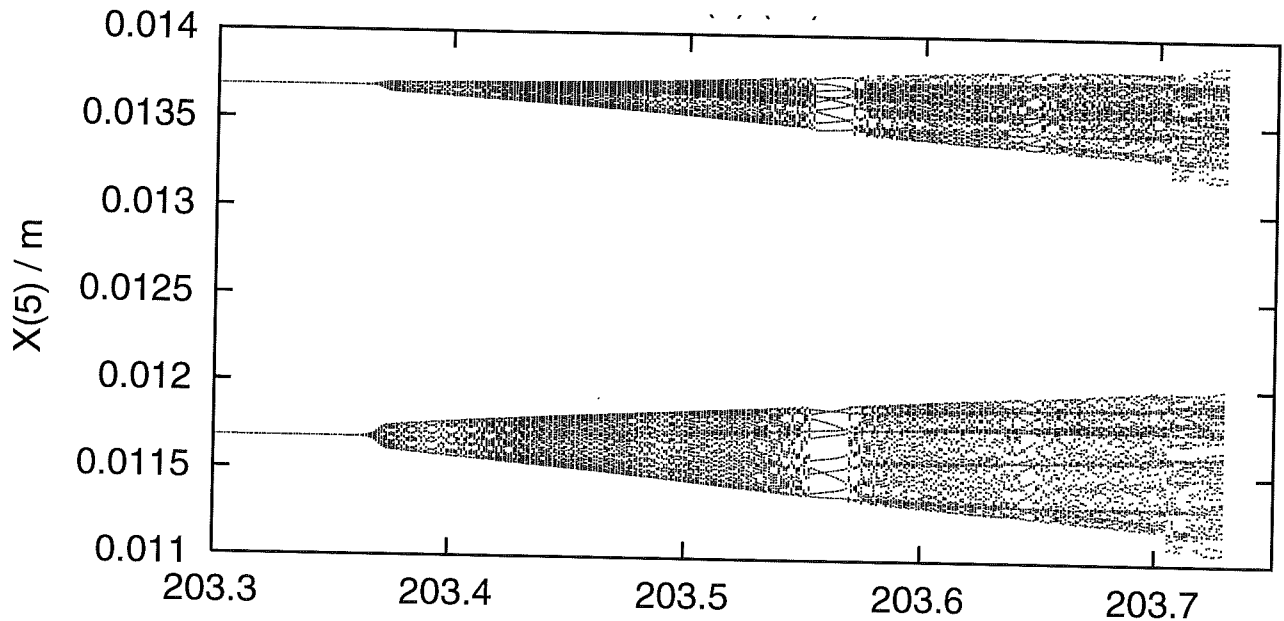
6.7. Fysiske forklaringer ?

Den fysiske årsag til de mange bifurkationer er indtil videre ikke set. En undersøgelse af hjulenes laterale svingninger kunne give en forklaring. På figur XX er vist frontakslens laterale svingninger i det undersøgte hastighedsinterval. Figuren viser alle tre maxima per svingning (sml. med figur XX). Flangen er indtegnet, men heller ikke her gives nogen forklaring.



Figur 6.7.1. Bifurkationsdiagram.

Tilsvarende er bagakslens svingninger vist på figur 6.7.2., men maxima for svingningerne ses at ligge langt fra flangekontakt. Så det er heller ikke her muligt at give en fysisk forklaring på de mange bifurkationer.



Figur 6.7.2. Bifurkationsdiagram.

6.8. Kendte resultater

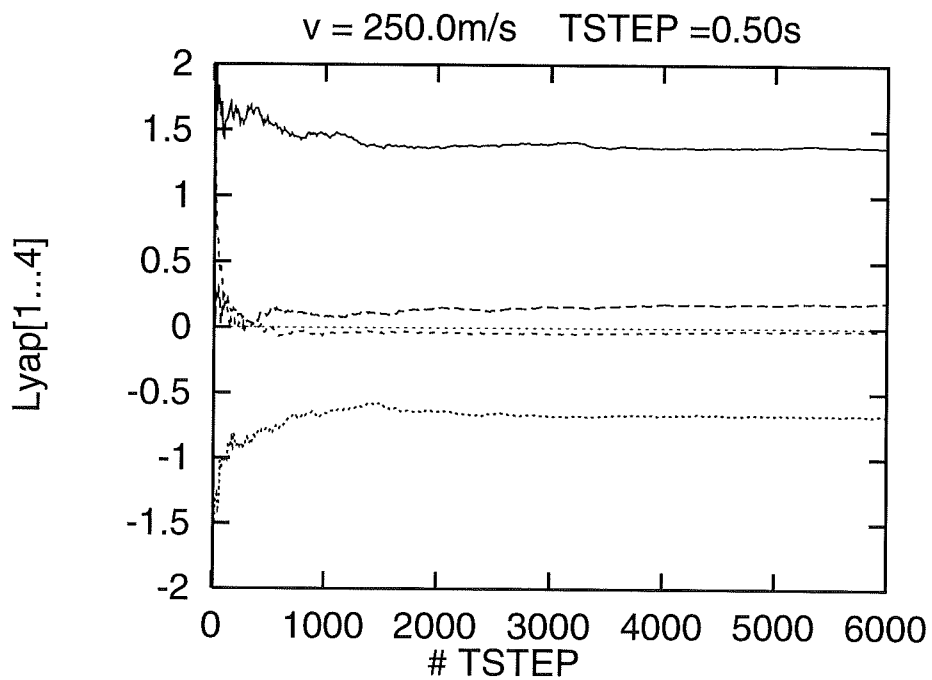
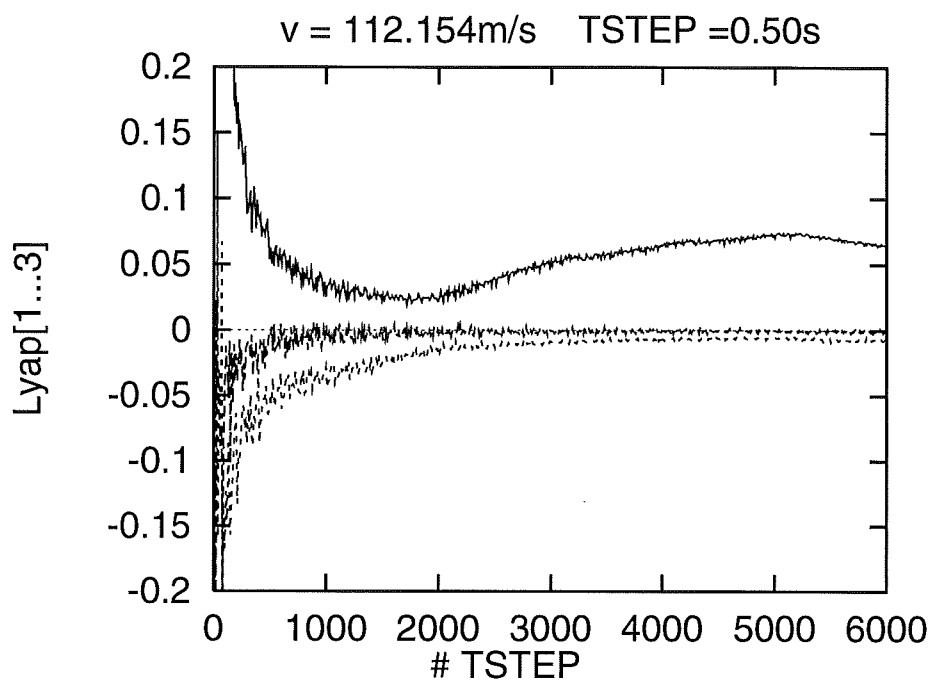
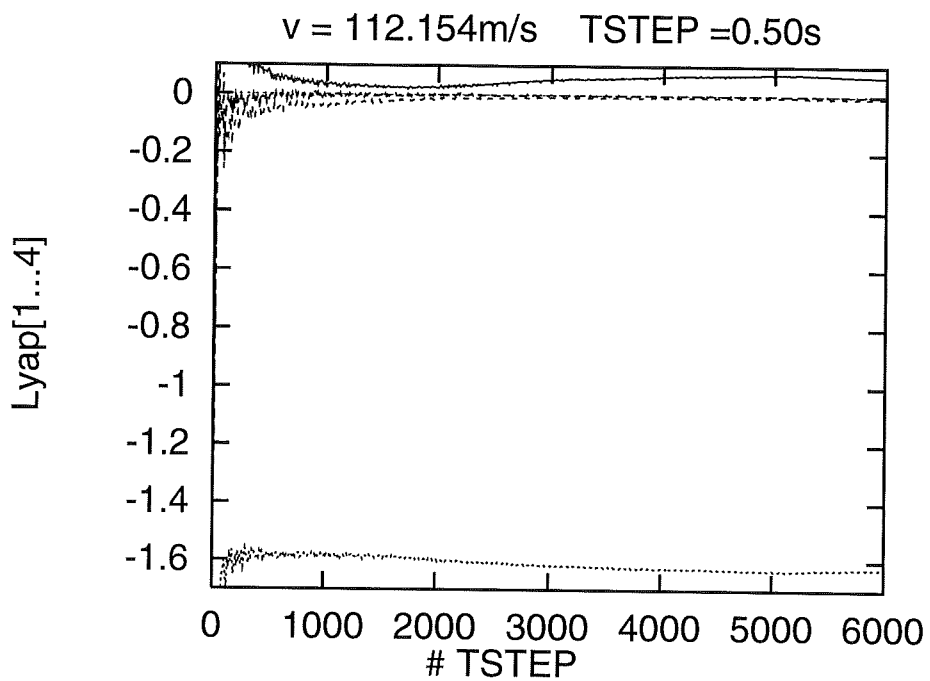
Modellen er som tidligere vist undersøgt ved andre hastigheder i tidligere projekter. I dette kapitel benyttes det udviklede program til en diskussion af de kendte resultater.

6.8.1. $v=112\text{m/s}$

Der er ved tidligere undersøgelser lagt op til at der skulle eksistere en kaotisk løsning ved denne hastighed. På figur 6.8.1. er vist konvergen af de 4 største Lyapunov eksponenter. En forstørelse omkring 0 linien ses på figur 6.8.2. Der ses ikke tydelig konvergen af den største eksponent. men figurene tyder på en lavdimensional kaotisk løsning på en 2-torus.

6.8.2. $v=250\text{m/s}$

C. Kaas-Petersen har udregnet den største Lyapunov eksponent ved denne hastighed og hermed for første gang konstateret kaotiske løsninger for modellen. Denne beregning er udvidet til de 4 største eksponenter. Konvergen ses af figur 6.8.2.1. Figuren viser tydeligt at der er tale om en hyper-kaotisk løsning idet spektret er $(+, +, 0, -, \dots)$. Det skal bemærkes at værdierne for de to største eksponenter stemmer overens i de to undersøgelser.



7. OPTIMERING AF PROGRAMMER.

De benyttede programmer er afviklet i DTUs G-databar. Databaren råder over 11 HP 9000 arbejdsstationer model 735 og 715.

Og det skal bemærkes at de har været udsat for et meget stort arbejdspress for at udregne de viste resultater. Flere af programkørslerne har været flere tusinde CPU minutter. Selv om de udviklede og anvendte maskiner bliver større og kraftigere er der stadigvæk en stor opgave i at optimere de anvendte programmer.

I dette projekt er anvendt standard programmel samt udviklet programmel hvor robustheden er prioriteret højt. Denne type af programmel kan nødvendigvis ikke være det optimale, og det er ofte ikke muligt at ændre i programmerne for dermed at optimere dem.

Løsningen vil derfor være at udvikle sit eget programmel specielt designet til en given opgave på en given maskine.

Ellers må man væbne sig med tålmodighed, indtil de ønskede resultater er beregnet, denne løsning er valgt i dette projekt.

8. KONKLUSION

Ved brug af udviklede og eksisterende programmer er numeriske metoder indenfor ikke-lineære dynamiske systemer anvendt til at analysere dynamikken i Cooperriders konventionelle bogie ved høj hastighed. Der er i projektet lagt vægt på den praktiske anvendelse af de benyttede metoder.

I det undersøgte hastighedsinterval er der påvist en stor variation af løsningstyper og bifurkationer. De viste løsningstyper er beskrevet og analyseret ved at præsentere bifurkationsdiagrammer og returafbildninger, understøttet ved at approximere Lyapunov eksponenterne og se på Floquet multipliernes udvikling. Det har ved de fleste bifurkationer været muligt at fastslå typen.

Det forklares hvorledes fase-låsning-fænomenet opstår mellem quasiperiodiske løsninger.

Torus-breakdown bifurkationen diskuteres, og det vises hvorledes de periodiske løsninger har indflydelse på systemets dynamik.

Overgange til kaotiske løsninger diskuteres og der påvises en type I intermittens overgang.

Det vises at der eksisterer to asymmetriske løsninger for alle værdier i det undersøgte hastighedsinterval.

Til slut benyttes de udviklede programmer til kort, at bekræfte og præcisere kendte resultater fra tidligere undersøgelser af modellen.

Forudsætningerne for modellen er mange, dette til trods vil en undersøgelse som dette eksamensprojekt af systemet fortælle om dynamikken i modellen. Den dynamik der er undersøgt, er alene genereret af modellen selv ved den høje hastighed.

Til slut vil jeg konkludere at projektet har været særdeles spændende og lærerigt, og jeg håber, at jeg også i fremtiden vil få lejlighed til at beskæftige mig med ikke-lineære dynamiske systemer.

9. EFTERSKRIFT

Et projektforsøg over et halvt år gennemføres sjældent uden praktiske problemer. Dette har heller ikke været tilfældet med nærværende projekt. Inden projektstart havde jeg aldrig arbejdet med PATH eller LSODA, men det var med stor undren, at de udviklede programmer beregnede åbenlyst ukorrekte resultater. Efter længere tids frustration med gradvis mere og mere simple programmer var problemet oplagt: den benyttede version af LSODA regnede ikke korrekt. Dette blev bekræftet ved at benytte en version, der før havde vist sin dygtighed; men inden da var meget tid brugt forgæves. Den nye version af LSODA beregnede straks resultater, der var identiske med kendte resultater fra tidligere undersøgelser af bogie modellen. Denne start førte mig langt ind i PATH og LSODAs mange hjørner, men lærte mig også hvor vigtigt det er at behandle de udregnede data kritisk.

Den undersøgte model består af 14 ikke-lineært koblede differentialligninger. For at undersøge et så stort system kræves, som nævnt i kapitel 7 nogle kraftige maskiner, men de anvendte metoder er også af en speciel karakter. I et 14 dimensionalt faserum er det vanskeligt at lave detaljerede mangfoldigheds analyser. Derimod er det som vist fornuftigt at beregne Lyapunov eksponenter. Men det tager lang tid at opnå værdier med en tilfredsstillende præcision. Det er vist, hvorledes forløbet af Lyapunov eksponenterne kan fortælle om bifurkationstypen, men i praksis er denne metode ikke anvendelig for så stort et system. Jeg har forsøgt at udregne forløbet af de tre største eksponenter, hvor periode 11 løsningen bifurkerer til en kaotisk løsning. Da programmet havde kørt i mere end 10.000 CPU minutter, var der endnu ikke et brugbart resultat. Som nævnt er der netop omkring bifurkationerne, at konvergen af Lyapunoveksponenterne er langsom.

De ustabile løsninger er heller ikke undersøgt nærmere, idet det ikke har været muligt at bestemme forløbet af disse løsninger. Teorierne omkring de ustabile løsnings betydning for bifurkationerne er efterhånden anerkendt. Men ved undersøgelser af et 14 dimensionalt system er det altså ikke muligt at anvende disse teorier.

Der skal træffes mange valg for at nå de viste resultater, og alle disse valg kræver bunker af kasserede resultater. Det er ikke muligt at pege på én metode, der alene kan fortælle om dynamikken i systemet. Men ved at sammenholde de anvendte metoder har det altså været muligt at få nogle brugbare resultater.

Projektet har også været lærerigt hvad angår brugen af EDB systemer. Jeg har fået kendskab til UNIX, på de anvendte arbejdsstationer, hvilket jeg er blevet meget betaget af. Det er så ærgerligt, at der kun findes en (næsten) ens standard hvad angår brugen af musen til de anvendte systemer. Tastatur layout'et ved UNIX, OS/2, WINDOWS, DOS og de anvendte programmer er alle forskellige, hvilket er til stor gene, når man er i berøring med dem alle under et projektforsøg.

10. REFERENCER.

Barker, V.A., Yingleff, O.: Numerisk løsning af ikke-lineære ligninger, Numerisk Institut, Tecnicl University of Denmark, Lyngby, 1991.

Cooperrider, N.K.: The hunting behavior of conventional railway trucks. ASME J. Eng. Industri 94, 752-762, 1972.

Feigenbaum, M.J., Kadanoff, L.P., Schenker S.J.: Quasiperiodicity in Dissipative Systems: A Renomalization Group Analysys, Physica 5D, 370-386, 1982.

Franceschini, V.: Bifurcations of Tori and Phase Locking in a Dissipative System of Differential Equations, Physica 6D, 285-304, 1983.

Garg, V.k., Dukkpati, R.V.: Dynamics of Railway Vehicle Systems, Akademic Press, 1984.

Gleick, J.: Chaos, Making a New Science, Cardinal, 1987.

Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J.A.: Crisis, Sudden Change in Chaotic Attractors, and Transient Chaos. Physica 7D, 181-200, 1983.

Guckenheimer, J., Holmes, P.: Nonlinear Oscillations, dynamical systems, and bifurkations af vector fields. New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo: Springer-Verlag, 1983.

Fabricius-Bjerre, F.: Lærebog i geometri I, Polyteknisk Forlag, Lyngby, 1982.

Kaas-Petersen, C.: Chaos in a railway bogie. Acta Mechanika. 61, 89-107, 1986.

Kaas-Petersen, C.: PATH - user's guide, Tecnicl University of Denmark, Laboratory of Applied Mathematical Physics, Lyngby, Denmark, 1989.

Kalker, J.J.: Wheel-rail Rolling Contact Theory, Wear, 144, 243-261, 1991

Knudsen, C.: Personal Communication, March 1994.

Knudsen, C., Feldberg, R., True, H.: Bifurkations and Chaos in a rolling railwau wheelset, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 338, 445-469, 1992.

Matsumoto, T., Chua, L.O., Tokunaga, R.: Chaos Via Torus Breakdown, IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-34(3), 240-253, 1987.

Parker, T.S., Chua, L.O.: Practical Numerical Algoritms for Chaotic Systems, Springer Verlag, New York, 1989.

Petzold, L.: Automatic Selection of methods for solving stiff and nonstiff system of ordinary differential equations. SIAM J. SCI. STAT. COMPUT. 4, 136-148, 1983.

Schuster, H.G.: Deterministic Chaos, Second Revised Edition, VCH Verlagsgesellschaft, 1988.

Thomsen, J.M.T., Steward, H.B.: Nonlinear Dynamics and Chaos, John Wiley and Sons, Chichester, 1986.

True, H.: Some Recent Developments in Nonlinear Railway Vehicle Dynamics, 1st. European Nonlinear Oscillations Conference, Akademie Verlag, 1993.

Vermeulen, P.J., Johnson, K.L.: Contact of nonspherical elastic bodies transmitting tangential forces. J. Appl. Mech. 31, 338-340, 1964.

Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A.: Determining Lyapunov Exponents From A Time Series, Physica 16D, 285-317, 1985.

```

C SUBROUTINE FCN (T,X,F)
C IMPLICIT LOGICAL*4 (A-Z)
C REAL*8 SPEED,T,X(14),F(14),DUMPAR
C COMMON /PARAM/ SPEED,DUMPAR
C REAL*8 KSIX,KSIX,CRX,CRY,FTRACK
C REAL*8 MW,IWYAW,MF,IFROLL,IFYAW,DD1,DD2,K1,K2,K3,K4,K5,K6
C COMMON /SPRING/ MW,IWYAW,MF,IFROLL,IFYAW,DD1,DD2,K1,K2,K3,K4,K5,K6
C REAL*8 D1,D2,H1,H2
C COMMON /BOCHAR/ D1,D2,H1,H2
C REAL*8 GPIAB,MUN
C REAL*8 XX1,XX2,XX3,XX4,XX5,XX6
C COMMON /XX/ XX1,XX2,XX3,XX4,XX5,XX6
C REAL*8 PHI,PSI1,P,FACX,FACY
C COMMON /P1/ PHI,PSI1,P,FACX,FACY
C REAL*8 A,B,LAMDA,R0
C COMMON /P2/ A,B,LAMDA,R0
C REAL*8 TERM,FTERM,RTERM
C INTEGER NXYZ
C COMMON /KXYZ/ NXYZ
C IF (NXYZ.EQ.1) GO TO 10
C NXYZ=1
C ----- CONTACT AREA CHARACTERISTICS
C PHI = 0.60252900
C PSI1 = 0.54219000
C GPIAB= 6.5630D 06
C MUN = 1.0000D 04
C P = GPIAB/MUN
C FACX = GPIAB/PHI
C FACY = GPIAB/PSI1
C ----- BOGIE CHARACTERISTICS
C A = 0.716D 00
C B = 1.074D 00
C LAMDA= 0.05D 00
C R0 = 0.4572D 00
C D1= 0.620D 00
C D2= 0.680D 00
C H1=0.0762D 00
C H2=0.6584D 00
C H2=0.5267D 00
C ----- SPRING AND DAMPER-STIFFNESS
C MASSES AND INERTIALMOMENTS
C MW = 1022.0D 00
C IWYAW = 678.0D 00
C MF = 2918.0D 00
C IFROLL= 6780.0D 00
C IFYAW = 6780.0D 00
C DD1 = 20.00D 03

```

```

C DD2 = 29.20D 03
C K1 = 1.8230D 06
C K2 = 3.6460D 06
C K3 = 3.6460D 06
C K4 = 0.1823D 06
C K5 = 0.3333D 06
C K6 = 2.7100D 06
C XX2 = LAMDA/R0
C XX3 = 2.00D* K2*D1*D1
C XX4 = 4.00D* K3*D1*D1
C XX5 = 2.00D* K5*D2*D2
C XX6 = 2.00D*DD1*D2*D2
C ----- CREEP AND FLANGE FORCES FOR FRONT AXLE
C 10 XX1 = A/SPEED
C KSIX=X(2)/SPEED-X(3)
C KSIY=XX1*X(4)+XX2*X(1)
C CALL CREEPF(KSIX,KSIX,CRX,CRY)
C CALL FLANGF(X(1),FTRACK)
C F( 2)= 2.00D*CRX+FTRACK
C F( 4)= 2.00D*A*CRY
C ----- CREEP AND FLANGE FORCES FOR REAR AXLE
C KSIX=X(6)/SPEED-X(7)
C KSIY=XX1*X(8)+XX2*X(5)
C CALL CREEPF(KSIX,KSIX,CRX,CRY)
C CALL FLANGF(X(5),FTRACK)
C F( 6)= 2.00D*CRX+FTRACK
C F( 8)= 2.00D*A*CRY
C ----- LINEAR SPRING AND DAMPER TERMS
C FTERM = 2.00D*K1*(X(1)-X(9))-B*X(11)-H1*X(13))
C RTERM = 2.00D*K1*(X(5)-X(9)+B*X(11)-H1*X(13))
C F( 2) = F( 2)+ FTERM
C F( 6) = F( 6) + RTERM
C F(10) = - FTERM- RTERM
C F(12) = - B*FTERM+ B*RTERM
C F(14) = -H1*FTERM-H1*RTERM
C FTERM = XX3*(X(3)-X(11))
C RTERM = XX3*(X(7)-X(11))
C F( 4) = F( 4)+FTERM
C F( 8) = F( 8) +RTERM
C F(12) = F(12)-FTERM-RTERM
C F(12) = F(12)+ K6*X(11)
C F(14) = F(14)+XX4*X(13)+XX5*X(13)+XX6*X(14)
C TERM = 2.00D*K4*(X(9)-H2*X(13))+2.00D*DD2*(X(10)-H2*X(14))
C F(10) = F(10)+ TERM
C F(14) = F(14)-H2*TERM
C ----- FUNCTION VALUES CAN BE COMPUTED
C F( 1) = X( 2)
C F( 2) = -F( 2)/MW
C F( 3) = X( 4)

```

F(4) =-F(4)/1WYAM
F(5) = X(6)
F(6) =-F(6)/MM
F(7) = X(8)
F(8) =-F(8)/1WYAM
F(9) = X(10)
F(10) =-F(10)/MF
F(11) = X(12)
F(12) =-F(12)/1FYAM
F(13) = X(14)
F(14) =-F(14)/1FROLL

C
RETURN
END

```
C SUBROUTINE CREEPF (KSIX,KSIXY,FX,FY)
C -----KONTROLLER PHI OG PSI1.-----
C IMPLICIT LOGICAL*4 (A-Z)
C REAL*8 KSIX,KSIXY,FX,FY
C
C REAL*8 HFCN,U
C REAL*8 PHI,PSI1,P,FACX,FACY
C COMMON /P1/ PHI,PSI1,P,FACX,FACY
C
C ----- LINEAR CREEP FORCES ARE DEFINED HERE. ONLY TO BE
C USED UNDER SPECIAL CIRCUMSTANCES
C
C FX=FACX*KSIX
C FY=FACY*KSIXY
C RETURN
C
C ----- NONLINEAR CREEP FORCES. THESE EXPRESSIONS SHOULD
C BE USED UNDER ORDINARY CONDITIONS
C
C U=P*DSQRT((KSIX/PHI)**2+(KSIXY/PSI1)**2)
C
C ----- FUNCTION TO BE USED AT HOPF BIFURCATION
C
C IF (U.LE.1.0D-5) HFCN= 1.0D0
C IF (U.GT.1.0D-5) HFCN= DTANH(U)/U
C
C ----- FUNCTION TO BE USED AT PERIODIC SOLUTION
C
C IF (U.LT.3.0D00) HFCN= 1.0D0-U/3.0D0*(1.0D0-U/9.0D0)
C IF (U.GE.3.0D00) HFCN= 1.0D0/U
C
C FX=FACX*KSIX*HFCN
C FY=FACY*KSIXY*HFCN
C
C RETURN
C END
```

A4

```
C SUBROUTINE FLANGF (X,F)
C IMPLICIT LOGICAL*4 (A-Z)
C REAL*8 X,XPOS,F
C INTEGER IFLANG
C COMMON /KFLANG/ IFLANG
C REAL*8 DELTA,KO
C DATA DELTA/0.0091D+00/, KO/14.60D+06/
C F=0.00D0
C IF (IFLANG.EQ.0) RETURN
C XPOS=DABS(X)
C IF (XPOS.LE.DELTA) RETURN
C F=KO*(XPOS-DELTA)
C IF (X.LT.0.00D0) F=-F
C RETURN
C END
```

A5

SUBROUTINE DUMJAC (T,X,DF)

REAL*8 T,X,DF(1,1)

RETURN

END

```

PROGRAM BIFUR
C IMPLICIT NONE
C
C EXTERNAL FCN,DUMJAC
C
C INTEGER N, IRWORK, IW
C PARAMETER (N=14,IRWORK=400,IW=1500)
C
C INTEGER IJAC,INDEX,JCASE,JBIF,JSTOP,IX0,INP,IER,I,K,NINT
C REAL*8 TPER,TD,TEAD,TSTOP
C REAL*8 X(N+2),X0(N),NP(N+2),TP(N+2),TL(N+2),W(IW)
C COMPLEX*16 LAMDA
C
C ===== bifur erklæring =====
C INTEGER ISPEED,IPUNKT,ITEST,II,FLADELOK
C REAL*8 TSTEP,TSTEPSTART,TOLD,POINTOL,XTEMP(N)
C =====
C
C INTEGER IODE,LRW TOL,RWORK(IRWORK)
C REAL*8 /EOSOL/ IODE,LRW,TOL,RWORK
C COMMON /EOSOL/ IODE,LRW,TOL,RWORK
C
C INTEGER ITZ
C REAL*8 EPSZ,HZ
C COMMON /ZPAR/ EPSZ,HZ,ITZ
C
C INTEGER ITG
C REAL*8 EPSG,HG
C COMMON /GPAP/ EPSG,HG,ITG
C
C INTEGER ITR
C REAL*8 EPSR,HR
C COMMON /PMAPC/ EPSR,HR,ITR
C
C INTEGER HMIN,HP,HMAX,FACINC,FACDEC
C REAL*8 HMIN,HP,HMAX,FACINC,FACDEC,ITP,NSTEP
C COMMON /PPAR/ HMIN,HP,HMAX,FACINC,FACDEC,ITP,NSTEP
C
C INTEGER NQUA
C COMMON /QUASI/ NQUA
C
C INTEGER IFLANG
C COMMON /KFLANG/IFLANG
C
C INTEGER NXYZ
C COMMON /KXYZ/ NXYZ
C
C REAL*8 SPEED,DUMPAR
C COMMON /PARAM/ SPEED,DUMPAR
C
C * Parametre til EOSOL.L|sning af ODL og allokering af lagerplads *
C IODE = 2
C TOL = 1.0D-9
C LRW = IRWORK
C IW = 800 (Sættes i parameterlisten)
C
C * Parametre til GPAP. Lokalisering af bifurkationspunkt *
C EPSG = 1.0D-7
C HG = 1.0D-4
C ITG = 10
C
C * Parametre til ZPAR. Nulpunktsl|ser (Newtons metode) *

```

```

EPSZ = 1.0D-8
HZ = 1.0D-5
ITZ = 10
* Parametre til PPAR. Kontrol af skridtl|ngde *
HMIN = 1.0D-6
HP = 0.05D0
HMAX = 5.0D0
FACINC = 2.5D0
FACDEC = 0.5D0
ITP = 10
NSTEP = 50
* Parametre til PMAPC. Kontrol af Poincare-hyperflade *
EPSR = 1.0D-9
ITR = 10
HR = 1.0D-4
* Nulstil dummy-parameter *
X(16) = 0D0
TP(16) = 0D0
NP(16) = 0D0
TL(16) = 0D0
* Anvend model med flanger *
IFLANG = 1
* Jacobi-matricen angives ikke eksplicit *
IJAC = 2
WRITE(6,5)
5 FORMAT(1X,80('=')/15X,'PROGRAM: CXBOG'/
& 15X,'WHEEL-RAIL FORCE: JOHNSON'/
& 15X,'WITH FLANGE CONTACT'/)
50 FORMAT(1X,5E25.18,110.6)
51 FORMAT(1X,3E20.10,110.8)
54 FORMAT(1X,2E25.18)
C
C OPEN(10,FILE='bifur4.dat')
C OPEN(11,FILE='bifur4.dat.test')
C
C SPEED = -2033690000000000E+03
C X( 1) = .5577088245010521D-02
C X( 2) = -1035206430316955D+00
C X( 3) = -.5763845937569531D-02
C X( 4) = -.6444122507059742D+00
C X( 5) = .111279090263590D-01
C X( 6) = -.2314932052828132D+00
C X( 7) = -.3743595456377085D-02
C X( 8) = -.5766303919041086D+00
C X( 9) = -.7918076415831192D-02
C X(10) = -.8276493679042756D-01
C X(11) = -.3869648983137248D-02
C X(12) = -.6263872548487863D+00
C X(13) = -.5027230315001376D-02
C X(14) = -.1657739526573330D+00
C
C bifurkationsdiagrammer for stabile loesninger oenskes bestemt
C
C initialiser
C TSTEPSTART = 1.0D-03
C POINTOL = 1.0D-09
C
C Transient fjernes

```



```

T      = 0.000
TEND  = 5000.00
INDEX = 1
CALL ODEX(FCN,DUMJAC,IJAC,N,T,X,TEND,INDEX,IER)
IF (INDEX.NE.2) WRITE(6,*) INDEX

C      speed optaelies
C      DO ISPEED = 1,500

C      Transient fjernes
C      T      = 0.0D+00
C      TEND = 50.0D+00
C      INDEX = 1
C      CALL ODEX(FCN,DUMJAC,IJAC,N,T,X,TEND,INDEX,IER)
C      WRITE(6,*) 'trans fjernet'

C      T      = 0.0D0
C      TEND = TSTEPSTART
C      INDEX = 1

C      udskriv IPUNKT punkter til fil
C      DO IPUNKT = 1,100

C      FLADELOK = 0
C      ITEST  = 0
C      TSTEP  = TSTEPSTART

C      Poincare flade lokaliseres
C      DO WHILE (FLADELOK.NE.1)
C          WRITE(6,*) 'whileloekke ',ITEST

C      X og T gemmes; hvis der integreres for langt
C      DO II = 1,N
C          XTEMP(II) = X(II)
C      END DO
C      TOLD = T

C      INDEX = 1
C      CALL ODEX(FCN,DUMJAC,IJAC,N,T,X,TEND,INDEX,IER)
C      ITEST = ITEST+1

C      ***** check om Poincare flade er naaet
C      IF (((X(4) .LT. POINTOL) .AND.
C          (X(4) .GT. -POINTOL) .AND.
C          (X(3) .GE. 0.0D00 ) ) THEN

C          udskriv punkt paa Poincare flade
C          WRITE(10,51) SPEED,X(3),X(4),ITEST

C      Videre til naeste punkt
C      FLADELOK = 1

C      END IF
C      *****

C      WRITE( 6,50) T,TEND,XTEMP(4),X(4),X(3),ITEST
C      WRITE(11,50) T,TEND,XTEMP(4),X(4),X(3),ITEST

C      bisektion benyttes til at bestemme TEND
C      IF (((XTEMP(4)*X(4)).LT. 0.0D+00) .AND.
C          (X(3) .GT. 0.0D+00)) THEN

C          WRITE( 6,*) 'bisektion/'
C          WRITE(11,*) 'bisektion/'

```

```

C      saet X og T til gamle vaerdier
C      DO II =1,N
C          X(II) = XTEMP(II)
C      END DO
C      T = TOLD

C      halver steplaengde
C      TSTEP = TSTEP*0.5D+00
C      TEND = T + TSTEP

C      vi er endnu ikke forbi X(4) = 0
C      ELSE
C          TEND = TEND + TSTEP
C      END IF

C      WRITE(11,54) T,TEND

C      naar Poincareflade er naaet, tages nu et stoerre tidsskridt
C      IF (FLADELOK.EQ.1) THEN
C          TEND = TEND + 0.2D+00
C          TSTEP = TSTEPSTART
C      END IF

C      end while FLADELOK; poincare flade lokaliseret, punkt udskrevet
C      END DO

C      end IPUNKT punkter udskrevet
C      END DO

C      optael SPEED
C      SPEED = SPEED+1.1D-04

C      end SPEED
C      END DO

C      =====
C      CLOSE(10)
C      CLOSE(11)

C      END

```

B2

```

PROGRAM LYAP
C
C IMPLICIT NONE
C
EXTERNAL FCN,DUMJAC
C
INTEGER N, IRWORK, IW
PARAMETER (N=14,IRWORK=400,IW=1500)
C
INTEGER IJAC,INDEX,JCASE,JBIF,JSTOP,IXO,INP,IER,I,K,NINT
REAL*8 TPER,T,DT,TEND,TSTOP
REAL*8 X(N*2),X0(N),NP(N*2),TP(N*2),TL(N*2),W(IW)
COMPLEX*16 LAMDA
C
===== erklæring til lyap =====
C
INTEGER LYAPN
PARAMETER (LYAPN = 4)
C
INTEGER IL,JL,NL,ICOUNT,MAXICOUNT
INTEGER STOPKRITERIUM,OPSUMSTART
C
REAL*8 TOLD,TENDOLD
REAL*8 EPS,S(0:LYAPN,N),V(LYAPN,N),E(LYAPN,N)
REAL*8 LYAPEXPOLD(LYAPN),LYAPEXP(LYAPN)
REAL*8 ABSV(LYAPN),SUM(LYAPN),STEMP(N)
REAL*8 VPDR,SKALAR,LYAPSUM,TSTEP
REAL*8 STOPA,STOPB,STOPC,ER,EA
=====
C
INTEGER IODE,LRW
REAL*8 TOL,RWORK(IRWORK)
COMMON /EGSOL/ IODE,LRW,TOL,RWORK
C
INTEGER ITZ
REAL*8 EPSZ,HZ
COMMON /ZPAR/ EPSZ,HZ,ITZ
C
INTEGER ITG
REAL*8 EPSG,HG
COMMON /GPAP/ EPSG,HG,ITG
C
INTEGER ITR
REAL*8 EPSR,HR
COMMON /PMAPC/ EPSR,HR,ITR
C
INTEGER ITP,NSTEP
REAL*8 HMIN,HP,HMAX,FACINC,FACDEC
COMMON /PPAR/ HMIN,HP,HMAX,FACINC,FACDEC,ITP,NSTEP
C
INTEGER NQUA
COMMON /QUAST/ NQUA
C
INTEGER IFLANG
COMMON /KFLANG/ IFLANG
C
INTEGER NXYZ
COMMON /KXYZ/ NXYZ
C
REAL*8 SPEED,DUMPAR
COMMON /PARAM/ SPEED,DUMPAR
C
C * Parametre til EQSOL.l]sning af ODL og allokering af lagerplads *
C IODE = 2
C TOL = 1.0D-9
C LRW = IRWORK
C IW = 800 (s]ttes i parameterlisten)
C
C * Parametre til GPAR. Lokalisering af bifurkationspunkt *
C EPSG = 1.0D-7
C HG = 1.0D-4
C ITG = 10
C
C * Parametre til ZPAR. Nulpunktsl]ser (Newtons metode) *
C EPSZ = 1.0D-8
C HZ = 1.0D-5
C ITZ = 10
C
C * Parametre til PPAR. Kontrol af skridtl]ngde *
C HMIN = 1.0D-6
C HP = 0.05D0
C HMAX = 5.D0
C FACINC = 2.5D0
C FACDEC = 0.5D0
C ITP = 10
C NSTEP = 50
C
C * Parametre til PMAPC. Kontrol af Poincare-hyperflade *
C EPSR = 1.0D-9
C ITR = 10
C HR = 1.0D-4
C
C * Nulstil dummy-parameter *
C X(16) = 0D0
C TP(16) = 0D0
C NP(16) = 0D0
C TL(16) = 0D0
C
C * Anvend model med flanger *
C IFLANG = 1
C
C * Jacobi-matricen angives ikke eksplicit *
C IJAC = 2
C
WRITE(6,5)
5 FORMAT(1X,80('=')/15X,'PROGRAM: CXBOG'/
& 15X,'WHEEL-RAIL FORCE: JOHNSON'/
& 15X,'WITH FLANGE CONTACT'/)
C
C SPEED = -2500000000000D+03
C X( 1) = -1725109703007659D-01
C X( 2) = -6241612120563905D+00
C X( 3) = -2401057459516320D-01
C X( 4) = -407952057076166D-01
C X( 5) = -6437528283115539D-02
C X( 6) = -4817844523374209D+00
C X( 7) = -2484518982003773D-01
C X( 8) = -1706902842690236D+00
C X( 9) = -6584520678443227D-02
C X(10) = -7311640609267700D-01
C X(11) = -1782189929787354D-01
C X(12) = -2130967162181614D+00
C X(13) = -6119573417663479D-02
C X(14) = -9588920967158022D-01
C
C Udregner de LYAPN stoerste lyapunoveksponenter for FCN
C
C OPEN(10,FILE='lyap250.dat')
C OPEN(11,FILE='lyap250.skalar')

```



```

C      END DO
C      END DO
C      END IF
C      bestem 'perturbationsbasis': V
C      DO IL = 1,LYAPN
C      DO JL = 1,N
C      V(IL,JL) = EPS*E(IL,JL)
C      END DO
C      END DO
C      begynd SUM() opsummering efter OPSUMSTART orthonormaliseringer
C      IF (ICOUNT .GT. OPSUMSTART) THEN
C      DO IL = 1,LYAPN
C      SUM(IL) = SUM(IL)+LOG(ABS(V(IL)/EPS))
C      WRITE(6,*) 'sumloop ',IL
C      saet S(IL,JL) lig S(0,IL)+perturbation
C      DO JL = 1,N
C      S(IL,JL) = S(0,JL)+V(IL,JL)
C      END DO
C      END DO
C      Lyapunov eksponenternes vaerdi gemmes
C      DO IL = 1,LYAPN
C      LYAPEXPOLD(IL) = LYAPEXP(IL)
C      END DO
C      Lyapunov eksponenternes vaerdi bestemmes
C      DO IL = 1,LYAPN
C      LYAPEXP(IL) = SUM(IL)/((ICOUNT-OPSUMSTART)*TSTEP)
C      END DO
C      Lyapunov eksponenternes sum bestemmes
C      LYAPSUM = 0.0D+00
C      DO IL = 1,LYAPN
C      LYAPSUM = LYAPSUM+LYAPEXP(IL)
C      END DO
C      evaluer stopkriterium
C      STOPA = 0.0D+00
C      STOPB = 0.0D+00
C      STOPC = 0.0D+00
C      DO IL = 1,LYAPN
C      STOPA = LYAPEXPOLD(IL)-LYAPEXP(IL)
C      STOPB = STOPB+STOPA*STOPA
C      STOPC = STOPC+LYAPEXP(IL)*LYAPEXP(IL)
C      END DO
C      STOPB = SQRT(STOPB)
C      STOPC = SQRT(STOPC)
C      udskriv hver 10. gang SPEED,LYAPEXP og check: LYAPSUM OG ICOUNT
C      IF (MOD(ICOUNT,10) .EQ. 0) THEN
C      WRITE(10,700) ICOUNT,T,SPEED
C      DO IL = 1,LYAPN
C      WRITE(10,701) LYAPEXP(IL)
C      END DO
C      WRITE(10,702) LYAPSUM
C      END IF
C      END IF
C      ICOUNT = ICOUNT+1
C      end udregning af Lyapunov eksponenter
C      END DO

```

```

C
C
C      FORMAT(1X,E10.5,2E25.15,I10.8)
C      FORMAT(11E25.15)
C      FORMAT(6X,'icount = ',I10.6,'skalarprodukt = ',E20.12)
C      FORMAT(1X,'integration af seejlevektor nr ',I2,' TSTART = ',
C      E20.12,' TEND = ',E20.12)
C
C      700 FORMAT(1X,3E20.12,NN)
C      701 FORMAT(E20.12,NN)
C      702 FORMAT(E20.12)
C      end SPEED loop
C
C      CLOSE(10)
C      CLOSE(11)
C      END

```

```

PROGRAM MAP
IMPLICIT NONE
EXTERNAL FCN, DUMJAC
INTEGER N, IRWORK, IW
PARAMETER (N=14, IRWORK=400, IW=1500)
INTEGER IJAC, INDEX, JCASE, JBIIF, JSTOP, IX0, INP, IER, I, K, NINT
REAL*8 TPER, T, DT, TEND, TSTOP
REAL*8 X(N+2), XO(N), NP(N+2), TP(N+2), TL(N+2), W(IW)
COMPLEX*16 LAMDA
=====
map erklæring =====
INTEGER ISPEED, IPUNKT, ITEST, II, FLADELOK
REAL*8 TSTEP, TSTEPSTART, TOLD, POINTOL, XTEMP(N)
=====
INTEGER IODE, LRW
REAL*8 IODE, LRW, TOL, RWORK
COMMON /EGSOL/ IODE, LRW, TOL, RWORK
INTEGER ITZ
REAL*8 EPSZ, HZ
COMMON /ZPAR/ EPSZ, HZ, ITZ
INTEGER ITG
REAL*8 EPSG, HG
COMMON /GPAR/ EPSG, HG, ITG
INTEGER ITR
REAL*8 EPSR, HR
COMMON /PMAPC/ EPSR, HR, ITR
INTEGER ITP, NSTEP
REAL*8 HMIN, HP, HMAX, FACINC, FACDEC
COMMON /PPAR/ HMIN, HP, HMAX, FACINC, FACDEC, ITP, NSTEP
INTEGER NQUA
COMMON /QUASI/ NQUA
INTEGER IFLANG
COMMON /KFLANG/ IFLANG
INTEGER NXYZ
COMMON /KXYZ/ NXYZ
REAL*8 SPEED, DUMPAR
COMMON /PARAM/ SPEED, DUMPAR
* Parametre til EGSOL.L | sning af ODL og allokering af lagerplads *
IODE = 2
TOL = 1.0D-9
LRW = IRWORK
IW = 800 (sættes i parameterlisten)
* Parametre til GPAR. Lokalisering af bifurkationspunkt *
EPSG = 1.0D-7
HG = 1.0D-4
ITG = 10
* Parametre til ZPAR. Nulpunktsl | ser (Newtons metode) *

```

```

EPSZ = 1.0D-8
HZ = 1.0D-5
ITZ = 10
* Parametre til PPAR. Kontrol af skridtlængde *
HMIN = 1.0D-6
HP = 0.05D0
HMAX = 5.0D0
FACINC = 2.5D0
FACDEC = 0.5D0
ITP = 10
NSTEP = 50
* Parametre til PMAPC. Kontrol af Poincare-hyperflade *
EPSR = 1.0D-9
ITR = 10
HR = 1.0D-4
* Nulstil dummy-parameter *
X(16) = 0D0
TP(16) = 0D0
NP(16) = 0D0
TL(16) = 0D0
* Anvend model med flanger *
IFLANG = 1
* Jacobi-matricen angives ikke eksplicit *
IJAC = 2
WRITE(6,5)
5 FORMAT('X,80(=)/15X,PROGRAM: CXBOG'/
& '15X,WHEEL-RAIL FORCE: JOHNSON'/
& '15X,WITH FLANGE CONTACT'/)
SPEED = .2038020000000000D+03
X( 1) = .1725109703007659D-01
X( 2) = .6241612120563905D+00
X( 3) = .2401057459516320D-01
X( 4) = -.4079752057076166D-01
X( 5) = -.6437528283115539D-02
X( 6) = .4817844523374209D+00
X( 7) = .2484518982003773D-01
X( 8) = -.1706902842690236D+00
X( 9) = .6584520678443227D-02
X(10) = .7311640609267700D-01
X(11) = .1782189929787354D-01
X(12) = -.2130967162181614D+00
X(13) = .6119573417663479D-02
X(14) = .9588920967158022D-01
return maps oenskes bestemt
OPEN(10, FILE='map802.dat')
OPEN(11, FILE='map802.dat.x')
initialiser
TSTEPSTART = 1.0D-03
POINTOL = 1.0D-09
Transient fjernes
T = 0D00
TEND = 1000D00
INDEX = 1

```

B9

```

CALL ODEX(FCN,DUMJAC,IJAC,N,T,X,TEND,INDEX,IER)
IF (INDEX.NE.2) WRITE(6,*) INDEX
C
C
udskriv X(IPUNKT) til fil
WRITE(11,352) SPEED
DO IPUNKT = 1,N
  WRITE(11,353) II,X(IPUNKT)
END DO
C
T = 0.000
TSTEP = TSTEPSTART
TEND = T+TSTEP
C
C
udskriv IPUNKT punkter til fil
DO IPUNKT = 1,1000
C
  FLADELOK = 0
  ITEST = 0
C
  Poincare flade lokaliseres
  DO WHILE (FLADELOK.NE.1)
    WRITE(6,*) 'whileloekke ',ITEST
    C
    C
    X og T gemmes; hvis der integreres for langt
    DO II = 1,N
      XTEMP(II) = X(II)
    END DO
    TOLD = T
  C
  INDEX = 1
  CALL ODEX(FCN,DUMJAC,IJAC,N,T,X,TEND,INDEX,IER)
  ITEST = ITEST+1
C
  ***** check om Poincare flade er naaet
  IF (((X(4).LT. POINTOL) .AND.
    (X(4).GT. -POINTOL)) .AND.
    (X(3).GE. 0.0000 )) THEN
C
    udskriv punkt paa Poincare flade
    IF (IPUNKT.EQ.1) THEN
      WRITE(10,350) X(3)
    END IF
  C
  IF (MOD(IPUNKT,1).EQ.0) THEN
    WRITE(10,351) X(3),X(5)
  END IF
C
  Videre til naeste punkt
  FLADELOK = 1
C
  END IF
  *****
C
  bisektion benyttes til at bestemme TEND
  IF (((XTEMP(4)*X(4)).LT. 0.00+00) .AND.
    ( X(3).GT. 0.00+00) .AND.
    ( FLADELOK.NE.1 )) THEN
    2
    3
C
  saet X og T til gamle vaerdier
  DO II =1,N
    X(II) = XTEMP(II)
  END DO
  T = TOLD
C

```

```

C
C
halver steplaengde
TSTEP = TSTEP*0.5D+00
TEND = T + TSTEP
C
C
vi er endnu ikke forbi X(4) = 0
ELSE
  TEND = TEND + TSTEP
END IF
C
naar Poincareflade er naaet, tages nu et stoerre tidsskridt
IF (FLADELOK.EQ.1) THEN
  TSTEP = TSTEPSTART
  TEND = TEND+0.18D+00
END IF
C
end while FLADELOK; poincare flade lokaliseret, punkt udskrevet
END DO
C
end IPUNKT punkter udskrevet
END DO
C
C
=====
350 FORMAT(E25.15,NN)
351 FORMAT(E25.15/E25.15,NN)
352 FORMAT(6X,'SPEED =',D26.16)
353 FORMAT(6X,'X(',I2,') =',D26.16)
C
CLOSE(10)
CLOSE(11)
C
END

```

BT


```

C transient fjernes
C
T = 0000
TEND = 1000D00
INDEX = 1
CALL ODEX(FCN,DUMJAC,IJAC,N,T,X,TEND,INDEX,IER)
IF (INDEX.NE.2) WRITE(6,*) INDEX

C
C udskriv X(II) til fil
WRITE(11,52) SPEED
DO II = 1,N
  WRITE(11,53) II,X(II)
END DO

C
T = 0.0D0
TEND = TSTEP
INDEX = 1

C
C Udskriv IPUNKT punkter til fil
DO II = 1,IPUNKT

C
CALL ODEX(FCN,DUMJAC,IJAC,N,T,X,TEND,INDEX,IER)

C
C udskriv punkt
WRITE(10,51) SPEED,T,X( 1),X( 3),
  X(5),X(7),X(9),X(11),X(13)

C
C del af tidsserie ønskes udskrevet
IF (X(3) .GT. TOP) THEN
  WRITE(10,51) T,X(3)
END IF

C
TEND = TEND+TSTEP

C
C end II; IPUNKT punkter udskrevet
END DO

C
CLOSE(11)
CLOSE(10)

C
END

```



```

PROGRAM PATHMAIN_L
IMPLICIT NONE
EXTERNAL FCN,DUMJAC
INTEGER N, IRWORK, IW
PARAMETER (N=14,IRWORK=400,IW=1500)
INTEGER IJAC,INDEX,JCASE,JBIF,JSTOP,IX0,INP,IER,I,K,NINT
REAL*8 TPER,T_DT,TEND,TSTOP
REAL*8 X(N+2),XO(N),NP(N+2),TP(N+2),TL(N+2),W(IW)
COMPLEX*16 LAMDA

INTEGER IODE,LRW
REAL*8 IODE,LRW,TOL,RWORK(IRWORK)
COMMON /EQSOL/ IODE,LRW,TOL,RWORK

INTEGER ITZ
REAL*8 EPSZ,HZ
COMMON /ZPAR/ EPSZ,HZ,ITZ

INTEGER ITG
REAL*8 EPSG,HG
COMMON /GPAR/ EPSG,HG,ITG

INTEGER ITR
REAL*8 EPSR,HR
COMMON /PMAPC/ EPSR,HR,ITR

INTEGER ITP,NSTEP
REAL*8 HMIN,HP,HMAX,FACINC,FACDEC
COMMON /PPAR/ HMIN,HP,HMAX,FACINC,FACDEC,ITP,NSTEP

INTEGER NQUA
COMMON /QUASI/ NQUA

INTEGER IFLANG
COMMON /KFLANG/IFLANG

INTEGER NXYZ
COMMON /KXYZ/ NXYZ

REAL*8 SPEED,DUMPAR
COMMON /PARAM/ SPEED,DUMPAR

* Parametre til Eqsol.L |sning af ODL og allokering af lagerplads *
IODE = 2
TOL = 1.0D-9
LRW = IRWORK
IW = 800 (S|ttes i parameterlisten)

* Parametre til GPAR. Lokalisering af bifurkationspunkt *
EPSG = 1.0D-7
HG = 1.0D-4
ITG = 50

* Parametre til ZPAR. Nulpunkts|sner (Newtons metode) *
EPSZ = 1.0D-8
HZ = 1.0D-5
ITZ = 50

* Parametre til PPAR. Kontrol af skridtl|ngde *

```

```

HMIN = 1.0D-06
HP = 1.0D-03
HMAX = 1.0D-02
FACINC = 1.25D+0
FACDEC = 0.25D+0
ITP = 50
NSTEP = 50
C
C * Parametre til PMAPC. Kontrol af Poincare-hyperflade *
EPSR = 1.0D-9
ITR = 50
HR = 1.0D-4
C
C * Nulstil dummy-parameter *
X(16) = 0D0
TP(16) = 0D0
NP(16) = 0D0
TL(16) = 0D0
C
C * Anvend model med flanger *
IFLANG = 1
C
C * Jacobi-matricen angives ikke eksplicit *
IJAC = 2
C
C
OPEN(6,FILE='path11_1.dat')
OPEN(6,FILE='path11_1.dat.l')
WRITE(6,5)
5 FORMAT(1X,80('=')/15X,'PROGRAM: CXBOG'/
& 15X,'WHEEL-RAIL FORCE: JOHNSON'/
& 15X,'WITH FLANGE CONTACT'/)
50 FORMAT(1X,E10.5,E25.15,E25.15,E25.15)
C
SPEED = .203789000000000000E+03
X( 1) = -.6147798211294605D-02
X( 2) = -.5997671058405986D+00
X( 3) = -.2110601776766611D-01
X( 4) = -.2379637051811030D+00
X( 5) = .9235412184630082D-02
X( 6) = -.5601415412223362D+00
X( 7) = -.2328815437680192D-01
X( 8) = -.2089870190897509D+00
X( 9) = -.5403896398904372D-02
X(10) = -.1791790462313541D+00
X(11) = -.1768821600148964D-01
X(12) = -.1235656202623453D+00
X(13) = -.5950986905951064D-02
X(14) = -.1023791413633533D+00
TPER = 2.44975623674D+00
C
C *** fjern transient ***
T = 0.0D0
TEND = 1000.00D0
INDEX= 1
CALL ODEX(FCN,DUMJAC,IJAC,N,T,X,TEND,INDEX,IER)
C
C *** F|lg periodisk |sning i V=203.789 for aftagende hastighed ***
JCASE = 2
JBIF = 0
JSTOP = 0
INP = 0

```

C
DO K=1, N
NP(K) = 0D0
TP(K) = 0D0
END DO

C
DO K=1, N
TP(K) = 0.0D+00
END DO
TP(15) = -1.0D+00

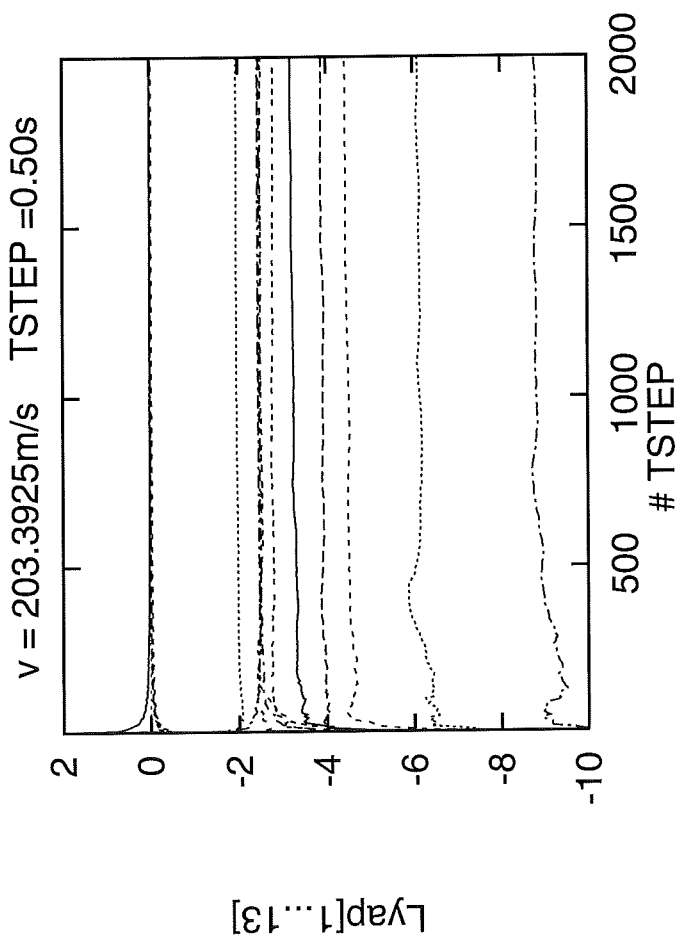
C
CALL PATH(FCN,DUMJAC,N,IJAC,X,TPER,NP,INP,TP,TL,LAMDA,
& JCASE,JSTOP,JBIF,IER,W,IW)

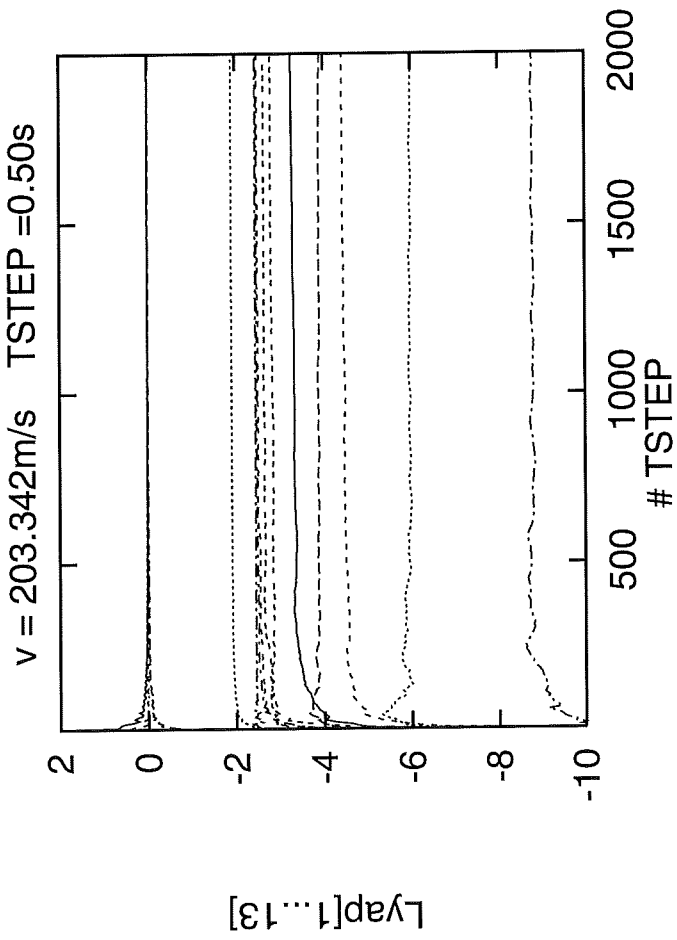
C
CLOSE(6)
CLOSE(7)

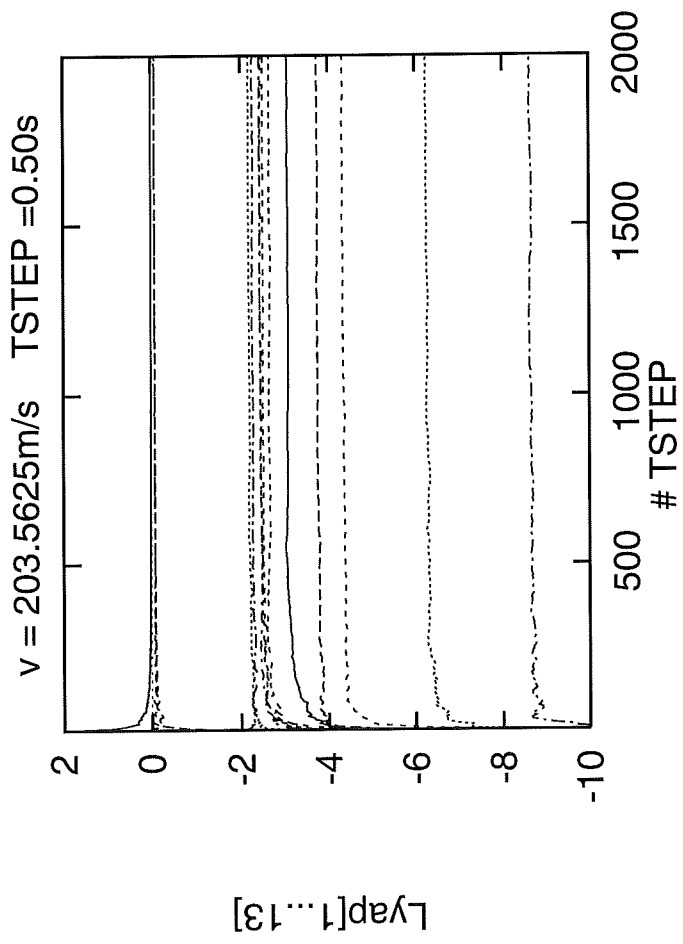
C
END

B11

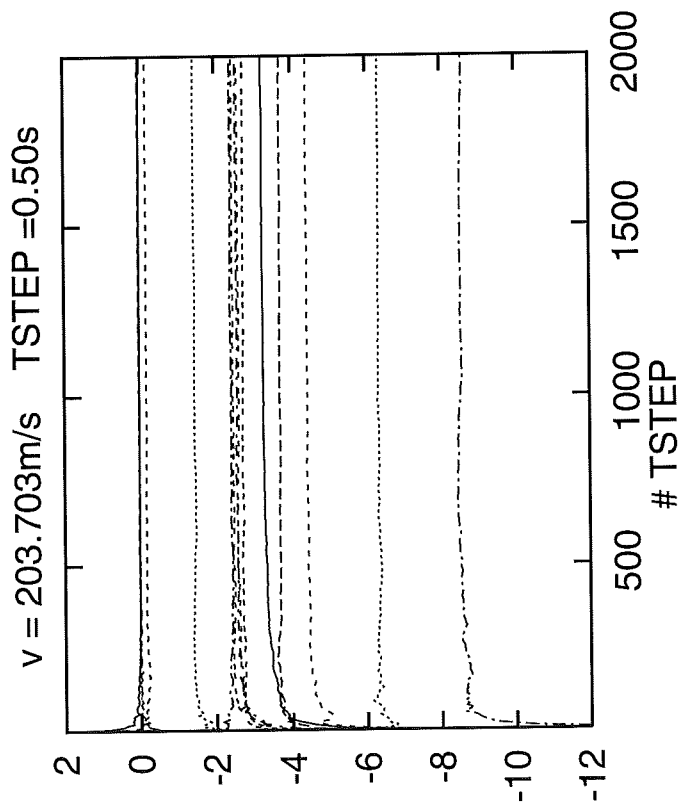
U





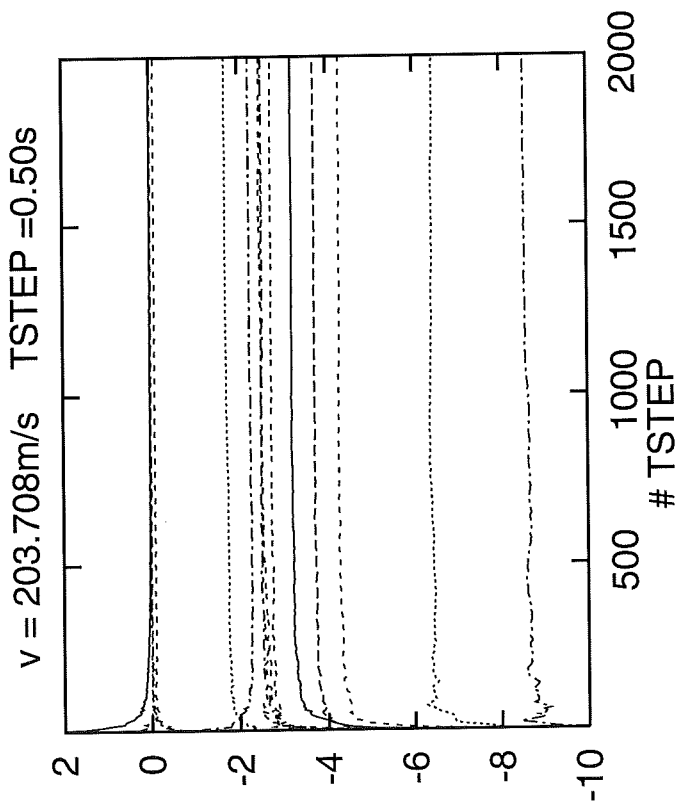


C4

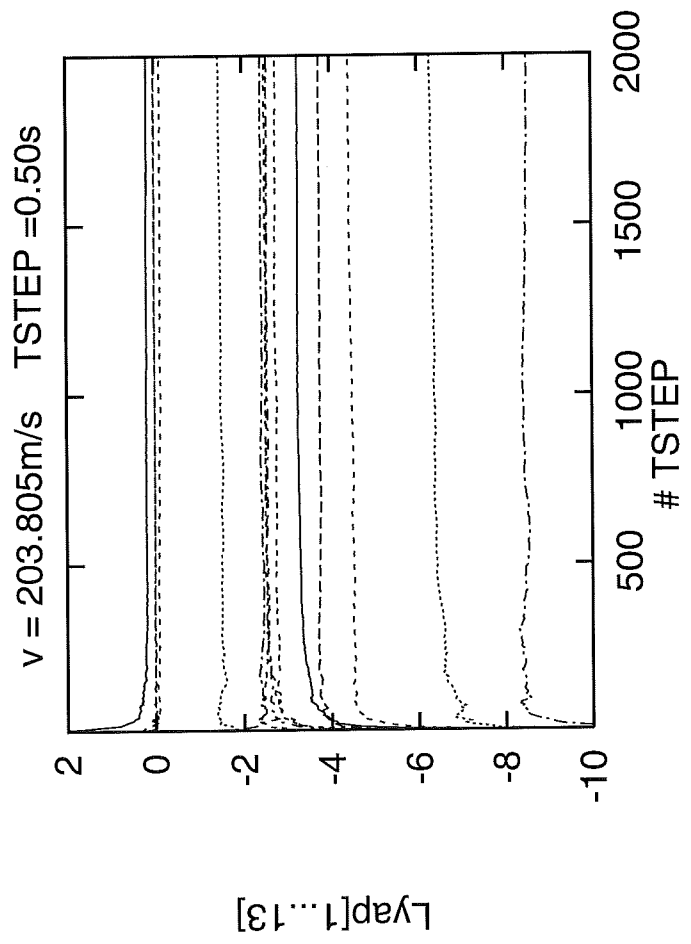


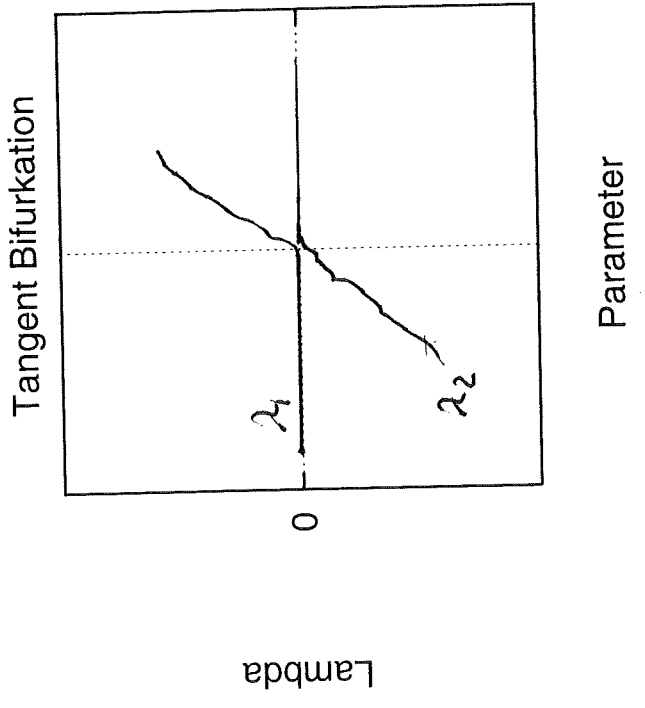
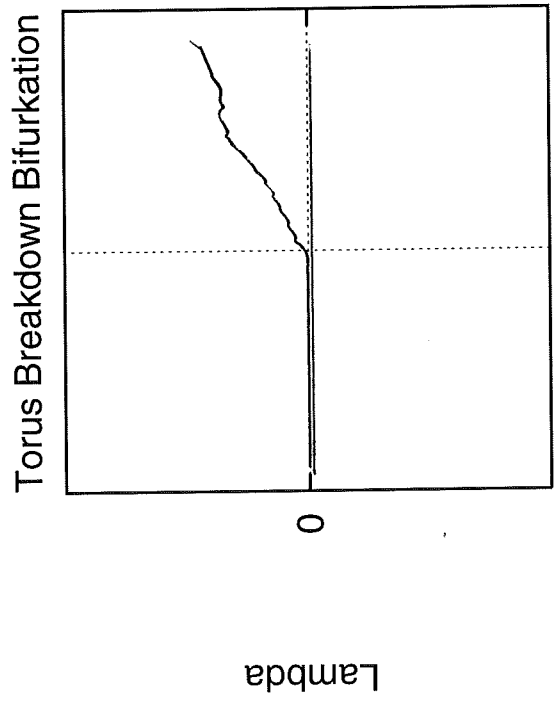
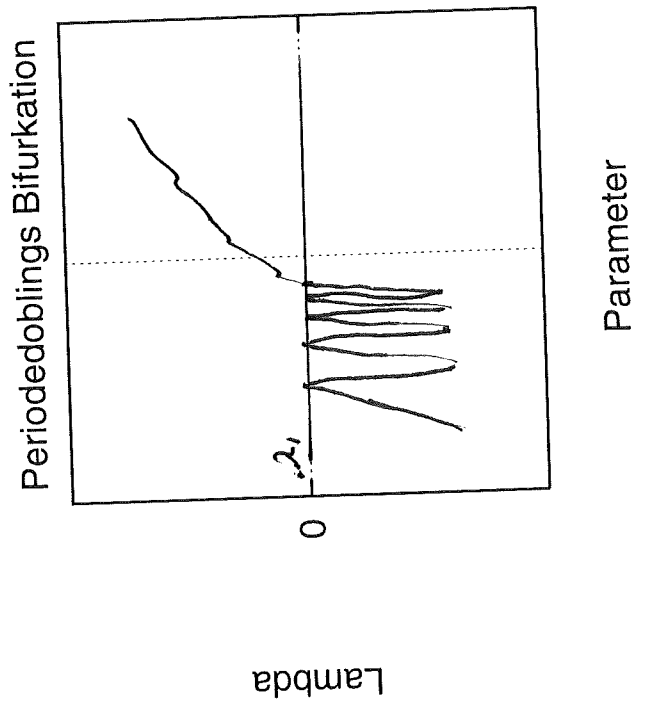
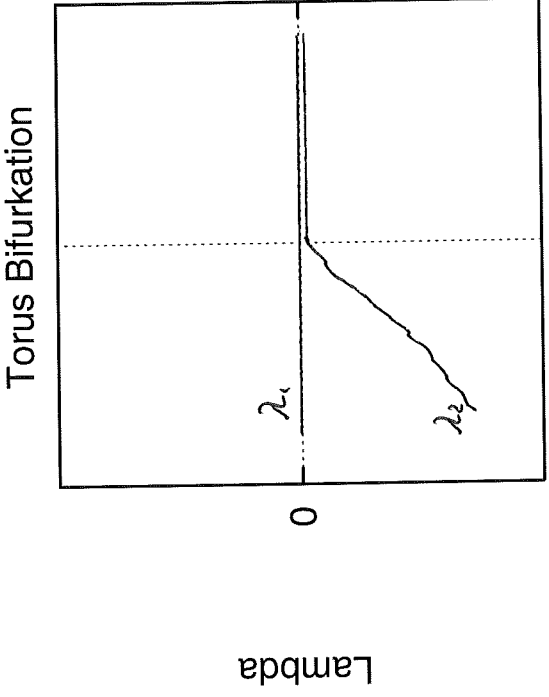
Lyp[1...13]

5



6)





PROGRAM: CXBOG
WHEEL-RAIL FORCE: JOHNSON
WITH FLANGE CONTACT

```

=====
PATH      N      INP      JCASE      JBIF      IJAC      IW
14      0      2      0      2      1500

** ZPAR  **      EPSZ      HZ      ITZ      ITG      FACDEC      ITP
      .1000D-07      .1000D-04      50      50      .2500D+00      50

** GPAR  **      EPSG      HG      ITG      50

** PPAR  **      HMIN      HP      HMAX      ITG      FACDEC      ITP
      .1000D-05      .1000D-02      .1000D-01      .1250D+01      .2500D+00      50

** EQSOL **      IODE      LRW      TOL
      2      400      .1000D-08

** PMAPC **      EPSR      HR      ITR      50
      .1000D-08      .1000D-03
=====

```

```

=====
PATH      ISTEP      NITZ      ITRED      HP      NITG      DT
0      19      0      .1000D-02

X=STATES, C=PARAMETERS
X( 1) = -.3582556051870507D-02      LAMDA( 1) = .1047D-03      .9979D-04      MOD
X( 2) = .1059536874508059D+01      LAMDA( 2) = .1047D-03      .9979D-04      .1
X( 3) = .3775948388212752D-02      LAMDA( 3) = -.1748D-03      .5680D-03      .5
X( 4) = .5622163530799355D+00      LAMDA( 4) = -.1748D-03      .5680D-03      .5
X( 5) = -.1008341875391214D-01      LAMDA( 5) = .9140D-03      .0000D+00      .9
X( 6) = .3486810322993604D+00      LAMDA( 6) = .2800D-04      .1938D-02      .1
X( 7) = .3998635406054117D-02      LAMDA( 7) = .3851D-02      .0000D+00      .3
X( 8) = .593014031903075D+00      LAMDA( 8) = -.3992D-02      .0000D+00      .3
X( 9) = -.938920938868940D-02      LAMDA( 9) = -.3992D-02      .0000D+00      .3
X(10) = -.1566436485119274D+00      LAMDA(10) = .2306D-01      .6257D-01      .6
X(11) = .4719647662181845D-02      LAMDA(11) = .2306D-01      .6257D-01      .6
X(12) = .5083716660921962D+00      LAMDA(12) = .2115D+00      -.7503D+00      .7
X(13) = -.4506842327792448D-02      LAMDA(13) = -.2115D+00      .7503D+00      .7
X(14) = .1274590085341264D+00
C( 1) = .2037890000000000D+03
C( 2) = .0000000000000000D+00
TPER = .2449756244283457D+01

<---- PERIOD OF ORBIT
TPER = .2450D+01      NPOINT = 401      DT = .6109D-02

XMIN( 1) = -.2089D-01      XMAX( 1) = .1975D-01      AMP( 1) = .4063D-01
XMIN( 2) = -.1229D+01      XMAX( 2) = .1154D+01      AMP( 2) = .2383D+01
XMIN( 3) = -.2416D-01      XMAX( 3) = .2485D-01      AMP( 3) = .4901D-01
XMIN( 4) = -.8149D+00      XMAX( 4) = .6544D+00      AMP( 4) = .1469D+01
XMIN( 5) = -.1356D-01      XMAX( 5) = .1378D-01      AMP( 5) = .2734D-01
XMIN( 6) = .6884D+00      XMAX( 6) = .6275D+00      AMP( 6) = .1316D+01
XMIN( 7) = .2542D-01      XMAX( 7) = .6275D+00      AMP( 7) = .5156D-01
XMIN( 8) = -.7655D+00      XMAX( 8) = .6906D+00      AMP( 8) = .1456D+01
XMIN( 9) = -.1004D-01      XMAX( 9) = .1002D-01      AMP( 9) = .2006D-01
XMIN(10) = -.3928D+00      XMAX(10) = .5391D+00      AMP(10) = .9319D+00
XMIN(11) = -.1875D-01      XMAX(11) = .1999D-01      AMP(11) = .3874D-01
XMIN(12) = .6334D+00      XMAX(12) = .5615D+00      AMP(12) = .1195D+01
XMIN(13) = -.8089D-02      XMAX(13) = .8227D-02      AMP(13) = .1632D-01
XMIN(14) = -.2258D+00      XMAX(14) = .2349D+00      AMP(14) = .4607D+00

NORMAL OF POINCARÉ      TANGENT OF PATH      TANGENT VECTOR ACROSS
NP( 1) = .3587D-01      TP( 1) = .4475D-02      TL( 1) = .0000D+00
NP( 2) = -.5434D+00      TP( 2) = -.3371D-01      TL( 2) = .0000D+00
NP( 3) = .1910D-01      TP( 3) = -.1608D-02      TL( 3) = .0000D+00
NP( 4) = -.4246D+00      TP( 4) = -.7776D-03      TL( 4) = .0000D+00
NP( 5) = .1184D-01      TP( 5) = -.2719D-02      TL( 5) = .0000D+00
NP( 6) = .5252D+00      TP( 6) = .5254D-01      TL( 6) = .0000D+00
NP( 7) = .1832D-01      TP( 7) = -.1565D-02      TL( 7) = .0000D+00
NP( 8) = -.1560D+00      TP( 8) = -.5902D-01      TL( 8) = .0000D+00
NP( 9) = -.5321D-02      TP( 9) = .3389D-02      TL( 9) = .0000D+00
NP(10) = .4369D+00      TP(10) = -.1246D+00      TL(10) = .0000D+00
NP(11) = .1727D-01      TP(11) = -.2214D-02      TL(11) = .0000D+00
=====

```

```

=====
PATH      ISTEP      NITZ      ITRED      HP      NITG      DT
1      16      2      .6250D-04

X=STATES, C=PARAMETERS
X( 1) = -.3582272941032487D-02      LAMDA( 1) = .1515D-04      .0000D+00      MOD
X( 2) = .1055934741616128D+01      LAMDA( 2) = .1482D-03      .3426D-03      .3
X( 3) = .3775846649331909D-02      LAMDA( 3) = .1482D-03      .3426D-03      .3
X( 4) = .5622163035962006D+00      LAMDA( 4) = .5563D-03      .0000D+00      .5
X( 5) = -.1008359077452036D-01      LAMDA( 5) = .9061D-03      .0000D+00      .9
X( 6) = .3486843565964644D+00      LAMDA( 6) = .6928D-04      .1659D-02      .1
X( 7) = .3998536435229860D-02      LAMDA( 7) = .6928D-04      .1659D-02      .1
X( 8) = .5392976693853621D+00      LAMDA( 8) = .3370D-02      .0000D+00      .3
X( 9) = -.938994649337458D-02      LAMDA( 9) = .3469D-02      .0000D+00      .3
X(10) = -.1566515284266474D+00      LAMDA(10) = .2260D-01      .6294D-01      .6
X(11) = .4719507623706905D-02      LAMDA(11) = .2260D-01      .6294D-01      .6
X(12) = .5083712046702065D+00      LAMDA(12) = .2247D+00      -.7375D+00      .7
X(13) = -.4506670021719573D-02      LAMDA(13) = .2247D+00      .7375D+00      .7
X(14) = .1274571633560818D+00
C( 1) = .2037890625000000D+03
C( 2) = .0000000000000000D+00
TPER = .2449756057953957D+01

<---- PERIOD OF ORBIT
TPER = .2450D+01      NPOINT = 401      DT = .6109D-02

XMIN( 1) = -.2089D-01      XMAX( 1) = .1975D-01      AMP( 1) = .4063D-01
XMIN( 2) = -.1229D+01      XMAX( 2) = .1154D+01      AMP( 2) = .2383D+01
XMIN( 3) = -.2416D-01      XMAX( 3) = .2485D-01      AMP( 3) = .4901D-01
XMIN( 4) = -.8149D+00      XMAX( 4) = .6544D+00      AMP( 4) = .1469D+01
XMIN( 5) = -.1356D-01      XMAX( 5) = .1378D-01      AMP( 5) = .2734D-01
XMIN( 6) = .6884D+00      XMAX( 6) = .6275D+00      AMP( 6) = .1316D+01
XMIN( 7) = .2542D-01      XMAX( 7) = .6275D+00      AMP( 7) = .5156D-01
XMIN( 8) = -.7655D+00      XMAX( 8) = .6906D+00      AMP( 8) = .1456D+01
XMIN( 9) = -.1004D-01      XMAX( 9) = .1002D-01      AMP( 9) = .2006D-01
XMIN(10) = -.3928D+00      XMAX(10) = .5391D+00      AMP(10) = .9319D+00
XMIN(11) = -.1875D-01      XMAX(11) = .1999D-01      AMP(11) = .3874D-01
XMIN(12) = .6334D+00      XMAX(12) = .5615D+00      AMP(12) = .1195D+01
XMIN(13) = -.8089D-02      XMAX(13) = .8227D-02      AMP(13) = .1632D-01
XMIN(14) = -.2258D+00      XMAX(14) = .2349D+00      AMP(14) = .4607D+00

NORMAL OF POINCARÉ      TANGENT OF PATH      TANGENT VECTOR ACROSS
NP( 1) = .3587D-01      TP( 1) = .4475D-02      TL( 1) = .0000D+00
NP( 2) = -.5434D+00      TP( 2) = -.3371D-01      TL( 2) = .0000D+00
NP( 3) = .1910D-01      TP( 3) = -.1608D-02      TL( 3) = .0000D+00
NP( 4) = -.4246D+00      TP( 4) = -.7776D-03      TL( 4) = .0000D+00
NP( 5) = .1184D-01      TP( 5) = -.2719D-02      TL( 5) = .0000D+00
NP( 6) = .5252D+00      TP( 6) = .5254D-01      TL( 6) = .0000D+00
NP( 7) = .1832D-01      TP( 7) = -.1565D-02      TL( 7) = .0000D+00
NP( 8) = -.1560D+00      TP( 8) = -.5902D-01      TL( 8) = .0000D+00
NP( 9) = -.5321D-02      TP( 9) = .3389D-02      TL( 9) = .0000D+00
NP(10) = .4369D+00      TP(10) = -.1246D+00      TL(10) = .0000D+00
NP(11) = .1727D-01      TP(11) = -.2214D-02      TL(11) = .0000D+00
=====

```

12

NP(12) = -.1588D+00 :: TP(12) = -.7292D-02 :: TL(12) = .0000D+00
NP(13) = .4329D-02 :: TP(13) = .2724D-02 :: TL(13) = .0000D+00
NP(14) = .7573D-01 :: TP(14) = -.2917D-01 :: TL(14) = .0000D+00
:: TP(15) = .9880D+00 :: TL(15) = .0000D+00
:: TP(16) = .0000D+00 :: TL(16) = .1000D+01

PATH1 ***** MINIMUM STEPLENGTH HAS BEEN TRIED ONCE
PATH ***** ERROR RETURN FORM ROUTINE CALL

F2

NP(12) = -.1588D+00 :: TP(12) = -.1426D-01 :: TL(12) = .0000D+00
 NP(13) = .4330D-02 :: TP(13) = -.2358D-02 :: TL(13) = .0000D+00
 NP(14) = .7574D-01 :: TP(14) = .3190D-01 :: TL(14) = .0000D+00
 :: TP(15) = -.9894D+00 :: TL(15) = .0000D+00
 :: TP(16) = .0000D+00 :: TL(16) = -.1000D+01

ISTEP 2 NITZ 49 ITRED 0 HP .1000D-05
 NITG 16
 X=STATES, C=PARAMETERS
 X(1) = -.3582560960065269D-02
 X(2) = .1055936913921857D+01
 X(3) = .3775950770479352D-02
 X(4) = .5622163571017421D+00
 X(5) = -.1008341533637946D-01
 X(6) = .3486809561495818D+00
 X(7) = .3998637676435381D-02
 X(8) = .5393014839250361D+00
 X(9) = -.9389213367901384D-02
 X(10) = -.1566434785062835D+00
 X(11) = .4719650758766373D-02
 X(12) = .508371677522059D+00
 X(13) = -.4506845793036314D-02
 X(14) = .1274590511592907D+00
 C(1) = .2037889970131329D+03
 C(2) = .000000000000000D+00
 TPER = .2449756246406494D+01

PERIOD OF ORBIT
 <--- PERIOD OF ORBIT

TPER = .2450D+01 NPOINT = 401 DT = .6109D-02

EIGENVALUES
 LAMDA(1) = .8828D-04
 LAMDA(2) = .8828D-04
 LAMDA(3) = -.4235D-03
 LAMDA(4) = .1180D-02
 LAMDA(5) = -.1287D-02
 LAMDA(6) = .2287D-03
 LAMDA(7) = .2287D-03
 LAMDA(8) = .3869D-02
 LAMDA(9) = -.3976D-02
 LAMDA(10) = .2381D-01
 LAMDA(11) = .2381D-01
 LAMDA(12) = .2206D+00
 LAMDA(13) = .2206D+00
 LAMDA(14) = .2206D+00

MOD
 .1
 .1
 .4
 .1
 .1
 .1
 .3
 .3
 .6
 .6
 .7
 .7

PATH ***** MINIMUM STEPLENGTH HAS BEEN TRIED ONCE
 PATH ERROR RETURN FORM ROUTINE CALL

X(9) = -.9389219277029076D-02
 X(10) = -.1566432722677411D+00
 X(11) = .4719654409059019D-02
 X(12) = .5083716883676337D+00
 X(13) = -.4506850513534528D-02
 X(14) = .1274590966794933D+00
 C(1) = .2037889970131329D+03
 C(2) = .000000000000000D+00
 TPER = .2449756254171833D+01

PERIOD OF ORBIT
 <--- PERIOD OF ORBIT

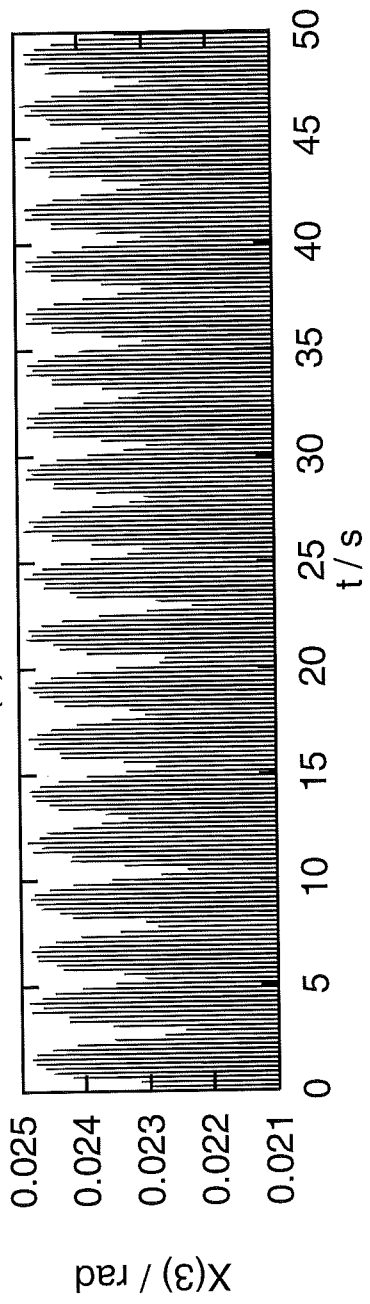
TPER = .2450D+01 NPOINT = 401 DT = .6109D-02

EIGENVALUES
 LAMDA(1) = .8828D-04
 LAMDA(2) = .8828D-04
 LAMDA(3) = -.4235D-03
 LAMDA(4) = .1180D-02
 LAMDA(5) = -.1287D-02
 LAMDA(6) = .2287D-03
 LAMDA(7) = .2287D-03
 LAMDA(8) = .3869D-02
 LAMDA(9) = -.3976D-02
 LAMDA(10) = .2381D-01
 LAMDA(11) = .2381D-01
 LAMDA(12) = .2206D+00
 LAMDA(13) = .2206D+00
 LAMDA(14) = .2206D+00

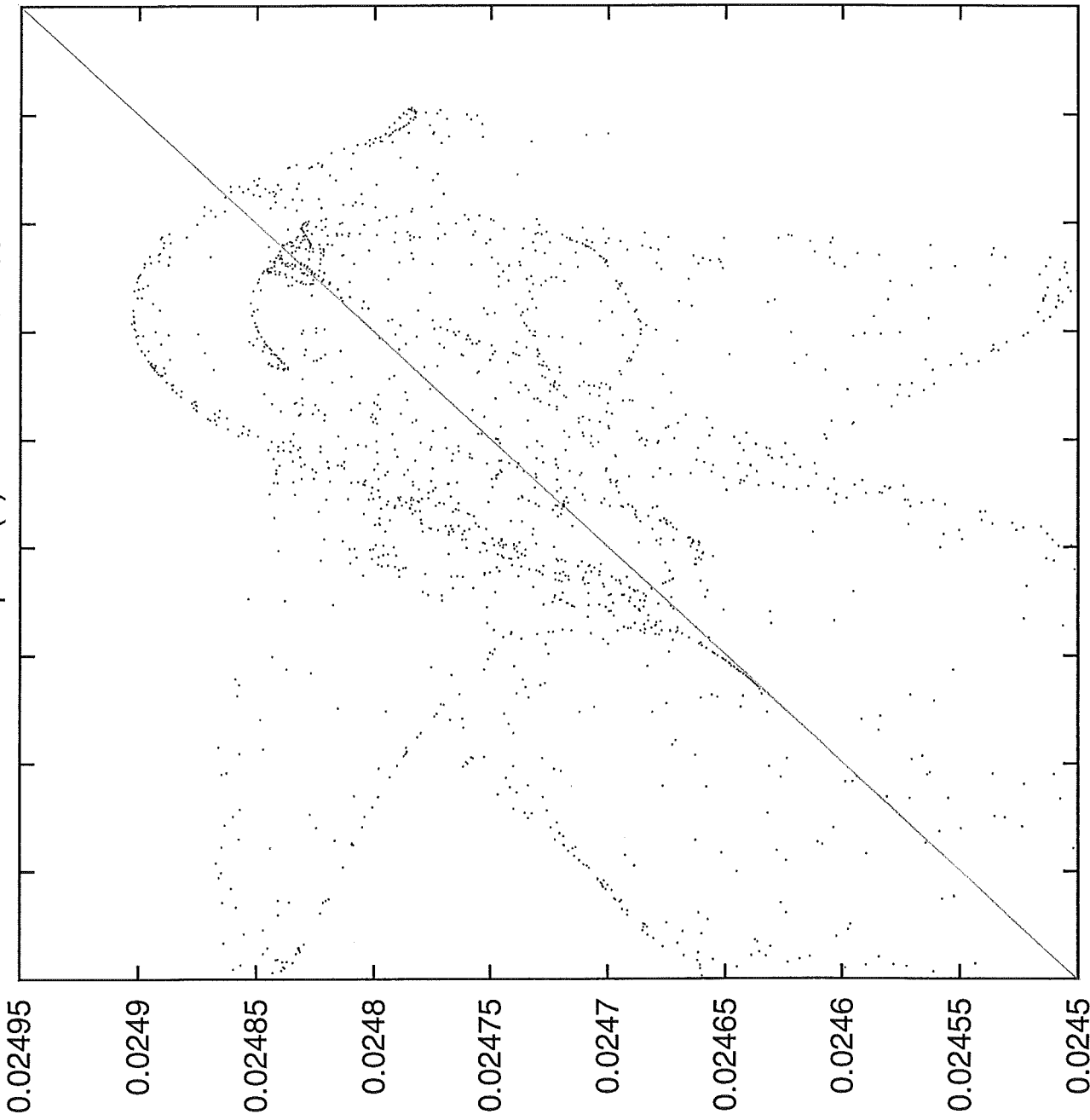
MOD
 .5
 .1
 .4
 .4
 .1
 .1
 .1
 .1

PATH ***** MINIMUM STEPLENGTH HAS BEEN TRIED ONCE
 PATH ERROR RETURN FORM ROUTINE CALL

$X(3) \quad v = 203.802 \text{m/s}$

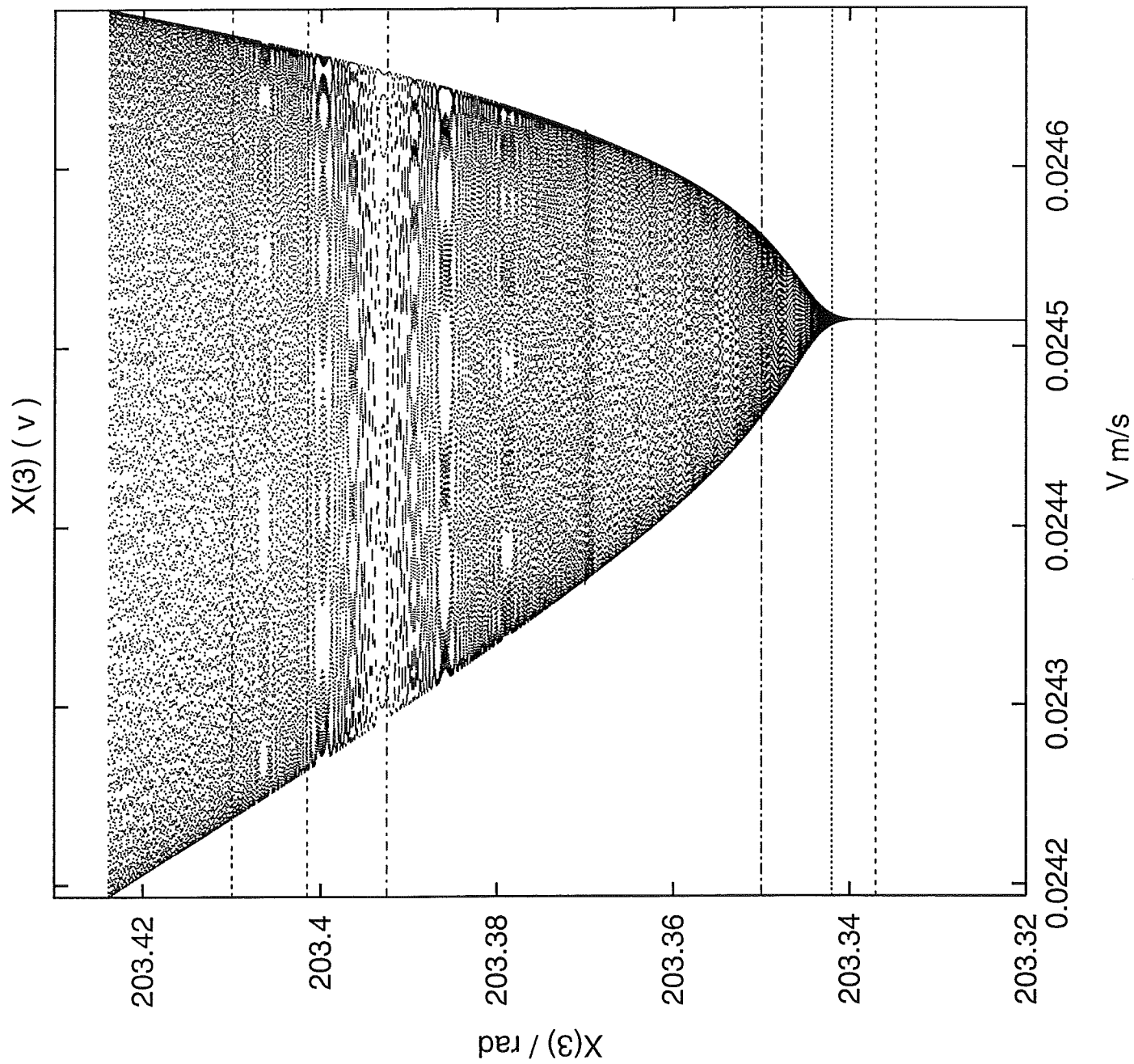


Return map $X(3)$ $v = 203.802\text{m/s}$



$X_3(n)/\text{rad}$

0.02450.024550.02460.024650.02470.024750.02480.024850.02490.02495



Floquet mult. $175 < v < 230$ / m/s

