

Vi skal i det følgende se på metoder til løsning af et ubegrænset prob-

tit: ubegrN2.tex 2001-09-12 12:16

## 4.2 Flerdimensionale ubegrænsede problemer

lysninger svarende til et "normalår". baseret på en model af huset, forventninger om brug af huset samt vejroptionsprogram, der for hver af de 8760 timer i året beregner varmebalancer, år. For at finde energiomkostningerne over året må man kalde et simulatorkostninger til energiforbrug, investeringer og driftsomkostninger over et hvis  $x$  angiver isoleringstykkelser i et hus, og  $f(x)$  angiver de samlede det er tvivlsomt, om  $f$  er differentiable. Dette kunne f.eks. være tilfældet, den anden situation har man kun adgang til funktionsværdierne  $f(x)$ , og mentalfunktion. Her er det nemt at finde de første og anden afledede. I funktioner, som f.eks. polynomier, trigonometriske funktioner eller eksponentialfunktioner, I den ene situation skal man minimere pæne analytiske opgaver: Overvej følgende to situationer og vurder overstående metoder

meget regnetungt at finde disse afledede. beregning af afledede, kan vise sig at være mindre attraktive, hvis det er til at afveje regnearbejdet mod antallet af iterationer. Metoder, der kræver For at kunne foretage en samlet vurdering af metoderne, er man nødt sådan som dette diskuteres i afsnit 4.2.5).

med 10% nøjagtighed (eller blot skal opnå en "tilstrækkelig forbedring", simple metoder er de bedste. Hvis man f.eks. blot skal bestemme optimum Hvis man ikke skal meget tæt på optimum, kan de godt være, at de dette, hvis forudsætningerne herfor er opfyldt.

metode og kubisk interpolation), selvtilgængelig kun kan forventes at opnå metoder, der teoretisk kan vises at have kvadratisk konvergens (Newtons metoder vil arte sig i praktisk anvendelse. Det er således klart, at de fra deres konvergenshastigheder. Noget andet er, hvorledes de forskellige Som vist ovenfor er Newton's metode og kubisk interpolation attraktive ud

### 4.1.9 Samlet vurdering

kvadratisk konvergenshastighed. Det ses, at metoderne B og F har lineær konvergenshastighed, metoderne B og C har superlineær konvergenshastighed, og metoderne A og D har

Det kan være tidsrørende at løse dette endimensionale problem for  $x^{k+1}$  er "tilstrækkelig". Dette diskuteres i afsnit 4.2.5.

Der beskrevet forskellige metoder til løsning af dette problem. Når endimensionale metoder anvendes på denne måde, betegnes dette nogle gange som *linitesøgning*.

$$(4.27) \quad \min f(x^k) - \alpha \Delta f(x^k)$$

Dette er et optimeringsproblem med én variabel,  $\alpha$ . I foregående afsnit er der beskrevet forskellige metoder til løsning af dette problem. Når endimensionale metoder anvendes på denne måde, betegnes dette nogle gange som *linitesøgning*.

Vi betragter problemet (4.25) - (4.26) hvor det antages at  $f$  er kontinuert differentiable.

## 4.2.1 Gradientmetoden

1. Lad os nu se på nogle forskellige metoder. Valget af skridtlængde i Trin 2 diskuteres i afsnit 4.2.5. Stopbetingelser diskuteres i afsnit 4.2.6.

- Det der grundlæggende adskiller metoderne, er valget af retnings  $s^k$  i Trin 1. Lad os nu se på nogle forskellige metoder. Valget af skridtlængde i Trin 2 diskuteres i afsnit 4.2.5. Stopbetingelser diskuteres i afsnit 4.2.6.
- Trin 1 :** Givet et  $x^k$ , find en forbedrende retnings  $s^k$ .
- Trin 2 :** Givet  $x^k$  og  $s^k$ , find en passende skridtlængde  $\alpha^k$  og sæt  $x^{k+1} = x^k + \alpha^k s^k$ .
- Trin 3 :** Er stopkriteriet opfyldt? Hvis ja, så stop. Hvis nej, så gå  $k$  med én og gå til Trin 1.

Metoderne kan alle resumeres i følgende modelalgoritme:

på hvert iterationstrin  $k$ .

og vi skal kun se på metoder, der udnytter dette, idet gradienten beregnes (bemærk: minimering). Vi antager at  $f$  er mindst én gang differentiable,

$$(4.26)$$

$$x \in R^n$$

$$(4.25)$$

$$\min f(x)$$

lem i  $R^n$ , dvs. problemet

$$\phi(x) = f(x_k) + \Delta f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)' \Delta^2 f(x_k)(x - x_k) \approx f(x) \quad (4.28)$$

Vi betragter problemet (4.25) - (4.26) hvor det antages, at  $f$  er to gange kontinuert differentiable. Vi kan ud fra første og anden afledede danne følgende tilnærmelse til  $f$  omkring et givet punkt  $x_k$ :

### 4.2.2 Newton's metode

Det ses af eksemplet, at  $\Delta f(x_k)$  og  $\Delta^2 f(x_{k+1})$  står omtrent vinkelret på hinanden. Dette fænomen kaldes sik-sak. Det er naturligvis ineffektivt.

□

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$\Delta f(x_k)$	$\alpha^k$
0	(0,0)'	0.0	(20,16)	0.0492
1	(-0.984, -0.787)'	-20.031	(-8.632, 10.790)	0.0473
2	(-0.575, -1.298)'	-24.337	(7.452, 5.961)	0.0323
3	(-0.816, -1.491)'	-25.900	(-1.460, 1.825)	0.0354
4	(-0.764, -1.555)'	-25.996	(0.579, 0.463)	0.0277
5	(-0.780, -1.568)'	-26.004	(-0.0991, 0.124)	

Hvis vi starter i  $x^0 = (0, 0)'$  finder vi  $\Delta f(x^0) = (20, 16)$ , og sætter søgningen  $s = -\Delta f(x^0)' = (-20, -16)'$ . Vi finder ved en endimensionel optimeringsmetode, at  $\alpha = 0.0492$  minimerer  $f(x^0 + \alpha s)$ , og derfor sætter vi  $x^1 = x^0 + \alpha s = (-0.984, -0.787)'$ . Vi vælger nu søgningen  $s = -\Delta f(x^1)' = (8.632, -10.790)'$ . Iterationsforløbet bliver som vist nedenfor, hvis vi fortsætter med at vælge optimale skridtlængder  $\alpha^k$ :

$$\Delta f(x)' = \begin{pmatrix} 16(x_1)^3 + 12x_1 + 2x_2 + 20 \\ 4(x_2)^3 + 3(x_2)^2 + 4x_2 + 2x_1 + 16 \end{pmatrix}$$

**Eksempel 4.2.1** Vi tager problemet med  $x \in \mathbb{R}^2$  og  $f(x) = 4(x_1)^4 + (x_2)^4 + (x_2)^3 + 6(x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 2x_1x_2 + 20x_1 + 16x_2$ . Vi finder

Gradientmetodens fordel er at den er meget simpel at implementere. Ofte vil den give store forbedringer af målfunktionen i nogle få iterationer. Men den kan også være utålelig langsom, især i nærheden af optimum. Konvergenshastigheden er lille.

f.eks. gradientmetoden.

Man kan i dette tilfælde helt opgive Newtonmetoden og skifte over til mum i toppunktet.

$\Delta_2 f(x^k) < 0$ . Hvis dette ikke er tilfældet, er  $\phi$  ikke en parabel med mini- mod et lokalt maksimum. Den anden vigtige forudsætning var derfor, at Newtonmetoden konvergerer lige så godt mod et lokalt minimum som funktionen. (Se sætning 2.3.1 og opgave 2.9.)

Med andre ord, ved passende valg af  $\alpha$  kan man få en forbedring af mål-

$$(4.32) \quad f(x_{k+1}) = f(x^k + \alpha(x^i - x^k)) > f(x^k)$$

og  $\Delta f(x^k) \neq 0$ , så vil der være et  $\alpha$ , så

Her er  $\alpha$  en skridtlængde med  $0 < \alpha \leq 1$ . Hvis  $\Delta_2 f(x^k)$  er positiv definit,

$$(4.31) \quad x_{k+1} = x^k + \alpha(x^i - x^k)$$

er  $x^i$  for parabelen  $\phi$  som næste iterationspunkt  $x_{k+1}$ , vælges punktet skridtlængdebestemmelse. Dette betyder, at i stedet for at vælge toppunkt lange skridt, se figur 4.1. Det kan derfor være nødvendigt at indføre en Hvis  $x^i$  ikke er tilstrækkeligt nær ved  $x^*$ , kan man komme til at tage for

## Modifikationer

oplydt.

Modifikationer der kan indføres, hvis forudsætningerne for konvergens ikke er Dette er den "rene" Newton-metode. Vi skal nu se på forskellige mod- vil de følgende iterationer konvergere mod  $x^*$  med kvadratisk hastighed.

Hvis  $f$  er to gange kontinuert differentiable og hvis der er et lokalt minimum  $x^*$  med  $\Delta_2 f(x^*) < 0$ , og hvis  $x^k$  er tilstrækkeligt nær ved  $x^*$ , så ønsker at vælge  $x^i$  som næste iterationspunkt, dvs.  $x_{k+1} = x^i$ .

$$(4.30) \quad x^i = x^k - (\Delta_2 f(x^k))^{-1} \Delta f(x^k)$$

Hvis  $\Delta_2 f(x^k)$  er positiv definit eksisterer  $(\Delta_2 f(x^k))^{-1}$ , og det stationære punkt  $x^i$  er givet ved løsningen til (4.29):

$$(4.29) \quad \Delta \phi(x) = \Delta f(x^k) + (x - x^k)' \Delta_2 f(x^k) = 0$$

Hvis  $\Delta_2 f(x^k)$  er positiv definit, kan vi finde det entydige minimum af tilnærmelsen som det stationære punkt af  $\phi$ :

$$x^i = x_0 - (\Delta_2 f(x_0))^{-1} \Delta f(x_0)' = (-1.0909, -3.4545)'$$

Det fremgår, at  $\Delta_2 f(x_0) < 0$ . Med skridtlængden  $\alpha = 1$  finder vi

$$\Delta_2 f(x_0) = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, (\Delta_2 f(x_0))^{-1} = \begin{pmatrix} -0.0455 & 0.2727 \\ 0.0909 & -0.0455 \end{pmatrix}$$

Hvis vi starter i  $x_0 = (0, 0)'$  finder vi  $\Delta f(x_0) = (20, 16)$ ,

$$\Delta_2 f(x) = \begin{pmatrix} 12 + 48(x_1)^2 & 2 \\ 2 & 4 + 6x_2 + 12(x_2)^2 \end{pmatrix}$$

finder

**Eksempel 4.2.2** Vi tager samme problem som i foregående eksempel. Vi

retnings  $s \in R^n$ , jævnfør sætning 2.3.1.

om  $\Delta_2 f(x^k) \geq 0$ . Hvis dette ikke er tilfældet, findes der en forbedrende minimum eller ej. Man bør derfor supplere stopkriteriet med en kontrol af, hvis  $\Delta f(x^k) = 0$ , vil Newtonmetoden stoppe, uanset om  $x^k$  er et lokalt

sikre sig at  $x^i$  ligger passende tæt ved  $x^k$  ved at vælge et passende stort  $\beta$ . en litesøgning fra  $x^k$  mod  $x^i$  til bestemmelse af  $\alpha$  kan man derfor i stedet

Hvis  $\beta$  er stor, så er skridtlængden  $\|x^i - x^k\|$  lille. I stedet for at lave

$$\beta I) > 0.$$

hvis dette ikke er tilfældet kan  $\beta$  tildeles en passende værdi, så  $(\Delta_2 f(x^k) +$  tilægges således, at det i løbet af beregningerne afsøres, om  $\Delta_2 f(x^k) < 0$ ;

løser (4.29). Gøres dette f.eks. ved Cholesky faktorisering kan denne tilret- Undersøgelsen af om  $\Delta_2 f(x^k) < 0$  kan passende foretages, mens man

derfor opnas en forbedring af  $f(x_{k+1})$  i forhold til  $f(x^k)$ , hvis  $\Delta f(x^k) \neq 0$ . er dermed forbedrende. Ved passende valg af skridtlængden  $\alpha$  kan der

dermed er også  $(\Delta_2 f(x^k) + \beta I)^{-1}$  positiv definit. Retningen  $(x^i - x^k)$  Hvis  $\beta$  vælges passende stor, er  $(\Delta_2 f(x^k) + \beta I)$  positiv definit og

matrix, der er proportional med enhedsmatricen.

kommer tæt på en gradientmetode, idet  $(\Delta_2 f(x^k) + \beta I)^{-1}$  så er tæt på en Det ses, at med  $\beta = 0$  fås Newton-løsningen, mens vi med  $\beta$  stor

Her er  $\beta$  en positiv konstant og  $I$  er  $n \times n$  enhedsmatricen.

$$x^i = x^k - (\Delta_2 f(x^k) + \beta I)^{-1} \Delta f(x^k)' \tag{4.33}$$

som

gradientmetoden på følgende måde. Forslaget til det nye punkt  $x^i$  findes Man kan dog også indgå et kompromis mellem Newtonmetoden og

$$(4.35) \quad p^k = x^{k+1} - x^k$$

$$(4.36) \quad q^k = \Delta f(x_{k+1})' - \Delta f(x^k)'$$

hvor

$$(4.34) \quad D_{k+1} = D^k + \frac{p^{k'} q^k}{p^k q^k} - \frac{p^{k'} q^k}{D^k q^k q^{k'} D^k} + \zeta^k r^k v^k v^{k'}$$

Matricen  $D_{k+1}$  er en approksimation til den inverse hessianmatrix. Den beregnes ud fra  $D^k$  efter formlen

**Trin 4** : Stop? Ellers sæt  $k := k + 1$  og gå til Trin 1.

**Trin 3** : Konstruer  $D_{k+1}$  (se nedenfor).

og sæt  $x^{k+1} = x^k + \alpha s$ .

**Trin 2** : Find den skridtlængde  $\alpha$ , der minimerer  $f(x^k + \alpha s)$ ,

imering).

**Trin 1** : Definer søgeretningen  $s = -D^k \Delta f(x^k)'$  (ved min-

(f.eks.  $D^0 = I$ ). Sæt  $k = 0$ .

**Trin 0** : Vælg  $x^0$  og en symmetrisk positiv definit matrix  $D^0$

Metoderne kan resumeres således:

Kvasi-Newton metoder (også kaldt variabel metoder) ligner Newton metoden derved, at de anvender den inverse hessian-matrix (eller rettere, en approksimation til den). Men denne forsøges konstrueret uden at de anden afledede beregnes, og uden at der skal foretages matrixinversion.

### 4.2.3 Kvasi-Newton metoder

Med  $\alpha = 1$  er  $x^2 = x^1 + s = (-0.846, -1.576)'$ , og da  $f(x^2) = -25.904 < f(x^1)$ , sætter vi  $x^2 = x^2$ . Regn selv videre.  $\square$

$$\Delta^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 25.636 & 2 & 28.030 \\ 2 & 2 & 28.030 \\ 28.030 & 2 & 28.030 \end{pmatrix}, (\Delta^2 f(x^1))^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0392 & -0.028 & 0.0359 \\ -0.028 & 0.0359 & 0.0359 \\ 0.0392 & -0.028 & 0.0359 \end{pmatrix}$$

Vi finder videre  $\Delta f(x^1) = (7.818, -2.469)$ ,

$-24.834$ .

Vælger vi denne værdi, får vi  $x^1 = (-0.533, -1.687)'$  og  $f(x^1) =$

Da  $f(x^2) = 68.3 > 0.0 = f(x^0)$  må vi indføre en skridtlængdebegrens-

ning. Den værdi af  $\alpha$ , der minimerer  $f(x^0 + \alpha s)$ , er  $\alpha = 0.488$ .

$x_0 + \alpha s = (-0.984, -0.787)'$ .  
 Vi finder  $\Delta f(x_1) = (-8.632, 10.790)$ . *Dernæst fås*  $p_0 = (-0.984, -0.787)'$ ,  
 $q_0 = (28.632, 5.210)'$  og  
 Vi vælger den optimale skridtlængde  $\alpha = 0.0492$ . *Derved fås*  $x_1 = (-20, 16)'$ .

Vi vælger den optimale skridtlængde  $\alpha = 0.0492$ . *Derved fås*  $x_1 = (-20, 16)'$ .  
 som enhedsmatricen og finder søgeretningen  $s = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta f(x_0)'$   
 Lad os anvende DFP metoden med start i  $x_0 = (0, 0)'$ . Vi vælger  $D^0$   
**Eksempel 4.2.3** Vi tager samme problem som i foregående eksempel.

Hvis  $f$  er to gange kontinuert differentiable, hvis der er et lokalt minimum  $x^*$  med  $\Delta_2^2 f(x^*) > 0$ , hvis  $x^k$  er tilstrækkeligt nær ved  $x^*$ , og hvis der vælges optimal skridtlængde  $\alpha$ , så vil de følgende iterationer konvergere mod  $x^*$  med superlineær hastighed. Matricerne  $D^k$  konverger under de samme forudsætninger mod  $(\Delta_2^2 f(x^*))^{-1}$ . Hvis endvidere  $f$  er kvadratisk strengt konveks, vil metoderne finde  $x^*$  i højst  $n$  iterationer.

2. Dette er ikke strengt nødvendigt for at opnå konvergens. Det kan vises, at hvis blot  $\Delta f(x_{k+1}) \neq 0$  og skridtlængden  $\alpha$  vælges, så  $(\Delta f(x^k) - \Delta f(x_{k+1}))s > 0$ , så er  $D_{k+1}$  positiv definit såfremt  $D^k$  er det. Derved er retningen  $s = -D_{k+1} \Delta f(x_{k+1})'$  forbedrende. Dette kan derfor opfattes som et krav til nøjagtigheden af  $\alpha$ .  
 Hvis  $f$  er to gange kontinuert differentiable, hvis der er et lokalt minimum  $x^*$  med  $\Delta_2^2 f(x^*) > 0$ , hvis  $x^k$  er tilstrækkeligt nær ved  $x^*$ , og hvis der vælges optimal skridtlængde  $\alpha$ , så vil de følgende iterationer konvergere mod  $x^*$  med superlineær hastighed. Matricerne  $D^k$  konverger under de samme forudsætninger mod  $(\Delta_2^2 f(x^*))^{-1}$ . Hvis endvidere  $f$  er kvadratisk strengt konveks, vil metoderne finde  $x^*$  i højst  $n$  iterationer.

Når  $D_{k+1}$  konstrueres som anført, vil den være positiv definit, hvis  $D^k$  er positiv definit. Vælges  $D^0$  positiv definit (man kan f.eks. sætte  $D^0 = I$ ), er alle  $D^k$  positiv definite, og de anførte søgeretninger vil derfor give en forbedring i målfunktionen, hvis  $\Delta f \neq 0$ . (Jævnfør opgave 2.9.)  
 Det er ovenfor forudsat, at den optimale skridtlængde findes i Trin 2. Dette er ikke strengt nødvendigt for at opnå konvergens. Det kan vises, at hvis blot  $\Delta f(x_{k+1}) \neq 0$  og skridtlængden  $\alpha$  vælges, så  $(\Delta f(x^k) - \Delta f(x_{k+1}))s > 0$ , så er  $D_{k+1}$  positiv definit såfremt  $D^k$  er det. Derved er retningen  $s = -D_{k+1} \Delta f(x_{k+1})'$  forbedrende. Dette kan derfor opfattes som et krav til nøjagtigheden af  $\alpha$ .  
 Hvis  $f$  er to gange kontinuert differentiable, hvis der er et lokalt minimum  $x^*$  med  $\Delta_2^2 f(x^*) > 0$ , hvis  $x^k$  er tilstrækkeligt nær ved  $x^*$ , og hvis der vælges optimal skridtlængde  $\alpha$ , så vil de følgende iterationer konvergere mod  $x^*$  med superlineær hastighed. Matricerne  $D^k$  konverger under de samme forudsætninger mod  $(\Delta_2^2 f(x^*))^{-1}$ . Hvis endvidere  $f$  er kvadratisk strengt konveks, vil metoderne finde  $x^*$  i højst  $n$  iterationer.

(4.37)  
 (4.38)  
 (4.39)

$$p^k = p^k - (1/\tau^k) D^k q^k$$

$$\tau^k = q^k D^k q^k / p^k q^k$$

$$0 \leq \xi^k \leq 1$$

(opkaldt efter Broydon, Fletcher og Shanno).

Hvis man sætter  $\xi^k = 0$  for alle  $k$  fås den såkaldte DFP metode (opkaldt efter Davidson, Fletcher og Powell).

Hvis man sætter  $\xi^k = 1$  for alle  $k$  fås den såkaldte BFGS metode

$$\alpha^k > 0, \quad \alpha^k \rightarrow 0 \text{ for } k \rightarrow \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \infty \quad (4.41)$$

hvor  $p(x^k)$  er en vilkårlig subgradient i punktet  $x^k$ . Det kan da vises, at hvis rækken af  $\alpha^k$  tilfredsstiller

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k p(x^k) \quad (4.40)$$

$\alpha^k$ . Derefter anvendes gradientmetodens opdatering: Iden er, at man starter med at vælge en uendelig række af skridtlængder

Vi skal her blot give en metode til et sådant ikke-differentiable problem. Illustrer dette på en tegning.

Pointen er nu, at det ikke er sikkert, at  $(-p(x^k))'$  er en forbedrende retning. er differentiable, antager vi, at vi kender en subgradient  $p(x)$  i punktet  $x$ . forbedrende retning umiddelbart angives, nemlig  $(-\Delta f(x))'$ . Hvis  $f$  ikke drejede retning. Hvis  $f$  er differentiable og man kender  $\Delta f(x)$ , så kan en at det er umuligt eller i hvert fald meget vanskeligt, at angive en forbedrende retning.

I relation til de tidligere metoder kan vanskeligheden forklares ved, at det er umuligt eller i hvert fald meget vanskeligt, at angive en forbedrende retning.

Vi skal nu betragte et problem, hvor  $f$  er konveks men ikke nødvendigvis differentiable. Dette problem er i almindelighed vanskeligt at løse.

#### 4.2.4 Subgradientmetoden

Heraf findes  $x^i = x^1 - \alpha D^1 \Delta f(x^1) = x^1 - \alpha(-2.175, 8.811)'$  Med optimalt  $\alpha = 0.090$  findes  $x^i = (-0.788, -1.580)'$  og  $f(x^i) = -26.001$ . Vi tager derfor  $x^2 = x^i$ . Regn selv videre.  $\square$

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} -0.984 & -0.787 \\ -0.984 & -0.787 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -0.984 & -0.787 \\ -28.632 & -5.210 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28.632 & -5.210 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28.632 & -5.210 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



En simpel og meget brugt regel er *Armijo* skridtlængerreglen. Den kan beskrives således. Man vælger to parametre  $\epsilon$  og  $\beta$ , hvor  $0 < \epsilon < 0.5$  og  $0 < \beta < 1$ . (Man kan f.eks. vælge  $\epsilon = 0.2$  og  $\beta = 0.8$ ). Desuden vælges

I gennemgangen ovenfor er der som regel foreslået den optimale skridtlængde  $\alpha^*$  i forbindelse med en givet forbedrende retning  $s^k$ , dvs.,  $\alpha^*$  minimerer  $f(x^k + \alpha s^k)$ . Det kan være tidsrøvende at finde dette  $\alpha^*$ . Ofte vil man derfor nøjes med at finde et  $\alpha^k$ , der giver en *tilstrækkelig* forbedring af målfunktionen. En sådan bestemmelse af  $\alpha^k$  kaldes ofte en *blød knisesøgning*.

## 4.2.5 Valg af skridtlængde

Også mere komplicerede *konvekse* begrænsninger kan på denne måde håndteres ved projektion af subgradienten (om projektion, se afsnit 5.1.) Der findes mere avancerede metoder til løsning af ikke-differentiable problemer, men de skal ikke diskuteres her.

(Metoden efter (3.67) side 153 skulle nu kunne opfattes som én, der minimerer dualfunktionen. Ovenstående skridtlængereregler vil derfor sikre konvergens.)

$$(4.42) \quad x_{k+1}^i = \begin{cases} 0 & \text{hvis dette er positivt} \\ \text{ellers} & \end{cases}$$

Subgradientiterationerne kan tilpasses situationen med begrænsningen  $0 \leq x$ . I dette tilfælde vil man beregne hver enkelt komponent i  $x_{k+1}$  således:

Bemærk, at der er ikke tale om at  $f(x_{k+1}) \leq f(x^k)$  for alle  $k$ , og heller ikke, at afstanden mellem  $x^k$  og  $X^*$  konvergerer monotont mod 0. Iterationsforløbet er helt anderledes end hvad vi tidligere har set!

Selv om skridtlængden forudsættes valgt på forhånd, bør man dog i praksis anvende forskellige erfaringsmæssige justeringer i et forsøg på at øge konvergenstasigheden. Konvergenstasigheden er nemlig langsommere end lineær.

I jævne ord betyder (4.41), at den positive skridtlængde skal gå mod 0, men ikke for hurtigt. Det ses, at f.eks.  $\alpha^k = 2^{-k}$  er uacceptabel, mens  $\alpha^k = a/(1+bk)$ ,  $a < 0$ ,  $b > 0$ , er acceptabel.

Så vil  $x^k$  konvergere mod  $X^*$ , forudsat  $f$  er konvex og  $X^*$  er ikke-tom og begrænset.

## 4.2.6 Start og stop

Metoderne kræver angivelse af et startpunkt og et stopkriterium.

Om startpunktet gælder selvsagt, at angivelse af et godt startpunkt kan spare mange iterationer. Der kan næppe siges noget generelt om, hvorledes man finder et godt startpunkt. Indsigt i problemet, optimale løsninger til lignende problemer og intuition kan være nogle af nøgleordene. Hvis målfunktionen er konvex, og man finder et punkt  $x^k$ , hvor  $\nabla f(x^k) = 0$ , er dette et globalt minimum. Ellers kan man ikke være sikker på, at et

initialværdi.

Ved Newtonmetoden og kvasinewtonmetoderne er  $\alpha = 1$  den naturlige man sænke initialværdien i næste iteration. Initialværdien i næste iteration; hvis der skal mange reduktioner til, bør på et iterationstrin accepterer den initiale værdi af  $\alpha$ , bør man nok øge Den første værdi af  $\alpha$  bør vælges, så  $\alpha$  ikke skal reduceres for mange tilstrækkeligt til at sikre konvergenhsstigheden.

dette gælder dog ikke Newton og kvasinewton metoderne, hvor  $\alpha = 1$  er kan det være nødvendigt at anvende noget nær den optimale skridtlængde; vist sikrer konvergens, men for at opnå den teoretiske konvergenhsstighed, metoderne. Det bemærkes også, at en sådan tilstrækkelig forbedring ganske krav til bestemmelsen af skridtlængden, se f.eks. omtalen ved kvasi-Newton I forbindelse med specielle konstruktioner kan der dog stilles stærkere er simpelt.

et problem i praksis.) Også i anvendelser er dette valg attraktivt, fordi det vinklen mellem  $s^k$  og  $\nabla f(x^k)$  ikke må være for nær ved  $90^\circ$ ; dette er næppe er en "passende" forbedrende retning. (Med det sidste udtryk menes, at af målfunktionen, således at der teoretisk opnas konvergens, såfremt  $s^k$  Dette valg af skridtlængde sikrer, at der er en tilstrækkelig forbedring til  $\nabla f(x^k)$ .)

brøkdelen  $\epsilon$  af den forbedring, som retningen  $s^k$  "stiller i ud sigt" i relation Bemærk, at den sidste del af (4.43):  $\epsilon \nabla f(x^k) s^k$ , kan fortolkes som klarer testen. Derefter sættes  $\alpha^k = \alpha$  og  $x^{k+1} = x^k + \alpha^k s^k$ .

Hvis ikke, sætter man  $\alpha := \alpha/\beta$  og tester igen. Dette fortsættes, indtil  $\alpha$

$$(4.43) \quad f(x^k) + \alpha s^k \leq f(x^k) + \alpha \epsilon \nabla f(x^k) s^k$$

på hvert iterationstrin  $k$  en initial skridtlængde  $\alpha$ . Man tester nu om

Ved diskussionen af konvergens skæner man sædvanligvis mellem *global konvergens* og (*lokal konvergensthastighed*). Hvis en metode har global konvergens, betyder det, at den fra et vilkårligt punkt vil konvergere mod et optimum. De forudsætninger, der specificeres for at opnå dette resultat, vedrører sædvanligvis at funktionen er passende glat, at den har et passende antal (f.eks. netop ét) lokalt (eller globalt) optimum, og så videre. Undertiden viser det sig, at der er global konvergens, ikke mod et optimum, men mod et andet "godt" punkt, typisk et stationært punkt. Ved en diskussion af global konvergens siges der ikke noget om, hvor hurtigt konvergensforløbet er.

## 4.2.7 Konvergens. Skalering

- maksimal regnetid anvendt.
- maksimalt antal iterationer nået
- $(f(x_{k+1}) - f(x_k)) / (f(x_k) - f(x_{k-1})) \approx 0$
- $(f(x_{k+1}) - f(x_k)) \approx 0$
- $\|x_{k+1} - x_k\| / \|x_k\| \approx 0$
- $\|x_{k+1} - x_k\| \approx 0$
- $(x_{k+1} - x_k) \approx 0$
- ovenstående suppleret med  $\Delta_2 f(x_k) \geq 0$
- $\|\Delta f(x_k)\| \approx 0$
- $\Delta f(x_k) \approx 0$

stopkriterier sammen. Her er nogle almindelige stopkriterier: stopkriterium, at gradienten er tilnærmelsesvis nul. Ofte anvendes en række som problem. Anvendes en metode, der baseres på gradienten, er et oplagt Om stopkriterierne gælder at disse må vælges i lysset af såvel metode punkter, må man vælge det bedste som optimum. Findes flere forskellige slutpunkt, indikerer dette, at det er optimum. Finder man forskellig slutmed fordel starte flere forskellige steder. Finder man hver gang samme stationært punkt er et minimum. Hvis derfor  $f$  ikke er konvex, kan man

- Med optimal skridtlængde  $\alpha$  vil gradientmetoden konvergere med lineær hastighed
- For de gennemgængede metoder gælder, under forudsætning af (1) en to gange kontinuert differentiable målfunktion  $f$ , (2) et lokalt minimum  $x^*$  med  $\nabla^2 f(x^*) > 0$ , og (3) start fra et punkt passende nær ved  $x^*$ :
- Konvergensthastighed kan analyseres for problemer med  $x \in \mathbb{R}^n$  efter samme retningslinier som i afsnit 4.1.8. Pointen er at skelne mellem *lineær* og *superlineær* konvergensthastighed, med *kvadratisk* konvergensthastighed som et specialtilfælde.
- ## Konvergensthastighed

En god algoritme skal kombinere hensynet til global konvergens og konvergensthastighed.

Passende nær ved  $-\nabla f'$  vil give en forbedring, så konvergenen sikres. at udrytte gradientmetodens styrke: et passende lille skridt i en retning andre metoder, må de derfor udbygges. Det grundlæggende i dette er Hvis man af hensyn til konvergensthastigheden vil anvende én af de vil i deres "rene" form nødvendigtvis konvergere.

male eller bl.a. Armijo) vil konvergere mod  $x^*$ . Ingen af de andre metoder at gradientmetoden ved anvendelse af en passende skridtlængde (den optimale mængden  $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$  er begrænset for enhver værdi af  $\alpha$ . Så følger det, tabel, at den har netop et entydigt lokalt og globalt minimum  $x^*$ , og at Antag om målfunktionen  $f$ , at den er to gange kontinuert differentiable og Hoang Tuy: Global Optimization, Springer/Verlag 1990.)

faktisk skal finde et *globalt* optimum. Mere om dette sidste i f.eks. Reimer forstår man ved det engelske udtryk "global optimization", at metoden punkt, et KKT punkt eller evt. et *lokalt* optimum.) (I nogle sammenhænge konvergens" at der er konvergens mod en "godt" punkt (ofte et stationært I forbindelse med numeriske metoder forstår man sævanligvis ved "global

## Global konvergens

Diskussionen af konvergensthastighed vedrører slutførelset af iterationsætningerne sædvanligvis også anføre, at man skal være tilstrækkeligt nær ved et "godt" punkt, typisk et entydigt optimum.

Med gradientmetoden og optimal skridtlængde fås følgende iterationsforløb:

$$\min [1024(z_1)^4 + (z_2)^4 + (z_3)^3 + 96(z_1)^2 + 2(z_2)^2 + 8z_1z_2 + 80z_1 + 16z_2] \quad (4.45)$$

Det fremgår af ovenstående, at det i hvert fald ved gradientmetoden er hensigtsmæssigt at egenværdierne i  $\Delta^2 f(x^*)$  er omtrent lige store, eller tilsvarende, at konditionstallet er nær 1. Også for andre af de nævnte metoder har egenværdistrukturen betydning. Lad os se på et eksempel:

## Skalering

(Det er formentlig læseren bekendt, at også i forbindelse med andre manipulationer, der involverer matricer, er relationen mellem  $\lambda_1$  og  $\lambda_n$  af betydning. Størrelsen  $k$ , defineret for symmetriske matricer som  $k = \lambda_n/\lambda_1$ , kaldes ofte *konditionstallet*. Det ses, at  $(\lambda_n - \lambda_1)/(\lambda_n + \lambda_1) = (k-1)/(k+1)$ .)

For ikke-kvadratisk funktion vil dette gælde approksimativt. Ved sammenligning med definitionen i afsnit 4.1.8 af konvergenstasighed for  $\|x^k - x^*\|$  ses det, at (4.44) kan fortolkes som lineær konvergenstasighed i *malfunktionensverdien*.

$$f(x^{t+1}) - f(x^*) \leq \left( \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \right)^2 (f(x^t) - f(x^*)) \quad (4.44)$$

Med en *kvadratisk* malfunktion kan det vises, at der gælder:

den mindste og den største værdi.  
forudsætter  $\Delta^2 f(x^*) > 0$ , er alle  $\lambda_i > 0$ . Lad  $\lambda_1$  og  $\lambda_n$  angive henholdsvis Det viser sig, at det centrale egenværdierne  $\lambda_i$  i  $\Delta^2 f(x^*)$ . Da vi konvergenstasighederne.

For gradientmetoden er det muligt at udtale sig lidt mere præcist om løser problemet i højst  $n$  iterationer.

For en kvadratisk malfunktion med  $\Delta^2 f > 0$  vil det desuden gælde, at Newtonmetoden løser problemet i én iteration, mens kvasinewton metoderne

- Med optimal skridtlængde  $\alpha$  vil kvasinewton metoderne konvergere med superlineær hastighed
- Med skridtlængde  $\alpha = 1$  vil Newtonmetoden konvergere med kvadratisk hastighed

den egenskab, at egen værdierne ikke blot helst skal være lige store, de skal også kvasinewton metoderne påvirkes af skalering. De har endvidere hensyn til hver variabel er nogenlunde lige store.

Som det ses, er det meget vigtigt for gradientmetoden, at variablerne skaleres fornuftigt. (Opgave: vis, at problemet kunne have været skaleret endnu bedre end i (4.46).) Skaleringen foregår i praksis ved at man sætter tal i problemformuleringen, således at de anden afledede i optimum med

et på en optimal løsning. Derefter multipliceres hver enkelt variabel med et tal i problemformuleringen, således at de anden afledede i optimum med

et på en optimal løsning. Derefter multipliceres hver enkelt variabel med et tal i problemformuleringen, således at de anden afledede i optimum med

et på en optimal løsning. Derefter multipliceres hver enkelt variabel med et tal i problemformuleringen, således at de anden afledede i optimum med

et på en optimal løsning. Derefter multipliceres hver enkelt variabel med et tal i problemformuleringen, således at de anden afledede i optimum med

et på en optimal løsning. Derefter multipliceres hver enkelt variabel med et tal i problemformuleringen, således at de anden afledede i optimum med

et på en optimal løsning. Derefter multipliceres hver enkelt variabel med et tal i problemformuleringen, således at de anden afledede i optimum med

Tabellen i figur 4.4 illustrerer, hvorledes nogle almindelige udtryk for beregningskompleksitet vokser med  $s$ . Udtryk med  $\log_2 s$  opstår typisk, om *polynomial* og *eksponentiel* beregningskompleksitet.

afgørende, ikke koefficienterne til leddene. På baggrund af dette taler man nominer sammenlignes, er det graden (dvs., den største eksponent), der er trække for  $t$  med eksponentiel form. Det illustrerer også, at skal to poly-

Dette illustrerer, at  $t$  med form som et polynomium klart er at fore- og  $t_3(s) = 100s$ , så vil der gælde  $t_3(s) < t_1(s) < t_2(s)$ , blot  $s$  er stor nok. tilstrækkelig stor. Det er således klart, at hvis  $t_1(s) = s^2 + s$ ,  $t_2(s) = 0.01 \cdot 2^s$  tionsudtrykket  $t(s)$ , idet nogle funktionstyper vil dominere andre for  $s$  pere beregningskompleksiteterne i overensstemmelse med typen af funk-

Hvis man specielt er interesseret i store værdier af  $s$ , så kan man grup- beregningskompleksiteter  $t_1(s)$  og  $t_2(s)$  for relevante størrelser af  $s$ .

Sammenligning af to algoritmer kan da ske ved at sammenligne deres ritmen har *beregningskompleksitet*  $t(s)$ , og vi vil angive dette ved  $O(t(s))$ .

Hvis antallet af regneoperationer ikke overstiger  $t(s)$  siger vi, at algo- tallet af begrænsninger eller en kombination af dette.

Problemløstørrelsen  $s$  vil typisk være udtrykt ved antallet af variabler, an- giver dette overtal som funktion af problemløstørrelsen  $s$ ; antallet er da  $t(s)$ . fastslå. Vi antager derfor, at der til algoritmen hører en funktion  $t$ , der rettere: et overtal for dette, idet det præcise antal vil være vanskeligt at hvorledes antallet af regneoperationer afhænger af problemløstørrelsen; eller problemet, men en anden er bedst til store. Vi må derfor kunne angive, lagte problem. Det kunne derfor tænkes, at en algoritme er bedst til små-

Nu vil antallet af regneoperationer jo afhænge af størrelsen af det fore- menligne antal regneoperationer.

En måde at sammenligne to sådanne algoritmer på er derfor at sam- *antal regneoperationer*.  
 Nogle af de algoritmer, der er beskrevet ovenfor, og som skal beskrives i det næste kapitel, kan løse et forelagt problem af en given type i et *endeligt*

## Beregningskompleksitet

*skalering!*

Konklusionen for alle metoder er derfor: *sørg altid for en omhyggelig* skab kan dog i praksis ødelægges af afrundingfejll.

Derimod er Newtonmetoden uafhængig af skalering. Denne gode egen- endvidere helst alle sammen ligge i nærheden af 1.

Lad os illustrere disse overvejelser på den første algoritme til løsning af fordelingsmodellen med kvadratiske  $f_i$ ; se afsnit 2.8. Der er  $s$  variable. Det fremgår af figur 2.17, at der er 4 væsentlige elementer i algoritmen: (1) initialisering, (2) sortering, (3) søgning gennem knæpunkter, og (4) interpolation. Vi kan analysere hver af de 4 elementer som følger. (1): Initialiseringen kan gøres lineært med  $s$ , idet  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{y}_i$  og  $c$  skal fastlægges,  $4s + 1$  elementer. (2): Sorteringen af de  $2s$  elementer i  $\bar{x}$  og  $\bar{y}$  kan gøres proportionalt med  $2s \log_2(2s)$ , og dermed også (som værste tilfælde) proportionalt med  $s \log_2 s$ . (3): Søgning efter  $\mu$  gennem knæpunkter involverer afprøvning af højst  $2s$  værdier af  $\mu$ . Hver værdi af  $\mu$  involverer beregning af  $s$  værdier  $x_i(\mu)$ , hvor hver af disse beregninger kan gøres på et antal regneoperationer, der er uafhængigt af  $s$ . Desuden summeres  $x_i(\mu)$  ialt altså et antal, der højst er proportionalt med  $s^2$ . (4): Den afsluttende interpolation og beregning af  $x_i(\mu^*)$  er proportional med  $s$ . Den værste beregningskompleksitet i disse 4 trin var  $O(s^2)$ . Algoritmens beregningskompleksitet er derfor  $O(s^2)$ , eller kvadratisk.

Den anden algoritme til løsning af fordelingsmodellen med kvadratiske  $f_i$  i afsnit 2.8 har en beregningskompleksitet på  $O(s \log_2 s)$  som omalt der. Som det også er bemærket der, betyder det dog ikke, at den anden algoritme altid er den hurtigste.

Bemærk, at disse overvejelser over beregningskompleksitet vedrører værste tilfælde og fokuserer på store  $s$ . For et givet problem kan dette være et irrelevant perspektiv!

Figur 4.4. Eksempler på beregningskompleksiteter

$s$	1	2	3	10	20	30	100
$\log_2 s$	0	0.7	1.1	2.3	3.0	3.4	4.6
$s$	1	2	3	10	20	30	100
$s \log_2 s$	0	1.4	3.3	23	60	102	460
$s^2$	1	4	9	$10^2$	$4 \cdot 10^2$	$9 \cdot 10^2$	$10^4$
$s^3$	1	8	27	$10^3$	$8 \cdot 10^3$	$2.7 \cdot 10^4$	$10^6$
$2s$	2	4	8	$10^3$	$10^6$	$10^6$	?



Kvaliteten af de forskellige metoder kan diskuteres efter retningslinjerne i afsnittene 4.1.8 - 4.1.9. De bedste *generelle* metoder vurderes for tiden til at

## 4.2.8 Valg af metode

- Røgsækeproblemet: eksponentiel
  - kvasinewtonmetoder (find selv udtrykket)
  - Newtonmetoden:  $O(s^3)$
  - Minimering af en kvadratisk strengt konvex funktion af  $s$  variabler ved anvendelse af
  - Simplexalgoritmen: eksponentiel
  - Algoritmerne i afsnit 2.8 til løsning af fordelingsmodel med kvadratiske omkostningsfunktioner og  $s$  variabler: henholdsvis  $O(s^2)$  og  $O(s \log_2 s)$
  - Invertering af en  $s \times s$  matrix:  $O(s^3)$
  - Løsning af  $s$  lineære ligninger med  $s$  ubekendte:  $O(s^3)$
  - Forskellige algoritmer til sortering af  $s$  elementer efter størrelse:  $O(s^2)$  og  $O(s \log_2 s)$
- Her er nogle almindelige problemer og beregningskompleksitet for tilhørende algoritmer:
- erationer.
- at i de fleste andre tilfælde kan problemet ikke løses i et *endeligt* antal iterationer.
- I forbindelse med den type problemer, der er emnet for denne bog, er det især problemer med lineære begrænsninger og lineær eller kvadratisk målfunktion, der kan laves kompleksitetsanalyse på. Grunden er naturligvis, at overvejelser om beregningskompleksitet sædvanligvis omhandler værste tilfælde, og dermed er pessimistisk anlagt.
- I praksis viser det sig, at det sjældent går så galt. Dette understreger, nemlig beregningskompleksitet.
- og  $m$  er antallet af begrænsninger. Simplexalgoritmen har derfor eksponentielle vokse som  $m!(n-m)!$ , dvs., som antallet af kombinationer af  $n$  aktive begrænsninger valgt ud fra  $m$  mulige, hvor  $n$  er antallet af variabler og  $m$  er antallet af ekstrempunkter kan i uheldigste fald vokse som  $m!(n-m)!$ , dvs., som antallet af kombinationer af  $n$  aktive begrænsninger valgt ud fra  $m$  mulige, hvor  $n$  er antallet af variabler og  $m$  er antallet af ekstrempunkter kan i værste fald skulle afprøve alle ekstrempunkter i mulighedsrummet. Antallet af ekstrempunkter kan i uheldigste fald vokse som  $m!(n-m)!$ , dvs., som antallet af kombinationer af  $n$  aktive begrænsninger valgt ud fra  $m$  mulige, hvor  $n$  er antallet af variabler og  $m$  er antallet af ekstrempunkter kan i værste fald skulle afprøve alle ekstrempunkter i mulighedsrummet.

er læst

Efterfølgende opgaver forudsætter at de følgende 2 kapitler

(4.0, 4.0).

Løs dette problem ved at eliminere variabelen  $u_4$  og derefter gennemføre 2 Newton-iterationer i variabelen  $u_5$ . Som startpunkt anvendes  $(u_4, u_5) =$

$$\begin{aligned} u_4 + u_5 &= 8 \\ \max[-0.125(u_4)^3 - 0.222(u_5)^3] \end{aligned}$$

afslutningen af sejladsen:

**Opgave 4.5** Da skibet fra opgave 3.16 nær den næstsidsste strækning, er det en anelse forsinket. Kaptaajnen formulerer derfor følgende problem for

punktet  $(1, 1)'$ :

punkt dette resulterer i, ønskes endnu en iteration med udgangspunkt i derfor en iteration med udgangspunkt i punktet  $(0, 0)'$ . Uanset hvilket  $(0, 0)'$  ved anvendelse af en konvergent version af Newton-metoden. Foretag med  $(x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$ . Der ønskes fundet et lokalt minimum i nærheden af

$$\min[(x_1)^3 + 3(x_1)^2 + 4(x_2)^4 + x_1x_2 - 12x_1 - 10x_2]$$

**Opgave 4.4** Givet problemet

$x \in \mathbb{R}^2$ , ved anvendelse af Newtonmetoden.

**Opgave 4.3** Minimer  $f(x) = \exp(x_1) + \exp(2x_2) + (x_1)^2 + (x_2)^4 + x_1x_2$ ,

anvendelse af Newtonmetoden med start i  $x = 5$ .

**Opgave 4.2** Minimer  $f(x) = -\ln(x) + (x + 5)^2/1000$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ , ved

målfunktion, og  $s = (20, 16)'$ .

Bemærk, at dette problem indgår i bl.a. eksempel 4.2.1, idet det svarer til at minimere  $[f(x^0 + \alpha s^0)]$  med hensyn til  $\alpha$ , hvor  $f$  er den der anførte

ved anvendelse af 6 forskellige metoder.

**Opgave 4.1** Minimer  $f(x) = 705536x^4 - 4096x^3 + 3552x^2 - 656x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

## 4.3 Opgaver

være kvasinewton-metoderne. Hvis ikke  $n$  er for stor, og  $\Delta^2 f$  eksisterer og nemt kan beregnes, er en konvergent version af Newtonmetoden suveræn.

### Opgave 4.6 Givet problemet

$$\max[\ln(x_1 + x_2) + \ln(x_2 + x_3) - x_2 - 0.5x_3]$$

$$0.5 \leq x_1 \leq 1.0$$

$$0.5 \leq x_2 \leq 2.0$$

$$0.5 \leq x_3 \leq 3.0$$

Spørgsmål 1: Gennemfør 3 iterationer med en gradientprojektionsmetode, idet der startes i punktet  $x^0 = (0.5, 0.5, 0.5)$ .

Spørgsmål 2: Antag nu, at der om den optimale løsning til ovenstående problem gælder, at  $x_1^* = 1.0$ ,  $0.5 < x_2^* < 2.0$  og  $0.5 < x_3^* < 3.0$ . Fasthold  $x_1 = 1$ , og gennemfør en Newtoniteration i variablene  $(x_2, x_3)$ , med udgangspunkt i  $(x_2, x_3) = (1.19, 0.86)$ .

Spørgsmål 3: Antag, at det fundne punkt er det entydige globale optimum. Hvad er skyggeprisen på begrænsningen  $x_1 \leq 1.0$ ? Hvad bliver aproksimativt tilvæksten i den optimale målfunktionsværdi, hvis begrænsningen  $x_1 \leq 1.0$  erstattes med begrænsningen  $x_1 \leq 1.1$ ? Svaret ønskes givet, uden at det nye optimale punkt beregnes.

### Opgave 4.7 Betragt opgaven i opgave 3.10.

Kapitajnen beslutter sig til at øge den samlede maskinkraft fra 2.0 til 2.2. Find den optimale fordeling af maskinkraften med 3 decimaler på hver variabel ved anvendelse af en af lærebogens metoder. Til støtte kan oplyses, at marginalprisen  $\mu$  på den samlede maskinkraft bliver cirka 12.0.



## Kapitel 5

# Metoder ved problemer med lineære begrænsninger

GH:MMBegrLin1.tex 2001-09-12 12.16

Vi skal i dette kapitel gennemgå en række strategier til løsning af optimeringsproblemer med begrænsninger.

Et stykke hen ad vejen er fremgangsmåden som i foregående kapitel om ubegrænsede problemer: givet et punkt  $x^k$  skal man enten konstatere, at  $x^k$  er optimalt, eller man skal angive en forbedrende retning. Hvor vi i foregående kapitel kunne nøjes med at kræve denne retning forbedrende, vil vi her kræve retningen både *mulig og forbedrende*. Vi vil således i dette kapitel kun beskæftige os med metoder, der hele tiden arbejder med mulige punkter  $x^k$ .

En modelalgoritme for et maksimeringsproblem kan skitseres således:

**Trin 0** Find et muligt punkt  $x^0$ . Sæt  $k = 0$ .

**Trin 1** Find en forbedrende mulig retning  $s^k$  ud fra  $x^k$ .

**Trin 2** Find en skridtlængde  $\alpha^k$ , så  $f(x^k + \alpha^k s^k) < f(x^k)$ , og  $x^k + \alpha^k s^k$  er mulig.

**Trin 3** Sæt  $x^{k+1} = x^k$ .

En ide til at få en mulig, forbedrende retning i et maksimeringsproblem er følgende. Antag at vi har et muligt punkt  $x^k$ . Vi kan få en bedre værdi af målfunktionen ved at gå et lille skridt  $\alpha$  i gradientens retning, dvs., hen til

## 5.1 Projektion af gradienten

kan konstruere et "bedre" punkt (Trin 1, Trin 2).

Hovedperspektivet er at udlede nødvendige og tilstrækkelige optimalitetsstationaritets) spiller en tilsvarende væsentlig rolle her.

$\Delta f(x^k) \approx 0$ , vil vi se, at KKT betingelserne (der jo også udtrykker en slags

**Trin 3** Hvor stopkriteriet i foregående kapitel i det væsentligste var begrænsninger er overholdt i dette punkt. Hvis ikke, må man reducere  $\alpha$ .

skal være et muligt punkt. Man er derfor nødt til at kontrollere, om alle reglen. Der er dog den yderligere klausul på skridtlængden, at  $(x^k + \alpha s^k)$  tilstrækkelig forbedring, som dette f.eks. er udtrykt i Armijo-skridtlængde-kan optimere  $f(x^k + \alpha s^k)$  med hensyn til  $\alpha$ , eller man kan nøjes med en **Trin 2** Skridtlængden  $\alpha^k$  kan findes efter ideen i forrige kapitel. Man automatisk er opfyldt.

variabler. De afhængige variabler vælges, så (en del af) begrænsningerne udtrykke målfunktionens gradient - den reducerede gradient - ved de frie

En tredje ide baseres på at eliminere en del af variablerne, og så (i forhold til denne del af begrænsningerne).

retning er man således sikker på, at man vedbliver at have et muligt punkt (en del af) de aktive begrænsninger. Går man i den projicerede gradientens

En anden baseres på projektionen af gradienten til målfunktionen på anvendelse af lineær eller kvadratisk programmering.

retninger. En baseres på en linearisering omkring et punkt, og efterfølgende **Trin 1** Vi skal skitsere forskellige ideer til at finde mulige forbedrede løsninger). Ikke-lineære begrænsninger vil kun kort blive omtalt.

finde et muligt startpunkt  $x^0$  (eller konkludere, at der ikke findes en mulig man ved anvendelse af simplex-metoden altid i et endeligt antal iterationer mening (LP). Det er derfor klart, at hvis begrænsningerne er lineære, kan

**Trin 0** Vi forudsætter, at læseren er fortrolig med lineær programmering (LP). Det er derfor klart, at hvis begrænsningerne er lineære, kan Her er nogle kommentarer til de enkelte trin.

og stop. Hvis nej, så gå til Trin 1.

**Trin 4** Er stopbetingelsen opfyldt? Hvis ja, så lad  $x^* := x^{k+1}$

Bevis. Vi viser først dette delresultat i tilknytning til (5.1): Punktet  $x^o$  er projektionen af  $\bar{x}$  på  $A$  hvis og kun hvis  $(x - x^o)'(x^o - \bar{x}) \geq 0$  for alle  $x \in A$ . (Forkolk selv dette smukke delresultat på en tegning.)  
 Vi bemærker derfor, at hvis  $x \in A$  har vi  $\|x - x^o\|^2 = \|x - x^o + x^o - x\|^2 = \|x^o - x\|^2 + \|x^o - x\|^2 + 2(x^o - x)'(x - x^o)$ . Da  $\|x^o - x\|^2 \geq 0$  følger det,

*mm.*  
 Hvis  $f$  er konvex og  $x^* = P^M(x^*) + \Delta f(x^*)'$ , så er  $x^*$  et globalt optimum.  
 Hvis  $\bar{x} \in M$  og  $P^M(\bar{x})' \neq \bar{x}$ , så er  $d = (P^M(\bar{x}) + \Delta f(\bar{x})') - \bar{x}$ .  
 Hvis et  $x^* \in M$  er optimalt, så er  $P^M(x^*) + \Delta f(x^*)' = x^*$ .  
 differentiable i et maksimumsproblem.

**Sætning 5.1.1** Antag, at  $M$  er konvex, kompakt og ikke-tom, og at  $f$  er

konstrueres.  
 er optimalt, og hvis dette ikke er tilfældet, hvorledes et bedre punkt kan lemt  $\max f(x)$ ,  $x \in M$ . Sætningen anviser et check på, om et punkt i forbindelse med projektion som i følgende sætning idet vi betragter problemet  
 Vi kan angive nødvendige og tilstrækkelige betingelser for optimalitet

sætning 2.5.1).  
 Hvis  $A$  er konvex, er projektionen på  $A$  entydig (udled selv dette at  
 Bemærk, at hvis  $x \in A$ , så er  $P^A(x) = x$ .  
 hvor  $\|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$ , og minimeringen er med hensyn til  $y$ .

$$\|P^A(x) - x\| = \min_{y \in A} \|y - x\| \quad (5.1)$$

afstandsmål. Dvs.,  $P^A(x)$  har den egenskab, at  
 er defineret som det punkt i  $A$ , der ligger nærmest ved  $x$  i sædvanligt  
 Til dette punkt knytter vi projektionen af  $x$  på  $A$ . Dette punkt,  $P^A(x)$ ,  
 således. Lad der være givet en lukket mængde  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  og et punkt  $x$ .  
 Vi kan formalisere delopgaven: at finde det nærmeste mulige punkt,  
 punkt - der jo pr. definition er muligt - er bedre end  $x^*$ .

Hvis  $x^i = x^k + \alpha \Delta f(x^k)'$  ikke er muligt for nogen positiv værdi af  $\alpha$ ,  
 kunne man jo vælge det punkt i mulighedsområdet  $M$ , der ligger nærmest  
 ved  $x^k + \alpha \Delta f(x^k)'$ . Hvis  $x^k$  ikke er optimalt, kunne man håbe på, at dette  
 punkt - der jo pr. definition er muligt - er bedre end  $x^k$ .  
 passende lille værdi af  $\alpha$ .  
 Hvis  $x^i = x^k + \alpha \Delta f(x^k)'$ . Hvis  $x^i$  er muligt, så er alt godt, vi skal blot finde en

$$f(x) \leq f(\bar{x}) + \Delta f(x)(x - \bar{x}) \leq f(\bar{x}) + 0 \leq f(\bar{x}), \forall x \in M$$

Kombineres disse to uligheder fås

konkav og differentiable, er  $f(\bar{x}) \leq f(x) + \Delta f(\bar{x})(x - \bar{x})$  (sætning 2.4.2).  
 Antag endelig, at  $f$  er konkav, og at  $P_M(\bar{x}) = \bar{x}$ . Da  $P_M(\bar{x})$  er projektion af  $\bar{x}$  på  $M$ , er  $\Delta f(\bar{x})d \leq 0$  for alle mulige  $d$ , eller tilsvarende  $\Delta f(\bar{x})' \neq \bar{x}$ . Det er derfor vist, at hvis  $\bar{x}$  er optimal, så er  $P_M(\bar{x}) = \bar{x}$ .

$d = 0$ . Begge muligheder fører til modstrid med en antagelse om, at  $P_M(\bar{x}) + \Delta f(\bar{x})' \neq \bar{x}$ . Hvis vi nu antager, at  $\bar{x}$  er optimal, er derfor enten  $\Delta f(\bar{x}) = 0$  eller er både mulig og forbedrende.

for  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . Retningen  $d$  er derfor mulig. Det er dermed vist, at retningen Da både  $\bar{x} \in M$  og  $P_M(\bar{x}) \in M$  og  $M$  er konvex, er også  $(x + \epsilon d) \in M$ . Hvis  $d \neq 0$  ses det, at  $\Delta f(\bar{x})d < 0$ , og retningen er derfor forbedrende.

$$(-d)'(d) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta f(\bar{x})'d \geq \|\Delta f(\bar{x})d\|^2$$

Dette gælder derfor også for  $x = \bar{x}$ . Sætter vi  $d = (P_M(\bar{x}) - \bar{x})$  fås heraf

$$(x - P_M(\bar{x}))'(P_M(\bar{x}) - \bar{x}) + \Delta f(\bar{x})' \geq 0, \forall x \in M$$

at

Antag nu at  $x \in M$  og  $P_M(\bar{x}) \neq \bar{x}$ . Af ovenstående delresultat har vi, fås som ønsket  $(x - x_0)'(x_0 - x) \geq 0$ . Vi har dermed vist delresultatet. for  $\alpha > 0$  og tilstrækkelig lille. Dividerer vi dette med  $\alpha > 0$  og lader  $\alpha \rightarrow 0$ ,

$$\alpha^2 \|x - x_0\|^2 + 2\alpha(x - x_0)'(x_0 - x) \geq 0$$

Af disse to relationer får vi

$$\|x - x_0\|^2 + \alpha^2 \|x - x_0\|^2 + 2\alpha(x - x_0)'(x_0 - x) \geq \|x - x_0\|^2 \\ = \|x - x_0 - \alpha(x - x_0)\|^2$$

og endvidere gælder

$$\|x - x_0 - \alpha(x - x_0)\|^2 \geq \|x - x_0\|^2$$

$x_0 + \alpha(x - x_0) \in A$  for  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Derfor er for alle  $x \in A$ . Vælg et  $x \in A$  og bemærk, at da  $A$  er konvex, er også Antag omvendt, at  $x_0$  er projektionen, dvs.,  $\|x - x_0\|^2 \geq \|x - x_0\|^2$  hvilket viser, at  $x_0$  minimerer afstanden mellem  $x$  og et punkt i  $A$ . at hvis vi antager det sidste led ikke-negativ, så er  $\|x - x_0\|^2 \geq \|x - x_0\|^2$ ,



Heraf ses, at  $\bar{x}$  er et globalt maksimum.  $\square$   
 Projektionen på  $M$  findes ved at løse et optimeringsproblem, idet projektionen ifølge (5.1) skal tilfredsstille

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & \|x^k + \alpha \Delta f(x^k)' - P_M(x^k + \alpha \Delta f(x^k)')\| = \\ & \min \|x^k + \alpha \Delta f(x^k)' - y\| \end{aligned} \quad y \in M$$

Målfunktionen i dette problem kan omskrives til at være strengt konvekst (minimering), kvadratisk og additivt separabel (eksempel 2.7.6), og dermed "pæn". Vanskeligheden ved at finde  $P_M(x^k + \alpha \Delta f(x^k)')$  afhænger derfor helt af, hvorledes  $M$  er specificeret.

Projektionen anvender gradienten som udtryk for målfunktionen, og konvergensthastigheden er derfor højst lineær.  
 Vi skal i det følgende gennemgå tre tilfælde for, hvorledes man kan gribe sagen an, nemlig når  $M$  er givet ved

- simple grænser på hver enkelt variabel (boksmodellen)
- et sæt lineære begrænsninger
- et sæt ulineære begrænsninger.

Advarsel: Det er ikke nemt at forbedre metoden ved at anvende  $\Delta^2 f$  i stedet for  $\Delta f$ . F.eks kan man ikke bare projicere Newtonløsningen (4.30) side 194 på  $M$ . Lav eventuelt et eksempel, der illustrerer dette.

### 5.1.1 Simple grænser på hver enkelt variabel

Vi betragter problemet

$$(5.3) \quad \max [f(x)]$$

$$(5.4) \quad \bar{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, n.$$

Vi skal altså finde det punkt i "boksen", hvor  $f$  antager maksimalværdien. Lad der være givet et  $x^k \in M$  og forslaget til et nyt, forbedrende punkt  $x^i = x^k + \alpha \Delta f(x^k)'$ . Hvis  $x^i \in M$ , er der ingen problemer med begrænsningerne. Vi skal blot afgøre om  $f(x^i) < f(x^k)$ . Hvis ja, går vi derhen og gentager proceduren med  $x^{k+1} = x^i$ . Hvis nej, må vi reducere  $\alpha$ , eller konstatere, at  $x^k$  er optimal.

lem. Men denne opgave kan gå hen og blive næsten lige så vanskelig som Projektionen af gradienten findes formelt ved at løse et minimumsproblem. Projektionen af gradienten findes formelt ved at løse et minimumsproblem.

Princippet er som ovenfor: en mulig, forbedrende retning findes som den Vi skal nu se på mere generelle, men dog fortsat lineære, begrænsninger.

### 5.1.2 Generelle lineære begrænsninger

Hvis  $f$  er konvex, er disse betingelser ifølge sætning 5.1.1 også tilstrækkelige for optimalitet. Sammenlign også med tidligere resultater for boksmodellen, bl.a. eksemplerne 2.3.4 og 2.3.7.

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \leq 0 \text{ hvis } \bar{x}_i = x_i^* \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0 \text{ hvis } \bar{x}_i > x_i^* \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \geq 0 \text{ hvis } \underline{x}_i = x_i^* \end{array} \right.$$

5.1.1: Nødvendige optimalitetsbetingelser udlæses nemt (gør det!) af sætning  $\alpha d) > f(x^k)$ .

5.1.1, at retningen  $d = (y^i - x^k)$  er mulig og forbedrende. Hvis  $\alpha$  derfor gøres lille nok, må vi få en forbedring, dvs., vi opnår, at  $f(x_{k+1}) = f(x^k) +$

Vi bemærker, at  $M$  er konvex. Hvis  $y^i \neq x^k$  så følger det af sætning 5.1.1, at retningen  $d = (y^i - x^k)$  er mulig og forbedrende. Hvis  $\alpha$  derfor gøres lille nok, må vi reducere  $\alpha$ . (Dette kan gøres på to måder: for eller efter projektionen; diskuter fordele og ulemper ved hver af disse måder.)

Det er derfor rørende enkelt at finde projektionen, jævnfør eksempel 2.7.6. Hvis  $y^i = x^k$  stopper vi. Hvis  $f(y^i) < f(x^k)$ , sætter vi  $x_{k+1} = y^i$ . Hvis  $f(y^i) > f(x^k)$ , sætter vi  $x_{k+1} = y^i$ .

Men dette problem har løsningen  $y^i$  givet ved

$$(5.6) \quad \bar{x}_i \leq y_i \leq \underline{x}_i, \quad i = 1, n$$

$$(5.5) \quad \min_n \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^i)^2 \right]$$

Hvis omvendt  $x^i \notin M$ , må vi projicere på  $M$ . Vi løser derfor følgende problem med hensyn til  $y \in R^n$ :

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_i \text{ hvis } x_i^i \leq \bar{x}_i \\ x_i^i \text{ hvis } \bar{x}_i \leq x_i^i \\ \underline{x}_i \text{ hvis } \underline{x}_i \leq x_i^i \\ \underline{x}_i \text{ hvis } x_i^i \leq \underline{x}_i \end{array} \right. = y_i^i$$

Det viser sig (se nedenfor), at denne retning kan konstrueres ud fra  $g_1(x) = 4$ .

figur 5.1 at være  $s = (-2, 1)'$ . Denne retning går langs med begrænsningen bindende i et bedre punkt. En mulighed, forbedrende retning ses derfor at  $g_1(x) \leq 4$  (jævnfør afsnit 2.2). Vi gætter derfor på, at  $g_1$  også vil være sidste relation betyder, at  $\Delta f(x)'$  peger ud over den aktive begrænsning  $g_2(x) > 0$ ,  $g_3(x) > 0$ ,  $\Delta f(x) = (-2, 2.5)$  og  $\Delta g_1(x) \Delta f(x)' = 3 > 0$ . Den Antag, at vi står i punktet  $x = (3, 0.5)'$ . Vi observerer, at  $g_1(x) = 4$ ,

$$(5.12) \quad g_3(x) = -x_1 \leq 0$$

$$(5.11) \quad g_2(x) = -x_1 \leq 0$$

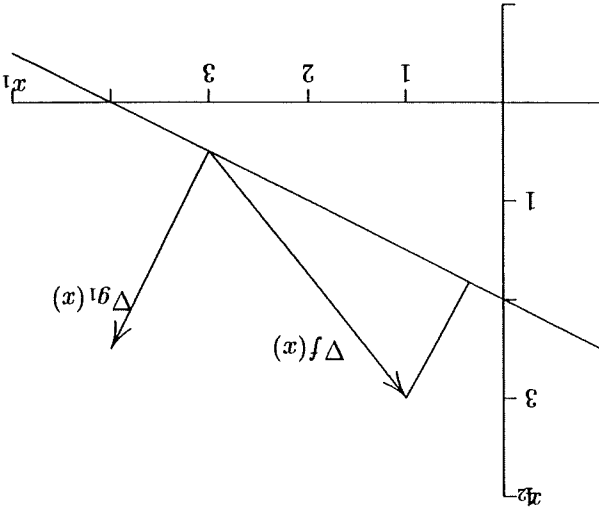
$$(5.10) \quad g_1(x) = x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$(5.9) \quad \max[f(x)] = [-(x_1 - 2)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2]$$

Vi betragter et eksempel:

er noget nærmere end direkte anvendelse af definitionen af projektion. følgende er, at projektionen kan findes ved matrixmanipulationer, hvilket at løse det oprindelige problem, og det var jo ikke meningen. Pointen i det

Figur 5.1. Gradientprojektion



$$G_1 x = b_1 \quad \text{og} \quad G_2 x > b_2 \quad (5.18)$$

og opdel tilsvarende  $b$ , så  $b = (b_1^1, b_2^1)'$ , og således at  
 Betragt et muligt punkt  $x$ , opdel  $G$  i to delmatricer, så  $G = (G_1, G_2)'$ ,  
 overspringses. Konklusionen står i sætning 5.1.2.  
 eller konstruere et nyt, muligt bedre punkt. Uddedningen kan eventuelt  
 hvorledes vi kan konstatere stationaritet (udtrykt ved KKT-betingelserne)  
 De efterfølgende, relativt detaljerede, overvejelser går ud på at vise,  
 dvs., begrænsningerne er lineære.

hvor  $f$  er differentiable,  $G$  er en  $m \times n$  matrix og  $H$  er en  $p \times n$  matrix;

$$\begin{aligned} (5.17) \quad & Hx = c \\ (5.16) \quad & Gx \leq b \\ (5.15) \quad & \max f(x) \end{aligned}$$

problem

I det følgende anvendes projektionsmatricen på det mere generelle  
 er muligt, og at  $f(0.4, 1.8) > f(3.0, 0.5)$ .

overlades til læseren at eftervise, at det nye punkt  $x + P\Delta f(x) = (0.4, 1.8)'$ . Det  
 Vi finder for ovenstående eksempel, at  $P\Delta f(x)' = (-2.6, 1.3)'$ . Det  
*regning.* (Se dog nedenfor).

fordi  $\Delta f(x)(P\Delta f(x))' \geq 0$ . Vi har altså konstrueret en mulig, forbedrende  
 Vælger vi derfor retningen  $d = \Delta f(x)'$ , så er  $Pd$  en forbedrende retning,  
 Det kan også eftervises, at den beregnede matrix  $P$  er positiv semidefinit.

på  $\Delta g_1$ .

$P$  har den egenskab, at for en vilkårlig retning  $d \in \mathbb{R}^2$  er  $Pd$  en vektor  
 parallel med  $s = (-2, 1)'$  (regn selv efter!). Ellers tilsvarende,  $Pd$  er vinkelret

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

For eksemplet fås:

$$P = I - M'(MM')^{-1}M \quad (5.13)$$

$\Delta g_1 = (1, 2)$ . Vi beregner projektionsmatricen  $P$  som  
 $\Delta f(x)$  og gradienten til  $g_1$ . Vi kalder denne matrix for  $M$ , dvs.,  $M =$

den til  $G_2$ ). Vi kaldter den resterende matrix for  $\overline{M}$ ,  $(G_1, H)$ , og den  $\lambda$ . Vi sletter nu række nummer  $j$  i  $G_1$ , svarende til  $\lambda_j$  (dvs., vi overfører Hvis ikke  $\lambda \geq 0$ , så lader vi  $\lambda_j$  være en af de negative komponenter i

måde, vi har konstrueret  $w$  på. Den første konklusion er derfor, at hvis  $\lambda \geq 0$ , er  $x$  et KKT punkt. Resultatet svarer nemlig til (3.15), og (3.13) - (3.17) er opfyldt som følge af den

$$(5.19) \quad \Delta f(x)' = (I - M'M)^{-1}M'\Delta f(x)' = \Delta f(x)' - M'w = -G_1'x' - H'\mu$$

$(\lambda, \mu)$  at

$P\Delta f(x)' = 0$ . Heraf følger, med  $w = (M'M)^{-1}M'\Delta f(x)'$ , og med  $w' =$  Lad os se, hvad vi kan udlede, hvis  $P\Delta f(x)' = 0$ . Antag derfor at

*forbedrende, mulig retning.*

ning 2.3.1) Vi har hermed vist, at hvis  $P\Delta f(x)' \neq 0$ , er  $d = P\Delta f(x)'$  en Altså er  $d$  en forbedrende retning, hvis  $d = P\Delta f(x)' \neq 0$  (jævnfør sæt-  $P\Delta f(x)' = \|\Delta f(x)\|^2 \geq 0$ , og hvis  $P\Delta f(x)' \neq 0$  er derfor  $\Delta f(x)d < 0$ . Lad  $d = P\Delta f(x)'$ . Vi har derfor  $\Delta f(x)d = \Delta f(x)P\Delta f(x)' = \Delta f(x)P'$ .

anvendes som følger.

$x'Px = x'P'Px = \|P'Px\|^2 \geq 0$ , hvoraf ses, at  $P$  er positiv semidefinit. Dette  $IP = P$ , idet  $MP = 0$  som vist ovenfor. Heraf følger for vilkårligt  $x \in R^n$ :

Bemærk nu, at  $P'P = (I - M'(MM')^{-1}M)'P = IP - M'(MM')^{-1}MP =$  er en mulig retning.

Hvis, som antaget,  $G_2x > b_2$ , er  $(x' + \alpha Pd)$  også mulig med hensyn til  $G_2x' \leq b_2$  (hvis  $\alpha < 0$  er lille nok). Vi har dermed vist, at retningen  $d$  er forsats aktiv i  $x'$ .

også punktet  $x'$  muligt med hensyn til de aktive begrænsninger (og disse så gælder også, med  $x' = x + Pd$ , at  $G_1x' = b_1$  og  $Hx' = c$ . Derfor er de aktive begrænsninger. Hvis det om  $x$  gælder, at  $G_1x = b_1$  og  $Hx = c$ , tive begrænsninger, eller anderledes udtrykt: retningen  $Pd$  er parallel med Dette betyder, at retningen  $Pd$  står vinkelret på gradienten til de ak-gradienterne af de aktive begrænsninger.

skab, at  $MPd = 0$ . Men  $M = (G_1', H)'$  er jo den matrix, hvis rækker er  $M - M = 0$ . Dette medfører, at for en vilkårlig vektor  $d$  har  $Pd$  den egen-

Bemærk, at  $MP = M(I - M'(MM')^{-1}M) = MI - (MM')^{-1}M$  projektionsmatricen  $P$  som i (5.13) og betragt en vilkårlig vektor  $d \in R^n$ .

Sæt nu  $M = (G_1', H)'$ , og antag at  $M$  har fuld rang. Definer endvidere idet vi antager, at dette faktisk er muligt.

**Sætning 5.1.2** *Betragt problemet (5.15) - (5.17), hvor  $f$  antages differencen  $M = (G_1^1, H^1)$  har fuld rang. Definer  $F$  som i (5.13). Hvis  $P \Delta f(x)' \neq$*

*tabel. Lad  $x$  være et muligt punkt. Opdel  $G$  som i (5.18). Antag at matrix  $r_j$  er derfor gradienten til denne lineære begrænsning, og  $r_j d > 0$  betyder, at  $d$  er en mulig retning med hensyn til også denne begrænsning. Men  $r_j$  er rækken i  $G_1$ , svarende til den begrænsning, der blev flyttet. Som vist ovenfor er  $\bar{P}$  positiv semidefinit, og da  $\lambda_j > 0$  følger det, at  $r_j d <$*

$$(5.23) \quad 0 = r_j \bar{P} \Delta f(x)' - r_j \bar{P} (\bar{M} w + \lambda_j r_j^j) = r_j d - \lambda_j r_j^j \bar{P} r_j^j$$

*vist  $\bar{M} \bar{P} = 0$ , får vi heraf index er der lighedstegn. Vi ganger (5.21) med  $r_j \bar{P}$ , og idet som ovenfor modsætning til situationen ovenfor gælder det ikke, at  $G_2 x < b_2$ : for ét  $V_i$  mangler nu kun at vise, at  $d = P \Delta f(x)'$  er en mulig retning. I nummer  $j$  er slettet.*

*retning, i forhold til det relaxerede problem, hvor ulighedsbegrænsning Da  $\bar{M}$  har fuld rang, fordi  $M$  har det, er  $d = \bar{P} \Delta f(x)'$  en forbedrende  $V_i$  konkluderer, at hvis ikke  $\lambda \geq 0$ , så er  $\bar{P} \Delta f(x)' \neq 0$ . fører vores midlertidige antagelse om, at  $\bar{P} \Delta f(x)' = 0$ , til en modstrid, og  $M$  havde fuld rang, hvoraf følger at  $r_j \neq 0$ , og at  $\bar{M}$  har fuld rang. Derfor midlertid havde vi udvalgt  $j$ , så  $\lambda_j < 0$ . Endvidere havde vi antaget, at*

$$(5.22) \quad 0 = \bar{M}'(\bar{w} - w) - \lambda_j r_j^j$$

*Ved at tage differensen mellem de to ovenstående udtryk (5.20) - (5.21) fås*

$$(5.21) \quad 0 = \Delta f(x)' - \bar{M}' \bar{w} - \Delta f(x)' - \bar{M}' w - \lambda_j r_j^j$$

*ovenstående nummer  $j$  i  $G_1$  og  $w$  er passende valgt. Derfor fås ved omskrivning af Vi bemærker, at  $G_1^1 \mathcal{N} + H^1 \mu'$  kan skrives  $\bar{M}' w + \lambda_j r_j^j$ , hvor  $r_j$  er række*

$$(5.20) \quad 0 = \bar{P} \Delta f(x)' = (I - \bar{M}'(\bar{M} \bar{M}')^{-1} \bar{M}) \Delta f(x) = \Delta f(x)' - \bar{M}' w$$

*Antag midlertidigt at  $P \Delta f(x)' = 0$ . Vi vil vise, at dette fører til en modsigelse. Ved at sætte  $\bar{w} = (\bar{M}' \bar{M})^{-1} \bar{M}' \Delta f(x)'$  får vi, jfr. (5.19) tilsvarende projektionsmatrix for  $\bar{P}$ .*

Man kunne selvfølgelig også anvende projektionen på de ulineære begrænsninger, men dette ville næppe være lettere end at løse problemet direkte.

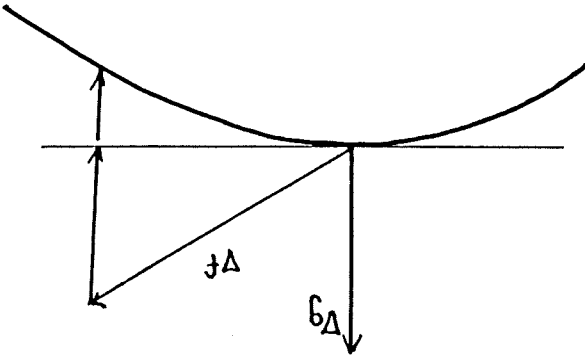
sikker (lav et eksempel.)  
 modsat den, begrænsningens gradient peger i. Metoden er dog ikke 100% på figur 5.2; det ses, at ideen i denne korrektion er at gå lidt i retningen man vil have et muligt punkt, kan man foretage en korrektion, som vist projicerer ned på de lineære, og ikke de originale, begrænsninger. Hvis Man vil dog kunne risikere at få et nyt punkt, der ikke er muligt, fordi man foreslå at linearisere dem, og derefter anvende ovenstående fremgangsmåde. Hvis mulighedsområdet er givet ved ulineære begrænsninger, kan man

### 5.1.3 Ulineære begrænsninger

Bevis: Argumentationen er givet ovenfor.  $\square$

*strueres ved at sætte rækken i  $G_1$  svarende til  $\lambda_j$ .*  
 så er retnings  $d = \bar{P}\Delta f(x)'$  en mulig, forbedrende retning, hvor  $\bar{P}$  kon-  
 $\lambda \geq 0$ , er  $x$  et KKT punkt. Hvis  $P\Delta f(x)' = 0$  og  $\lambda_j > 0$  for et  $j \in B(x)$ ,  
 0, er  $d = P\Delta f(x)'$  en mulig, forbedrende retning. Hvis  $P\Delta f(x)' = 0$  og

Figur 5.2. Projektion på ulineære begrænsninger



Her er  $H$  en  $k \times n$  matrix. Eventuelle oprindelige  $Gx \leq b$  er indeholdt i (5.29) - (5.30), idet der er indført slæskvariable. Vi opdeler nu  $x$  i to delvektorer,  $x = (x^B, x^N)'$ , hvorom vi antager, at  $x^B > 0$ ; for at opnå dette kan det være nødvendigt at ombytte elementer i  $x$  og søjler i  $H$ . Der er derimod ingen forudsætninger om  $x^N$ . Tilsvarende opdeles  $H$  i

$$\begin{aligned} (5.28) \quad & \max f(x) \\ (5.29) \quad & Hx = c \\ (5.30) \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

formulering af problemet:

Ovenstående ide kan formaliseres som følger. Lad os betragte denne gradient. Hvis  $\alpha > 0$  er lille nok, er  $(x + \alpha s)$  også mulig med hensyn til  $g_2$  og  $g_3$ . Vi har Denne retning er endvidere mulig med hensyn til  $g_1$ , da  $g_1$  er lineær. Ved at øge  $x_2$  og indrette  $x_1$ , så  $g_1(x) = 4$ . Retningen  $(-2, 1)'$  er derfor forbedrende.

I punktet  $x$  er  $\Delta \bar{f}(x_2) = 6.5 < 0$ . En forbedrende retning fås derfor for den reducerede gradient.

Vi siger, at vi har valgt  $x_1$  som *afhængig* (eller *basis*) variabel, og  $x_2$  som *uafhængig* (eller *ikke-basis*) variabel. Vi kalder vektoren  $(0, \Delta \bar{f}(x_2))$   $x_2$  alene:  $\bar{f}(x_2) = -(4 - 2x_2 - 2)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2$  og  $\Delta \bar{f}(x_2) = 11 - 9x_2$ .

Indsætter vi f.eks.  $x_1 = 4 - 2x_2$  i  $f$  får vi målfunktionen udtrykt ved  $f(x)$  som funktion af  $x_2$  alene:  $\bar{f}(x_2) = -(4 - 2x_2 - 2)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2$  og  $\Delta \bar{f}(x_2) = 11 - 9x_2$ .

Vi kan altså bruge lighedsbegrænsninger til at *eliminere variable*. Vi antager, at vi står i punktet  $x = (3.0, 0.5)'$ , hvor  $g_1(x) = 4$ ,  $g_2(x) < 0$  og  $g_3(x) < 0$ . Hvis vi forudsætter, at vi fortsat skal have  $g_1(x) = 4$  i nærheden af  $x$ , så kan vi at denne betingelse udlede, at  $x_1 = 4 - 2x_2$  og  $x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_1$ .

$$\begin{aligned} (5.24) \quad & \max f(x) = [-(x_1 - 2)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2] \\ (5.25) \quad & g_1(x) = x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ (5.26) \quad & g_2(x) = -x_1 \leq 0 \\ (5.27) \quad & g_3(x) = -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Betragt igen eksemplet

fil: NMB\g\LIN2.tex 2001-09-12 12:16

## 5.2 Den reducerede gradient



Dette minder om (5.33), blot er der en "skalering", således at skridtet bliver hille med hensyn til variabelen  $x_j^N$ , hvis den første mulighed i (5.33) giver

$$(5.34) \quad d_j^N = \begin{cases} x_j^N & \text{hvis } r_j^N \leq 0 \\ x_j^N / r_j^N & \text{hvis } r_j^N > 0 \end{cases}$$

Vi kan også vælge

entprojektion for boksmodellen.

Det ses, at dette valg minder om projektion af gradienten, som beskrevet i afsnit 5.1. Hvis  $\|d^N\|$  er passende hille, er det faktisk identisk med grad-

$x^N$ .

Her er  $d_j^N$ ,  $r_j^N$  og  $x_j^N$  komponent nummer  $j$  i henholdsvis  $d^N$ ,  $r^N$  og

$$(5.33) \quad d_j^N = \begin{cases} 0 & \text{ellers} \\ r_j^N & \text{hvis } x_j^N > 0 \\ r_j^N x_j^N & \text{hvis } x_j^N \leq 0 \end{cases}$$

Vi kan vælge  $d_j^N$  således:

hille.

tetskravet (5.30) også være opfyldt for  $x_B + \alpha d_B$ , hvis  $\alpha < 0$  er passende lighedsbegrænsningerne opfyldt. Da vi antog, at  $x_B < 0$ , vil ikke-negativ-

Lad os nu forsøge at konstruere en forbedrende retning  $d$ . Hvis vi vælger den ved at vælge  $d^N$  frit og  $d_B$  i overensstemmelse med (5.31), så er

$r^N$  for den reducerede gradient.)

Vi kalder  $r$  for den *reducerede gradient*. (Man kunne også have kaldt

af  $f$  med hensyn til henholdsvis  $x_B$  og  $x^N$ .

hvor  $0$  er  $1 \times k$  nulvektoren, og  $\Delta^N f(x)$  og  $\Delta_B f(x)$  er de partielle afledede

$$(5.32) \quad r = (0, r^N) = (0, \Delta^N f(x) - \Delta_B f(x) H_B^{-1} H^N)$$

Betragt vektoren

dette ses ved indsættelse.

Hvis vi derfor specificerer en retning  $d$ , hvor  $d = (d^B, d^N)$ ,  $d^N$  vælges frit, og  $d_B = -H_B^{-1} H^N d^N$ , så gælder, at hvis  $Hx = c$ , så er også  $H(x + d) = c$ ;

$$(5.31) \quad Hx = H_B x_B + H^N x^N = c \Leftrightarrow x_B = H_B^{-1}(c - H^N x^N)$$

Vi kan derfor udlede følgende sammenhæng:

to delmatricer,  $H = (H_B, H^N)$ , hvorom det antages, at  $H_B$  er  $k \times k$  og invertibel; dette betyder bl.a., at  $x_B$  har netop  $k$  elementer.

Da  $x_B > 0$  ifølge antagelse, så er  $\lambda_B x_B = 0$  hvis og kun hvis  $\lambda_B = 0$ ; altså er  $\lambda_B = 0$ . Af KKT-betingelsen  $\Delta_B f(x) = 0 + \mu H_B$  følger  $\mu = \Delta_B f(x) H_B^{-1}$ . Indsættes dette i  $\Delta_N f(x) = -\lambda_N + \mu H_B$  fås  $\lambda_N = -(\Delta_N f(x) - \Delta_B f(x) H_B^{-1} H_N)$ . Det ses derfor ud fra definitionen på den reducerede gradient, at  $\lambda_N = -r_N$ . KKT betingelserne udtrykker derfor i

$$\begin{aligned} \Delta_B f(x), \Delta_N f(x) &= -\lambda_B - \lambda_N + \mu(H_B, H_N) \\ \lambda_B x_B &= 0, \lambda_N x_N = 0 \\ \lambda_B &\geq 0, \lambda_N \geq 0. \end{aligned}$$

$x$  er mulig, og

kun hvis der eksisterer rækkvektorer  $\mu \in R^k$ ,  $\lambda_B \in R^k$  og  $\lambda_N \in R^{n-k}$ , så den givne problemformulering (5.28) - (5.30) er  $x$  et KKT punkt hvis og Tucker punkt. Dette kan indses på følgende måde for valget (5.33). Med ovenfor. Vi viser, at  $d = 0$  hvis og kun hvis vi har fundet et Karush-Kuhn-Bevis: Argumentationen for at  $d \neq 0$  er en forbedrende retning er givet

en forbedrende mulig retning.  $d = 0$  hvis og kun hvis  $x$  er et KKT punkt. Lad der være givet et muligt punkt  $x$ . Antag at delmatricen  $H_B$  er invertibel, og  $x_B > 0$ . Definer retningen  $d$  som anført. Hvis  $d \neq 0$ , er  $d$  entabel. Betragt problemet (5.28) - (5.30), hvor  $f$  antages differ-

Vi kan opsummere resultatet i følgende sætning:

hvis og kun hvis vi har fundet et Karush-Kuhn-Tucker punkt. Med det således valgte  $d$  har vi fundet en forbedrende, mulig retning, såfremt  $d \neq 0$ .  $d$  kan godt gå hen og blive nulvektoren. Men dette sker  $x_j^N = 0$ , og at  $\Delta f(x)d < 0$ , hvis dette er muligt. Også andre valg er mulige. Det vigtige er, at vi sikrer, at  $d_j^N \geq 0$ , hvis

$$d_j^N = \begin{cases} 0 & \text{for et } j \text{ med } r_j^N d_j^N > 0 \\ \text{for alle andre } j & \end{cases} \quad (5.34)$$

sådan  $j$  findes:

for dette  $j$  anvendes (5.34), idet dog  $j$  er valgt, så  $r_j^N d_j^N > 0$ , forudsat et; Som en tredje mulighed kunne man vælge  $d_j^N = 0$  for alle  $j$  på nær ét; funktion af  $x$ , hvor  $d_j^N$  i (5.33) kan skifte brat for  $x_j^N$  nær 0. Det ses, at også for  $x_j^N$  nær 0 er  $d_j^N$  i (5.34) dermed en kontinuerlig en retning, der kunne gå hen og give en negativ værdi for den nye værdi

I forbindelse med gennemgang af simplexmétoden vises det også, hvorledes degenererede problemer kan behandles, og hvorledes cykling kan undgås. Desuden vises, hvorledes simple nedre og øvre begrænsninger (boksbe- grænsninger) kan håndteres. Endvidere, at løsløsningsanalysen og den

- at man altid kan finde en mulig løsning til et problem med lineære begrænsninger ved hjælp af simplex.
- at man kan løse lineære problemer relativt hurtigt,
- at lineære problemer kan løses i et endeligt antal iterationer,
- at man kan løse meget store problemer med simplex, dvs., med hundreder, tusinder, eller titusinder af variabler og begrænsninger,

at man kan løse meget store problemer med simplex, dvs., med hundreder, tusinder, eller titusinder af variabler og begrænsninger, metoder, der gennemgås i bogen, er bl.a.

De egenskaber ved simplex, der kan fremdrages i relation til de andre øvrigt henvises til S.K.Jacobson: *Elementær Operationsanalyse*. I programmering (LP) og simplexmétoden til løsning af LP-problemer. I Vi forudsætter i denne udgave af bogen, at læseren er fortrolig med lineær

## 5.3 Lineær programmering

Konvergenstilheden er lineær.

Denne metode kaldes *generalseret reduceret gradient metoden* (GRG). Det bliver muligt, også under hensyntagen til de ulineære begrænsninger. Derefter foretager man yderligere et lille skridt, således at punktderefter tage et lille skridt i den retning, som ovenstående beskrivelse an- Principet er ud fra et muligt punkt at linearisere begrænsningerne, og Hvis begrænsningerne er ulineære, kan man fortsat anvende idéen.

Er den relevant for boksmodellen? Opsgave: hvorledes bliver den reducerede gradients metode for fordel- også beregne en reduceret hessiamatrix. Se afsnit 5.5, omkring (5.48).

Lige som vi i (5.32) kunne beregne en reduceret gradient, kan man uden at dette for alvor ødelægger idéen.

(5.29) - (5.30) kan eventuelt være supplerede med boksbe- grænsninger, Altså er  $x$  et KKT punkt hvis og kun hvis  $d = 0$ . □  
 retningen  $d$  på, følger at  $d = 0$ , hvis og kun hvis  $r_N \leq 0$  og  $r_{N^c} = 0$ . Men af den måde, vi har defineret det væsentlige, at  $r_N \leq 0$  og  $r_{N^c} = 0$ .

Vi har følgende resultat, der viser, hvorledes vi konstaterer nødvendige optimalitetsbetingelser oplydt eller konstruerer et bedre punkt. Den lidt omstændelige formulering i sidste del er valgt, fordi lineære problemer ikke nødvendigvis har en entydig løsning.

$$(5.40) \quad x_i^k \leq x_i \leq x_i^k + \delta, \quad i = 1, n$$

derfor at benytte følgende boksbegrensninger:  $\delta$  eller  $\|x - x^k\|_2 \leq \delta^2$ , hvor  $\delta$  er en positiv parameter. Imidlertid er disse begrænsninger ulineære, og dermed vanskelige at håndtere. Bedre er det Vi kunne indføre en skridtlængdebegrænsning ved at kræve  $\|x - x^k\| \leq$  har en begrænset løsning, selv hvis problemet (5.36) - (5.38) har det.

nærheden af  $x^k$  er, at det lineære problem (5.37) - (5.39) ikke nødvendigvis søge efter et bedre  $x$  i nærheden af  $x^k$ . En anden grund til at begrænse sig til Dette udtryk har god gyldighed nær  $x^k$ ; det ville derfor være rimeligt at

$$(5.39) \quad \max [f(x^k) + \Delta f(x^k)(x - x^k)]$$

og får så målfunktionen Antag, at  $x^k$  er et muligt punkt. Vi lineariserer  $f$  omkring dette punkt, retning eventuelt kan findes.

konstateres, at vi er i et optimalt punkt, og hvorledes en mulig forbedrende iterationer ved hjælp af simplex. Vi skal derfor diskutere, hvorledes det kan For dette problem kan man finde en *mulig* løsning i et endeligt antal hvor  $G$  og  $H$  er matricer. Vi antager at  $f$  er differentabel.

$$(5.38) \quad Hx = c$$

$$(5.37) \quad Gx \leq b$$

$$(5.36) \quad \max f(x)$$

Lad der være givet et problem med lineære begrænsninger

## 5.4 Sekventiel lineær programmering

parametriske programmering giver som konklusion, at hvis  $x^*(b, c)$  er en-tydig for alle  $(a, b, c)$ , er  $x^*(a, b, c)$  en stykvis lineær funktion af  $(a, b, c)$ , og  $f^*(b, c)$  er konkav, stykvis lineær.

Vi kan først bruge ideen med den reducerede gradient. Opdel  $H$  i to delmatricer  $H_B$  og  $H_N$ , hvor  $H_B$  er  $m \times m$  og  $H_N$  er  $(n - m) \times m$ . De

hvor  $Q$  er en symmetrisk  $n \times n$  matrix,  $q$  er en  $n$ -vektor,  $H$  er en  $m \times n$  matrix, og  $c$  er en  $m$ -vektor, vi antager  $m \leq n$ . (Hvad ville konsekvensen af  $m > n$  være?)

(5.42)

$$Hx = c$$

(5.41)

$$\max \left[ \frac{1}{2} x' Q x + q' x \right]$$

Lad os undersøge det kvadratiske-lineære problem

### 5.5.1 Direkte substitution

Vi skal her gennemgå forskellige aspekter af dette. Som det vil fremgå, kan det kvadratiske-lineære problem, ligesom det lineære problem, løses i et endeligt antal iterationer.

seksens af kvadratiske-lineære problemer.

Problemer med kvadratisk målfunktion og lineære begrænsninger er af stor betydning. For det første fordi mange praktiske problemer naturligt kan formuleres på denne måde. For det andet fordi en løsningsstrategi for generelle ulineære (differentiable) problemer er at løse disse ved at løse en

## 5.5 Kvadratisk-lineære problemer

Styrken ved sekventiel lineær programmering er, at den anvender lineær programmering som "arbejdshest", hvilket betyder, at selv meget store problemer kan håndteres. Svagheden er, at der kun anvendes gradientinformation, og at konvergenstakstigheden derfor er lineær.

Dette resultat lægger tydeligvis op til en løsningsstrategi, som kan kaldes *sekventiel lineær programmering*.

Bevis: Overspringes. □

Sætning 5.4.1 Antag for problemet (5.36) - (5.38) at  $f$  er differentiable. Lad  $x^k$  være et muligt punkt i (5.37) - (5.38), og antag  $\delta > 0$ . Hvis (5.37) - (5.40) har løsningen  $x^k$ , så er  $x^k$  et KKT punkt for (5.36) - (5.38). Hvis løsningen til (5.37) - (5.40) ikke er  $x^k$  men  $x^*$ , så er  $(x^* - x^k)$  en mulig, forbedrende retning ud fra  $x^k$ .

$$(5.51) \quad x_B^* = H_B^{-1}(c + H_N A^{-1} a)$$

Nødvendige optimalitetsbetingelser er, at dette antager en stationær værdi, dvs.,  $x_N^* A + a' = 0$ . Hvis  $A$  er negativ definit, er det entydige maksimum derfor givet ved  $x_N^* = -A^{-1}a$ , og af (5.31) side 223 findes dernæst:

$$(5.48) \quad A = a = \alpha$$

$$(5.49) \quad a = \alpha$$

$$(5.50) \quad \alpha =$$

Her er  $A$ ,  $a$  og  $\alpha$  givet selv udtrykkene):

$$(5.47) \quad \frac{1}{2} x_N^* A x_N + a' x_N + \alpha$$

Dette er et kvadratisk udtryk i  $x_N$ , og kan derfor, ved passende definition af  $(n - m) \times (n - m)$  matricen  $A$ ,  $(n - m)$ -vektoren  $a$  og konstanten  $\alpha$  skrives på formen

$$(5.46) \quad \frac{1}{2} (H_B^{-1}(c - H_N x_N))' Q_{BB} (H_B^{-1}(c - H_N x_N)) + \frac{1}{2} x_N' Q_{NN} x_N + \frac{1}{2} (H_B^{-1}(c - H_N x_N))' Q_{BN} x_N + \frac{1}{2} x_N' Q_{NB} (H_B^{-1}(c - H_N x_N)) + \frac{1}{2} x_N' Q_{NN} x_N + \frac{1}{2} x_N' Q_{NB} (H_B^{-1}(c - H_N x_N)) + \frac{1}{2} x_N' Q_{NN} x_N$$

Dette kan så igen indsættes i målfunktionen, der herefter er udtrykt ved  $x_N$  alene: jævnfør (5.31).

$$(5.45) \quad x_B = H_B^{-1}(c - H_N x_N)$$

Idet  $Q$  er symmetrisk, er  $Q_{NB} = Q_{BN}$ . Hvis  $H_B$  kan inverteres, kan vi bruge  $Hx = c$  til at udtrykke  $x_B$  ved  $x_N$ :

$$(5.44) \quad p = \begin{pmatrix} q_B \\ q_N \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_{BB} & Q_{BN} \\ Q_{NB} & Q_{NN} \end{pmatrix}$$

$$(5.43) \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, H = (H_B, H_N)$$

Øvrige størrelser opdeles tilsvarende:

I fortsættelse af definitionen af den reducerede gradient i afsnit 5.2 kunne man passende kalde  $A$  for den *reducerede hessianmatrix*. Vi har således ved direkte manipulation af ligningssystemet fundet løsningen. Bemærk, at det ikke var nødvendigt at forudsætte, at matricen  $Q$  var negativ definit. Den væsentlige forudsætning af denne art var, at matricen  $A$  var negativ definit. Dette illustrerer på udmærket vis en af pointerne i sætning 3.2.2, nemlig at krævet om negativ definit hessianmatrix ikke gælder "i alle retninger", men kun hvad angår det lineære underrum, der defineres af begrænsningerne.

Bemærk endelig, at vi også kan få et eksplicit udtryk for KKT-multiplikatorer  $\mu$  hørende til (5.42) (udled selv udtrykket):

$$(5.52) \quad \mu = H_{-1}^{-B} (q_B + Q_{BB} x_B^* + Q_{BN} x_N^*)' = H_{-1}^{-B} (q_B + Q_{BB} + Q_{BN} A^{-1} a)'$$

## 5.5.2 Løsning med KKT-multiplikatorer

Vi betragter samme problem (5.41) - (5.42) som ovenfor. KKT-betingelserne for dette problem kan skrives

$$(5.53) \quad -Qx + H'H' \mu = q$$

$$(5.54) \quad Hx = c$$

eller tilsvarende

$$(5.55) \quad \begin{pmatrix} -Q & H \\ H' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ c \end{pmatrix}$$

Dette system i variablerne  $(x', \mu)'$  har løsningen

$$(5.56) \quad \begin{pmatrix} x^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q & H \\ H' & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q \\ c \end{pmatrix}$$

såfremt den anførte inverse matrix eksisterer. Vi ser, at løsning af dette lighedssystem på én gang giver os  $x^*$  og  $\mu^*$ .

Betingelserne for eksistens af den inverse matrix er nøje sammenhænge med sætning 3.2.2:

**Hjælpsætning** Lad  $Q$  være en  $n \times n$ , og  $H$  en  $m \times n$  matrix. Antag at  $H$  har rang  $m$  (fuld rang) og at  $Q$  er positiv eller negativ definit på

Vi angiver ulighedsbegrænsning nummer  $j$  ved  $g_j(x) \leq b_j$ . Lad der ved starten af iteration  $k$  være givet et muligt punkt  $x^k$  og en mængde  $A$  af "aktive" indeks  $j$ .  $A$  er en delmængde af  $\{j \mid g_j(x^k) = b_j\}$ . Et muligt punkt kan findes ved hjælp af simplekxmetoden.

Vi løser nu det problem, der kun har lighedsbegrænsninger; disse består af  $Hx = c$  og  $g_j(x) = b_j$ ,  $j \in A$ . Dette problem kan løses som ovenfor beskrevet, hvis målfunktionen på passende måde er negativ definit. Løsningen kaldes  $x^*$ . Desuden bestemmes de tilhørende KKT-multiplikatorer  $(\lambda^*, \mu^*)$ .

$$(5.58)$$

$$Hx = c$$

$$(5.57)$$

$$Gx \leq b$$

Begrænsningerne er givet ved

3.1.2. Ovenstående resultater vedrørte alene problemer med lighedsbegrænsninger. Hvis der er ulighedsbegrænsninger, kan man løse problemet som en sekvens af problemer med lighedsbegrænsninger, som allerede skitseret i eksempel

### 5.5.3 Aktiv sæt metoden

(0, 0). Matricen er derfor ikke-singulær.  $\square$

dette, at  $y = 0$ . Ligningssystemet har dermed en entydig løsning, nemlig første ligning, at  $H'y = 0$ . Da  $H$  blev antaget at have fuld rang, medfører  $Hz = 0$ , til konklusionen at  $z = 0$ . Men  $z = 0$  medfører, sammen med den med antagelsen om at  $Q$  er positiv eller negativ definit på underrummet substitution heri at  $Hz = 0$  giver  $z'Qz = 0$ . Imidlertid fører dette, sammen med antagelsen om at  $Q$  er positiv eller negativ definit på underrummet til  $z'Qz = 0$ ; sub-

$$Hz = 0$$

$$Qz + H'y = 0$$

Bewis. Lad der være givet et  $(z', y)' \in R^{n+m}$ , så

Så er matricen  $\begin{pmatrix} H & Q \\ H' & 0 \end{pmatrix}$  regulær.

$$z'Qz > 0 \text{ eller } z'Qz < 0, \forall z \in R^n, z \neq 0, Hz = 0$$

underrummet  $\{z \in R^n \mid Hz = 0\}$ ; dvs., der gælder



## 5.5.4 Simpleksbaserede metoder

Hvis  $x^* = x^k$ , er der to muligheder: enten er vi i optimum, eller også har vi et forkert aktivt sæt  $A$ . Hvis  $\lambda^* \geq 0$  er vi i optimum, idet KKT betingelserne er opfyldt. Vi kan derfor stoppe. Hvis ikke  $\lambda^* \geq 0$  må vi tage et indeks ud af  $A$ , svarende til en negativ multiplikator. Sædvanligvis tages det indeks  $j$  ud, for hvilket  $\lambda_j^*$  er mindst. Herefter går man til næste iteration med  $x^{k+1} = x^k$ .

Hvis  $x^* \neq x^k$ , er retningen  $(x^* - x^k)$  en forbedrende retning ud fra  $x^k$ . Man skal derfor finde den maksimale skridtlængde  $\alpha^k$ ,  $0 \leq \alpha^k \leq 1$ , således at  $(x^k + \alpha(x^* - x^k))$  er et muligt punkt. Der er her to muligheder. Hvis  $\alpha^k = 1$  sætter man  $x^{k+1} = x^*$  og går til næste iteration. Hvis  $\alpha^k < 1$ , er man stødt ind i en begrænsning  $g_j(x) \leq b_j$ ,  $j \notin A$ . Man inkluderer derfor indeks  $j$  i  $A$  og går til næste iteration med  $x^{k+1} = x^k + \alpha^k(x^* - x^k)$ .

Hvis der for alle  $k$  gælder, at  $\alpha^k \neq 0$ , at  $(\lambda, h)$  er entydige, og at  $\lambda_j \neq 0$ ,  $j \in A$ , vil algoritmen nå optimum i et endeligt antal iterationer,  $\lambda_j > 0$ , hvis  $j$  tages ud af  $A$ , kan et givet aktivt sæt ikke genlages. Da der kun er en begrænset mængde af mulige aktive sæt, må optimum nås i et endeligt antal iterationer. Det er vigtigt at bemærke, at man i hver iteration enten optager højst én i eller fjerner højst én begrænsning fra det aktive sæt.

Hvis  $\alpha^k = 0$  i et punkt, der ikke er optimalt, kan algoritmen cykle. I dette tilfælde må man indføre specielle forholdsregler som i simpleksalgoritmen.

Som det fremgår, kan det kvadratiske-lineære problem løses i et endeligt antal iterationer. Det kan derfor være bekvemt at løse et problem, der ikke er kvadratiske-lineært, ved at løse en sekvens af kvadratiske-lineære problemer.

Læseren kan sikkert lugte, at der er en nær sammenhæng mellem lineære og kvadratiske-lineære problemer. Denne sammenhæng er blevet udnyttet til at løse kvadratiske-lineære problemer ved at vride en simpleksbaseret metode på passende vis. Dette omtales ikke videre i denne version.

Bemærk, at hvis  $A$  er negativ definit, vil der altid være en entydig løsning til (5.62) - (5.64), hvis der er en mulig løsning. Det er altså ikke

dårlig approksimation til  $\Delta^2 f(x^k)$ .  
 Man vælger derfor sædvanligvis  $A$  negativ definit, også hvis dette er en kan det være ønskeligt, at  $A$  er negativ definit eller negativ semidefinit. negativ semidefinit. Også af hensyn til at kunne løse (5.62) - (5.64) effektivt. Af hensyn til at få en forbedrende retnings skal  $A$  være Her er  $A$  en  $n \times n$  matrix der approksimerer  $\Delta^2 f(x^k)$ . Der kan være en

$$\begin{aligned} \max [f(x^k) + \Delta f(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)'A(x - x^k)] & \quad (5.62) \\ Gx \leq b & \quad (5.63) \\ Hx = c & \quad (5.64) \end{aligned}$$

Hvis  $x^k$  er et muligt punkt, skal vi derfor løse

Løsning af kvadratiske problemer er diskuteret i foregående afsnit 5.5. lem, og strategien kaldes så selsagt *sekventiel kvadratisk programmering*. Så skal man løse et kvadratisk programmeringsprob- i en Taylorudvikling. Man kan opnå en bedre tilnærmelse til  $f$  ved at medtage andengradsleddene

$$\begin{aligned} \max [f(x)] & \quad (5.59) \\ Gx \leq b & \quad (5.60) \\ Hx = c & \quad (5.61) \end{aligned}$$

Lad der være givet et problem med lineære begrænsninger

## 5.6 Sekventiel kvadratisk programmering

- Løsningen  $x^*$  er entydlig (sætning 2.5.1)
- $x^*$  er en stykvis lineær funktion af  $(b, c, q)$  (se (5.56))
- $f^*(b, c, q)$  er stykvis kvadratisk, konkav (indsæt  $x^*$  fra (5.56) i målfunktion)
- skyggepriserne  $(\lambda, \mu)$  er stykvis lineære funktioner af  $(b, c, q)$  (se (5.56))

Det fremgår af ovenstående, at hvis målfunktionen er strengt konkav til maksimering ( $Q$  negativ definit), og begrænsningsmatricen bestående af alle aktive begrænsninger har fuld rang, så gælder:

### 5.5.5 Parametriske programmering, følsomhedsanalyse

Blandt problemerne med begrænsninger er dem med de linære begrænsninger de "nemme". Kapitellet har illustreret en række metoder til håndtering af disse. Der er endvidere illustreret, at KKT-betingelserne spiller en vigtig rolle i forbindelse med teoretisk analyse af algoritmer, og også løsløsheds-

analyser er berørt.

## 5.7 Resumé

Det kan vises, at de resultater vedrørende parametriske programmering og løsløshedsanalyse, der er omtalt i forbindelse med kvadratisk programmering, gælder som første ordens tilnærmelser, hvis de indgående funktioner er to gange kontinuert differentiable, og de samme forudsætninger som ovenfor gælder for første, henholdsvis de anden afledede, suppleret med forudsætningerne i sætning 3.2.2.

### 5.6.1 Parametriske programmering, løsløshedsanalyse

Hvis man vælger  $A = \Delta^2 f$ , hvis betingelserne i sætning 3.2.2 er opfyldt, og hvis  $\lambda_i < 0$  for alle  $i$ , hvor  $g_i$  er aktiv i optimum, så vil sekventiel kvadratisk programmering konvergere med superlinær (kvadratisk) hastighed til slut. Metoden er derfor meget attraktiv.

Bevis: Overspringes.  $\square$

**Sætning 5.6.1** Antag for problemet (5.59) - (5.61) at  $f$  er differentiable. Lad  $x^k$  være et muligt punkt i (5.60) - (5.61). Antag at  $A$  er negativ definit. Hvis (5.62) - (5.64) har løsningen  $x^k$ , så er  $x^k$  et KKT punkt for (5.59) - (5.61). Hvis løsningen til (5.62) - (5.64) ikke er  $x^k$  men  $x^*$ , så er  $(x^* - x^k)$  en mulig, forbedrende retning ud fra  $x^k$ .

nødvendigt med en skridtlængdebegrænsning som (5.40) af hensyn til ek-

sistensen af en optimal løsning i (5.59) - (5.61).



# Kapitel 6

## Prisrelaksation

fil: NMB-egrvUhhnl1.tex 2001-09-12 12.16

Udgangspunktet for dette kapitel er relaxationsideen, jævnfør afsnit 2.7. For at opnå, at løsningen til et problem, hvor mulighedsmængden er relaxeret, ligger tilstrækkeligt nær ved løsningen til det oprindelige problem, er det ofte nødvendigt også at ændre målfunktionen. Denne ændring vil ofte have form af, at man *straffer* for overtrædelse af de relaxerede begrænsninger, eller at man betaler en *pris* for denne overtrædelse.

Vi betragter problemet

$$\begin{aligned} \text{(6.1)} \quad & \max f(x) \\ \text{(6.2)} \quad & g(x) \leq b^o \\ \text{(6.3)} \quad & h(x) = c^o \\ \text{(6.4)} \quad & x \in D \end{aligned}$$

dvs., et problem hvor mulighedsmængden  $M$  i hvert fald delvis er specificeret ved uligheds- og/eller lighedsbegrænsninger. Bemærk, at vi i dette kapitel angiver højresiderne ved  $(b^o, c^o)$ , for at kunne skelne mellem forskellige værdier af højresiderne.

Vi indfører nu  $p$  reelle funktioner  $\pi_k(\cdot) : R \rightarrow R, k = 1, p$  svarende til lighedsbegrænsningerne. Ligeledes indfører vi  $m$  reelle funktioner  $\phi_j(\cdot) : R \rightarrow R, j = 1, m$  svarende til ulighedsbegrænsningerne. Det antages overalt i dette kapitel, at alle  $\phi_j$  er ikke-aftagende, dvs.,  $\alpha \geq \beta \Rightarrow \phi_j(\alpha) \geq \phi_j(\beta)$ ; der er ingen tilsvarende krav til  $\pi_k$ .

$$\begin{aligned} (6.7) \quad & \max [f(x)] \\ (6.8) \quad & g(x) \leq b \\ (6.9) \quad & h(x) = c \\ (6.10) \quad & x \in D \end{aligned}$$

Vi skal nu se på forskellige måder at konstruere prismetioner på. Vi betragter som før problemet

## 6.1 Kvadratiske prismetioner

Men som det vil fremgå af det følgende, må implementeringen tilpasses den type af prismetion, der er valgt.

**Trin 3** Er  $x^k$  tilnærmelsesvis mulig? Hvis ja, så sæt  $x^* = x^k$  og stop. Hvis nej, så find bedre prismetioner  $\phi$  og  $\pi$  og gå til Trin 1.

**Trin 2** Find løsningen  $x^k$  til det relaxerede problem (6.5) - (6.6)

**Trin 1** Givet prismetioner  $\phi$  og  $\pi$

En direkte anvendelse af denne idé leder til følgende modelalgoritme: 6.1 er der vis nogle af de almindeligste.

Sædvanligvis vil man vælge simple funktionsudtryk for  $\phi$  og  $\pi$ . I figur 6.1 er der vis nogle af de almindeligste.

For  $x$ -værdier, der tillfredsstiller (6.2) - (6.3), "pris" for overtrædelse. Funktionerne  $\phi$  og  $\pi$  skal desuden være "neutrale"

ikke tillfredsstiller (6.2) - (6.3), eller sørge for, at der betales en passende

erne  $\phi$  og  $\pi$  skal derfor "straffe" i målfunktionen (6.1) for  $x$ -værdier, der

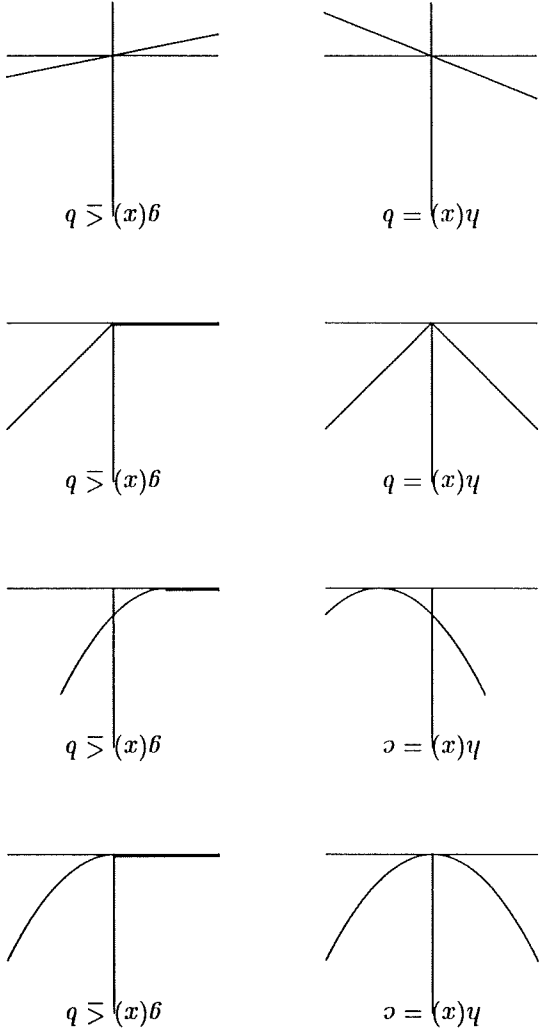
så vil løsningen til (6.5) - (6.6) også være løsning til (6.1) - (6.4). Funktion-

Det lyder vel plausibelt, at hvis funktionerne  $\phi$  og  $\pi$  er valgt "passende",

$$\max_{x \in D} \left[ f(x) - \sum_{j=1}^m (\phi_j(g_j(x)) - \phi_j(b_j)) - \sum_{k=1}^p (\pi_k(h_k(x)) - \pi_k(c_k)) \right] \quad (6.5)$$

Vi indfører nu følgende relaxations af (6.1) - (6.4):

Figur 6.1. Nogle almindelige prisfunktioner til relaxation: kvadratiske, kvadratiske med forskudt topunkt, ab-solutværdien og lineær. Førsteaksene viser  $c$  (venstre søjle) og  $b$  (højre søjle), andenaksene viser prisfunktionerne.



Ved anvendelsen af denne bøddefunktion vil man typisk øge  $\kappa$ , indtil man synes, at løsningen til det relaxserede problem for et givet  $\kappa$  i tilstrækkelig grad ligner en løsning til det oprindelige problem. Jævnfør modelalgoritmen side 236.

Hvis  $D = \mathbb{R}^n$ , har vi i dette tilfælde et differentiablet, ubegrænset problem, som kan løses som beskrevet i kapitel 4. Hvis  $D$  er en boks eller har lineære begrænsninger, kan vi anvende løsningsmetoder som beskrevet i kapitel 5.

Dette problem er ofte nemmere at løse end (6.7) - (6.10). Hvis specielt  $f$ ,  $g$  og  $h$  er differentiable, så er målfunktionen det også. Problemet (6.16) - (6.17) er dog højst en gang differentiablet, idet  $\|g_j(x) - b_j\|_+^2$  kun er en gang differentiablet i punktet  $b_j$ .

$$\max [f(x) - \kappa \|h(x) - c\|_2 - \kappa \|g(x) - b\|_+^2] \quad (6.16)$$

$$x \in D \quad (6.17)$$

Se til højre på figur 6.1. Det således relaxserede problem bliver dermed

$$\|g(x) - b\|_+^2 = \sum_{j=1}^m (\|g_j(x) - b_j\|_+)^2. \quad (6.15)$$

og

$$\|g_j(x) - b_j\|_+ = \begin{cases} 0, & \text{hvis } g_j(x) \leq b_j \\ g_j(x) - b_j, & \text{hvis } b_j \leq g_j(x), \end{cases} \quad (6.14)$$

For uligheder, der svarer til lighedernes, er  $\|g(x) - b\|_+^2$ , hvor for uligheder skal bøddefunktionen være ikke-afgørende. Den bøddefunktion (6.11) - (6.13).

Ideen er, at hvis  $\kappa$  er stor, så er  $h(x_+)$  tæt på  $c$ , hvor  $x_+$  er løsning til

$$x \in D \quad (6.13)$$

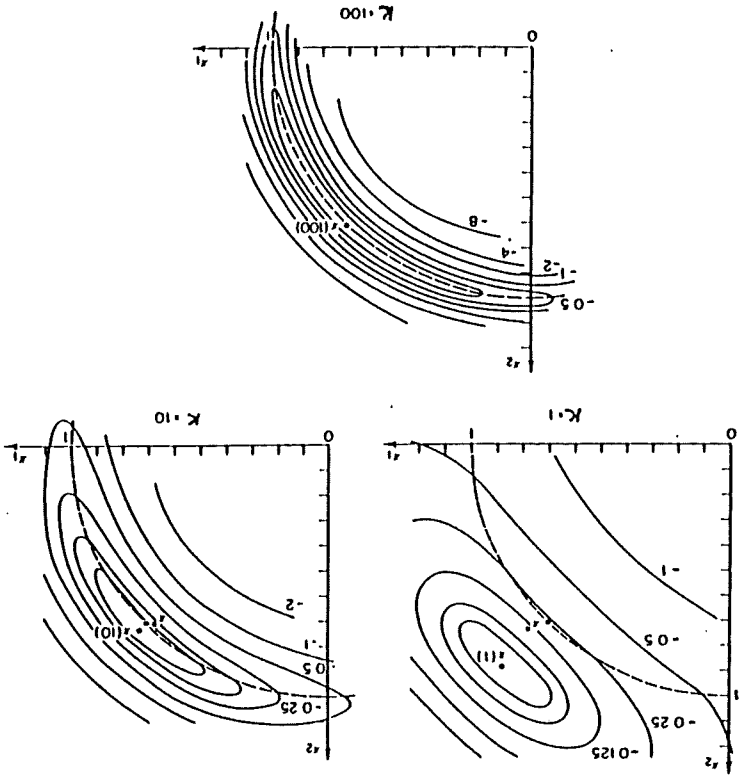
$$g(x) \leq b \quad (6.12)$$

$$\max [f(x) - \kappa \|h(x) - c\|_2] \quad (6.11)$$

figur 6.1. Hermed fås det relaxserede problem fra  $c$  som bøde. Vi anvender  $\kappa \|h(x) - c\|_2$ , hvor  $\kappa < 0$ . Se til venstre på hvor de indgående funktioner forudsættes at være i det mindste kontinuerte.



Figur 6.2. Illustration af relaxation



For  $k = 1$ ,  $k = 10$  og  $k = 100$  fås niveaukurverne som vist neden-

for.

Eksempel:

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$x \in \mathbb{R}^2$$

Det relaxeres til:

$$\max x_1 + x_2 - \mu(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$x \in \mathbb{R}^2$$

**Eksempel 6.1.1** Betragt det triviale problem  $\max\{x\}$ ,  $x = 1$ ,  $x \in R$ . Vi relaxerer dette til  $\max\{x - \kappa(x - 1)^2\}$ . Løsningen til det relaxerede problem er  $x = 1 + 1/(2\kappa)$ . Vi får for  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 2$ ,  $\kappa_3 = 10$  og  $\kappa_4 = 100$  løsningerne henholdsvis 1.5, 1.25, 1.05 og 1.005. Da den optimale løsning er  $x^* = 1$ , ses det, at der er nydelig konvergens mod denne værdi. Det ses også, at  $\|h(x) - c\|$  konvergerer mod 0. Bemærk, at vi ikke for noget  $\kappa$  kan løse det oprindelige problem eksakt ved relaxationen (6.16) - (6.17).

at  $\kappa$ . Men ved hårde begrænsninger bør den ikke anvendes. I forbindelse med bløde begrænsninger kan det være på sin plads at anvende den kvadratiske bødefunktion i forbindelse med en moderat værdi af  $\kappa$ . Men ved hårde begrænsninger bør den ikke anvendes. I forbindelse med bløde begrænsninger kan det være på sin plads at nævnte godt kan tolereres overskredet "lidt".

grensninger; de førstnævnte kræves "eksakt" overholdt, mens de sidst- Det kan være relevant her at skelne mellem "hårde" og "bløde" begrænsningerne overholdt. Dette er illustreret i figur 6.2.

Med voksende  $\kappa$  bliver det vanskeliggere at få en "fornuftig" værdi af målfunktionen, idet der lægges uhenstemsæssig stor vægt på at få begrænsningerne overholdt. Dette er illustreret i figur 6.2.

Indholdet i sætningen er tilsyneladende betryggende. Men ved anvendelse af metoden med kvadratiske bødefunktioner kan man hurtigt komme ud i numeriske vanskeligheder, idet det relaxerede problem med voksende  $\kappa$  bliver dårligere skaleret.

□ **Bevist:** Udeladt.

Hvis  $f$ ,  $g$  og  $h$  er kontinuerte, og  $\kappa_t \rightarrow \infty$  for  $t \rightarrow \infty$ , så er ethvert fortætningspunkt for følgen  $\{x_t\}$  en optimal løsning til (6.7) - (6.10).

$\|g(x_t) - b\|_2^2 + \|h(x_t) - c\|_2^2 \geq \|g(x_{t+1}) - b\|_2^2 + \|h(x_{t+1}) - c\|_2^2$ .

$f(x_t) \geq f(x_{t+1})$  og  $f(x_t) \leq f(x_{t+1})$ , så er  $f(x_t) \leq f(x_{t+1})$ , så er  $f(x_t) \leq f(x_{t+1})$ .

**Sætning 6.1.1** Lad der være givet en følge  $\{\kappa_t\}$ , hvorom det gælder, at  $0 \leq \kappa_t < \kappa_{t+1}$ . Lad  $\{x_t\}$  være den tilsvarende følge af optimale løsninger i (6.16) - (6.17).

Hvis  $x^*$  er en optimal løsning i (6.7) - (6.10), så er  $f(x_t) \leq f(x^*)$ . Endvidere gælder

Man kan ikke i almindelighed forvente, at løsningen  $x^+$  til det relaxerede problem (6.11) - (6.13) eller (6.16) - (6.17) er lig med en eksakt løsning  $x^*$  til det oprindelige problem (6.7) - (6.10). Men ved at gøre  $\kappa$  stor, kan man komme tæt på, som følgende sætning viser.

I overensstemmelse med virkemåden af disse udtryk kaldes anvendelsen af disse prisfunktioner ofte en *barriere-metode*. Konvergens mod en optimal løsning for  $\kappa > 0$  gående mod nul kan vises, ganske som i sætning 6.1.1. Det er dog en forudsætning, at  $g(x) > b$ , så på en måde slæber man stadig rundt på begrænsninger.

Bemærkning: Barrieremetoder og anvendelse af den kvadratiske pr-isfunktion går undertiden under fællesbetegnelsen SUMT (sequential unconstrained minimization technique). De har mistet aktualitet efter en del popularitet i 1970'erne.

Imidlertid kan man ikke bare forkaſte en rimelig idé. I 1990'erne er et af de varme emner *indre punkts metoder* til løsning af lineære problemer. Det kan vises, at nogle af disse kan fortolkes som om de tager Newton-iterationer i en relaxsation af LP-problemet, hvor relaxsationen svarer til (6.19).

$$(6.19) \quad \max_x [f(x) + \kappa \sum_{j=1}^m \ln(b_j - g_j(x))]$$

Man kan tilsvarende anvende logaritmefunktionen, så man får det relaxserede problem

$$(6.18) \quad \max_x [f(x) - \sum_{j=1}^m \frac{b_j - g_j(x)}{\kappa}]$$

Endnu en måde at relaxsere uligheder på er at indføre straffunktionen  $-\kappa/(b_j - g_j(x))$ , så det relaxserede problem for uligheder bliver

## 6.2 Barriererfunktioner

Den oplagte medicin mod de problemer, der er nævnt ovenfor er at forskyde toppunktet for parablen. Dette omtales nedenfor i afsnit 6.5.

Det relaxserede problem er her løst ved analytiske metoder og hånd-regning. I almindelighed må man anvende en numerisk metode til løsning af det relaxserede problem. Efterhånden som parablen  $x - \kappa(x - 1)^2$  bliver spidsere med voksende  $\kappa$ , bliver det numerisk vanskeligere at løse det relaxserede problem.  $\square$

Ved anvendelse af absolutværdifunktionen kan vi ofte få den eksakte løsning til det oprindelige problem. Tilstrækkelige betingelser for at få en optimal

$$\max_{x \in D} [f(x) - \kappa|h(x) - c| - |g(x) - b|] \quad (6.23)$$

(6.24)

Det således relakserede problem bliver dermed

$$\left. \begin{aligned} |g_j(x) - b_j|_+ &= 0 \\ &\text{hvis } g_j(x) \leq b_j \\ &\text{hvis } b_j \leq g_j(x) \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

hvor

$$|g(x) - b|_+ = \sum_{j=1}^m |g_j(x) - b_j|_+ \quad (6.21)$$

og for ulighedsbegrænsninger som

$$|h(x) - c| = \sum_{k=1}^p |h_k(x) - c_k| \quad (6.20)$$

grænsninger som

Man kan ikke forvente, at man med den kvadratiske bødefunktion, eller barrierefunktioner nævnt ovenfor, kan løse problemet eksakt. I denne henseende er absolutværdifunktionen bedre. Den defineres for lighedsbe-

fil: MMBegrU11n2.1ex 2001-09-12 12.16

## 6.3 Absolutværdi-funktionen

**Eksempel 6.2.1** Betragt problemet  $\max x$ ,  $x \leq 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Vi finder det relakserede problem  $\max [x - \kappa/(2 - x)]$ . Dette udtryk har to stationære punkter, nemlig  $x = 2 \pm \sqrt{\kappa}$ . Hvis vi forudsætter, at  $x > 2$ , er løsningen derfor  $x^* = 2 - \sqrt{\kappa}$ . Vi ser, at for  $\kappa \rightarrow 0$  fås  $x^* \rightarrow 2$ ; vi har altså konvergens mod det globale optimum  $x^* = 2$ . Tegn.  $\square$

Denne er "bedst". Ligesom man kan finde det hensigtsmæssigt at løse et ulinært problem som man altså også finde det hensigtsmæssigt at løse et linært problem som en sekvens af ulinære problemer!

Denne, om noget, illustrerer, at der ikke er en metode eller løsningsstrategi,

*KKT-betingelserne.*

*Hvis  $s^* \neq 0$  og hvis  $\gamma \leq \kappa$ , så er  $s^*$  en forbedrende retning for  $f(x)$  –  $\kappa|g(x) - b| + -\kappa|h(x) - c|$  ud fra  $\bar{x}$ . Hvis  $s^* = 0$ , så tilfredsstiller  $(\bar{x}; \lambda^*, \mu^*)$  Lad  $\gamma$  være den numerisk største af værdierne  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_p^*$  er negativt definit.*

**Sætning 6.3.2** Lad  $s^*$  og  $(\lambda^*, \mu^*)$  være løsning til (6.25) – (6.28), hvor  $A$

3.1.3).

også, hvis der er et  $s^*$ , tilhørende KKT-multiplikatorer  $(\lambda^*, \mu^*)$  (sætning der en entydig optimal løsning  $s^*$ . Da begrænsningerne er lineære, så er der Dette er et kvadratisk – lineært problem. Hvis der er en mulig løsning, er

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} s' A s + \Delta f(\bar{x}) s \\ (6.25) \quad & \Delta g(\bar{x}) s \leq b - g(\bar{x}) \\ (6.26) \quad & \Delta h(\bar{x}) s = c - h(\bar{x}) \\ (6.27) \quad & s \in R^n \\ (6.28) \end{aligned}$$

$A$ , og opskriver følgende hjælpeproblem med udgangspunkt i  $\bar{x}$ :  
For problemet med  $D = R^n$  vælger vi en negativt definit  $n \times n$ -matrix  $D$  og opskriver følgende hjælpeproblem med udgangspunkt i  $\bar{x}$ :  
struere en forbedrende retning.

denne ikke er differentiable. Vi skal derfor vise, hvorledes man kan konstruere en forbedrende retning.  
Hvis vi bruger absolutværdifunktionen, er situationen anderledes, idet overnikøbet ubegrænset, hvis  $D = R^n$ . Det er derfor relativt nemt at løse.  
(hvis  $f, g$  og  $h$  er differentiable) med et differentiable problem. Dette er Ved den kvadratiske prisfunktion og barrierefunktionerne arbejder man  
hvis  $D = R^n$ , er det prisrelakserede problem ubegrænset.

(6.24), der må forudsættes nærmere at løse, end det oprindelige problem;  
Anvendelsen af prisfunktionerne kræver løsning af problemet (6.23) –  
ninger er  $f^*$  Lipschitz. Resultatet følger derpå af sætning 6.7.2. □  
Bevis: Bevist, der overspringes, bygger på, at med de anførte forudsæt-

(6.24) også er optimal løsning til (6.7) – (6.10).  
ethvert  $x^* \in X^*$ . Så eksisterer et  $\kappa$ , så en optimal løsning til (6.23) –  
**Sætning 6.3.1** Antag, at  $f, g$  og  $h$  er kontinuert differentiable, at  $D =$

som følger:

løsning  $x^*$  til (6.7) – (6.10) frem som løsning til (6.23) – (6.24) er nemlig

Hvis dette giver et negativt definit  $A$ , er det fint. Hvis ikke, er der to muligheder. Enten modificerer man  $A$ , så den bliver negativ definit (ævnfør

$$(6.33) \quad A = \Delta^2_{xx} L(\bar{x} + \alpha s^*; \lambda^*, \mu^*)$$

næste iteration vil man da ønske at anvende Lad det næste punkt være  $(\bar{x} + \alpha s^*)$ , hvor  $\alpha$  er en positiv skridtlængde. I og KKT-multiplikatorer for (6.25) - (6.28) (tilsvarende for (6.29) - (6.32)). Lad der således være givet et punkt  $\bar{x}$ , og lad  $(s^*, \lambda^*, \mu^*)$  være løsningen.

Hvis man ønsker retninger, der minder om Newton-retninger, må man vælge  $A$ , så den er en tilnærmelse til den anden afledede af Lagrangefunktionen. (6.32) retninger  $s^*$ , der minder om gradientretninger.

Ved dette valg får man ved løsning af (6.25) - (6.28) eller (6.29) - (6.32) et bekvemt valg af matricen  $A$  er  $-\beta I$ , hvor  $I$  er enhedsmatricen, og man kunne kalde *sekventielle kvadratiske programmering*.

Disse resultater danner tydeligvis grundlag for en løsningsstrategi, som I praksis ser man dog bort fra dette.

$s^* = 0$ , uden at KKT-betingelserne for det oprindelige problem er opfyldt. Denne sætning er svagere end den foregående, idet vi nu kan risikere at Bevis: Se Luenberger (1984).  $\square$

$\kappa|g(x) - b| + -\kappa|h(x) - c|$  ud fra  $\bar{x}$ . Hvis  $s^* \neq 0$  og  $\gamma \leq \kappa$ , så er  $s^*$  en forbedrende retnung for  $f(x)$  - Lad  $\gamma$  være den numerisk største af værdierne  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_p^*$ .

den entydige løsning  $(s^*, \eta^*, \eta_+^*, \eta_-^*, \lambda^*, \mu^*)$ . Sætning 6.3.3 Antag, at  $A$  er negativ definit, og at (6.29) - (6.32) har

$$(6.32) \quad 0 \leq \eta, 0 \leq \eta_+, 0 \leq \eta_-, s \in R^n$$

$$(6.31) \quad \Delta h(\bar{x})s + \eta_+ - \eta_- = c - h(\bar{x})$$

$$(6.30) \quad \Delta g(\bar{x})s - \eta \leq b - g(\bar{x})$$

$$(6.29) \quad \max \left[ \frac{1}{2} s^T A s + \Delta f(\bar{x})s - \kappa \left( \sum_{j=1}^m \eta_j + \sum_{k=1}^p (\eta_k^- + \eta_k^+) \right) \right]$$

denne variant af (6.25) - (6.28), som altid har en mulig løsning: Nu er det ikke sikkert, at der er en mulig løsning i (6.25) - (6.28). Vi kan derfor indføre kunstige variable  $\eta \in R^m, \eta_- \in R^p$  og  $\eta_+ \in R^p$ , og løse

Bevis: Se Luenberger (1984).  $\square$

Newtonmetoden, afsnit 4.2.2). Ellers også kan man acceptere  $A$ , dog kun såfremt  $A$  er negativ definit på det underrum, der angives af de lineære-ærede, aktive begrænsninger i punktet  $(\bar{x} + \alpha s^*)$ . I lyset af afsnit 3.2 er det ikke urimeligt at forvente, at dette er tilfældet nær et lokalt optimum.

En modelalgoritme kan skitseres således:

**Trin 1** Givet en stråparаметer  $\kappa$  og et punkt  $x^k$ .

**Trin 2** Vælg en negativ (til maksimering) definit matrix  $A$  og

find en forbedrende retning som løsningen  $s^k$  til

$$\max_{\frac{1}{2}} s'As + \Delta f(x^k), s$$

$$\Delta g(x^k)s \leq b - g(x^k)$$

$$\Delta h(x^k)s = c - h(x^k)$$

(eller eventuelt (6.29) - (6.32))

**Trin 3** Er  $\kappa$  større end den største numeriske værdi af nogen

KKT-multiplikator? Hvis ja, så gå til Trin 4. Hvis nej, så

øg  $\kappa$  og gå til Trin 2.

**Trin 4** Find en skridtlængde  $\alpha^k$ , så

$$f(x^k + \alpha^k s^k) - \kappa | \Delta g(x^k + \alpha^k s^k) - b | + - \kappa | h(x^k + \alpha^k s^k) - c | >$$

$$f(x^k) - \kappa | g(x^k) - b | + - \kappa | h(x^k) - c | .$$

**Trin 5** Sæt  $x^{k+1} = x^k + \alpha^k x^k$ .

**Trin 6** Er KKT-betingelserne tilnærmelsesvis opfyldt? Hvis

ja, så sæt  $x^* = x^{k+1}$  og stop. Hvis nej, så øg  $k$  med 1 og

gå til Trin 2.

Det ses, at udgangspunktet godt nok er relaxation. Men i sin udform-

ing ligger algoritmen nærmest ved sekventiel kvadratisk programmering, se afsnit 5.6. Relaxationsresultatet bruges til at sikre, at der er en passende

afvejning af overholdelse af begrænsninger og forbedring af målfunktionen.

Det modificerede problem har, i modsætning til alle andre metoder nævnt i dette kapitel, lige så mange begrænsninger som det oprindelige pro-

blem. Til gengæld er de simple (linære), og målfunktionen er pæn (kvadratisk).

Hvis betingelserne i sætning 3.2.2 er opfyldt, og ovennævnte valg af  $A$  tages,

kan der opnås superlinær konvergenstilhøjhed.

Til ethvert  $(\lambda, \mu)$  hører en optimal målfunktionsværdi i (6.36), såfremt (6.34) - (6.35) har en optimal løsning  $x^*, \lambda^*, \mu^*$ . Denne målfunktionsværdi beteg-

$$L(x; \lambda, \mu) \equiv f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j [g_j(x) - b_j^0] - \sum_{k=1}^r \mu_k [h_k(x) - c_k^0] \quad (6.36)$$

Lad os betegne målfunktionen i (6.34) - (6.35) med  $L(x; \lambda, \mu)$ :

det mindste overtal.

Nøglen til svaret ligger i observationen, at løsningen til (6.34) - (6.35) altid giver et overtal. Vi vil derfor omformulere opgaven til den at finde

der tillader at løsningen til (6.34) - (6.35) også er løsning i (6.7) - (6.10)? Hvis vi antager, at problemet faktisk kan løses ved Lagrange-relaktion, så

## Howledes findes $(\lambda, \mu)$ ? Dualfunktionen

optimalitetbetingelser.

Anvendelse af lineære funktioner som bødefunktioner - dvs., anvendelse af Lagrange-funktionen som målfunktion i det relaxerede problem - kalder vi *Lagrange-relaksation*. Vi har i sætning 3.3.2 givet nødvendige

værdi for parameteren  $\kappa$ .

$(\lambda, \mu)$ , modsat de tidligere nævnte metoder, hvor  $\infty$  eller 0 var en "god" Lagrange-funktionen kan man ikke på forhånd angive "gode" værdier for Løsningen på dette problem er dog, at så må  $\mu$  jo sænkes. Heraf ses, at for målfunktionen, og dermed trække løsningen væk fra opfyldelse af  $h(x) = c$ . Hvis f.eks.  $\mu < 0$ , så vil værdier af  $x$ , hvor  $h(x) > c$ , jo tælle positivt i

Umiddelbart ser det ikke fornuftigt ud at anvende lineære bødefunktioner. definerede Lagrange-funktion.

Vi bemærker, at målfunktionen svarer ganske til den tidligere (afsnit 3.3)

$$\max [f(x) - \lambda(g(x) - b)] - \mu[h(x) - c] \quad (6.34)$$

$$x \in D \quad (6.35)$$

Endnu en mulighed for prisløsning er lineære funktioner. Med  $\lambda \in R^m, \lambda \geq 0$ , og  $\mu \in R^p$  som *rækkevektorer* bliver det relaxerede problem

## 6.4 Lagrange-relaksation



C Hvis løsningen  $x_{\lambda, \mu}^*$  i (6.37) er entydig, er  $L(\lambda, \mu)$  kontinuert differenttabel i punktet  $(\lambda, \mu)$ , og gradienten er lig med subgradienten.

hvor  $x_{\lambda, \mu}^*$  er en vilkårlig løsning til (6.37) for dette  $(\lambda, \mu)$ .

$$((b^o - g(x_{\lambda, \mu}^*)), (c^o - h(x_{\lambda, \mu}^*)))'$$

B En subgradient til  $L(\lambda, \mu)$  i punktet  $(\lambda, \mu)$  er givet ved

A Dualfunktionen  $L(\lambda, \mu)$  er konveks.

Sætning 6.4.1 Antag, at  $D$  er afsluttet, begrænset og ikke-tom, og at  $f, g$  og  $h$  er kontinuerte. Der gælder da:

Nedenstående sætninger opsummerer egenskaber ved dualfunktionen.

Endvidere gælder det bemærkelsesværdige, at dualfunktionen  $L(\lambda, \mu)$  til et maksimeringsproblem er konveks, og dermed er det måske alligevel ikke så håbløst at løse (6.38) - (6.40). Under visse betingelser kan vi endvidere angive både første og anden afledede af  $L(\lambda, \mu)$ .

Dette problem kaldes *vi dualproblemet*. Dualproblemet er i almindelighed vanskeligt at løse. Det ses, at målfunktionen må forventes at være kompliceret; i hvert fald er den kun indirekte givet, som løsning til (6.37). Dualproblemet har dog en meget simpel mulighedsræmsænge:  $\mu$  er ubegrænset, og  $\lambda$  er blot begrænset til at være ikke-negativ.

- (6.38)
- (6.39)
- (6.40)

$$\min L(\lambda, \mu)$$

$$\lambda \in R^m, \lambda \geq 0$$

$$\mu \in R^p$$

Vi kan opfatte  $L(\lambda, \mu)$  som en funktion  $L : R^{m+p} \rightarrow R$ , og som sådan kaldes *vi den dualfunktionen*.  $L(\lambda, \mu)$  er for enhver værdi af  $(\lambda, \mu)$  et overtal til (6.7) - (6.10). Opgaven at finde "gode"  $(\lambda, \mu)$  kan vi derfor formulere som følgende optimeringsproblem, hvor variablerne er  $(\lambda, \mu)$ :

$$L(\lambda, \mu) \equiv L(x_{\lambda, \mu}^*; \lambda, \mu) \equiv \max L(x; \lambda, \mu)$$

$$x \in D$$

nes  $L(\lambda, \mu)$ :

- $(\Delta g(x_{\lambda, \mu}^*), \Delta h(x_{\lambda, \mu}^*))$  har maksimal rang.
- $\Delta^2_{xx} L(x; \lambda, \mu)$  er negativ definit i punktet  $(x_{\lambda, \mu}^*, \lambda, \mu)$ ,
- $f, g$  og  $h$  er to gange kontinuert differentiable,
- $D = \mathbb{R}^n$

**Sætning 6.4.2** Antag for problemet (6.34) - (6.35), at

findes i Bazaraa og Shetty (1979), p. 192. □  
 er konveks, så er funktionen kontinuert differentiable. Beviset for D) kan  
 entydig, så er funktionen differentiable, og hvis en differentiable funktion  
 vi har hermed vist A). C) følger af, at hvis subgradiënten til en funktion er  
 Da  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  var villkärilig, følger det af afsnit 2.4.2, at  $L(x^*, \lambda, \mu)$  er konveks, og  
 Dette viser, at  $L(x^*, \lambda, \mu)$  i punktet  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  har subgradiënten som anført i B).

$$\begin{aligned}
 &= L(x^*, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) + (\lambda - \bar{\lambda})(b_0 - g(x)) + (\mu - \bar{\mu})(c_0 - h(x)) \\
 &\quad - \bar{\lambda}[g(x) - b_0] - \bar{\mu}[h(x) - c_0] \\
 &\quad + \bar{\lambda}[g(x) - b_0] + \bar{\mu}[h(x) - c_0] \\
 &= f(x) - \lambda[g(x) - b_0] - \mu[h(x) - c_0] \\
 &\geq f(x) - \lambda[g(x) - b_0] - \mu[h(x) - c_0] \\
 &= L(x^*, \lambda, \mu) = f(x) - \lambda[g(x) - b_0] - \mu[h(x) - c_0]
 \end{aligned}$$

Vi finder:

en tilhørende løsning af det relaxerede problem.  
 af det relaxerede problem. Lad  $(\lambda, \mu)$  være villkärilig, og lad  $x = x_{\lambda, \mu}$  være  
 Bevis: Lad  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  være villkärilige, og lad  $\bar{x} = x_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}}^*$  være en tilhørende løsning

$(\lambda, \mu)$ .  
 hvor  $X(\lambda, \mu)^*$  er mængden af optimale løsninger i (6.37) for dette

$$\{ (b_0 - g(x_{\lambda, \mu}^*), c_0 - h(x_{\lambda, \mu}^*)) : x_{\lambda, \mu}^* \in X(\lambda, \mu)^* \}$$

**D** Subdifferentialet til  $L(x^*, \lambda, \mu)$  i punktet  $(\lambda, \mu)$  er mængden

Ved anvendelse af Newton eller kvasinewton iterationer er det muligt at opnå superlineær konvergenstashtighed, jævnfør sætning 6.4.2. Hvis løsningen i det relaxserede problem ikke er entydig, er dualfunktionen ikke nødvendigvis differentiable (jævnfør sætning 6.4.1). I dette tilfælde kan man ikke nødvendigvis finde en forbedrende retning for dualfunktionen, som forudsat i Trin 2 og Trin 3. Man kan i dette tilfælde anvende en subgradientmetode, jævnfør afsnit 4.2.4.

Det fremgår, at det er relativt nemt at beregne (sub)gradienten. Det er ikke i almindelighed så nemt at beregne de anden afledede (hvis de eksisterer). Et særligt simpelt tilfælde er, hvis målfunktionen er additivt separabel og begrænsningerne er lineære (regn selv efter).

- Trin 1** Givet  $(\lambda^k, \mu^k)$  og tilhørende relaxseret løsning  $x^k$ .
- Trin 2** Find en (for dualfunktionen) forbedrende retning  $(\sigma_1, \sigma_2)$  for  $(\lambda, \mu)$ , f.eks. som en gradient retning.
- Trin 3** Find en skridtlængde  $\alpha^k$  så Lagrangefunktionen forbedres:  $L(\lambda^k + \alpha^k \sigma_1^k, \mu^k + \alpha^k \sigma_2^k) > L(\lambda^k, \mu^k)$ .
- Trin 4** Sæt  $(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) = (\lambda^k + \alpha^k \sigma_1^k, \mu^k + \alpha^k \sigma_2^k)$ .
- Trin 5** Er den til  $(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})$  hørende relaxserede løsning  $x^{k+1}$  tilnærmelsesvis mulig, og er komplementært slæk betingelserne tilnærmelsesvis opfyldt? Hvis ja, så sæt  $x^* = x^{k+1}$  og stop. Hvis nej, så søg  $k$  med 1 og gå til Trin 1.

En modelalgoritme kan skitseres således:

kan kontrolleres med de tilstrækkelige betingelser i sætning 3.3.1.

$(\lambda^*, \mu^*)$  en optimal løsning til (6.7) - (6.10). Hvor vidt dette er tilfældet, er heldig, så er  $x(\lambda^*, \mu^*)$  (dvs., en optimal løsning til (6.37) for  $(\lambda, \mu) =$  entydigt), som minimerer  $L(\lambda, \mu)$  over  $\lambda \in R^m, \lambda \geq 0, \mu \in R^p$ . Hvis man Den optimale løsning til (6.38) - (6.40) er et  $(\lambda^*, \mu^*)$  (ikke nødvendigvis Sætningerne giver en række hjælpemidler til løsning af (6.38) - (6.40).

Bewis. Se Bertsekas (1982) p. 155.  $\square$

$$M = \Delta_{\lambda, \mu}^x L(x_{\lambda, \mu}^*; \lambda, \mu).$$

hvor

$$-(\Delta g(x_{\lambda, \mu}^*), \Delta h(x_{\lambda, \mu}^*)) M^{-1} (\Delta g(x_{\lambda, \mu}^*), h(x_{\lambda, \mu}^*))'$$

Så er  $L(\lambda, \mu)$  to gange kontinuert differentiable med hensyn til  $(\lambda, \mu)$ , og hessianmatricen er givet ved

## Det duale gab

Hvis  $D$  er afsluttet og begrænset, hvis der er en mulig løsning, og hvis  $f$ ,  $g$  og  $h$  kontinuerlige, så har både (6.37) og (6.38) - (6.40) optimale løsninger. Det er imidlertid ikke sikkert, at nogen løsning  $x^*, \lambda^*, \mu^*$  tilfredsstiller betingelserne, så  $x^*, \lambda^*, \mu^*$  også løser (6.7) - (6.10).

Vi kan indføre et mål for, hvor meget der mangler, for at der er overensstemmelse. Vi definerer *gab* (eller *det duale gab*)  $G$  således

$$G = L(x^*; \lambda^*, \mu^*) - f(x^*). \quad (6.41)$$

Vi ser, at  $G$  er differensen mellem den optimale duale målfunktionsværdi, beregnet af (6.38) - (6.40), og den optimale primale målfunktionsværdi  $f(x^*)$ . Vi ser, at  $G \geq 0$  ifølge sætning 6.7.1.

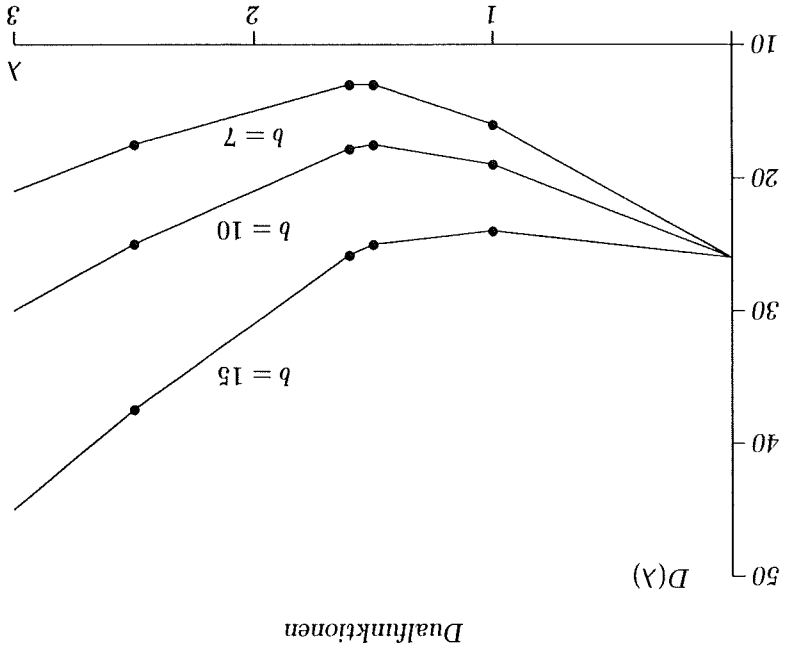
En tilstrækkelig betingelse for at et  $x^*$ , der er muligt i (6.7) - (6.10), også er optimalt, er ifølge sætning 2.7.1, at  $f(x^*) = L(x^*; \lambda^*, \mu^*)$ , eller at  $G = 0$ . På den anden side er betingelsen  $G = 0$  også nødvendig for at vi kan løse problemet ved Lagrangereleksation.

### Sætning 6.4.3 A: $G \geq 0$ .

B: Problemet (6.7) - (6.10) kan løses ved Lagrangereleksation hvis og kun hvis  $G = 0$ .  $\square$

**Eksempel 6.4.1** Vi fortsætter eksempel 3.3.4. Lad os løse dualproblemet. I eksempel 3.3.4 kunne vi give den fuldstændige løsning, fordi dette er et lille håndregneeksempel. Vi håndregner videre, og opstiller dualfunktionen fuldstændigt, for tre forskellige  $b$ :

$\lambda$	$g(x(\lambda)^*)$	$D(\lambda)$
$0 \leq \lambda < 1$	17	$b = 7$
$\lambda = 1$	17 og 13	$26 - 10\lambda$
$1 < \lambda < 1.5$	13	$22 - 6\lambda$
$\lambda = 1.5$	13 og 7	$22 - 3\lambda$
$1.5 < \lambda < 1.6$	7	17.5
$\lambda = 1.6$	7 og 2	$3 + 3\lambda$
$1.6 < \lambda < 2.5$	2	$17.8$
$\lambda = 2.5$	2 og 0	$5 + 5\lambda$
$2.5 < \lambda$	0	$7\lambda$



Figur 6.3. Dualfunktionen for 3 forskellige højresider

Lad os systematisere dette. Vi skal skrive forskydnngen lidt an-  
 løsning selv med en lille værdi af  $\kappa$ . Dette er meget attraktivt.  
 Vi ser altså, at ved en sådan forskydning kan vi opnå den eksakte  
 (regn selv efter).

Her er  $t$  forskydningen af parablens topunkt. Hvis vi med  $\kappa = 1$   
 vælger  $t = -0.5$  ses, at løsningen til (6.43) faktisk bliver  $x^* = 1$  som ønsket

$$\max\{x - \kappa(x - 1 - t)^2\}, x \in H \quad (6.43)$$

som eksempel 6.1.1, vil vi derfor løse

$$\max\{x - \kappa(x - 1)^2\}, x \in H \quad (6.42)$$

stedet for at løse

blen, ville vi kunne opnå den korrekte løsning, selv med en flad parabel. I  
 Det skulle være klart, at hvis vi kunne forskyde topunktet for para-

stort  $\kappa$  for at opnå en rimelig nøjagtig løsning.

Som det fremgår af eksempel 6.1.1, er det nødvendigt at anvende et  
 den kvadratiske bødefunktion omtalt i starten af afsnit ??.

Dette kan dog delvis omgås, hvis man kombinerer Lagrangereleksation med  
 Lagrangereleksation, at de indgående funktioner kræves konkave/konvekse/linære

Det kan selvfølgelig være en væsentlig ulempe i forbindelse med La-  
 g: NMB-egrluina3.1ex

## 6.5 Lineære plus kvadratiske funktioner

Lagrangereleksation.  $\square$   
 itivt dualt gab, i overensstemmelse med, at vi kunne løse problemet ved

Med  $b = 7$  får vi  $D(\lambda^*) = 13 = f^*(5)$ . Der er altså ikke noget pos-  
 ved Lagrangereleksation.

positivt dualt gab, i overensstemmelse med, at vi ikke kunne løse problemet

Vi ser, at med  $b = 10$  er  $D(\lambda)^* = 17.5 < 14 = f^*(10)$ . Der er altså et  
 være kræsk i de punkter, for hvilke  $x(\lambda)^*$  ikke er entydig.

linær, og dermed stykvis differentiable. Der kan ifølge sætning 6.4.1 kun  
 Det ses af figur 6.3, at  $D(\lambda)$  er konvex. Endvidere er  $D(\lambda)$  stykvis

- Trin 0** Vælg  $\kappa > 0$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu, \alpha > 0$ .
- Trin 1** Løs det relaxerede problem, kald løsningen  $x^*, \lambda^*, \mu^*$ .
- Trin 2** Hvis  $h(x^*, \lambda^*, \mu^*) = c$ ,  $g(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leq b$ , og  $\lambda(g(x^*, \lambda^*, \mu^*) - b) = 0$  så stop, ellers gå til trin 3.
- Trin 3** Hvis det ikke ser ud til, at der er konvergens, så øg  $\kappa$  og/eller reducer  $\alpha$  (dog skal forsat  $\alpha > 0$ ). Gå til Trin 4.

**Bævis. Udeladt. □**

Hvis der anvendes den udvidede Lagrangefunktion (linær plus kvadratisk), skal modelalgoritmen fra afsnit 6.4 suppleres med en ydre løkke, der om nødvendigt øger vægten  $\kappa$  af det kvadratiske bidrag. En modelalgoritme kan skitseres som følger:

**Sætning 6.5.1** *Antag at alle indgående funktioner er 2 gange kontinuert differentiable, at anden ordens betingelserne for at  $x^*$  er et entydigt, lokalt optimum (sætning 3.2.2) gælder, at  $D = \mathbb{R}^n$ , og at der gælder streng komplementaritet. Så eksisterer der  $(\lambda^*, \mu^*)$ ,  $\lambda^* \geq 0$ , og et  $\kappa^* \geq 0$ , så  $x^*$  er et entydigt lokalt maksimum for  $L(x; \lambda^*, \mu^*, \kappa^*)$ .*

kan da formuleres således:

Betingelserne for, at vi kan få  $x^*$  frem som et lokalt optimum ved anvendelse af den udvidede Lagrangefunktion i forbindelse med relaxsation, er

$\lambda_j$  gælder streng komplementaritet, hvis  $\lambda_j > 0$  for alle  $j \in B(x^*)$ ; her er muleres som antagelsen om streng komplementaritet. Vi siger, at der aktive i  $x^*$ , også er det for alle  $x$  i nærheden af  $x^*$ . Dette krav for der indgår ulighedstrestriktioner, er vi nødt til at antage, at dem, der er Lad os nu undersøge, om vi kan løse problemet på denne måde. Hvis prisfunktion fra afsnit 6.1, blot med et forskudt topunkt.

Det er nemt nok at se, at (6.44) kan fortolkes som den kvadratiske

$$L(x; \lambda, \mu; \kappa) = (6.44) \quad f(x) - \lambda[g(x) - b] - \kappa \|g(x) - b\|_2^+ - \mu[h(x) - c] - \kappa \|h(x) - c\|_2^2$$

*Lagrangefunktion*

Vi betragter et problem (6.7) - (6.10) og antager, at alle indgående funktioner er to gange kontinuert differentiable. Vi definerer den udvidede

$$\max f(x) \\ g(x) \leq b$$

(6.45)  
(6.46)

Vi betragter problemet

Vi så i afsnittet om Lagrange-relaksation et samspil mellem maksimering og minimering. Dette uddybes her i form af en diskussion om *dualitet*. Som det vil fremgå, er mange af resultaterne blot omformuleringer af tidligere resultater.

## 6.6 Dualitet

Der er en væsentlig grund til at undgå de kvadratiske led, hvis det er muligt. Den er, at hvis den oprindelige målfunktion har en vis struktur, så vil denne struktur sædvanligvis forsvinde med indførelsen af de kvadratiske led. Dette gælder således det vigtige tilfælde, hvor  $f$ ,  $g$  og  $h$  er additive separable. I dette tilfælde er det ofte overmåde nemt at maksimere den sædvanlige Lagrange-funktion ved at udnytte separabiliteten, men formentlig vanskeligt at maksimere den udvidede Lagrange-funktion. Se afsnit 3.4.

Den udvidede Lagrange-funktion, kan ses som et middel til at opnå "konvekshitet". Indførelsen af de kvadratiske led, når vi går fra Lagrange-funktionen til Det er muligt at opnå superlinæer konvergenstabilitet, jævnfør sætning 6.4.2.

Stopbetingelserne i Trin 2 ses at svare nøje til betingelserne som de kendes fra Lagrange-relaksation. Valg af  $\kappa$  forbliver en kunst. Håbet er, at man fra starten i Trin 0 kan vælge en værdi, så der på den ene side kan opnås konvergens (dvs.,  $\kappa$  skal være stor nok) og så der på den anden side er en rimelig balance mellem målfunktion og begrænsninger (dvs.,  $\kappa$  skal ikke være for stor).

I Trin 3 skal  $\alpha$  vælges, så dualfunktionen forbedres. Læseren genkender  $\alpha$  som en skridtlængde, der skal sættes passende lille i Trin 3. Også projektionsideen anvendt på  $\lambda$  i Trin 4 for at holde  $\lambda$  ikke-negativt genkendes fra tidligere, afsnit 4.2.4 og 5.1.

Trin 4 Sæt  $\mu := \mu + \alpha(h(x_{\lambda}^*) - c)$  og  $\lambda := \lambda + \alpha(g(x_{\lambda}^*) - b)$ . Hvis nogle komponenter i  $\lambda$  er negative, så sæt dem til 0. Gå til trin 1.



Bevis: Overspringes. □  
 Det er således lige så naturligt at tale om at (6.50) - (6.51) og (6.52) - (6.53) er hinandens duale, som at (6.45) - (6.48) og (6.50) - (6.51) er det. Med henblik på næste sætning erstatter vi i (6.50) og (6.51) og (6.52) - (6.53) "min" med "inf" og "max" med "sup". Desuden definerer vi, at

**Sætning 6.6.1**  $x^*$  er en optimal løsning til (6.45) - (6.48) hvis og kun hvis der er et  $(\lambda^*, \mu^*)$ , så  $L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  er en optimal løsning i (6.52) - (6.53). I dette tilfælde er  $f(x^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ .

Det interessante er nu, at det således definerede primalproblem er det oprindelige problem i følgende betydning:

$$\begin{aligned} \max L(x^*; \lambda^*) \\ x \in D \end{aligned} \quad (6.53)$$

Hvis vi betegner den optimale værdi i det indre problem (min-problemet) ved  $L(x^*; \lambda^*)$  kan vi tilsvarende skrive primalproblemet (6.52) som

$$\max_{x \in D} [ \min L(x; \lambda, \mu) \mid \lambda \in R^m, \mu \geq 0 ] \quad (6.52)$$

Lad os definere *primalproblemet* ved ombytning af "min" og "max":

$$\min L(\lambda, \mu; \lambda, \mu), \quad \lambda \in R^m, \lambda \geq 0, \mu \in R^p \quad (6.51)$$

eller tilsvarende

$$\begin{aligned} \min [ \max_{x \in D} L(x; \lambda, \mu) ] \\ \lambda \in R^m, \lambda \geq 0 \\ \mu \in R^p \end{aligned} \quad (6.50)$$

Lad os definere *dualproblemet*

$$L(x; \lambda, \mu) = f(x) - \lambda(g(x) - b) - \mu(h(x) - c) \quad (6.49)$$

og definerer som før Lagrangefunktionen ved introduktion af vektorerne  $\lambda \in R^m, \lambda \geq 0$ , og  $\mu \in R^p$ :

$$\begin{aligned} h(x) = c \\ x \in D \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$(6.48)$$

$$\max [-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2]$$

### Eksempel 6.6.1

Belis: Overspringes.  $\square$

**Sætning 6.6.3** ( $x^*$ ;  $\lambda^*$ ,  $\mu^*$ ) er et saddehpunkt for  $L$ , hvis og kun hvis  $x^*$  er primalt mulig, ( $\lambda^*$ ,  $\mu^*$ ) er dualt mulig, og  $L(x^*$ ;  $\lambda^*$ ,  $\mu^*$ ) =  $L(\lambda^*$ ;  $\lambda^*$ ,  $\mu^*$ ).

Vi får da følgende resultat, der viser, at hvis vi finder et saddehpunkt, så har vi løst såvel primal- som dualproblemerne, jfr. sætning 6.6.2.D:

$$L(x; \lambda^*, \mu^*) \leq L(x^*; \lambda^*, \mu^*) \leq L(\lambda^*; \lambda^*, \mu^*) \quad (6.55)$$

$$x \in D, \lambda \in R^m, \lambda \geq 0, \mu \in R^p \quad (6.56)$$

således at

dehpunktssbetragtninger på  $L$ . Et saddehpunkt på  $L$  er defineret som et  $(x^*$ ;  $\lambda^*$ ,  $\mu^*$ ),

Belis: Overspringes.  $\square$

- Hvis der er et primalt muligt  $x^*$  og et dualt muligt  $(\lambda^*$ ,  $\mu^*)$ , så  $L(\lambda^*$ ;  $\lambda^*$ ,  $\mu^*) = L(x^*$ ;  $\lambda^*$ ,  $\mu^*)$ , så er  $x^*$  en optimal løsning i primalproblemet og  $(\lambda^*$ ,  $\mu^*)$  er en optimal løsning i dualproblemet.
- $L(x; \lambda^*) \leq L(x; \lambda, \mu)$ ,  $x \in D$ ,  $\lambda \geq 0$
- Hvis  $\sup f(x) = \infty$ ,  $x$  mulig i primalproblemet, så har dualproblemet ingen mulig løsning.
- Hvis  $\inf L(\lambda^*; \lambda, \mu) = -\infty$ ,  $\lambda$  mulig i dualproblemet, så har primalproblemet ingen mulig løsning.

### Sætning 6.6.2 Betragt primal- og dualproblemerne.

og stærk dualitet.

Vi får da følgende resultater, der belyser relationerne mellem primal- og dualproblemerne. Her kaldes delene  $C$  og  $D$  ofte for henholdsvis svag og stærk dualitet.

Vi får da følgende resultater, der belyser relationerne mellem primal- og dualproblemerne. Her kaldes delene  $C$  og  $D$  ofte for henholdsvis svag og stærk dualitet.

Vi får da følgende resultater, der belyser relationerne mellem primal- og dualproblemerne. Her kaldes delene  $C$  og  $D$  ofte for henholdsvis svag og stærk dualitet.

Heraf ses, at det eneste stationære punkt er  $\lambda^* = 1$ , der derfor er dualproble-  
 lems entydige løsning. Det følger heraf, at  $L(x^*; \lambda^*) = -1/2$ . Af (1) og  
 (2) kan vi finde  $x(\lambda^*) = (0.5, 1.5)'$ .

$$\Delta L(x^*; \lambda) = \begin{cases} \lambda - 1 & \text{for } 0 < \lambda < 2 \\ \lambda/2 & \text{for } 2 \leq \lambda \leq 4 \\ 2 & \text{for } 4 \leq \lambda \end{cases}$$

Vi går nu over til anden del af løsningen af dualproblemet. Dette  
 og da  $x(\lambda)^*$  desuden var entydig, er  $L(x^*; \cdot)$  differentiable, jfr. sætning 6.4.1.  
 Det ses af figur 6.4 (og det kan eftervises analytisk), at  $L(x^*; \cdot)$  er konvex,  
 kræver, at  $L(x^*; \cdot)$  minimeres over  $\lambda \geq 0$ . Da  $L(x^*; \cdot)$  er konvex og differen-  
 tiabel, og  $\{\lambda \in R \mid \lambda \geq 0\}$  er konvex, findes minimum, hvor  $L(x^*; \lambda) = 0$   
 eller i punktet  $\lambda = 0$ . Vi finder ud fra ovenstående udtryk for  $L(x^*; \lambda)$ , at

$$L(x^*; \lambda) = \begin{cases} \lambda^2/2 - \lambda & \text{for } 0 \leq \lambda < 2 \\ \lambda^2/4 - 1 & \text{for } 2 \leq \lambda \leq 4 \\ 2\lambda - 5 & \text{for } 4 \leq \lambda \end{cases}$$

Heraf følger ved indsættelse i L:

$$(2) \quad x_2^* = \begin{cases} 0 & \text{for } 4 \leq \lambda \\ 2 - \lambda/2 & \text{for } 0 \leq \lambda \leq 4 \end{cases}$$

$$(1) \quad x_1^* = \begin{cases} 1 - \lambda/2 & \text{for } 0 \leq \lambda \leq 2 \\ 0 & \text{for } 2 \leq \lambda \end{cases}$$

den entydige løsning  
 $-2(x_2 - 2) - \lambda$ , og vi finder af de nødvendige og tilstrækkelige betingelser  
 der kræves  $\lambda \geq 0$ . Vi finder  $\partial L/\partial x_1 = -2(x_1 - 1) - \lambda$  og  $\partial L/\partial x_2 =$   
 Lad os løse dualproblemet. Dette kræver løsning af en boksmodel idet  
 dualproblemet er da  $\{\lambda \in R \mid \lambda \geq 0\}$ .  
 antager  $\sup L$ ,  $x \in D$ , endelige værdier for alle  $\lambda$ . Mulighedsmængden for  
 maksimum med hensyn til  $x$ , hvor  $\nabla_x L = 0$ , uanset værdien af  $\lambda$ . Derfor  
 Vi bemærker, at  $L$  er konkav med hensyn til  $x$  og har et ubegrænset  
 Vi finder  $L(x; \lambda) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 - \lambda(x_1 + x_2 - 2)$ .

$$x \in D = \{x \in R^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

Der ses, at  $(x^*, \lambda^*) = ((0.5, 1.5), 1)$  er et saddelepunkt for Lagrange-funktionen, og  $(x^*, \lambda^*)$  er derfor en optimal løsning, jfr. sætning 6.6.3.  $\square$

$$L(x^*; \lambda) \leq -(0.5 - 1)^2 - (1.5 - 1)^2 - \lambda(0.5 + 1.5 - 2) = -1/2 - \lambda$$

$$-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 - 1((x_1 + x_2 - 2) = L(x; \lambda^*) \leq L(x^*; \lambda^*) = -1/2$$

Vi kan endelig konstatere, at for alle  $x \in D$  og  $\lambda \geq 0$  er

$\lambda^*$  en dual optimal løsning.

Vi ser altså, at  $x^*$  er primalt mulig,  $\lambda^*$  er dualt mulig, og  $L(x^*; \lambda^*) = L(x^*; \lambda^*) = -1/2$ .

Vi ser, at der er uendeligt mange optimale  $\lambda^*$ , nemlig alle  $\lambda \geq 0$ . Indsættes

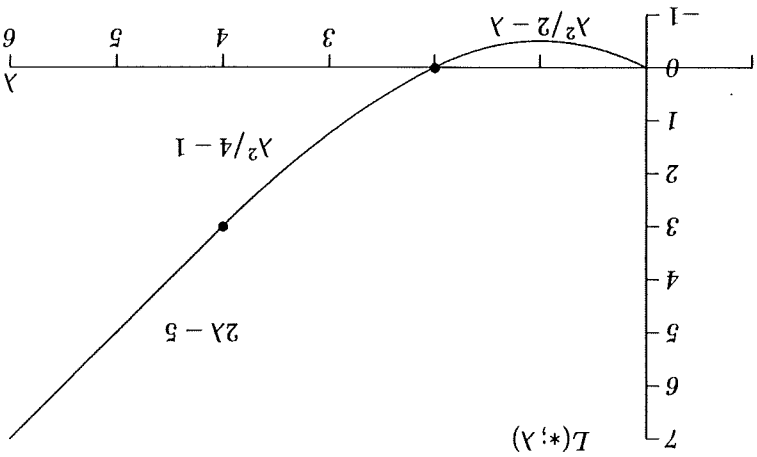
$$\lambda \geq 0$$

$$\min[-(0.5 - 1)^2 - (1.5 - 2)^2 - \lambda(0.5 + 1.5 - 2)]$$

del (min-delen) af (6.52) - (6.53) skal vi løse

Tag nu punktet  $x^* = (0.5, 1.5)$ . Hvis vi med dette  $x$  løser den indre

Figur 6.4. Dualfunktionen



Dualfunktionen

Der er uendeligt mange optimale  $\lambda^*$ , nemlig alle  $\lambda \geq 0$ . Indsættes en vilkårlig, f.eks.  $L(x^*; \lambda^*) = 16$ . Da  $x^*$  er primalt muligt,  $\lambda^*$  dualt muligt og

$$\min\{4 + 12 - \lambda_1(4 - 4) - \lambda_2(4 - 4)\}, \lambda \geq 0$$

vi løse den indre del af dualproblemet  
Hvis vi blandt disse uendeligt mange løsninger vælger  $x^* = (2, 4)'$  kan

Løsningen til  $\max L(x; \lambda^*)$ ,  $x \in D$  er  $x_1(\lambda^*)$  arbitrær ( $\text{dog} \geq 0$ ) og  $x_2(\lambda^*)$  arbitrær ( $\text{dog} \geq 0$ ).  
normalt ikke muligt.

Vi har dermed været i stand til at eliminere  $x$  fuldstændigt; dette er  
meringsproblem. Det ses, at løsningen er  $\lambda^* = (1, 4)$ , og  $L(\lambda^*; \lambda^*) = 16$ .

For at løse dualproblemet kræves altså, at vi løser et lineært program-  
 $\lambda$  er  $L(\lambda) = 4\lambda_2$ .

Efter granskning af de anførte udtryk for  $L(\lambda)$  ses, at for dualt mulige  
 $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, 1 - \lambda_1 \leq 0, 3 + \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0$ . Dette er et polyeder.

Heraf slutter vi, at dualproblemet's mulighedsområde er  $\{\lambda \in \mathbb{R}^2 \mid$

- hvis  $3 + \lambda_1 - \lambda_2 > 0$  er  $\sup L = \infty, x \in D$ .
- hvis  $3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$  er  $x_2^*$  arbitrær og  $L(\lambda) = 4\lambda_2 + x_1^2(1 - \lambda_1)$ ;
- hvis  $3 + \lambda_1 - \lambda_2 < 0$  er  $x_2^* = 0$  og  $L(\lambda) = 4\lambda_2 + x_1^2(1 - \lambda_1)$ ;
- hvis  $1 - \lambda_1 > 0$  er  $\sup L = \infty, x \in D$ ;
- hvis  $1 - \lambda_1 = 0$  er  $x_1^*$  arbitrær og  $L(\lambda) = 4\lambda_2 + (3 + \lambda_1 - \lambda_2)x_2$
- hvis  $1 - \lambda_1 < 0$  er  $x_1^* = 0$  og  $L(\lambda) = 4\lambda_2 + (3 + \lambda_1 - \lambda_2)x_2$ ;

$\max L, x \in D$ :

$\Delta_x L = (2x_1(1 - \lambda_1), 3 - \lambda_1 - \lambda_2)$  udleder vi følgende resultater, for at finde  
Vi finder Lagrangefunktionen  $L = x_1^2 + 3x_2 - \lambda_1(x_1^2 - x_2) - \lambda_2(x_2 - 4)$ . Idet

$$x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$\max[x_1^2 + 3x_2]$$

Eksempel 6.6.2 Her er et håndregneksempel af tvivlsom praktisk relevans; kan overspringes!

## 6.7 Tilstrækkelige betingelser

$L(\cdot, \lambda^*) = L(x^*, \lambda^*) = 16$ , er  $x^*$  en optimal løsning i det primale problem, jfr. sætning 6.6.2.D. Pointe: til trods for, at problemet ikke er pænt konvst, kan det alligevel løses ved Lagrange-relaksation: konvekset er tilstrækkelige men ikke nødvendige betingelser.  $\square$

Vi skal her uddybe, hvornår man kan være sikker på, at en løsning til det relaxerede problem (6.5) - (6.6) faktisk er en løsning til det oprindelige problem (6.1) - (6.4).

At der faktisk er tale om en relaxsation som defineret i afsnit 2.7 kan indses således. Der er klart, at  $M \subseteq N$ , hvor  $M$  er mulighedsrummet for (6.1) - (6.4) og  $N$  er mulighedsrummet for (6.5) - (6.6). Spørgsmålet er så, om der for den nye målfunction  $f_+$  i (6.5) - (6.6) gælder  $f_+(x) \geq f(x)$  for alle  $x \in M$ . Imidlertid ses, at for  $x \in M$  er  $h^k(x) = c_k^0$ , og dermed  $(\pi^k h^k(x)) - \pi^k(c_k^0) = 0$ , og da  $\phi_j$  er antaget ikke-aftagende, gælder det, at for  $x \in M$  er  $g_j(x) \leq b_j^0$ , og dermed  $(\phi_j(g_j(x))) - \phi_j(b_j^0) \leq 0$  for alle  $x \in M, j = 1, \dots, m$ . Heraf følger  $f_+(x) \geq f(x)$  for alle  $x \in M$ . (6.6) er derfor faktisk en relaxsation af (6.1) - (6.4).

Formålet med at indføre relaxsationen er, at det kan være nemmere at løse (6.5) - (6.6) end (6.1) - (6.4), fordi der er færre begrænsninger (og hvis  $D = \mathbb{R}^n$ , er (6.5) - (6.6) et ubegrænset problem). Hvis  $\phi_j(\cdot)$  og  $\pi^k(\cdot)$  er fornuftigt valgte, så er det måske endda muligt at få den optimale løsning til (6.1) - (6.4) ved at løse (6.5) - (6.6), jfr. sætning 2.7.1. I alle tilfælde fås et overtal. Lad os formulere de tilstrækkelige betingelser fra sætning 2.7.1 på denne måde:

**Sætning 6.7.1** For vilkårlige  $\phi_j(\cdot)$  (ikke aftagende) og  $\pi^k(\cdot)$  er den optimale målfunktionsværdi i (6.5) - (6.6) et overtal til den optimale målfunktionsværdi i (6.1) - (6.4).

Hvis en løsning  $x^+$  til (6.5) - (6.6) er mulig i (6.1) - (6.4) og desuden tilfredsstiller komplementært slæk betingelsen

$$\phi_j(g_j(x^+)) = \phi_j(b_j^0) \text{ for } j = 1, m, \quad (6.57)$$

så er  $x^+$  også en optimal løsning til (6.1) - (6.4).

Bevist: Resultatet følger af sætning 2.7.1, idet det bemærkes, at komplementært slæk betingelsen sikrer  $f(x^+) = f_+(x^+)$ .  $\square$

$$(6.62) \quad \sum \pi_k(c_k) + \alpha = (b, c)$$

Relaksation kan nemt illustreres som i afsnit 2.2, jævnfør figur 6.2. Resultaterne kan også gives en naturlig illustration som i afsnit 2.6. Hvis  $x^+$  er en løsning til det relakserede problem (6.5) - (6.6), så har vi følgende sætning fundet en optimal løsning for en eller anden højreside  $(\bar{b}, \bar{c})$ . For disse højresider går alle de ekstra led i målfunktionen i (6.5) ud med hinanden, og værdien af målfunktionen er  $f(x^+)$ . Men dette er jo lig med  $f^*(\bar{b}, \bar{c})$ . Løsning af (6.5) - (6.6) giver altså et punkt  $(f^*(\bar{b}, \bar{c}), \bar{b}, \bar{c}) = (f(x^+), g(x^+), h(x^+))$  på den øvre rand af  $X$ . Holder vi  $x^+$  fast og varierer  $(b, c)$  i målfunktionen i (6.5) - (6.6), får vi en afbildning  $\Pi$  af  $\phi_j$  og  $\pi_k$ , skaleret med konstanten  $\alpha = f(x^+) - \sum \phi_j(g_j(x^+)) - \sum \pi_k(h_k(x^+))$ . Vi kalder dette grafen for straffefunktionen:

**Geometrisk tolkning**

Kunsten består derfor i at vælge  $\phi()$  og  $\pi()$ , så  $\bar{b} = b^0$  og  $\bar{c} = c^0$ .

Bevist: Anvend sætning 6.7.1 på problemet med  $(b^0, c^0)$  erstattet af  $(\bar{b}, \bar{c})$ .  $\square$

Hvis speciel  $\phi()$  og  $\pi()$  er lineære med hældning  $\phi \geq 0$  og  $\pi$ , så skal  $(\bar{b}, \bar{c})$  tilfredsstille:  $\bar{c} = h(x^+)$ , og  $\bar{b} = g_j(x^+)$  hvis  $\phi_j < 0$ ,  $\bar{b}_j \geq g_j(x^+)$  hvis  $\phi_j = 0$ .  
 Hvis  $(\bar{b}, \bar{c})$  tilfredsstiller:  $\bar{c} = h(x^+)$ , og  $\bar{b}_j \geq g_j(x^+)$  og  $\phi_j(\bar{b}_j) = \phi_j(g_j(x^+))$ ,  
 A<sub>j</sub>

$$(6.58) \quad \max f(x)$$

$$(6.59) \quad g(x) \leq \bar{b}$$

$$(6.60) \quad h(x) = \bar{c}$$

$$(6.61) \quad x \in D$$

Hvis man kan løse (6.5) - (6.6) - og det må man antage, man kan, hvis der skal være fornuft i relaksationsideen - så får man dermed en løsning  $x^+$ . Det er interessant, at dette  $x^+$  altid er løsning til et problem som ligner (6.1) - (6.4), nemlig det problem der har samme  $f, g, h$ , og  $D$ , men muligvis andre højresider  $b$  og  $c$ :  
 Følgesætning Lad  $x^+$  være en løsning til (6.5) - (6.6) for vilkårlige  $\pi_k()$  og vilkårlige ikke afvigende  $\phi_j()$ .  $x^+$  er da en optimal løsning til problemet

Bevis: Argumentationen er givet ovenfor.  $\square$

**Sætning 6.7.2** *Antag at problemet (6.1) - (6.4) har en optimal løsning. Problemet kan da løses ved relaxsation (6.5) - (6.6) ved anvendelse af  $\phi_j(\cdot)$  og  $\pi_k(\cdot)$ , hvis og kun hvis grafen for straffunktionen er støtte til  $f^*$  i  $(\bar{b}^0, \bar{c}^0)$  for disse  $\phi_j(\cdot)$  og  $\pi_k(\cdot)$ .*

følgende sætning.

Vi kalder en straffunktion, der opfylder (6.63) - (6.64), for en støtte til  $f^*$  i  $(\bar{b}, \bar{c})$ . Vi kan fastslå den geometriske fortolkning af relaxsation i begrænset opadtil.

Ligheidsstegen et eller andet sted  $(\bar{b}, \bar{c})$ , såremt  $BC$  ikke er tom, og  $f^*$  er kan vi altid opnå, at grafen for straffunktionen faktisk opfylder (4.1.3) med Lad der være givet et vilkårlig sæt  $\phi_j(\cdot)$  og  $\pi_k(\cdot)$ . Ved passende skalering

$$(6.64) \quad f^*(\bar{b}, \bar{c}) = \Pi(\bar{b}, \bar{c}) = f(x_+) - \sum_{m=1}^f (\phi_j(g_j(x_+)) - \phi_j(\bar{b}_j)) - \sum_{p=1}^k (\pi_k(h_k(x_+)) - \pi_k(\bar{c}_k))$$

og

$$(6.63) \quad f^*(b, c) \leq \Pi(b, c) + f(x_+) - \sum_{m=1}^f (\phi_j(g_j(x_+)) - \phi_j(b_j)) - \sum_{p=1}^k (\pi_k(h_k(x_+)) - \pi_k(c_k)) \text{ for alle } (b, c) \in BC$$

dre ord:

ligger grafen for straffunktionen aldrig under  $f^*(b, c)$ . Der gælder med anden og grafen  $f^*$  for værdifunktionen hinanden i punkt  $(\bar{b}, \bar{c})$ . Desuden

Det ses, at på grund af skaleringen med  $\alpha$  rører grafen  $\Pi$  for straffunkpunkt  $(f(x), g(x), h(x))$  i ressourcerummet. Minimeringen foregår ved at vælge et  $x \in D$ ; til ethvert  $x \in D$  hører jo et af denne lodrette afstand er netop værdien af målfunktionen i (6.5) - (6.6). ligger på grafen for straffunktionen, skal minimeres. Den numeriske værdi afstand mellem et punkt  $(f(x), g(x), h(x))$ , der ligger i  $X$ , og et punkt, der Målfunktionen i (6.5) - (6.6) kan opfattes på den måde, at den lodrette



## 6.8 Resumé

En række metoder er illustreret, med tolkninger af følsomhedsanalyser m.v. Dualitebegrebet er diskuteret.

## 6.9 Valg af metode

Det er ikke hensigten i denne bog at give en beskrivelse af algoritmer, således at et fornuftigt valg af algoritme til løsning af et givet problem er muligt. Der til kræves en lang række supplerende overvejelser. Vi nævner:

- køb versus egenproduktion
- standardalgoritme versus algoritme til specifik problemtype
- valg af modelleringssprog og andre grænseflader
- fornuftig modellering i relation til algoritmemuligheder
- eksakt versus approksimativ løsning
- konvergenstabiliteter
- fornuftig anvendelse af numeriske teknikker (tynde matricer, mv.)
- edb-muligheder
-



# Kapitel 7

## Optimal kontrol - diskret tid

DocId:1ex 2001-09-12 12.16

Dette kapitel og det næste handler om *dynamiske* modeller. Herved forstås modeller, der kan opfattes som om de udvikler sig over tid.

Eksempel: en virksomhed skal lave en produktionsplan for et år, opdelt i måneder. Virksomheden kender den månedlige efterspørgsel, og kan kontrollere den månedlige produktion. Kendes startlageret ved årets begyndelse, givet lageret ved en måneds start, og derfor følgende dynamik: givet lageret ved en måneds start, fås månedens efterspørgsel og det valgte niveau for månedens produktion, fås som konsekvens næste måneds startlager. Det ses, at lagerstyrrelsen fungerer som bindeled mellem månederne. Den samlede omkostning ved produktionen fremkommer som en sum af omkostningerne knyttet til lager og produktion for de enkelte måneder.

Problemer med en sådan struktur træffes i en lang række sammenhænge, og dette berettiger, at de behandles særskilt.

### 7.1 Diskret tid optimal kontrol model

Den generelle struktur i en *diskret tid optimal kontrol model* er som følger:

er give størrelser.  
 Problemet (7.1) - (7.4) kan illustreres som på figur 7.1. Det fremgår, at man træffer en beslutning: først  $u_0$ , så  $u_1$ , så  $u_2$ , osv. På grund af dynamikken (7.2) vil efterfølgende tilstande være entydigt givne ud fra kontrollerne. Tilstanden  $x_i$  kendes umiddelbart før man skal træffe beslutningen  $u_i$ . Som konsekvens fås den næste tilstand  $x_{i+1}$  samt det lokale bidrag  $f_i(x_i, u_i)$  til målfunktionen.

Sædvanligvis vil vi antage starttilstanden givet med værdien  $x_0$ . Hvis dette ikke er tilfældet, kan man dog også håndtere dette (se eksempel 7.4.3). Ofte vil begrænsningerne (7.3) - (7.4) være givet på den sædvanlige form, udtrykt ved funktioner  $g_i$  og  $h_i$ . Problemet (7.1) - (7.4) kan da

I relation til ovennævnte lille produktionsplanlægningseksempel ses det, at  $u_i$  er produktionen i måned  $i$ , og  $x_i$  er lagerstørrelsen ved begyndelsen af måned  $i$ . Dynamikken kan f.eks. have formen  $x_{i+1} = x_i + u_i - s_i$ , hvor  $s_i$  er månedens salg. Begrænsningerne kan være givet som  $0 \leq u_i \leq \bar{u}_i$  og  $0 \leq x_i \leq \bar{x}_i$ , der udtrykker, at produktion og lager er ikke-negATIVE størrelser, hver med en øvre grænse. Målfunktionen (7.1), der ønskes maksimeret, kan på trin  $i$  være givet som  $-(ax_i + bu_i + c(u_i)^2)$ , hvor  $a, b$ , og  $c$

entydigt bestemt ud fra  $(x_i, u_i)$ , mens det ovennævnte ikke gælder.  
 Bemærk, at dynamikfunktionen har en bestemt retning, således at  $x_{i+1}$  er  $d_i : R^{n+m} \rightarrow R^n$ , se (7.2). Dynamikfunktionen har komponenterne  $d_i^j$ . De enkelte trin er koblete til nabotrinene gennem *dynamikfunktionen*  $g_i : R^{n+m} \rightarrow R^n$ , hvor  $V^N \subseteq R^n$ .

Målfunktionen er additiv separatabel, således at der er et lokalt bidrag  $f_i$  fra hvert af de  $N$  trin samt et slutbidrag fra  $f_N$ . I modellen indgår de lokale begrænsninger (7.3), hvor  $V_i \subseteq R^{n+m}$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , og slutbegrænsningen (7.4), hvor  $V^N \subseteq R^n$ .

Vi ser, at der er to slags variable: *tilstandsvariable*  $x_i \in R^n$ ,  $i = 0, \dots, N$ , og *kontrolvariable*  $u_i \in R^m$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Vi vil angive komponent nummer  $j$  i  $x_i$  som  $x_i^j$ , og komponent nummer  $k$  i  $u_i$  som  $u_i^k$ . Hvis  $n = 1$  eller  $m = 1$  angives eventuelt blot  $x_i$ , henholdsvis  $u_i$ .

$$(7.1) \quad \max_{N-1} [ \sum_{i=0}^N f_i(x_i, u_i) + f_N(x_N) ]$$

$$(7.2) \quad x_{i+1} = d_i(x_i, u_i)$$

$$(7.3) \quad x_i, u_i \in V_i \quad i = 0, \dots, N-1$$

$$(7.4) \quad x_N \in V^N$$

hvor målfunktionen på trin  $i$ , eks. kan være givet som  $f_i(x_i, u_i) = -0.1x_i - \frac{1}{2}(u_i)^2$ , på trin  $N$  som  $-0.95x_N + u_N - s_N$ , og hvor dynamikken kan være givet som

$$(7.11) \quad \max_{N-1} \sum_{i=0}^i [f_i(x_i, u_i) + f_N(x_N)]$$

$$(7.12) \quad x_{i+1} = d_i(x_i, u_i)$$

$$(7.13) \quad \bar{u}_i \leq u_i \leq \underline{u}_i$$

$$(7.14) \quad x_0 = \bar{x}_0$$

$$(7.15) \quad x_N \in R^n \text{ eller}$$

$$(7.16) \quad x_N = \bar{x}_N$$

Meg et ofte vil kontrolproblems begrænsninger og funktioner være relativt simple. Et typisk eksempel er følgende:

$$(7.5) \quad \max_{N-1} \sum_{i=0}^i [f_i(x_i, u_i) + f_N(x_N)]$$

$$(7.6) \quad x_{i+1} = d_i(x_i, u_i) \quad i = 0, \dots, N-1$$

$$(7.7) \quad g_i(x_i, u_i) \leq b_i \quad i = 0, \dots, N-1$$

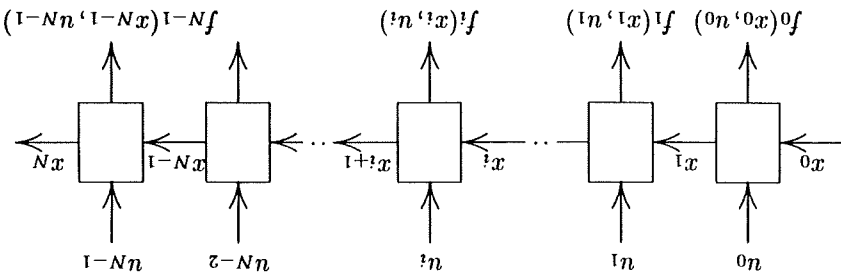
$$(7.8) \quad c_i = h_i(x_i, u_i) \quad i = 0, \dots, N-1$$

$$(7.9) \quad g_N(x_N) \leq b_N$$

$$(7.10) \quad h_N(x_N) = c_N$$

Skriver:

Figur 7.1. Strukturen i et optimal kontrol problem



## Eksempel 7.1.1 Problemet

$$\max\{(u_0)^2 + (u_1 - 1)^3 - (u_2 - 2)^2\} \quad (7.17)$$

$$u_0 + u_1 + u_2 = c \quad (7.18)$$

$$0 \leq u_i \leq 3 \quad (7.19)$$

$$u_i \text{ heltallig} \quad (7.20)$$

kan formuleres som et optimal kontrol problem som følger.

Vi kan lade  $x_i$  betyde mængden, der er "brugt" af højresiden  $c$  lige før  $u_i$  vælges. Så får vi dynamikken

$$x_{i+1} = x_i + u_i \quad (7.21)$$

og start- og slutbetingelserne på  $x$  bliver da

$$x_0 = 0 \text{ og } x_3 = c \quad (7.22)$$

Den samlede optimal kontrol model består derefter af (7.17), (7.21),

(7.19), (7.20) og (7.22).  
Vi kunne også lade  $x_i$  betyde den mængde af højresiden  $c$ , der er "ubrugt" lige før  $u_i$  vælges. Så får vi dynamikken

$$x_{i+1} = x_i - u_i \quad (7.23)$$

og start- og slutbetingelserne

$$x_0 = c \text{ og } x_3 = 0 \quad (7.24)$$

Den samlede optimal kontrol model består derefter af (7.17), (7.23), (7.19),

(7.20) og (7.24).

Bemærk, hvorledes  $x_i$  indføres som en ny variabel i forhold til den

oprindelige problemstilling (7.17) - (7.20). Dette vil ofte være tilfældet for optimal kontrol modeller. Bemærk også, at der her ikke var nogen entydig

måde at definere  $x$  på.  $\square$

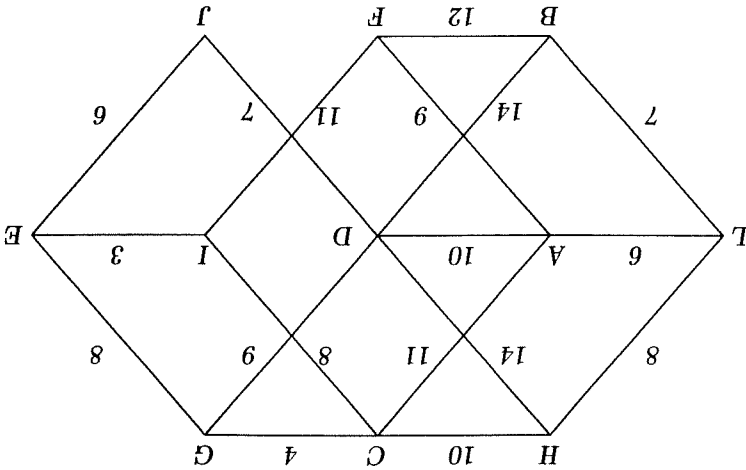
**Eksempel 7.1.2** Det optimal kontrol problem, som er skitseret i figur 7.1, er mere generelt end problemet defineret i (7.1) - (7.4), fordi sidstnævnte kun opererer med reelle funktioner. Ved forskellige manipulationer kan man ofte omforme mere generelle problemer til strukturen (7.1) - (7.4). Som et eksempel kan vi betragte følgende problemstilling:

**Eksempel 7.1.3** I eksempel 3.4.4 er der beskrevet et system, der er søkventiel. Læseren kan omskrive dette til formen for det diskrete tids optimale kontrol problem. Eksemplet illustrerer, at parameteren  $i$  ikke nødvendigvis behøver at repræsentere "tid" i sædvanlig forstand.  $\square$

$u_2 \in \{O, N\}$ . Dynamikken afhæses umiddelbart af netværket.  $\square$  umiddelbart afhæses af netværket; hvis eksempelvis  $x_2 = D$ , kan vi vælge  $N$  ( $O$ ,  $M$  og  $N$ ) med visse tilstandafhængige begrænsninger, der  $x_3 \in \{C, I, J\}$  og  $x_4 = E$ . Kontrolloerne kan antage værdierne  $O, M$  og er knudepunkterne, og vi ser at  $x_0 = L, x_1 \in \{H, A, B\}, x_2 \in \{C, D, F\}$ , netværket fra vest mod øst, så  $i = 0$  svarer til  $L$  og  $i = 4$  til  $E$ . Tilstandene Derfor er  $N = 4$ . Vi definerer trinene svarende til hvor langt vi er kommet i Det ses, at der skal træffes beslutning om valg af delstrækning 4 gange.

samlende omkostninger mellem London og Esbjerg. sen må kun foregå fra vest mod øst. Find den rute, der giver de mindste 7.2. London er angivet med et  $L$  og Esbjerg er angivet med et  $E$ . Sejladningerne ved at besjle de forskellige delstrækninger angives som på figur Ved planlægning af en sejlads mellem London og Esbjerg kan omkost-

Figur 7.2. Sejlads fra London til Esbjerg



Lagrangereaktion.

på problemet (7.25) - (7.27). Vi skal specificere betingelserne fra KKT og problem, kan man uden videre anvende de resultater, der er udlædt tidligere

Opfattes det optimale kontrolproblem på denne måde som et *statisk* koncentreret omkring hoveddiagonalen.

strukturere. På figur 7.3 er dette antyd. Der ses en nydelig struktur

På grund af strukturen i kontrolproblemet vil (7.25) - (7.27) være

$$h_i(x_i, u_i) = c_i, \quad h_N(x_N) = c_N \text{ og alle } x_{i+1} = d_i(x_i, u_i).$$

$$g_i(x_i, u_i) \leq b_i \text{ og } g_N(x_N) \leq b_N. \text{ Begrænsningen (7.27) repræsenterer alle}$$

Her fortolker vi  $z$  som  $z = (x_0, u_0, x_1, u_1, \dots, u_{N-1}, x_N)'$  og (7.26) som alle

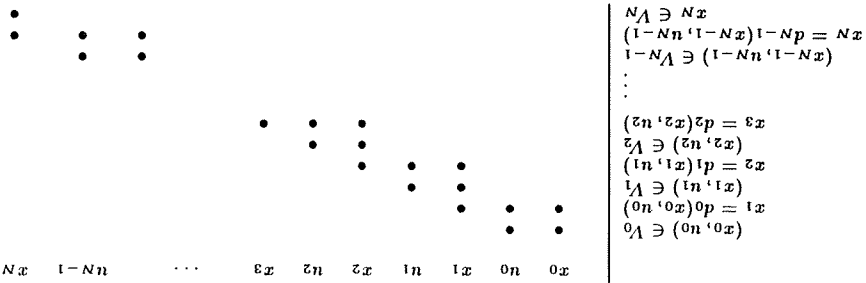
$$\begin{aligned} \max f(z) \\ g(z) \leq b \\ h(z) = c \end{aligned} \quad (7.25) \quad (7.26) \quad (7.27)$$

Optimal kontrol problemet (7.1) - (7.4) kan opfattes som en speciel version af det problem, der er betraget i de foregående kapitler. Det ses således umiddelbart, at (7.5) - (7.10) kan omskrives til:

©CommaP, Inc. 2001-09-12 12:16

## 7.2 Statisk Optatelse

Figur 7.3. Struktur i begrænsningerne for et optimal kontrol problem formuleret som et statisk optimeringsproblem. Prikkerne angiver hvilke variabler der indgår i hvilke begrænsninger.







På baggrund af reformuleringen af optimal kontrol problemet som et statistisk problem kan man uden videre fortoke de tilhørende Lagrangemultiplikatorer, sådan som det er gjort i sætning 3.3.3 side 144.

## 7.2.3 Følsonhedsanalyse

Bewis: Dette er en omskrivning af sætning 3.3.1.  $\square$

Hvis der i stedet for (7.15) kræves en fast sluttilstand (7.16) udelades optimal løsning til (7.11) - (7.15).

Hvis dynamikken (7.12) er opfyldt for disse  $(x^*, u^*)$ , så er  $(x^*, u^*)$  en op-

- $x^*_N$  maksimerer  $[f_N(x_N) - p_N x_N]$  (ubegrænset, jfr. (7.15))

- $(x^*_i, u^*_i)$  maksimerer  $[f_i(x_i, u_i) + p_{i+1} d_i(x_i, u_i) - p_i x_i]$  begrænset af (7.13) for  $i = 1, \dots, N - 1$

- $(x^*_0, u^*_0)$  maksimerer  $[f_0(x_0, u_0) + p_1 d_0(x_0, u_0)]$  begrænset af (7.13) -

antag, at

Sætning 7.2.2 Betragt problemet (7.11) - (7.15). Lad et  $p$  være givet, og

følgende tilstrækkelige optimalitetsbetingelser:

0, og indføre multiplikatoren  $p_{i+1}$  hertil. For problemet (7.11) - (7.16) fås

Lad os relatere dynamikken, omskrevet på formen  $x_{i+1} - d_i(x_i, u_i) =$

konkrete problemstilling, hvad der er hensigtsmæssigt.

forhold til den generelle formulering (7.1) - (7.4). Det vil afhænge af den

situation kan være i forhold til f.eks. (7.5) - (7.10), eller den kan være i

Man kan også anvende Lagrangereaktion på kontrolproblemet. Relak-

## 7.2.2 Lagrangereaktion

trivis form på betingelserne.

Pointen i (7.34) - (7.37) (og mange andre steder) er, at der opnås en

46.

(7.34). Dette er samme idé, som er set tidligere, f.eks. i eksempel 2.3.7 side

Det ses, at multiplikatorerne  $\lambda_i$  hørende til (7.13) er eliminerede i

betingelsen (7.36), idet (7.16) træder i dens sted, og der kræves  $p_N \in \mathbb{R}^n$ .

Hvis der i stedet for (7.15) kræves en fast sluttilstand (7.16), udelades

Vi opstiller nu optimalitetsbetingelserne, således som de udtrykkes i *maksimalitetsprincippet*. Vi angiver dem for det simple problem (7.11) - (7.15)

$$(7.42) \quad H^i(x_i, u_i, p^{i+1}) = f^i(x_i, u_i) + p^{i+1}d^i(x_i, u_i)$$

hvor for  $i = 0, \dots, N - 1$  således:  
 toren  $p^{i+1} \in R^n$  og desuden *Hamiltonfunktionerne*  $H^i : R^{2n+m} \rightarrow R$ , de-  
 tingerne på. Formuleringen benytter sig som de foregående af rækkefølge-  
 Vi skal nu beskrive en lidt anderledes måde at angive optimalitetsbe-

OMMXP1.tex 2001-09-12 12.18

## 7.3 Maksimumsprincippet

Hvis der i stedet for (7.16) er en fri sluttetilstand (7.15), udelades (7.39).

$$(7.41) \quad \left. \begin{array}{l} \partial f^*/\partial u_i = 0 \\ \partial(f^i + p^{i+1}d^i)/\partial u_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ellers} \\ \text{hvis } u_i^* = \underline{u}_i \end{array}$$

$$(7.40) \quad \left. \begin{array}{l} \partial f^*/\partial \bar{u}_i = 0 \\ -\partial(f^i + p^{i+1}d^i)/\partial \bar{u}_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ellers} \\ \text{hvis } \bar{u}_i = \underline{u}_i^* \end{array}$$

$$(7.39) \quad \partial f^*/\partial \bar{x}_N = p_N$$

$$(7.38) \quad \partial f^*/\partial \bar{x}_0 = p_0$$

Betragt problemet (7.11) - (7.14), (7.16). Antag, at alle de indgående  
 funktioner er kontinuerligt differentiable, og at såvel løsningen som de tilhø-  
 rende KKT-multiplicatorer  $(\lambda, p)$  er entydige. Så er  $f^*$  kontinuerligt differen-

tiabel i punktet  $(\bar{x}_0, \bar{x}_N, \bar{u}_0, \bar{u}_N)$ , og

da:

Værdien af disse parametre er i udgangssituationen  $(\bar{x}_0, \bar{x}_N, \bar{u}_0, \bar{u}_N)$ . Vi har  
 Vi opstiller værdifunktionen  $f^*$  i relation til parametret  $(\bar{x}_0, \bar{x}_N, \bar{u}, \bar{u}_N)$ .  
 se f.eks. eksempel 2.3.7 side 46 og (7.34).

således at der kun benyttes multiplicatoren  $p$ . Denne idé er brugt tidligere,  
 formuleringerne valgt at eliminere multiplicatoren  $\lambda$ , hørende til (7.13),  
 Som det vil fremgå, spiller multiplicatoren  $p$  en central rolle. Det er i  
 Som eksempel skal vi give resultatet for problemet (7.11) - (7.16).  
 fortløbet kan naturligvis uden videre anvendes på (7.25) - (7.27).

En af de vigtige resultater af KKT-analysen var fortløbet at mul-  
 tiplektorerne i relation til værdifunktionen, sætning 3.1.4 side 126. Denne

$$(7.46) \quad \Delta^n H_i(x_i^*, u_i^*, p_{i+1}^*) \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ hvis } \bar{u}_i = u_i^* \\ = 0 \text{ hvis } \bar{u}_i > u_i^* \\ \geq 0 \text{ hvis } \bar{u}_i = \underline{u}_i \end{array} \right.$$

tionen forudsætter  $m = 1$ ):  
 hvis  $H_i(x_i^*, u_i^*, p_{i+1}^*)$  er konkav og differentabel med hensyn til  $u_i$  (nota-  
 Betingelsen (7.43) kan også i stil med (7.34) skrives på følgende måde,  
 geslernes tilstrækkelige optimalitetsbetingelser.  $\square$

Bevis. Læseren kan som en øvelse eftervise, at de anførte betingelser  
 kan opfattes som slags blanding af Lagrange-relaksationens og KKT-betin-

**Sætning 7.3.2** *Antag for problemet (7.11) - (7.15) at alle  $f_i$  er differen-  
 table og konkave, og at  $d_i$  er lineære. Hvis der er et  $p$  og et  $(x^*, u^*)$ , så  
 (7.43) - (7.45) gælder, og hvis dynamikken er opfyldt for disse  $(x^*, u^*)$ , så  
 er  $(x^*, u^*)$  en optimal løsning til (7.11). Hvis (7.15) erstattes af  
 (7.16), udelades betingelsen (7.45), idet (7.16) træder i dens sted.*

geslernes nødvendige optimalitetsbetingelser.  $\square$   
 kan opfattes som slags blanding af Lagrange-relaksationens og KKT-betin-  
 Bevis. Læseren kan som en øvelse eftervise, at de anførte betingelser

*dens sted.*  
 (7.15) erstattes af (7.16), udelades betingelsen (7.45), idet (7.16) træder i  
 en optimal løsning  $(x^*, u^*)$ , så findes et  $p$ , så (7.43) gælder. Hvis  
 fastholdt  $x_i^*$  er  $f_i$  konkav og  $d_i$  lineær med hensyn til  $u_i$ . Hvis problemet har  
 ferentiable. Antag, at begrænsningerne er regulære. Antag, at for vilkårligt  
**Sætning 7.3.1** *Antag for problemet (7.11) - (7.15) at alle  $f_i$  og  $d_i$  er dif-*

betingelser.  
 Som sædvanlig vil vi præcisere nødvendige og tilstrækkelige optimalitets-  
 om at optimalitetsbetingelser kan udtrykkes på formen (7.43) - (7.45).  
 Maksimumsprincippet er netop udtryk for et *princippet*, eller en hypotese,  
 conditions).

Betingelserne (7.44) vil vi kalde *bidynamikken* (på engelsk: adjoint

$$(7.45) \quad p^N = \Delta^x f^N(x^N)$$

$$(7.44) \quad p_i = \Delta^x H_i(x_i^*, u_i^*, p_{i+1}^*)$$

$$(7.43) \quad u_i^* \text{ maksimerer } H_i(x_i^*, u_i^*, p_{i+1}^*) \text{ begrænset af (7.13)}$$

således:

$$(7.50) \quad p^{i+1} = (p^i - \Delta f_x^i(x_i)) / D_x^i$$

og at dette kan løses for  $p^{i+1}$  til

$$(7.49) \quad p^i = \Delta f_x^i(x_i) + p^{i+1} D_x^i$$

Det følger, at bidynamikken (7.35) kan skrives

lineær, idet  $D_x^i$ ,  $D_n^i$  og  $d_i$  er skalarer, og det forudsættes, at  $D_x^i > 0$ . (f.eks. lineær) og  $f_n^i$  strengt konkav (f.eks. kvadratisk). Dynamikken er Det vil sige, at de er additivt separable i  $x_i$  og  $u_i$ . Desuden er  $f_x^i$  konkav

$$(7.48) \quad x_{i+1} = D_x^i x_i + D_n^i u_i + d_i$$

$$(7.47) \quad f_i(x_i, u_i) = f_x^i(x_i) + f_n^i(u_i)$$

og dynamikken kan skrives

følgende måde. Alle funktioner er differentiable, og  $n = 1$ . Målfunktionen lem (7.11) - (7.14), (7.16). Vi forudsætter, at problemet er "pænt" på Vi skal nu beskrive en maksimumsprincip algoritme for det simple prob-

## En maksimumsprincipalgoritme

lerner i kontinuert tid, se næste kapitel. maksimumsprincip meget anvendt i forbindelse med optimal kontrol prob- problemer som (7.11) - (7.16). Og for det tredje er et tilsvarende (stærkt) udtrykkes optimalitetsbetingelser bekvemt på denne måde, især for simple betingelser for optimal kontrol problemet på denne måde. For det andet For det første er der en udbredt tradition for at formulere optimalitets-

Når maksimumsprincipperne alligevel er omtalt er det af tre grunde.

alternativ måde at udtrykke Lagrange-relationsbetingelserne på.

Det ses tilsvarende, at det stærke maksimumsprincip (næsten) er en

*i diskret tid.*

(7.43) - (7.45) for *det stærke maksimumsprincip*, eventuelt med tilføjeisen

betingelserne på. (Hvis der er tvivl, kan man for tydeligheds skyld kalde

maksimumsprincip er altså blot en alternativ måde at udtrykke KKT-

hensyn til  $u_i$ , i modsætning til (7.43), hvor  $H_i$  maksimeres. Det svage

*simumsprincip*. Det ses, at *svag* hentyder til, at vi differentierer  $H_i$  med

Vi kalder optimalitetsbetingelserne (7.44) - (7.46) for *det svage mak-*

$u_i^*, p_{i+1}^*) = 0$ .

Hvis specielt  $u_i$  er ubegrænset i (7.11) - (7.15) fås altså betingelsen  $\Delta^n H_i(x_i^*,$



- Trin 3 Beregn retningen  $s_i = \partial H_i / \partial u_i, i = 0, N - 1$
- Trin 2 Beregn  $p_i$  baglæns af bidynamikken for  $i = N, 1$
- Trin 1 Beregn  $x_{i+1}$  forlæns af dynamikken for  $i = 0, N - 1$
- Trin 0 Vælg  $u$ , der tilfredsstiller (7.13)

anvendelse af gradientprojektion, se afsnit 5.1.  
 Følgende algoritme til løsning af (7.11) - (7.15) er heretter en direkte forudsat alle  $f_i$  og  $d_i$  er kontinuert differentiable. (Bevis det eventuelt selv.)

$$(7.55) \quad \frac{\partial u_i}{\partial H_i(x_i, u_i, p_{i+1})} = \frac{\partial f_n(u)}{\partial H_n(x_n, u_n, p_{n+1})}$$

de partielle afledede af  $f^n$  som  
 bekemme "mellemvariabler".) Definer  $H_i$  som i (7.42). Vi kan nu beregne at vi ville eliminere tilstandsvariablerne, kan vi jo godt bruge dem som (7.44) - (7.45), baglæns for  $i = N, 1$ . (Bemærk: selv om vi lige har sagt, af dynamikken (7.12) forlæns for  $i = 0, N - 1$ , (2) find  $p_i$  af bidynamikken  $u = (u_0^i, u_1^i, \dots, u_{N-1}^i)$ , og gennemfører følgende beregninger: (1) find  $x_{i+1}$  Det viser sig, at dette bekvent kan gøres som følger. Vi betragter punktet (7.13). Vi kalder målfunktionen  $f^n$ . Lad os nu beregne gradienten til  $f^n$ . grænsninger i formuleringen (7.25) - (7.27) er derfor boksbegrænsningerne Dette ind sættes i (7.11), og (7.12) kan nu udelades. De eneste be-

$$(7.54) \quad x_N = d_{N-1}(d_{N-2}(\dots, u_{N-2}, u_{N-1}))$$

⋮

$$(7.53) \quad x_3 = d_2(d_1(d_0(\bar{x}_0, u_0), u_1), u_2)$$

$$(7.52) \quad x_2 = d_1(d_0(\bar{x}_0, u_0), u_1)$$

$$(7.51) \quad x_1 = d_0(\bar{x}_0, u_0)$$

Dette gøres ved at indse, at  
 Pointen i algoritmen er, at det er muligt at eliminere alle  $x_i, i = 1, N$ . (7.16);

tionsalgoritme. Den kan anvendes på problemet (7.11) - (7.15) (NB: ikke Den er dog ikke en *maximumsprincip* algoritme, men en gradientprojek- Lad os nu beskrive en anden algoritme, der bruger Hamiltonfunktionen.

### En gradientprojektionsalgoritme

Lad os betragte et delproblem af (7.1) - (7.4), nemlig det problem, der starter fra trin  $i$  med givet starttilstand  $x_i$ , og som vedrører de resterende

## 7.4.1 Grundidé

Dynamisk programmering er en løsningssteknik, der er snævert knyttet til strukturen i kontrolproblemet (7.1) - (7.4). Vi skal nu udlede optimale tilstandsbestimmelser for dette problem og heraf udlede *dynamisk programmering*.

## 7.4 Dynamisk programmering

Vi henviser til bemærkningerne i foregående afsnit. Bemærk specielt, at udtrykkene i (7.41) - (7.40) naturligt kan formuleres ved hjælp af Hamiltonfunktioner.

### 7.3.1 Følgesomhed

Bemærk, at det er vigtigt, at der ikke er begrænsninger på tilstandene (startpunktet  $\bar{x}_0$  er naturligt givet).  
 Hvis alle  $f_i$  er differentiable og konkave, og alle  $d_i$  er lineære, vil algoritmen stoppe i et optimalt punkt, sætning 5.1.1; ellers konvergerer den mod et sådant punkt.

**Trin 8** Hvis  $\sum_{i=0}^{N-1} f_i(\bar{x}_i, \bar{u}_i) + f_N(\bar{x}_N) > f_N(x_N)$  så vælg  $u = \bar{u}$  og gå til Trin 1, ellers reducer  $\alpha$ , se afsnit 4.2.5, og gå til Trin 5.

**Trin 7** Beregn  $\bar{x}_{i+1}$  forlæns for  $i = 0, N - 1$  ved anvendelse af  $\bar{u}_i$

**Trin 6** Hvis  $\bar{u}_i = u_i$  for alle  $i$ , så stop.

**Trin 5** Definér  $\bar{u}_i = P_M(u_i + \alpha s_i)$ ,  $i = 0, N - 1$ , hvor  $P_M(\cdot)$  er projektionen på (7.13)

**Trin 4** Vælg en skridtlængde  $\alpha > 0$



Udtrykket skal forstås således, at man maksimerer (7.58) med hensyn til  $u_i$  for fastholdt  $x_i$ . Begrænsningerne på  $u_i$  i denne maksimering er (7.59) - (7.60), dvs., dels skal der gælde  $(x_i, u_i) \in V_i$  for det valgte  $x_i$ , og dels skal  $F_{i+1}$  være defineret i punktet  $d_i(x_i, u_i)$ . Begrænsningen (7.59) er rel-

$$(7.60) \quad F_{i+1}(d_i(x_i, u_i)) \quad \text{er defineret}$$

$$(7.59) \quad (x_i, u_i) \in V_i$$

$$(7.58) \quad F_i^*(x_i) = \max_{u_i} [f_i(x_i, u_i) + F_{i+1}(d_i(x_i, u_i))]$$

og derefter rekursivt baglæns for  $i = N - 1, \dots, 0$ :

$$(7.57) \quad F^N(x_N) = f^N(x_N) \quad \text{for } x_N \in V_N$$

ene sæt er funktionerne  $F_i^* : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $i = 0, N$ . Man definerer Dynamisk programmering fungerer via to sæt af hjælpfunktioner. Det *princp*.

gelsen omtales ofte som *optimalitetsprincippet* eller *Bellman's optimalitets-* men danner alligevel udgangspunkt for dynamisk programmering. Betin-

Denne nødvendige optimalitetsbetingelse ser umiddelbart triviel ud, del af løsningen optimal i (7.56) med udgangspunkt i  $x_i^*$ . af løsningen er valgt frem til  $x_i^*$  (men dog optimal), så er den resterende løsning til (7.1) - (7.4) har den egenskab, at uanset hvorledes den første del Dette kan også formuleres lidt mere abstrakt således. En optimal

$(u_i^*, x_{i+1}^*, u_{i+1}^*, \dots, u_{N-1}^*, x_N^*)$  er optimal i problemet (7.56). Det må nu nødvendigvis gælde, at sekvensen - (7.4). Vælg nu det heri indgående  $x_i^*$  til at være startpunkt i problemet (7.1) Antag nu at vi har en optimal løsning  $(x^*, u^*)$  til hele problemet (7.1)

er uafhængige af  $(x_j, u_j)$  for  $j > i$ . er uafhængig, at tilstanden  $x_i$  nås. Også begrænsningerne hørende til (7.56) naturlig,  $i, j > i$ , vælges - forudsat Vi bemærker nu følgende. Målfunktionen (7.56) er for givet  $x_i$  helt holdes for  $j \geq i$ .

og dynamikken (7.2) samt de lokale begrænsninger (7.3) - (7.4) skal over-

$$(7.56) \quad \sum_{j=i}^N f_j(x_j, u_j) + f^N(x_N)$$

trin frem til  $i = N$ . Målfunktionen i dette problem er

Den teoretiske fordel ved dynamisk programmering er, at der er tale om *tilstrækkelige* optimalitetsbetingelser, og at disse *ikke* forudsætter noget specielt om problemet (f.eks. vedrørende konvekksitet eller differentia-

*løsning* her til.

**Sætning 7.4.1** Hvis problemet (7.1) - (7.4) har en optimal løsning, vil dynamisk programmering som skitseret i (7.57) - (7.61) give en optimal

*optimalitetsbetingelser:*

optimal i (7.1) - (7.4). Løsningssteknikken giver med andre ord *tilstrækkelige* optimal i (7.60) for alle de relevante  $x_i$ . Heraf følger at den fundne løsning (7.61) er

Det er forudsat, at man for alle  $i$  sørger for at få  $F_i$  defineret i (7.57) -

optimale løsninger! Den optimale målfunktionsværdi er nemlig  $F_0(x_0^*)$ .

at man faktisk kender den optimale målfunktionsværdi før man kender den

det fundne  $(x^*, u^*)$  i målfunktionen (7.1). Men det er værd at bemærke,

Den optimale målfunktionsværdi kan selvfølgelig beregnes ved at indsætte

$\bar{x}_0$  startes med  $x_0^* = \bar{x}_0$ , ellers må man først finde  $x_0^*$  (se eksempel 7.4.3).

Hvis der i problemformuleringen (7.3) er angivet et fast begyndelsespunkt

(7.61)

$$\begin{cases} u_i^* = \phi_i(x_i^*) \text{ og} \\ x_{i+1}^* = d_i(x_i^*, u_i^*) \end{cases}$$

for  $i = 0, \dots, N-1$ :

$i = N-1, \dots, 0$ . Dernæst beregnes den optimale løsning rekursivt forlæns

som i (7.57) og derefter  $F_i$  og  $\phi_i$  af (7.58) - (7.60) rekursivt baglæns for

Gangen i dynamisk programmering er nu følgende. Først defineres  $F_N$

vil vi ofte skrive  $u_i^*(x_i)$  i stedet for  $\phi_i(x_i)$ .

angive samtlige løsninger. Hvor der ikke kan være tvivl om betydningen,

$u_i^*$  i (7.58) - (7.60). I tilfælde af at løsningen ikke er entydig, bør  $\phi_i(x_i)$

der for ethvert  $x_i$ , for hvilket  $F_i$  er defineret, angiver den tilhørende løsning

Det andet sæt af hjælpefunktioner er  $\phi_i : R^n \rightarrow R^m, i = 0, \dots, N-1$ ,

”det lokale bidrag plus det bedste på resten”.

$x_{i+1}$ . Det følger, at indholdet i [ ] på højresiden af (7.58) kan beskrives som

(7.60) udtykker, at det skal være muligt at nå frem til  $V_N$  gennem punktet

delproblem (7.56), der starter i  $x_i$  og går frem til  $i = N$ . Begrænsningen

Man kan fortolke  $F_i(x_i)$  som den optimale målfunktionsværdi i det

løsninger i (7.1) - (7.4).

defineres som i (7.58) - (7.60) for alle de værdier af  $x_i$ , der indgår i mulige

fleste praktiske problemer klarer ved et simpelt trick, se nedenfor.  $F_i$  skal

billet). Det forudsættes blot, at problemet har kontrolstrukturen (7.1) - (7.4), og at (7.58) - (7.60) kan løses.

Beregningssættet er fordelt på et "stort" problem (7.1) - (7.4) deles op i  $N$  "små" problemer (7.58) - (7.60). Ulemperne omtales nedenfor.

Vi skal nu illustrere, hvorledes dynamisk programmering kan implementeres i form af et edb-program. Vi giver i figur 7.4 en primitiv kode for det problem, der er givet i eksempel 7.4.1; dette eksempel bør derfor læses først.

Det ses, at grundideen i dynamisk programmering er nem at implementere. Man gennemløber fire essentielle løkkesæt, hvoraf de tre er inden i hinanden.

Det fremgår, at vanskeligheden i (7.60) er løst ved at erklære  $F_{i+1}$  for et passende stort interval og lade  $F_{i+1}(x_{i+1}) := -\infty$  for alle de  $x_{i+1}$ , for hvilke  $F_{i+1}$  ikke er defineret.

Det fremgår også, at (7.58) - (7.60) er løst ved simpelthen at gennemløbe samtlige mulige  $u_i$ -værdier og udnævne den med den bedste målfunktionsværdi som den optimale. Dette giver en globalt optimal løsning (dog ikke alle løsninger, hvis der er flere).

I dette lille eksempel er  $x_i \in R$ , dvs.  $x_i$  er én-dimensional. Hvis  $x_i \in R^2$ , kan man løse et sådant problem ved at indlægge en ekstra løkke. Derved bliver "for  $x_{i+1}$  to  $x_{i+1}$  do begin" erstattet af "for  $x_{i+1}$  to  $x_{i+1}$  in  $x_{i+1}$  to  $x_{i+1}$  do begin" osv. Tilsvarende hvis  $m > 1$ .

Vi ser her vanskeligheden i dynamisk programmering med diskrete tilstande og kontrol. Antallet af punkter i tilstandsrummet, for hvilke problemet (7.58) - (7.60) skal løses, vokser nemlig kraftigt med antallet af dimensioner i  $x_i$ . Antager man således, at antallet af punkter i enhver dimension af  $x_i$  er  $\alpha$ , er antallet af værdier, som  $x_i$  må antage, lig med  $\alpha^n$ ; eksponentiel vækst med  $n$ ! Tilsvarende gør sig gældende for kontrolvæktoren. Dette betyder, at selv med beskudne værdier af  $n$  og  $m$  vil det være umuligt i praksis at løse problemet (7.1) - (7.4) ved dynamisk programmering. Dette problem kaldes ofte *dimensionaltets forbandelse*.

Det ses, at regnebesværet derimod formenlig vil være lineært voksende med antallet  $N$  af trin.

Dynamisk programmering kan også anvendes i en forlæns version. Ideen er skitseret i figuren 7.5, igen for problemet i eksempel 7.4.1. Det vil afhænge af det foreliggende problem, om man bør vælge at løse forlæns

Figur 7.4. Baglæns dynamisk programmering

```

Program DynamiskProgrammeringBaglans;
{ Programmet løser problemet givet i eksempel 7.4.1. }
const N=3;
var
  i,xpk,upkt:integer;
  F:array[0..N,xmin..xmax] of real;
  uopt:array[0..N-1,xmin..xmax] of integer;
  xopt:array[0..N] of integer;
  nopt:array[0..N-1] of integer;
Function Maal(i,x,u:integer):real;
begin
  case i of
    0: Maal:=sqrt(u);
    1: Maal:=sqrt(u-1)*(u-1);
    2: Maal:=-sqrt(u-2);
  end;
end;
Function Dyn(i,x,u:integer):integer;
begin
  Dyn:=x+u;
end;
begin { Hovedprogram }
  for xpk:=xmin to xmax do
    F[N,xslut]:=0;
  { Baglæns konstruktion af F og uoptx: }
  for i:=N-1 downto 0 do
    begin
      for xpk:=xmin to xmax do
        begin
          F[i,xpk]:=-uendelig;
          for upkt:=umin to umax do
            begin
              if (xmin <= Dyn(i,xpk,upkt)) and (Dyn(i,xpk,upkt) <= xmax) then
                if Maal(i,xpk,upkt) + F[i+1,Dyn(i,xpk,upkt)] > F[i,xpk] then
                  F[i,xpk]:=Maal(i,xpk,upkt) + F[i+1,Dyn(i,xpk,upkt)];
                uoptx[i,xpk]:=upkt;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  { Så rekonstrueres den optimale løsning forlæns: }
  xopt[0]:=xstart;
  if F[0,xstart]>-uendelig then
    begin
      writeIn('Den optimale målfunktionsværdi er ', F[0,xstart], ' og den optimale løsning:');
      for i:=0 to N-1 do
        begin
          nopt[i]:=noptx[i,xopt[i]]; write('i=',i,'; u*=', uopt[i]);
          xopt[i+1]:=Dyn(i,xopt[i],nopt[i]); writeIn('x*=', xopt[i]);
        end;
      end else writeIn('Der er ingen mulig løsning');
    end;
end.

```



Med denne definition kan vi se væk fra slubetingslignelsen  $x_3 = 4$ . Vi vil nu finde  $F_2(x_2)$  og  $u_2^*(x_2)$  for  $x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Vi laver en tabel som den nedenfor til venstre:

$$(7.66) \quad F_3(x_3) = \begin{cases} -\infty & \text{ellers} \\ 0 & \text{for } x_3 = 4 \end{cases}$$

Alternativt kan man dog vælge at opfatte  $F_3$  som defineret for alle  $x_3$ , således at

definerer  $F_3(x_3) = 0$  for  $x_3 = 4$ . Vi behøver ikke definere  $F_3(x_3)$  for andre værdier.

Vi vil nu løse problemet ved baglæns dynamisk programmering. Vi

og at der i hvert fald gælder  $0 \leq x_i \leq 4$ .

for  $i = 1$  og  $i = 2$ . Ved at studere (7.63) - (7.65) ses det, at  $x_i$  er heltallig, Det er ikke direkte i formuleringen angivet, hvilke værdier  $x_i$  kan antage

$$(7.62) \quad \max\{(u_0)^2 + (u_1 - 1)^3 - (u_2 - 2)^2\}$$

$$(7.63) \quad x_{i+1} = x_i + u_i$$

$$(7.64) \quad u_i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$(7.65) \quad x_0 = 0 \text{ og } x_3 = 4$$

som følger:

**Eksempel 7.4.1** Vi betragter problemet fra eksempel 7.1.1, der formuleres

(Det gælder bl.a. Dijkstra's korteste vej algoritme.)

de anvender optimalitetsprincippet og dermed dynamisk programmering. klassiske teknikker inden for netværksoptimeringen kan forklares som om emne inden for optimering. Der er derfor ikke overraskende, at nogle af de timale (korteste, billigste, etc.) vej gennem et netværk er selvstændigt finde den optimale vej gennem et netværk. Nu er det at finde den op- det, at dynamisk programmering kan karakteriseres som en teknik til at Ved betragtning af f.eks figur 7.2 og de tilknyttede diskussioner fremgår

til det enkelte problem.

lementere. For at få en effektiv algoritme må implementeringen nøje passe Det fremgår, at grundideen i dynamisk programmering er nem at im- eller baglæns.



Hvis vi også ønskede løsningen med start i  $x_0 = -1$ , ville det være vanskeliggere. Når vi nemlig skal udfylde kombinationen  $x_0 = -1$  og  $u_0 = 0$ , skal vi slå op i tabellen for  $i = 1$  under værdien  $x_1 = -1$  for at aflæse  $F_1(x_1)$ . Denne værdi blev imidlertid ikke tabellagt i eksempel 7.4.1! Vi har dermed ikke oplydt en af forudsætningerne for Sætning 7.4.1: at  $F_i$  er defineret for alle de  $x_i$ , der indgår i mulige løsninger. Derfor må vi først

Vi ser, at den optimale målfunktionsværdi nu er  $F_1(1) = 4$ . De optimale løsninger aflæses til  $x_0^* = 1, u_0^* = 0 \Rightarrow x_1^* = 1 \Rightarrow u_1^* = 3 \Rightarrow x_2^* = 4 \Rightarrow u_2^* = 0 \Rightarrow x_3^* = 4$  og  $x_0^* = 1, u_0^* = 1, u_0^* = 3 \Rightarrow x_1^* = 4 \Rightarrow u_1^* = 4 \Rightarrow x_2^* = 4 \Rightarrow u_2^* = 4 \Rightarrow x_3^* = 4$ .

$u_0$					
$x_0$	0	0	1	2	3
	7	5	3	7	
	4	0	2	4	
					$0 \vee 3$
					4

fra eksempel 7.4.1 således:

Vi kan derfor finde løsningen ved blot at supplere skemaet for  $i = 0$  7.4.1, idet skemaerne for  $i = 1$  og  $i = 2$  genbruges. kunne f.eks. vælge  $x_0 = 1$ . Beregningerne for  $x_0 = 1$  er helt som i eksempel 7.4.2. Vi fortsætter ovenstående eksempel 7.4.1. Vi vil undersøge, hvad der sker, hvis vi starter i en anden tilstand end  $x_0 = 0$ . Vi

Den anden løsning bliver tilsvarende  $x_0^* = 0, u_0^* = 3 \Rightarrow x_1^* = 3 \Rightarrow u_1^* = 1 \Rightarrow x_2^* = 3 \Rightarrow u_2^* = 1 \Rightarrow x_3^* = 4$ . □

Den optimale løsning findes således. Vi har  $x_0^* = 0$  ifølge (7.65). Af skemaet for  $i = 0$  aflæses  $u_0^* = u_0^*(x_0^*) = 0$  eller 3. Lad os vælge  $u_0^* = 0$ . Af (7.63) følger herefter  $x_1^* = 0$ . Af skemaet for  $i = 1$  aflæses  $u_1^*(x_1^*) = 3$ . Af (7.63) følger  $x_2^* = 3$ , hvorefter vi aflæser  $u_2^*(x_2^*) = 1$ . Endelig kan man af (7.63) finde  $x_3^* = 4$ .

Vi aflæser af tabellen, at den optimale målfunktionsværdi i problemet (7.62) - (7.65) er 7.

$u_0$					
$x_0$	0	0	1	2	3
	7	5	3	7	
	4	0	2	4	
					$0 \vee 3$
					7

se sådan ud:

Endelig går vi til trin 0. Det skulle herefter være klart, at tabellen må således udfyldes hele tabellen. Bemærk, at  $u_1^*(2)$  ikke er entydig.



**Eksempel 7.4.4** Lad os betragte følgende problemstilling. Det gælder om at fylde en halvkuhle mest muligt op ved at stable cirkelskiver oven på hinanden. Denne problemstilling kan f.eks. opstå i forbindelse med design af transformere. På figur 7.6 er problemstillingen illustreret.

Denne anden måde er ikke begrænset til anvendelse i forbindelse med dynamisk programmering, men kan generelt anvendes til omformulering af problemet, så det får et fast startpunkt. □

En anden måde at løse vanskeligheden med et frit startpunkt på, er at indføre et ekstra trin, nummer  $i = -1$ . Vi vælger et vilkårligt fast startpunkt  $\bar{x}_{-1}$ . Vi indfører desuden dynamikken  $x_0 = x_{-1} + u_{-1}$ , hvor  $u_{-1} \in R^n$  ( $u_{-1}$  er ubegrænset), og det lokale bidrag til målfunktionen defineres som  $f_{-1}(x_{-1}, u_{-1}) \equiv 0$ . Herefter kan baglæns dynamisk programmering gennemføres som beskrevet i (7.57) - (7.61), dog med  $i = -1$  som første indeks.

**Eksempel 7.4.3 (Frit  $x_0$ )** Betragt problem fra eksempel 7.4.1, men modifieret således at startbetingelsen er givet som  $x_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Dette problem kan løses ved baglæns dynamisk programmering således. Man konstruerer på trin  $i = 0$  den sædvanlige tabel, men med indgange for alle  $x_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Derefter finder man den værdi af  $x_0$ , der giver størst værdi af  $F_0(x_0)$ , og dette er det optimale  $x_0^*$ . Af den sidste tabel i eksempel 7.4.2 ses, at  $x_0^* = -2$ . Herefter kan man gennemføre den forlæns rekursion (7.61) med udgangspunkt i  $x_0^*$ .

	$u_0$						
$x_0$	0	1	2	3			
$F_0(x_0)$							
	-2	-1	0	1	2		
	13	8	7	5	3	4	
	4	7	0	3	0	3	
	-1						
	2	1	4	0	2	4	

For  $i = 0$  ser det delvist udfyldte skema sådan ud:  
 Opgave: Find samtlige optimale løsninger til problemet for  $x_0 = 2$ ,  $x_0 = -1$  og  $x_0 = -2$  ved at bygge videre på tabellerne i eksempel 7.4.1. Udvide tabellen i eksempel 7.4.1 med rækken  $x_1 = -1$ , før vi kan udfylde tabellen for  $x_0 = -1$  og  $u_0 = 0$ .

□

med startbetingelsen  $x_1 = 150$  cm og  $x_6$  er fri. De lokale begrænsninger er,

$$(7.67) \quad x_{i+1} = u_i$$

dynamikken

Tilstanden  $x_i$  angiver hvilken diameter, der sidst er valgt. Vi får da største,  $i = 5$  til den mindste diameter.

Vi skal vælge 5 diameter  $u_i$ ,  $i = 1, 5$ . Vi lader  $i = 1$  svare til den spørgsmålet ved at anvende dynamisk programmering.

diameter, f.eks. 5. Så opstår spørgsmålet: hvilke 5? Vi skal nu besvare Nu kan det være ønskeligt at anvende et begrænset antal forskellige

er plads til. (Kontroller selv tallene.)

diameter 110 cm, o.s.v. Det kan aflæses af figur 7.6, hvor mange skiver, der fra bunden, ville der være plads til 374.) Ovenpå følger derefter 76 med

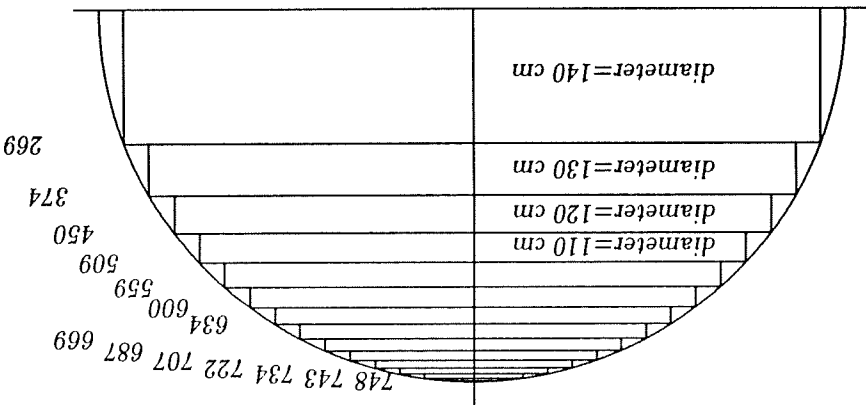
med diameter 130 cm. Der er plads til 105 af dem. (Hvis de var lagt helt betragtnings ses, at der er plads til 269 skiver. Ovenpå lægges skiver

skiver med diameter 140 cm. Ved anvendelse af elementære geometriske med diameter 150 cm op på være følgende. Først lægges en bunke

cm. Tykkelsen af skiverne er 1 mm. Den bedste måde at fylde en halvkugle Vi forudsætter, at skiverne kun findes i diameter, der er multipla af 10

diameteren er 150 cm

Figur 7.6. Det maksimale antal skiver af de forskellige størrelser når kugle-



under hensyntagen til (7.68) - (7.69).

$$F_i^*(x_i) = \max_{u_i} [x_i \cdot 0.1 \cdot (h(u_i) - h(x_i)) u_i + F_{i+1}^*(u_i)] \quad (7.73)$$

generelle udtryk til bestemmelse af  $F_i^*$  er  
 Nu går vi til trin  $i = 4$ , og regner på samme måde. Det ses, at det  
 $F_5^*(x_5)$  og  $u_5^*(x_5)$  er beregnet; det ses, at de relevante  $x_5$  er  $\{110, 100, \dots, 20\}$ .  
 Da  $18 > 14$ , er  $F_5^*(30) = 18$ , og  $u_5^*(30) = 20$ . Sådant regnes videre, indtil alle

$$f_5(30, 10) = 0.1 \cdot (748 - 734) \cdot 10 = 14 \quad (7.72)$$

og hvis vi vælger  $u_5 = 10$ :

$$f_5(30, 20) = 0.1 \cdot (743 - 734) \cdot 20 = 18 \quad (7.71)$$

$x_5 = 30$  fås, hvis vi vælger  $u_5 = 20$ :  
 Dette er også  $F_5^*(20)$ , da der ikke var noget valg for  $u_5$ :  $F_5^*(20) = 5$ . Hvis  
 $h(x_5) = 743$  og  $h(u_5) = 748$ . Ved indsættelse i (7.70) udregnes værdien 5.  
 kan vi kun vælge  $u_5 = 10$  cm, jævnfør (7.69). Ifølge notationen er  $x_5 = 20$ ,  
 Lad os nu betragte trin 5. Hvis den sidst valgte størrelse var 20 cm,  
 beregninger?)

(7.70), hvis vi vil regne i rumfang, og hvorledes påvirker det de efterfølgende  
 bliver  $f_i$  målt i  $\text{cm}^2$ , når faktoren 0.1 medtages i (7.70). (Hvorledes bliver  
 diameter) aflæses af figur 7.6). Hvis  $u_i$  måles i cm og  $h$  aflæses af figuren,  
 Her er  $h$  en funktion, der angiver den maksimale højde svarende til en given

$$f_i(x_i, u_i) = 0.1 \cdot (h(u_i) - h(x_i)) u_i \quad (7.70)$$

derfor arealet, der kan angives som  
 op. Det er klart, at vi får samme optimale løsning, hvis vi ønsker at dække  
 det størst mulige areal på figur 7.6, jævnfør sætning 2.7.3. Vi benytter  
 Målfunktionen på trin  $i$  skal angives, hvor meget af kuglen, der er fyldt  
 beregninger ved at medtage (7.69).

(Den sidste betingelse er ikke nødvendig af hensyn til logikken. Det skulle  
 gerne fremgå af den optimale løsning, at  $u_i^* > x_i^*$ ; men der bliver færre

$$u_i > x_i \quad (7.69)$$

$$u_i \in \{10 \text{ cm}, 20 \text{ cm}, \dots, 150 \text{ cm}\} \quad (7.68)$$

at  $u_i$  skal være et multiplum af 10 cm, samt at diameteren bliver mindre:

For at begrænse regnearbejdet er det vigtigt, at man afgårseer tilstands- og kontrolrummet mest muligt. Man bør derfor, før man pudser en dynamisk programmerings algoritme på et problem, nøje analysere problemet med

## 7.4.2 Implementering

(Idé: Brian Moores: *Dynamic Programming in Transform Design*, *J. Opt. Res. Soc.*, Vol. 37, No. 10, pp. 967-969, 1986.) □  
 diametre, der bør vælges, hvis transformere skal designes.

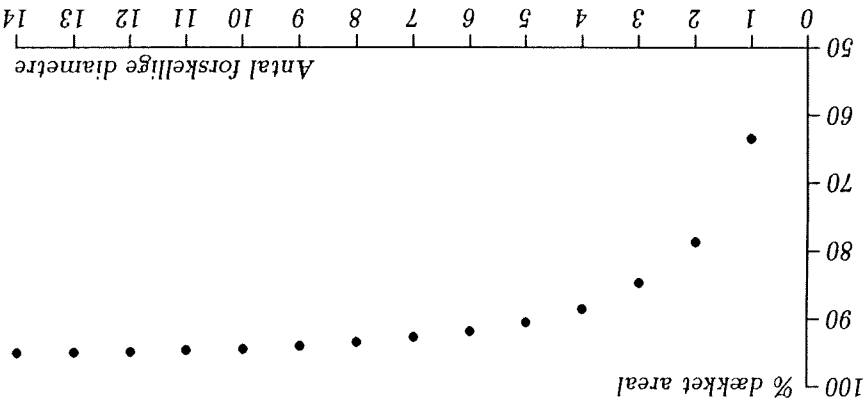
På baggrund af figur 7.7 og kendskab til bl.a. produktions- og lageromkostninger vil der kunne træffes beslutning om, hvilket antal forskellige  $\alpha$  er antallet af forskellige diametre, jævnfør afsnit 2.6.

Denne graf kan opfattes som grafen for en værdifunktion,  $F^*(\alpha)$ , hvor forskellige diametre:

vises hvor stor en procentdel, der maksimalt dækkes ved de mulige antal at 90.5% af halvirkelarealet i figur 7.6 dækkes med optimalt  $n^*$ . I figur 7.7 afhænger af antallet af forskellige diametre. Med 5 forskellige diametre fås, Nu kunne man ønske at analysere, hvorledes kvaliteten af løsningen løst problemet ved dynamisk programmering.

Den optimale løsning med 5 størrelser kan ved videre beregninger på denne måde bestemmes som  $n^* = (140, 120, 100, 80, 50)$ . Vi har hermed

Figur 7.7. Dækningsprocent som funktion af antal forskellige diametre for en halvirkel med diameter på 150 cm



• Elimination at visse kontroller og/eller tilstande kan ske inden dynamisk programmering starter. Dette gøres ved at vise, at disse ikke kan indgå i en optimal løsning. Ideen minder om den elimination, der

En oversigt over mulige teknikker til anvendelse i forbindelse med dynamisk programmering (efter T.L. Morin i Puterman 1978) følger her:

andet simpelt eksempel fremgår omkring (7.69). gangsmåde er således blandt de effektive til løsning af rygsækproblemet. Et vise, at en række  $x_i$  - eller  $u_i$  - ikke kan være optimale. En sådan fremidterne fra gren-og-grænse i en indledende fase. Forbålet med dette er at Som eksempel at mere generel art kan nævnes, at man kan anvende potentielt optimale, selv om de indgår i mulige løsninger.

stor betydning, idet man nogle gange vil kunne udelukke mange  $x_i$  som udelukkes at kunne indgå i en optimal løsning. Denne skærpselse kan have er:  $F_i$  skal defineres for alle de værdier at  $x_i$ , som ikke på forhånd kan Dette er imidlertid ikke strengt nødvendigt. En præcisere formulering indgår i mulige løsninger.

(7.61) blev det fremhævet, at  $F_i$  skal defineres for alle de værdier at  $x_i$ , der I forbindelse med beskrivelsen af dynamisk programmering i (7.57) - langt ned. Bemærk, at der ikke er nogen monoton sammenhæng.

mange problemer for så vidt, at det er beregningsmæssigt dyrt at få fejlen mellem diskretiseringsgrad og regnetiden. Sammenhængen er typisk for For et problem svarende til (7.11) - (7.15) viser figur 7.8 sammenhængen agtighed.

besværligheden ved beregningen (regnetid, lagertid, lagerram) og løsningens nøj- nok. Man må eksperimentere sig frem til et passende kompromis mellem ud fra, at hvis diskretiseringen vælges fin nok, så bliver løsningen nøjagtig

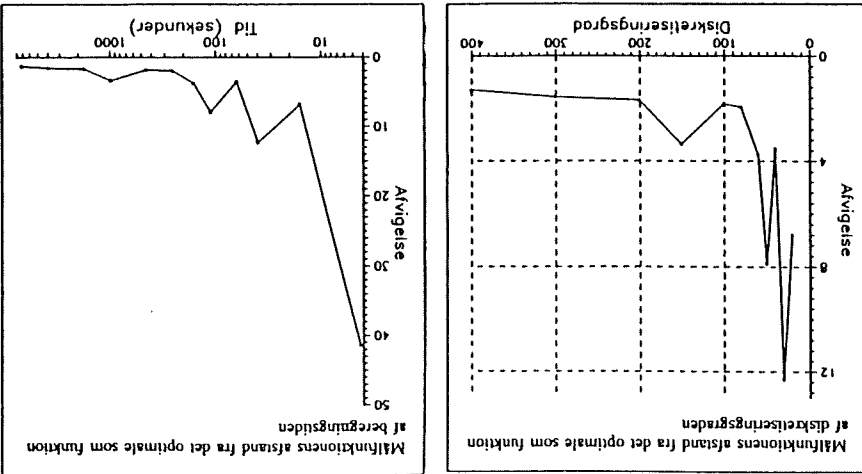
Ved diskretiseringen introduceres en fejl, men man går sædvanligvis Det er en kunst at finde lige netop den rigtige måde at diskretisere på og/eller kontrolvariablerne.

dynamisk programmering. Derfor vil man vælge at diskretisere tilstands- variabler. Dette er imidlertid, med enkelte undtagelser, umuligt at løse ved Oftere er det nemlig sådan, at det problem, man ønsker løst, har kontinuerle problemer i forbindelse med implementering af dynamisk programmering.

Algoritmerne i figurene 7.4 og 7.5 går uden om et af de vanskeligste derfor nøjes med to af disse vektorer, og også disse bør gøres mindst mulige.  $F_j$  for alle  $j$ : når  $F_i$  er beregnet, er der ikke mere brug for  $F_{i+1}$ . Man kan henblik herpå (se eksempel 7.4.5). Bemærk endvidere, at man ikke behøver

- Problemet kan sikkert formuleres på forskellig måde. Se afsnit 2.7.
  - Lagrangemultiplikatorer, dualitet m.v. kan også anvendes. Man kan bl.a. opdele et problem i  $n$  problemer, der hver har en én-dimensionaal tilstandsvektor. Der kræves så til gengæld et iterativt forløb, indtil optimalitetsbetingelser er opfyldt (hvilket de ikke nødvendigvis vil blive, det afhænger bl.a. af, om problemet er pænt konvekst).
  - Dekomposition kan anvendes på forskellig vis.
  - Approsimationssteknikker kan bruges til at erstatte en kompliceret "koret"  $F_i$  med en simpleere funktion, f.eks. et polynomium.
  - Ved løsning af (7.58)-(7.60) kan man måske indse, at visse værdier af  $x_i$  er irrelevante, fordi man ikke fra dem kan "nå"  $x_{i+1}$ , for hvilke  $F_{i+1}$  er defineret. Denne idé kan især benyttes i en forlæns version af dynamisk programmering.
  - Ved løsning af (7.58)-(7.60) kan man måske indse, at visse værdier af  $x_i$  er irrelevante, fordi man ikke fra dem kan "nå"  $x_{i+1}$ , for hvilke  $F_{i+1}$  er defineret. Denne idé kan især benyttes i en forlæns version af dynamisk programmering.
- sker i gren og grænse-teknikken.

Figur 7.8. Eksempel på sammenhæng mellem diskretiseringsgrad (målt ved antallet af punkter på  $x_i$ -akserne), diskretiseringsfej og regnetiden ved dynamisk programmering.



Som oftest anvendes dynamisk programmering ved problemer, der har diskrete variabler (eller hvor man diskretiserer oprindeligt kontinuerte vari-

### 7.4.3 Det kvadratiske-lineære problem

og hvor meget på selve  $DP$  beregningerne.  $\square$   
 Det er vigtigt for effektiviteten af dynamisk programmering, at man får afgrænsset tilstands- og kontrolrummene fornuftigt på forhånd. Man må afveje i hvert enkelt tilfælde, hvor meget tid man vil bruge på afgrænsning

eksempel 7.4.1. for  $i = 1$  og  $i = 2$ . Disse observationer er ikke udyttelige i beregningerne i beregningerne. Dette kunne have sparet os for at række i hver af tabellerne  $0 \leq x_i + u_i \leq 4$ , og derved kunne vi have reduceret yderligere i tabellen for  $i = 1$ . Man kunne også indse, at på grund af (7.63) og (7.65)  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Dette kunne have sparet os for at udregne de 6 nederste "—" i Man kan godt analysere videre og se, at  $x_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$  og  $x_2 \in$

der er anvendt i beregningerne i eksempel 7.4.1.  $0 \leq u_i$  og  $x_3 = 4$  for alle  $i$ . Det er denne afgrænsning, Dernæst ses, at da  $0 \leq u_i$  og  $x_0 = 0$  for alle  $i$ , og da og den givne dynamik er det for det første klart, at alle  $x_i$  er heltallige. Betragt igen problemet fra eksempel 7.4.1. Med  $x_0 = 0$ ,  $u_i \in \{0, 1, 2, 3\}$  man finde ud af, hvilke det drejer sig om.

i mulige løsninger. Kun ved at analysere det forelagte problem konkret kan man finde ud af, hvilke det drejer sig om. Man må sørge for, at der er indgange for alle de  $x_i$ , der kan indgå i mulige løsninger, er det ikke på forhånd klart for hvilke  $x_i$ , der skal laves in-

Eksempel 7.4.5 Når man skal konstruere tabellerne til dynamisk pro-

- Anvendelse af avancerede datastrukturer og udnyttelse af edb-teknikker på anden vis.
- Der er måske yderligere struktur i problemet, der kan udnyttes?
- Udnyttelse af konvekssitet, konkavitet, linearet, diskontinuiteter, stykvis linearet.... Dette kan både udnyttes ved løsning af (7.58)-(7.60) og ved lagring af  $F_i$ , der kan være af en bestemt form, der nemt kan repræsenteres.
- Måske er der en måde, der egner sig bedst til dynamisk programmering (typisk den med det "mindste" tilstandsrum).

$$(7.79) \quad n_{N-1} = n$$

Under de gjorte antagelser kan løsningen skrives som:

$$(7.78) \quad \begin{aligned} & (F_x^N)^T x_{N-1} + F_{xN-1}^N + \underline{d}_{N-1} + (R_x^N)^T (R_x^N)^T F_{xN-1}^N + R_{xN-1}^N = 0 \\ & x_{N-1} (R_x^N)^T + n_{N-1} (R_x^N)^T + n_{N-1} (R_x^N)^T \end{aligned}$$

Antager vi, at målfunktionen er strengt konkav, kan vi finde det entydige ubegrensede optimum  $n_{N-1}$  ved at differensiere, sætte lig med nul og løse. Vi skal således løse følgende ligningssystem med hensyn til  $n_{N-1}$ :

$$(7.77) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} n_{N-1} (R_x^N)^T + R_{xN-1}^N (R_x^N)^T + R_{xN-1}^N (R_x^N)^T + R_{xN-1}^N (R_x^N)^T \\ & + \frac{1}{2} (F_x^N)^T x_{N-1} + F_{xN-1}^N + \underline{d}_{N-1} + (R_x^N)^T (F_x^N)^T x_{N-1} + F_{xN-1}^N + \underline{d}_{N-1} \\ & + R_{xN-1}^N (F_x^N)^T x_{N-1} + F_{xN-1}^N + \underline{d}_{N-1} + (R_x^N)^T (F_x^N)^T x_{N-1} + F_{xN-1}^N + \underline{d}_{N-1} \end{aligned}$$

$F_{N-1}^N(x_{N-1}) \equiv \max_{\frac{1}{2} x_{N-1} (R_x^N)^T + x_{N-1} (R_x^N)^T + x_{N-1} (R_x^N)^T + x_{N-1} (R_x^N)^T}$  er defineret som

Hvis vi nu eliminerer  $x_N$  ved anvendelsen af dynamikken finder vi, at  $F_{N-1}^N$  i punktet  $x_{N-1}$  er defineret som

$$(7.76) \quad x_0 = \bar{x}_0$$

$$(7.75) \quad x_{t+1} = F_x^t x_t + F_u^t u_t + \underline{d}_t$$

$$+ \frac{1}{2} x_N (R_x^N)^T x_N + R_{xN}^N x_N$$

$$(7.74) \quad \max_{N-1} \left[ \sum_{t=0}^{\frac{1}{2}} x_t (R_x^t)^T x_t + x_t (R_x^t)^T u_t + \frac{1}{2} u_t (R_u^t)^T u_t + R_{xN}^N x_N + R_{uN}^N u_N \right]$$

Vi definerer det ubegrensede problem således:

Dette uddledes i det følgende.

ligger i, at ved dette problem bliver  $F_t^t$  kvadratisk konkav, og dermed "pæn". dynamik og ingen lokale begrensninger er væsentligste undtagelse. Pointen Problemer med kvadratisk, konkav målfunktion (til maksimering), linæer kan det være vanskeligt at løse (7.58) - (7.60).

angive funktionen  $F_t^t$  på en passende nem måde, og sammenhørende hermed mer med kontinuerle variabler af to grunde. Det kan være vanskeligt at abler). Det er vanskeligt at anvende dynamisk programmering på proble-



$$\begin{aligned}
 (7.82) \quad & A_i = \frac{2}{1} (R_{xx}^i P_{i+1}^i F_x^i) \quad (n \times n) \\
 (7.83) \quad & B_i = R_{xx}^i + 2F_x^i P_{i+1}^i F_x^i \quad (n \times m) \\
 (7.84) \quad & C_i = \frac{2}{1} (R_{xx}^i + 2F_x^i P_{i+1}^i F_x^i) \quad (m \times m) \\
 (7.85) \quad & D_i = R_{xx}^i + 2d_{i+1}^i F_x^i + Q_{i+1}^i F_x^i \quad (1 \times m) \\
 (7.86) \quad & E_i = R_{xx}^i + 2d_{i+1}^i F_x^i + Q_{i+1}^i F_x^i \quad (1 \times n) \\
 (7.87) \quad & K_i = -\frac{2}{1} C_i^{-1} D_i \quad (m \times 1) \\
 (7.88) \quad & L_i = -\frac{2}{1} C_i^{-1} B_i \quad (m \times n) \\
 (7.89) \quad & F_i = A_i + B_i L_i + L_i^i C_i L_i \quad (n \times n) \\
 (7.90) \quad & Q_i = K_i^i B_i^i + 2K_i^i C_i L_i + D_i L_i + E_i \quad (1 \times n)
 \end{aligned}$$

Denne baglæns løsningsprocedure kan fortsættes til trin 0. Ved derefter at udnytte den fundne lineære sammenhæng mellem  $x_i$  og  $u_i$ , kan vi konstruere den optimale løsning trinvis fremad startende med  $x_0$ . Dette kan formaliseres som følger. Definer  $P_N = R_{xx}^N/2$ ,  $Q_N = R_{xx}^N$  og derefter følgende matrix rekursivt baglæns for  $i = N - 1, 0$  (matrixernes dimensioner er angivet som  $r \times s$ ):

$$\begin{aligned}
 (7.81) \quad & \max_{u_i} \frac{2}{1} x_i^i R_{xx}^i u_i + x_i^i R_{xx}^i u_i \\
 & + \frac{2}{1} u_i^i R_{xx}^i u_i + R_{xx}^i u_i + R_{xx}^i u_i \\
 & + (F_x^i x_i + F_x^i u_i + d_i) (F_x^i x_i + F_x^i u_i + d_i) \\
 & + Q_{i+1}^i (F_x^i x_i + F_x^i u_i + d_i)
 \end{aligned}$$

Vi ser, at når vi skal til at løse optimeringsproblemet på trin  $(N - 2)$  i baglæns dynamisk programmering, har vi præcis samme struktur, som vi havde i (7.77) på trin  $(N - 1)$ , hvis vi i (7.74) lader  $P_N = R_{xx}^N/2$  og  $Q_N = R_{xx}^N$ . Med  $i = N - 2$  har vi altså problemet

$$(7.80) \quad F_{N-1}^i(x_{N-1}) = x_{N-1}^i P_{N-1}^i x_{N-1}^i + Q_{N-1}^i x_{N-1}^i + p_{N-1}^i$$

$p_{N-1}^i$  kan vi herefter skrive  $F_{N-1}^i$  som

Ved passende definitioner af matrixerne  $P_{N-1}$  og  $Q_{N-1}$  og konstanter

fa udtrykt  $F_{N-1}^i$  som en kvadratisk funktion defineret på  $R_N^i$ .

Vi bemærker nu, at løsningen  $u_{N-1}^i$  er udtrykt som en lineær funktion af  $x_{N-1}^i$ . Vi kan derfor indsatte dette i udtrykket (7.77) for  $F_{N-1}^i$  og derved

$$\begin{aligned}
 & -(R_{xx}^{N-1} + F_{xx}^{N-1} R_{xx}^{N-1} F_{xx}^{N-1})^{-1} (R_{xx}^{N-1} + F_{xx}^{N-1} R_{xx}^{N-1} F_{xx}^{N-1})^{-1} \\
 & + F_{xx}^{N-1} R_{xx}^{N-1} F_{xx}^{N-1} + F_{xx}^{N-1} R_{xx}^{N-1} F_{xx}^{N-1} + F_{xx}^{N-1} R_{xx}^{N-1} F_{xx}^{N-1}
 \end{aligned}$$

**Eksempel 7.4.6** Vi løser nu et eksempel med  $m = 1$ ,  $n = 2$  og  $N = 4$ . Eksemplet kan beskrive en bil der starter i position  $0 (= x_1)$  med hastigheden  $0 (= x_2)$ , kontrolfunktionen  $u$  kan betragtes som speeder for  $u$  positiv,  $h_v$  bremse for  $u$  negativ. Vi ønsker at minimere omkostningen ved at bruge

Bevis: Overspringes.  $\square$

**Sætning 7.4.2** Hvis  $C_i < 0$  for alle  $i$ , så findes  $F_i$  og den entydige løsning til problemet (7.74) - (7.76) ved dynamisk programmering som beskrevet ovenfor.

Vi kan derfor resumere løsningen ved hjælp baglæns dynamisk programmering således. Beregn matrixerne (7.82) - (7.90) rekursivt baglæns for  $i = N - 1, 0$ , idet der startes med  $F_N = R_N^x/2$  og  $Q_N = R_N^x$ . Beregn derefter  $u_i$  og  $x_{i+1}$  rekursivt forlæns for  $i = 0, N - 1$  af (7.94) og (7.75), idet der startes med  $x_0 = \bar{x}_0$ .

$$F_i(x_i) = x_i' P_i x_i + Q_i x_i \quad (7.95)$$

Ved at indsætte dette i (7.93) ses det ved anvendelse af (7.82) - (7.90) at  $F_i$  på trin  $i$  er af formen (7.80). På nær konstanten har vi altså

$$u_i = K_i + L_i x_i \quad (7.94)$$

Løsningen svarende til (7.79) kan nu skrives

bortset fra en konstant, der ikke har indflydelse på optimeringen, og som derfor er udeladt.

$$x_i' A_i x_i + x_i' B_i u_i + u_i' C_i u_i + D_i u_i + E_i x_i \quad (7.93)$$

$[f_i(x_i, u_i) + F_{i+1}(d_i(x_i, u_i))]$ , jævnfør (7.81), skrives som

$$Q_i = -\frac{1}{2} D_i C_i^{-1} B_i' + E_i \quad (7.92)$$

$$P_i = A_i - \frac{1}{4} B_i C_i^{-1} B_i' \quad (7.91)$$

Bemærk, at vi også kunne have skrevet  $P_i$  og  $Q_i$  direkte fra  $A_i, B_i, C_i, D_i$  og  $E_i$ :

På trin 1 findes:

$$K_2 = (52.17), L_2 = (-0.52, -1.26),$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -4 & \\ & -9.7 \end{pmatrix}, C_2 = (-3.8), D_2 = (400), E_2 = (400, 800),$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \\ -2 & -2.8 & \\ & & -4 \end{pmatrix}, P_2 = (400, 400), A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & \\ -4 & -8.8 & \\ & & -4 \end{pmatrix},$$

På trin 2 findes:

$$+ (x_1^3, x_2^3) \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ n_3 + n_3(-6)n_3 + (0)n_3 + (400, 400) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix}$$

$$\max_{n_3} [(x_1^3, x_2^3) \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -7 \\ & & x_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix}]$$

og herefter kan vi opskrive problemet til trin 3:

$$K_3 = (0), L_3 = (0, -0.83),$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ & & -10 \end{pmatrix}, C_3 = (-6), D_3 = (0), E_3 = (400, 400),$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \\ 0 & -5 & \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}, P_3 = (0, 400), A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \\ -2 & -7 & \\ & & -7 \end{pmatrix},$$

den optimale løsning. Vi finder

Idet problemet er ubegrænset, vil vi ved et algoritme gennemløb finde

$$R_{xx}^N = \begin{pmatrix} 0 & -4 & \\ -4 & -10 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, R_x^N = (400, 0).$$

$$R_{xx}^i = (0), R_{xx}^{i+1} = (-2), R_{xx}^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, R_{xx}^{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{xx}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, R_{xx}^{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, R_x^i = (0, 0),$$

Med de tidligere definerede betegnelser:

$x_0 = (0, 0)^T$ ,  
 $\max_{x_1} [\sum_{i=0}^3 -(n_i)^2 - 2(x_1^4 - 100)^2 - 5(x_2^4)^2]$ ,  $x_1^{i+1} = x_1^i + x_2^i$ ,  $x_2^{i+1} = x_2^i + n_i$ ,  
 $x_1$ -retningen og vi ønsker at slutte med hastigheden 0. Problemet er så:  
 spejder og bremse, og vi ønsker at komme nær ved 100 (dimensionløs) i

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1.5 & -2.7 \\ -1.5 & -2.7 & -2.4 \\ -1 & -2.4 & -6.7 \end{pmatrix}, A_1 = (191.3, 295.7), B_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -8.4 \end{pmatrix}, C_1 = (-3.7), D_1 = (295.7), E_1 = (191.3, 487), \\ K_1 = (39.53), L_1 = (-0.40, -1.13),$$

og til trin 0:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -0.4 & -0.8 \\ -0.8 & -1.9 \end{pmatrix}, P_1 = (74.4, 153.5), A_0 = \begin{pmatrix} -0.4 & -1.1 \\ -1.1 & -3.8 \end{pmatrix}, \\ B_0 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -5.3 \end{pmatrix}, C_0 = (-2.9), D_0 = (153.5), E_0 = (74.4, 227.9), \\ K_0 = (26.51), L_0 = (-0.27, -0.92),$$

Heretter findes  $u_0$  ud fra  $K_0, L_0$  og  $x_0$ , der indsættes i (7.94):

$$u_0 = 26.51 + (-0.27, -0.92) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 26.51.$$

Ved hjælp af  $x_0$ ,  $u_0$  og den dynamiske ligning finder vi nu  $x_1$ :

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 26.51 = \begin{pmatrix} 26.51 \\ 26.51 \\ 26.51 \end{pmatrix}$$

Nu finder vi  $u_1$  fra  $K_1, L_1$  og  $x_1$ :

$$u_1 = 39.53 + (-0.40, -1.13) \begin{pmatrix} 26.51 \\ 26.51 \\ 26.51 \end{pmatrix} = 9.64$$

$$\begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 9.64 = \begin{pmatrix} 26.51 \\ 36.14 \\ 26.51 \end{pmatrix}.$$

Nu finder vi  $u_2$  fra  $K_2, L_2$  og  $x_2$ :

$$u_2 = 52.17 + (-0.52 - 1.26) \begin{pmatrix} 26.51 \\ 36.14 \\ 26.51 \end{pmatrix} = -7.23.$$

$$\begin{pmatrix} x_3^1 \\ x_3^2 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} -7.23 = \begin{pmatrix} 26.51 \\ 28.92 \\ 28.92 \end{pmatrix}.$$

Nu finder vi  $u_3$  fra  $K_3, L_3$  og  $x_3$ :

$$u_3 = 0 + (0.00, -0.83) \begin{pmatrix} 26.51 \\ 28.92 \\ 28.92 \end{pmatrix} = -24.10.$$

$$\begin{pmatrix} x_4^1 \\ x_4^2 \\ x_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} -24.10 = \begin{pmatrix} 91.57 \\ 4.82 \\ 4.82 \end{pmatrix} \quad \square$$

På trin  $i$  kan man i baglæns dynamisk programmering udnytte kendskabet til  $F_i$  og/eller  $u_i^*(x_i)$  på følgende måde. Antag, at vi har beregnet den optimale løsning til problemet, og at vi har implementeret de  $i$  første hensyn til slutpunktet  $x_N$ .

Hvis man har anvendt forlæns dynamisk programmering har man tilsvarende mulighed for næsten gratis at udføre en følsomhedsanalyse med afhængighed af  $x_0$ .

Spækket kan  $F_0(x_0)$  tolkes som den optimale målfunktionsværdi for det problem, der starter i  $x_0$ . Man kan altså direkte få et udtryk for den optimale målfunktionsafhængighed af startpunktet  $x_0$  ved at beregne  $F_0(x_0)$  for forskellige  $x_0$ . Der er dermed i baglæns dynamisk programmering indbygget en næsten gratis følsomhedsanalyse med hensyn til  $x_0$ . Den sidste tabel i eksempel 7.4.2 angiver direkte den optimale målfunktionsværdis afhængighed af  $x_0$ .

Som omtalt kan  $F_i(x_i)$  opfattes som den optimale målfunktionsværdi for det problem, der starter i  $x_i$ , og som omfatter trinene frem til  $i = N$ , se (7.56). Det skulle være klart, at  $F_i$  er en værdifunktion som defineret i afsnit 2.6.

#### 7.4.4 Følsomhedsanalyse

Dette er globalt optimalt, fordi  $C_i > 0$  for  $i = 0, 1, 2$ .  $\square$

$$x_2^* = 1/2, u_2^* = 1/4 \text{ og } x_3^* = 3/4.$$

$$\text{Med } x_0^* = 0 \text{ findes } u_0^* = 1/4, x_1^* = 1/4, u_1^* = 1/4, x_1^* + L_1 x_1^* = 1/4, L_0 = (-1/4).$$

$$\text{Endelig findes } B_0 = (-2/3), C_0 = (-4/3), D_0 = (2/3), K_0 = (1/4) \text{ og } K_1 = (1/3), L_1 = (-1/3), P_1 = (-1/3) \text{ og } Q_1 = (2/3).$$

$$\text{Så findes } A_1 = (-1/2), B_1 = (-1), C_1 = (-3/2), D_1 = (1), E_1 = (1), (7.90) \text{ at } K_2 = (1/2), L_2 = (-1/2), P_2 = (-1/2) \text{ og } Q_2 = (1).$$

$$\text{med } P_3 = (-1) \text{ og } Q_3 = (2) \text{ findes af (7.82) - (7.86) på trin 2 at } A_2 = (-1), B_2 = (-2), C_2 = (2) \text{ og } E_2 = (0). \text{ Heraf følger fra (7.87) -}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_{i+1} = x_i + u_i$$

$$\max \left[ \sum_{i=0}^2 -(u_i)^2 - (x_3)^2 + 2x_3 \right]$$

Eksempel 7.4.7 Lad  $n = 1$ ,  $m = 1$  og betragt problemet

$$(7.97) \quad \min \{ \max_{f_0} f_0(x_0, u_0), f_1(x_1, u_1), \dots, f_N(x_N) \} \} \quad \text{og}$$

$$(7.98) \quad \max \{ \min_{f_0} f_0(x_0, u_0), f_1(x_1, u_1), \dots, f_N(x_N) \} \}$$

Det forudsættes her, at alle faktorerne er positive. Det gælder også for målfunktionerne

$$(7.97) \quad \max \left( \prod_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, u_i) \cdot f_N(x_N) \right)$$

er *produktet* af de enkelte delmålfunktioner: Dynamisk programmering kan anvendes på varianter af det grundlæggende problem (7.1) - (7.4). Dette gælder således problemer, hvor målfunktionen

#### 7.4.5 Problemvarianter

For  $i = 0$  fås specielt, at  $p_0$  er løsligheden på startværdien  $\bar{x}_0$ .

$$(7.96) \quad p_i = \Delta F_i(x_i^*)$$

Hvis problemet er givet som (7.5) - (7.10) og differentiable, og hvis  $F_i$  er differentiable i det entydige optimum  $x_i^*$ , så er der følgende nydelige sammenhæng med KKT- og/eller Lagrangemultiplikatoren  $p_i$ : *løsning.*

Disse egenskaber er af stor betydning i forbindelse med stokastisk kontrol. Når løsningen som beskrevet ovenfor findes på formen  $u_i^*(x_i)$ , taler vi om en *lukket sløjfe* løsning, i modsætning til en *åben sløjfe* løsning, hvor blot  $u_i^*$  forefindes. Vi ser, at  $u_i^*(\cdot)$  er en kontrolstrategi, mens  $u_i^*$  er en målfunktionsværdi for de resterende trin er  $F_i(x_i^*)$ .

trin  $i$  med udgangspunkt i  $x_i$  er altså  $u_i^* = u_i^*(x_i) = \phi_i(x_i)$ . Den optimale ved funktionerne  $\phi_i$  og de har stadig gyldighed. Den optimale kontrol på optimale løsning blev nemlig i baglæns dynamisk programmering udtrykt teressante er, at denne allerede kendes (forudsat  $\phi_i(x_i)$  er defineret). Den optimale løsning for det resterende problem, startende i  $x_i$ . Men det in- kunne skyldes støj i dynamikken (7.2). Man har nu behov for at finde den kunne skyldes, at man havde valgt et ikke-optimalt kontrolsignal, eller det dog af forskellige grunde komme til en anden tilstand, f.eks.  $\bar{x}_i$ . Dette kontroller. Vi regner så med, at den næste tilstand er  $x_i^*$ . Nu kunne man

I dette afsnit suppleres med nogle betragtninger omkring dynamiske stokastiske problemer. Der er tre hovedafsnit. Først introduceres dynamisk programmering som den "naturlige" løsningsmetode til sekventielle problemsstillinger. Dernæst vises, hvorledes man kan omformulere et stokastisk problem til et "sædvanligt" optimeringsproblem. Endelig diskuteres forskellige strategier til håndtering af stokastikken i forbindelse med optimering.

## 7.6 Dynamiske stokastiske optimeringsproblemer

- Dynamisk programmering udflytter kontrolstrukturen fuldtud. Denne teknik finder især anvendelse ved vanskelige problemer, f.eks. hvor der er heltalsbegrænsninger, eller hvor funktionerne ikke er konvekse, konkave eller differentiable. En special anvendelse er vist i afsnit 7.4.3.
  - Som et dynamisk problem med udflyttelse af den specielle struktur og under antagelse af differentiableitet. Vi har nævnt algoritmer i afsnittene 7.3 og 7.4.3. Alle disse baserer sig på differentiableitet, samt en special form for kontrolproblem.
  - Som et statisk problem, se afsnit 7.2. Man kan her trække på, hvad der i øvrigt er gennemgået i kapitlerne 4 - 6. Fordelen ved denne strategi er, at der er flere erfaringer og flere standardprogrammer til rådighed. Til gengæld udflyttes problemstrukturen ikke. Typisk må man forudsætte differentiableitet.
- Vi skal kort repeterere de numeriske metoder til løsning af dynamiske problemer, der er gennemgået tidligere. Der er tre hoved-strategier til løsning:

## 7.5 Numeriske metoder

Endelig kan dynamisk programmering anvendes i forbindelse med *stokastiske* optimal kontrol problemer.

hvor det gælder om, at den mindste af delmålfunktionerne bliver så stor som muligt, henholdsvis at den største af delmålfunktionerne bliver så lille som muligt.

**Eksempel 7.6.1** I forbindelse med reservation af pladser i rutefly er det sædvanlig praksis, at flyene overbookes, dvs., der sælges flere pladser, end

Det fremgår, at man ikke på forhånd kan vide, hvad det faktiske forløb  $(x_0, x_1, \dots, x_N)$  bliver. Det afhænger af de stokastiske udfald. Men bemærk, at man ikke behøver at beregne yderligere. Pointen er netop, at man har fundet  $u_i^*$  som en *strategi* der angiver hvad den optimale kontrol er, uanset  $u_i^*(x_1)$ , og så fremdeles.

Når løsningen skal implementeres, foregår det på følgende måde. Man implementerer  $u_0^*(x_0)$ . Derefter venter man indtil man observerer  $w_0$ , hvor- efter  $x_1$  kan beregnes (eller  $x_1$  observeres direkte). Herefter implementeres  $u_1^*(x_1)$ , og så fremdeles.

I relation til implementeringskitten i figur 7.4 bliver forskellen blot, at der inderst ændringes en løkke, der beregner  $F\{\}$ . Man beregner på denne måde  $u_i^*$ ,  $i = 1, 0$ .

$$F_i^*(x_i) \equiv \max_{u_i} \{ F_i(x_i, u_i; w_i) + F_{i+1}^*(x_{i+1}(x_i, u_i; w_i)) \} \quad (7.104)$$

Beregningens dynamisk programmering er som skabt til dette problem. Bagtæns dynamisk programmering er som skabt til dette problem. Bagtæns dynamisk programmering er som skabt til dette problem.

Vi opfatter problemet (7.100) - (7.103) som et sekventielt beslutningsproblem, hvor vi løbende får information. Når vi på trin  $i$  skal træffe beslutning om  $u_i$ , kender vi  $w_0, w_1, \dots, w_{i-1}$  og  $x_0, x_1, \dots, x_i$ . Når vi har besluttet og implementeret  $u_i$ , observerer vi  $w_i$  og  $x_{i+1}$ .

$$x_N \in V_N \quad (7.103)$$

$$x_i, u_i, w_i \in V_i \quad (7.102)$$

$$x_{i+1} = d_i(x_i, u_i, w_i) \quad (7.101)$$

$$\max_{\{u_i\}} \{ E \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, u_i, w_i) + r_N(x_N) \} \quad (7.100)$$

Vi betragter et problem, der er modificeret ud fra (7.1) - (7.4) ved indførelse af stokastiske elementer  $w_i$ . Vi antager, med mindre andet anføres, at  $w_i$  kan antage et endeligt antal værdier. Det antages videre, at der er uafhængighed mellem de stokastiske variable på forskellige trin. Vi ønsker at maksimere forventningsværdien, og har dermed problemet

## 7.6.1 Stokastisk dynamisk programmering



Under passende supplerende forudsætninger kan man finde den optimale kontrolstrategi  $u_i^*(x_i), i = 0, N - 1$ . Denne kan udskrives på en liste (eller lægges ind i det elektroniske reservationssystem). Når der så på en given dag  $i$  kommer et ønske om reservation, ser man blot efter i tabellen, ud for det kendte samlede reservationstal  $x_i$  om morgenen, om reservationen kan accepteres. I løbet af natten opdateres  $x_i$  så  $x_{i+1}$  ligges klar næste morgen. Ideen kan også bruges på en udvidet problemstilling, hvor flyet er opdelt i to dele, monkeyclass og businessclass. Hermed bliver  $x_i$  og  $u_i$  todimensionelle. Der kan desuden indføres en tredje kontrolvariabel, der angiver om man skal forskyde skillevæggen mellem de to klasser.

(Kilder: Alstrup, Andersson, Boas, Madsen og Vidal: Booking Control Increases Profit at Scandinavian Airlines, Interfaces 19, 4, 10-19.) □

$$\min[E\{r_N(x_N)\}]$$

Her må  $u_i$  vælges, så  $u_i \leq \omega_i^2$ , hvor  $\omega_i^2$  er antallet af dagens forsøg på reservationer. Målfunktionen skal afspejle omkostningerne ved den anvendte bookingstrategi. Antag, at antallet af sæder i flyet er  $\bar{x}_N$ . Hvis  $x_N > \bar{x}_N$ , er der tomme pladser i flyet ved afgang, og dermed altså omkostninger til transport af  $(x_N - \bar{x}_N)$  passagerer en anden gang. Hvis  $\bar{x}_N > x_N$ , er der udgifter i form af kompensasjon til de  $(x_N - \bar{x}_N)$  afviste passagerer. Målfunktionen for kontrolproblemet må altså bestå af en funktion  $r_N$ , der har et minimum i  $\bar{x}_N$ , og der er ikke bidrag for  $i < N$ :

$$x_{i+1} = x_i + u_i - \omega_i^2$$

flyelskabets interesse i at få flyet fyldt op ved afgang. Man kender fra tidligere fordelingerne af de stokastiske variable, der angiver antallet af arbejdspladser (herunder noshows), og antallet af ønskede reservationer for hver af de  $N$  sidste dage før afgang. Hvis  $x_i, u_i$  og  $\omega_i^2$  angiver henholdsvis det samlede antal bestillinger, dagens accepterede bestillinger og dagens afbestillinger, fås dynamikken

der faktisk findes i flyet. Baggrunden er, at en del passagerer afbestiller deres reservation inden afgang, og nogle møder ikke frem til afgang (noshows), mange tomme sæder i flyet. Da passagerer kan benytte billetten senere, er flyelskabets interesse i at få flyet fyldt op ved afgang.

- $17.0 = 0.7(15 + 2) + 0.3(17 + 0)$
- $17.0 = 0.7(17 + 0) + 0.3(15 + 2)$
- $13.3 = 0.7(13 + 0) + 0.3(7 + 7)$
- $13.7 = 0.7(7 + 7) + 0.3(13 + 0)$

Tallene fremkommer således:

$x_3$	$F_3$	9
$x_2$	$F_2$	7
		0
		2
		9

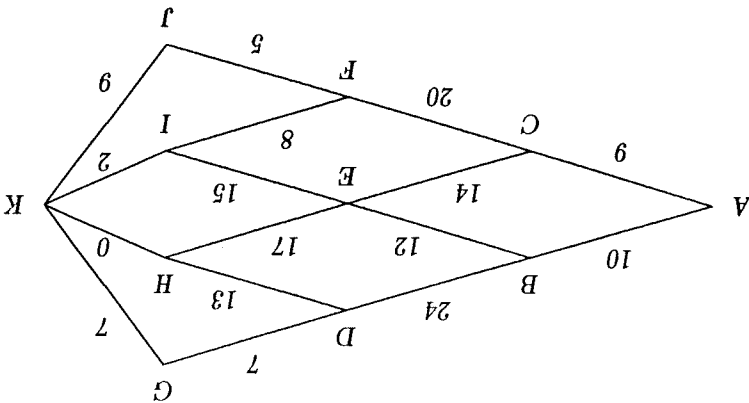
  

$u_2^*$		Op	13.7	13.3	
		Ned	13.3	13.3	
$F_2(x_2)$			11.2	12.8	
			17.0	17.0	
		Op v Ned	17.0	17.0	
		Op	11.2	11.2	

som i figuren:

Eksempel 7.6.2 Man skal bevæge sig gennem netværket i figur 7.14 fra venstre mod højre. Antag, at der er støj i styremekanismen, hver gang en af de første tre beslutninger skal implementeres. Dette betyder, at der er 70% sandsynlighed for, at man faktisk kommer der hen, hvor man ønsker det, 30% for at man kommer til den modsatte side. Find den styrestrategi, der minimerer den forventede sum af vejtlængderne på ruten. Regneskemaerne bliver, med tilstandene (knodepunkterne) benævnt som i figuren:

Figur 7.9. Et netværk til eksemplet.



Vi ønsker at finde  $u_i^*$  og  $F_i$ . Beregningsgangen og argumentationen følger nøje det deterministiske tilfælde, se (7.77) - (7.95).

de enkelte trin.

Vi antager  $R_{xx}^i \leq 0$ ,  $R_{uu}^i > 0$ , og stokastikken, der kun vedrører dy-namikken, er normalfordelt med middelværdien nul, og uafhængig mellem

$$(7.107) \quad x_0 = \bar{x}_0$$

$$(7.106) \quad x_{i+1} = d_x^i x_i + d_u^i u_i + \bar{d}_i + \omega_i$$

$$+ \frac{1}{2} x_i^T [R_{xx}^i x_N + R_{xx}^i x_N + R_{xx}^i x_N]$$

$$(7.105) \quad \max_{u_i} \{ E \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} x_i^T R_{xx}^i x_i + R_{xx}^i x_i + R_{xx}^i u_i + R_{uu}^i u_i + R_{uu}^i u_i \}$$

Lad os betragte følgende version:

Det ubegrænsede kvadratisk-lineære problem (7.74) - (7.78) spiller også en vigtig rolle ved stokastiske problemstillinger.

### Det kvadratisk-lineære problem

Vi forventer altså en samlet minimal vejlsængde på 40.489. Den første beslutning er  $u_0^*(A) = Ned$ . Hvis vi som ønsket kommer til C, vælger vi  $u_1^*(C) = Op$ . Hvis vi derimod kommer til B, vælger vi  $u_1^*(B) = Ned$ . Den videre kontrolstrategi er  $u_2^*(D) = Ned$ ,  $u_2^*(E) = Op$  eller  $Ned$ ,  $u_2^*(F) = Op$ . Der er ikke noget valg for  $u_3$ . □

$x_0$	$u_0^*(x_0)$	$F_0(x_0)$
A	Op	40.489
	Ned	40.991
		40.489

$x_1$	$u_1^*(x_1)$	$F_1(x_1)$
B	Op	31.49
	Ned	31.06
C	Op	31.14
	Ned	31.49

Videre findes efter samme metode!

- $12.8 = 0.7(5 + 9) + 0.3(8 + 2)$
- $11.2 = 0.7(8 + 2) + 0.3(5 + 9)$

Lad os nu betragte en alternativ formulering af det stokastiske problem. Som udgangspunkt tager vi samme problem som i (7.100) - (7.103), men vi ønsker at formulere det som et stort matematisk programmeringsproblem.

### 7.6.2 Matematisk programmering

Kaldes førstærkningsmatricen. Også "separationsprincippet", der udtrykker, at man kan adskille estimation og prædiktion, kan udledes for modellen (7.105) - (7.107) ved hjælp af dynamisk programmering. (Se Bertsekas 1987) Med  $R_i^* = 0$  og  $R_i^* = 0$  er varianter af (7.105) - (7.107) kendt som "the tracking problem". Dette kan fortolkes på den måde, at man skal forsøge at følge et givet spor  $(x_0, x_1, \dots, x_N)$  så tæt som muligt (målt ved kvadratsummen  $\sum_{i=0}^N (x_i - \hat{x}_i)' R_{xx}^i (x_i - \hat{x}_i)$ ) samtidig med at kontrolanstrengelserne (målt ved kvadratsummen  $\sum_{i=0}^{N-1} u_i' R_{uu}^i u_i$ ) bliver så lille som mulig.

$$u_i^*(x) = K_i + L_i x; \tag{7.109}$$

Dette er den såkaldte *Riccati ligning*. I denne sammenhæng kan endvidere nævnes, at matricen  $L_i$  i udtrykket (4.94):

$$P_i = P_{i+1}^i (P_{i+1}^i - P_{i+1}^i R_{uu}^i (P_{i+1}^i R_{uu}^i)^{-1} P_{i+1}^i R_{uu}^i + \frac{1}{2} R_{uu}^i + \frac{1}{2} R_{xx}^i) \tag{7.108}$$

Også andre klassiske resultater kan udledes ved hjælp af dynamisk programmering. Betragt igen (7.105) - (7.107). Ved anvendelse af (7.82) - (7.84) fås nemt følgende omskrivning af (7.91):

### Andre resultater

Udnyttes nu, at  $E\{\omega_{N-1}\} = 0$  og at dynamikken er lineær, kan vi på samme måde som i (7.79) finde den optimale kontrol  $u_{N-1}^*(x_{N-1})$ . Det ses ved direkte udregning, at den optimale kontrol i dette stokastiske tilfælde er  $\omega_{N-1}$  er erstattet af sin middelværdi (0). Dette resultat kan ved baglæns rekursion vises at holde for alle  $i$ . Dette vigtige princip kaldes "certainly equivalence principle", og det er en klassiker inden for kontrolteorien.

Tricket i det følgende er at opfatte de to  $x_1$  som *forskellige variabler*. Vi

$$(7.110) \quad x_1 = d_0(\bar{x}_0, u_0, \omega_1^0)$$

$$(7.111) \quad x_1 = d_0(\bar{x}_0, u_0, \omega_2^0)$$

Der er to mulige næste tilstande for ethvert valg af  $u_0$ :

to mulige udfald af den stokastiske variabel er  $\omega_1^0$  og  $\omega_2^0$ .

Betragt trin 0.  $x_0$  er kendt, idet  $x_0 = \bar{x}_0$ , og vi skal først vælge  $u_0$ . De

eller *scenarier*. Se figur 7.10 og figur 7.11.

mulige udfald på hvert trin. Der er derfor  $2^3 = 8$  forskellige "hændelsesforløb",

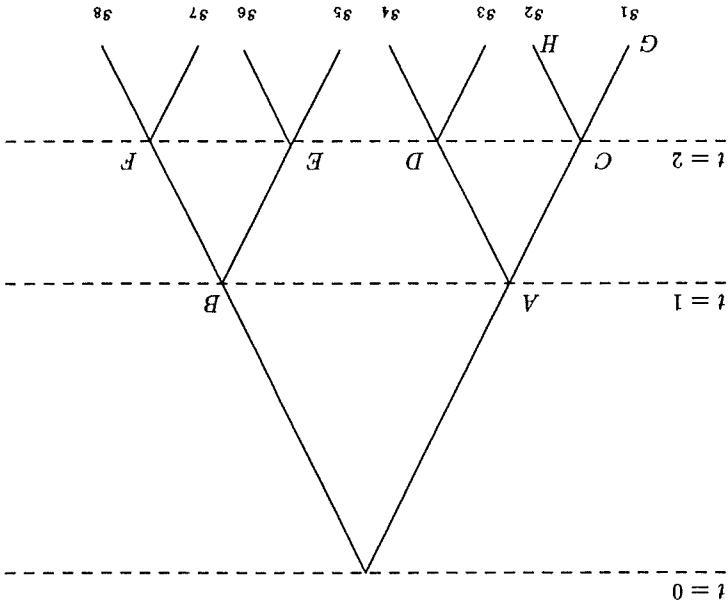
Vi relaterer diskussionen til et simpelt problem med 3 trin og to

at håndtere det dynamiske problem på. Se iøvrigt diskussionen i afsnit 7.2.

Med den formulering vi når frem til ser vi, at der også er andre måder

udfald af den stokastiske variabel på hvert trin.

Figur 7.10. Et scenarietræ med 8 scenarier. Der er 3 trin, og to mulige



$$\begin{aligned}
 (7.121) \quad & \dots \\
 (7.120) \quad & x_I^3 = d_I^2 p^2(x_I^2, n_I^2, \omega_I^2) \\
 (7.119) \quad & x_H^3 = d_H^2 p^2(x_C^2, n_C^2, \omega_C^2) \\
 (7.118) \quad & x_G^3 = d_G^2 p^2(x_C^2, n_C^2, \omega_C^2)
 \end{aligned}$$

Ved tilsvarende ræsonnement kan læseren selv overbevise sig om, at der må være 8  $x_3$  og 4  $n_2$ , se figur 7.10:

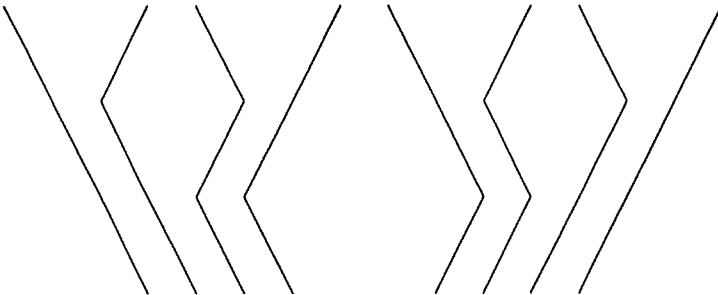
$$\begin{aligned}
 (7.117) \quad & x_F^2 = d_1(x_B^1, n_B^1, \omega_B^1) \\
 (7.116) \quad & x_E^2 = d_1(x_B^1, n_B^1, \omega_B^1) \\
 (7.115) \quad & x_D^2 = d_1(x_A^1, n_A^1, \omega_A^1) \\
 (7.114) \quad & x_C^2 = d_1(x_A^1, n_A^1, \omega_A^1)
 \end{aligned}$$

Når uddaldet af  $\omega_0$  er observeret, ved vi, om det er  $x_A^1$  eller  $x_B^1$ , der er relevant. Vi skal derefter vælge  $n_1$ . Vi fastsætter nu vores *duplicering* af variabler, således at vi skal vælge  $n_A^1$ , hvis  $x_A^1$  er relevant,  $n_B^1$  hvis  $x_B^1$  er relevant. Der er to mulige udfald for  $\omega_1$ . Vi får derfor 4 forskellige  $x_2$ :

$$\begin{aligned}
 (7.113) \quad & x_B^1 = d_0(x_0, n_0, \omega_0^2) \\
 (7.112) \quad & x_A^1 = d_0(x_0, n_0, \omega_0^1)
 \end{aligned}$$

kalder dem henholdsvis  $x_A^1$  og  $x_B^1$ , se figur 7.10, og har altså

Figur 7.11. De 8 scenarier fra træet i foregående figur.



Her kan den stokastiske parameter  $d$  og sandsynlighederne  $p$  anlages værdierne som vist i figur 7.12. Vi har  $x_0 = \bar{x}_0 = 4$  og  $T = 2$  for scenarierne  $s_1$  til  $s_4$  og  $T = 3$  for scenarierne  $s_5$  og  $s_6$ . Bemærk, at problemet

$$(7.123) \quad \min_x \left\{ E \left\{ \sum_{t=1}^T \frac{1}{3} (x_t - x_{t-1})^2 + (x_t - d_t)^2 \right\} \right\}$$

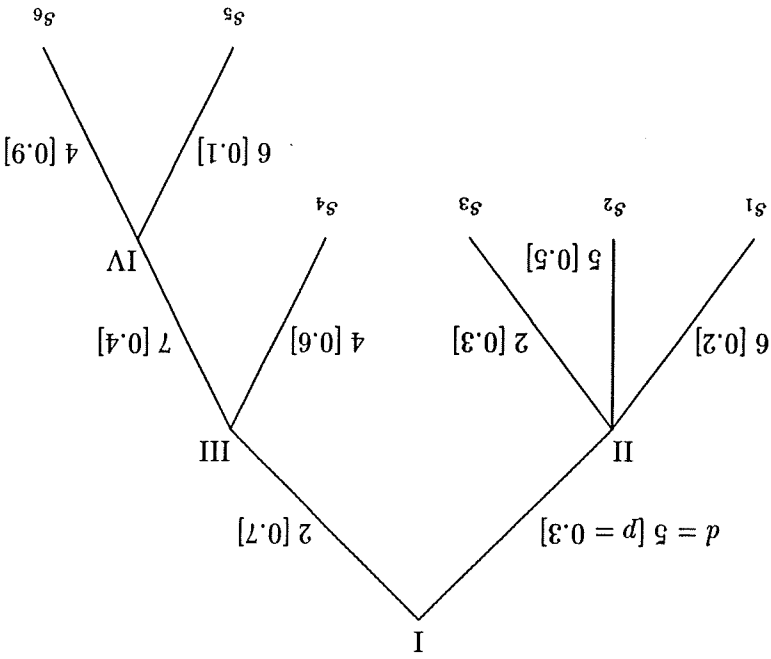
**Eksempel 7.6.3** Vi betragter problemet

I praksis må man derfor begrænse sig kraftigt i sin modelformulering. Variabler og begrænsninger! træ som i figur 7.10 og  $N$  trin er der eksponentiel sammenhæng: cirka  $2^N$  antal trin og udfald på hvert trin bliver ekstremt stort. Med et binært Ulpempen ved omformuleringen er, at problemet selv ved et begrænset "sædvanlige" fortolkningsform at løsningen i form af skyggepriser m.v. mer som angivet i tidligere kapitler til at løse problemet, og anlægge de Fordele ved denne omformulering er, at man kan udnytte algorit- udfald og de tidligere valgte beslutninger.

Vi resumerer: ved en passende variabelduplikering er det muligt at udtrykke problemet som det kræves til en matematisk programmeringsformulering. Hvis man ønsker det, kan man eliminere den indbyggede skelnen mellem tilstands- og kontrolvariabler, se afsnit 7.2. I alle tilfælde fås løsningen som en *strategi*, dvs., som en funktion af de tidligere realiserede stokastiske

$$(7.122) \quad \max \left[ p_0^1 f_0(\bar{x}_0, n_0, \omega_0^1) + p_0^2 f_0(\bar{x}_0, n_0, \omega_0^2) + p_0^1 p_1^1 f_1(x_1^A, n_1^A, \omega_1^1) + p_0^1 p_1^2 f_1(x_1^B, n_1^B, \omega_1^2) + \dots + p_0^2 p_2^1 p_2^2 f_2(x_2^F, n_2^F, \omega_2^2) + p_0^1 p_1^1 p_2^1 f_2(x_2^G, n_2^G, \omega_2^3) \right]$$

(7.100) er derfor: for  $s_3$  er den  $p_0^1 p_1^1 p_2^1$ , ..., for  $s_8$  er den  $p_0^2 p_1^2 p_2^2$ . Målfunktionen svarende til Sandsynligheden for at få scenariet  $s_1$  er derfor  $p_0^1 p_1^1 p_2^1$ , for  $s_2$  er den  $p_0^1 p_1^2 p_2^2$ , venstre" på trin  $i$  på figur 7.10, og lad  $p_i^j$  angive sandsynligheden for  $\omega_i^j$ . Lad  $p_i^j$  angive sandsynligheden for at få udfaldet  $\omega_i^j$ , der fører "til Det er mest et spørgsmål om bogholderimæssige aktiviteter at formulere målfunktionen på samme måde. Fremgangsmåden skitseres som følger.



Figur 7.12. Scenarietræ til eksemplet. Sandsynlighederne er angivet som  $[p]$  og  $d$  er den stokastiske variabel.



• Optimal lukket sløjfe løsning. Denne opnas typisk ved dynamisk programmering, men også matematisk programmering kan anvendes som diskuteret. Pointen er her, at vi fuldt ud udnytter, at vi ved at prob-lemet er stokastisk ved at tage hensyn til det både ved løsning og ved implementering. (Metoden kan kaldes FO: Feedback Optimal).

Når man skal håndtere sekventielle optimeringsproblemer, hvori der indgår stokastiske elementer, kan man gribe det an på forskellig måde. Der er i hvert fald følgende tre indfaldsvinkler:

### 7.6.3 Strategier for håndtering af stokastikken

giver  $x_1 = 3.5620, x_1^2 = 4.0540, x_1^2 = 4.6169$  og  $x_3 = 4.3390$ .  
 Hvis udfaldet af den stokastiske variabel ved  $I$  bliver  $d = 5$ , vælger vi som næste beslutning  $x_{II}^2 = 4.0540$ . Hvis udfaldet ved  $I$  bliver  $d = 2$ , vælger vi som næste beslutning  $x_{III}^2 = 4.6169$ ; og dernæst vælges ingenting, hvis  $d = 4$ , og  $x_3 = 4.3390$ , hvis  $d = 7$ . □

$$\begin{array}{r}
 4.0x_1 - 0.3x_{II}^2 - 0.70x_{III}^2 = 9.8 \\
 -0.3x_1 + 0.9x_{II}^2 = 2.58 \\
 -0.7x_1 + 2.38x_{II}^2 - 0.28x_3 = 7.28 \\
 -0.28x_{II}^2 + 0.84x_3 = 2.352
 \end{array} \tag{7.125}$$

Da målfunktionen er strengt konkav og differentiable, og problemet er ubegrænset, fås optimum som det enlydige stationære punkt. Stationaritetsbetingelserne  $\partial V/\partial x_1 = \partial V/\partial x_1^2 = \partial V/\partial x_2 = \partial V/\partial x_3 = 0$ , der kan skrives fuldt ud som

$$\begin{aligned}
 V(x_1, x_1^2, x_{II}^2, x_3) = & \frac{1}{2}(x_1 - 4)^2 + 0.3(x_1 - 5)^2 + 0.7(x_1 - 2)^2 \\
 & + 0.3 \left[ \frac{1}{2}(x_{II}^2 - x_1)^2 + 0.2(x_{II}^2 - 6)^2 + 0.5(x_{II}^2 - 5)^2 + 0.3(x_{II}^2 - 2)^2 \right] \\
 & + 0.7 \left[ \frac{1}{2}(x_{III}^2 - x_1)^2 + 0.6(x_{III}^2 - 4)^2 + 0.4(x_{III}^2 - 7)^2 \right] \\
 & + 0.7 \cdot 0.4 \left[ \frac{1}{2}(x_3 - x_{III}^2)^2 + 0.1(x_3 - 6)^2 + 0.9(x_3 - 4)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{7.124}$$

Ved en matematisk programmeringsformulering får vi forventnings-sandsynlighederne på ét trin afhængt af udfaldet på det foregående trin. adskiller sig fra det tidligere diskuterede ved at udfaldsmulighederne og værdien

- En deterministisk reformulering (åben sløje). Her elimineres det stokastiske fuldstændigt. Dette sker typisk ved, at de stokastiske variabler erstattes af deres middelværdier. Det fremkomne deterministiske problem løses, og løsningen implementeres uden hensyn til udfald af de stokastiske variabler. (Metoden kan kaldes CEOL: Certainty Equivalence Open Loop).
- En deterministisk reformulering (lukket sløje). På trin  $j$  løses problemet som beskrevet lige ovenfor. Imidlertid implementeres kun den første kontrol  $u_j$ . Derefter observeres  $x_{j+1}$ . Nu formuleres og løses et *nyt* deterministisk problem startende med første tilstand  $x_{j+1}$ . Den første kontrol  $u_{j+1}$  i dette implementeres, den næste tilstand observeres, o.s.v. Det ses, at ved løsningen af problemet (eller rettere: ved løsningerne af problemerne) opfattes disse som deterministiske, men ved implementeringen udnyttes observationsmuligheden. (Metoden kan kaldes CEOLF: Certainty Equivalence Open Loop Feedback). Bemærk, at denne metode er den samme, som beskrevet ved det kvadratiske-lineære problem (7.105) - (7.107) i forbindelse med "certainty equivalence" princippet. Ved problemet (7.105) - (7.107) med normalfordelt støj giver dette faktisk den optimale løsning, men dette gælder ikke i almindelighed. Ofte kombineres CEOLF med en rullende horisont ide: hver gang det deterministiske problem formuleres, medtages endnu en periode, således at ethvert af de deterministiske problemer har  $N$  perioder. (Tænk for eksempel på årlig tårplanslægning i en virksomhed.)
- Mindre brugte metoder er
  - Løsning ved anvendelse af viden om stokastikken, men uden observationer. Her beregnes den løsning der, hvis den implementeres for  $i = 0, N-1$ , giver størst forventningsværdi. Løsningen implementeres altså uden hensyntagen til de faktiske udfald af de stokastiske variabler (lige som ved CEOL). (Metoden kan kaldes OLO: Open Loop Optimal).
  - En blanding af CEOLF og OLO. På trin  $j$  regnes som ved OLO. Imidlertid implementeres kun den første kontrol. Derefter observeres  $x_{j+1}$ . Nu formuleres og løses et nyt OLO-problem startende med første trin  $j+1$ , osv. (Metoden kan kaldes OLOF: Open Loop Optimal Feedback).

Når man skal beregne CEOL-løsningen er det sædvanlige, at man erstatter udfaldsmulighederne med middelværdien. Dette er imidlertid ikke muligt i dette eksempel, hvor vi kun har de to mulige udfald  $O$  og  $N$ . Vi vil derfor antage, at hvis man vælger  $O$ , kommer man faktisk op, hvis man vælger  $N$ , kommer man faktisk ned.

Den optimale løsning til dette deterministiske problem er  $(u_0^*, u_1^*, u_2^*) = (N, N, N)$ . Denne løsning implementeres. Ved gennemregning af de 8 til 52.125.

Når man skal beregne CEOL-løsningen er det sædvanlige, at man erstatter udfaldsmulighederne med middelværdien. Dette er imidlertid ikke muligt i dette eksempel, hvor vi kun har de to mulige udfald  $O$  og  $N$ . Vi vil derfor antage, at hvis man vælger  $O$ , kommer man faktisk op, hvis man vælger  $N$ , kommer man faktisk ned.

Ved hjælp af dynamisk programmering beregnes FO-løsningens værdi man faktisk kommer det ønskede sted hen.

så hvis han vælger en kontrol, er der kun en sandsynlighed på  $3/4$  for, at

to kontrolmuligheder,  $O$  (op) eller  $N$  (ned). Der er stør i styremekanismen,

imeres. (Hvor der ikke står noget, er tallet nul). Der er på hvert af de 3 trin

venstre i figur 7.13, fra  $A$  til  $K$ , således at summen af de anførte tal min-

Eksempel 7.6.4 John skal vælge den bedste vej gennem netværket til

plan, der nemt tillader en FO-, en CEOLF- eller en OLOF-løsningstrategi.

Man kan (lidt firkantet måske) relatere disse begreber til ovenstående

på følgende måde. En robust plan er en plan, der har høj kvalitet ved

anvendelse af CEOL- eller OLO-løsningstrategien. En fleksibel plan er en

bel plan forstås en plan, der nemt kan tilpasses ændringer i forudsætnin-

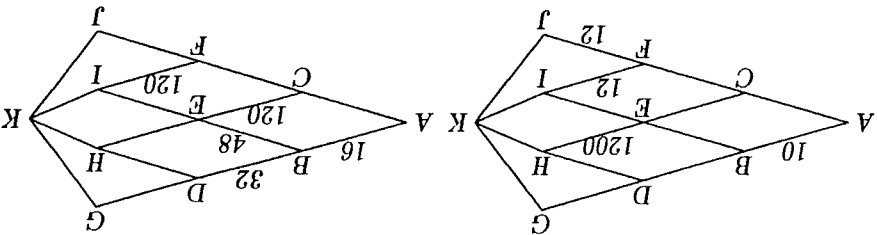
ændringer, der måtte komme vedtrørende forudsætnin- Ved en fleks-

der uden ændringer kan gennemføres, så dens kvalitet er høj, uanset de

en robust plan og en fleksibel plan. Ved en robust plan forstås en plan,

I forbindelse med planlægning under usikkerhed skelner man ofte mellem

Figur 7.13. Et andet stokastisk netværk til eksemplet.



stattes af  $\sum_{i=1}^n h_i(z_i) = c$ , hvor  $h_i: R \rightarrow R$  er givne funktioner.

$$\begin{aligned} \bar{z}_i &\leq z_i \leq \underline{z}_i \\ \sum_{i=1}^n z_i &= c \\ \max \left[ \sum_{i=1}^n f_i(z_i) \right] \end{aligned}$$

Opgave 7.2 Formulær fordelingsproblemet

Opgave 7.1 Formulær følgende som et optimal kontrol problem. Der skal bestemmes de mængder brændstof, der skal indeholdes i hvert af trinene i en n-trins raket, for at sluttrinnet med massen  $m$  opnår sluthastigheden  $v$ , under forudsætning af, at det totale brændstofforbrug ønskes minimalt.

## 7.7 Opgaver

Der tages forbehold for regnefej! □

Netværk 2	84.25	84.75	120.844	192.25	192.25
Netværk 1	52.125	52.375	54.375	52.375	54.375
FO	OLOF	OLO	CEOLF	CEOL	

Det bemærkes af tabellen, at FO-løsningerne er de bedste, at OLOF-løsningerne er de næstbedste, og at CEOL-løsningerne er de dårligste (der minimeres!). Det kan vises, at denne rækkefølge gælder generelt. OLO- og CEOLF-løsningerne ligger på 3. - og 4. - pladsen, men forskelligt i de to eksempler.

Ved gennemregning på tilsvarende vis af eksemplet til højre i figur 7.13 findes de forventningsværdier, som også er anført i tabellen.

Forventningsværdierne er vist i tabellen.

For OLOF-løsningen findes forventningsværdien 52.375.

For OLO-løsningen findes forventningsværdien 54.375. Løsningen er  $(u_0^*, u_1^*, u_2^*) = (N, N, N)$ .

For CEOLF-løsningen findes forventningsværdien 52.375.

For FO-løsningen findes, at dette  $u^*$  giver forventningsværdien 54.373.

$$\text{Som taleksempel kan anvendes } A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Formuler problemet som et optimal kontrol problem.

følgen maksimeres.

**Opgave 7.6** Givet en  $r \times s$  matrix  $A$ . Find en følge af  $(r+s-1)$  elementer  $a_{ij}$ , startende med  $a_{11}$  og sluttende med  $a_{rs}$ , således at man kun bevæger sig til højre eller nedad gennem  $A$ , og således at summen af elementerne i

Formuler en optimal kontrol model for et sådant område.

f.eks. skakspil, kryds-og-bolle, modulvalg i studiet, transport til arbejde ...

Nævn en række områder, hvor denne strategi burde kunne anvendes - "vej".

**Opgave 7.5** Ideen i dynamisk programmering kan beskrives som den at arbejde sig "baglæns" fra et ønsket resultat, og således finde den bedste

LP problem på denne måde.

$b = (5, 4)^T$ . Diskuter, om det vil være fornuftigt i almindelighed at løse et  
Som taleksempel kan man tage  $c' = (1, 2, 5)$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , og

som et optimal kontrol problem.

$$z \geq 0$$

$$Ax \leq b$$

$$\max\{c'z\}$$

**Opgave 7.4** Formuler LP-problemet

Formuler problemet som et optimal kontrol problem.

	Søm	Skruer	Bolle
Vægt	50	40	20
Rumfang	5	6	4
Fortjeneste	kr 15	14	8

kassen bestemte.

**Opgave 7.3** Søm, skruer og bolle, der findes i standardpakninger på henholdsvis 50, 40 og 20 kg, skal transporteres i en kasse, så fortjenesten ved transporten maksimeres. Kассens indhold må ikke veje mere end 1000 kg, og den kan højst rumme 125 liter. I det data for standardpakningerne er givet nedenfor, ønskes den optimale fordeling af søm, skruer og bolle i

Opgave 7.12 Start på at løse opgave 7.8 ved dynamisk programmering. (Beregningerne er trivielle, men ret omfattende!)

Opgave 7.11 Løs opgave 7.6 ved dynamisk programmering.

Opgave 7.10 Løs opgave 7.4 ved dynamisk programmering.

Opgave 7.9 Start på at løse opgave 7.8 ved dynamisk programmering. (Beregningerne er trivielle, men ret omfattende!)

Opgave 7.8 Problemet går ud på at finde den vej fra A til K gennem netværket i figur 7.14, der giver den mindste sum af tallene på de enkelte delstrækninger. Man må kun bevæge sig fra venstre mod højre. Formuler problemet som et optimal kontrol problem.

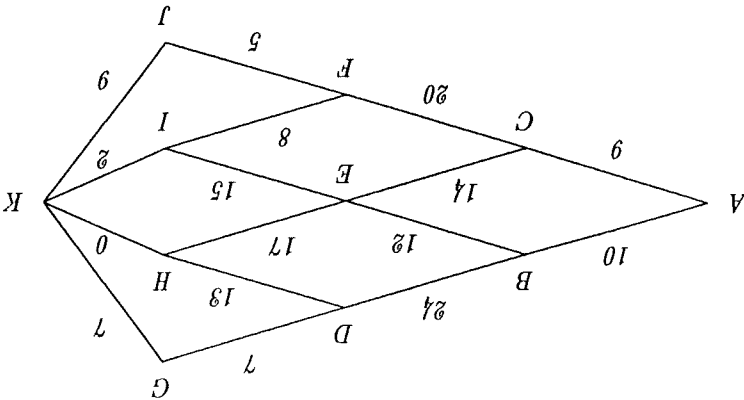
Formuler problemet som et optimal kontrol problem.

kan betale for godset.

Bondens mål er at have mest muligt korn i sin silo til tiden T, når det nærvædliggende gods "Gældstynget" bliver til salg, således at han dermed m.v. for derved at øge produktionen næste år.

Opgave 7.7 En storbonde, der går rundt med en godsejer i maven, har én kornsort på sine marker. Efter at have høstet sin afgrøde, kan han komme kornet i silo, eller han kan sælge en del af det og investere det herefter indkomne beløb i mere landbrugsjord, flere maskiner, mere kunstgødning,

Figur 7.14. Netværk



tidspæriode	nr.
antal efter-	spurgte enheder
1	2
2	1
3	3
4	1

**Opgave 7.15** Virksomheden Dypro har garanteret leveringen af 7 varenheder over 4 tidsperioder med følgende antal pr. tidsperiode:

(Beregningerne er trivielle, men ret omfattende!)  
 Start på at finde den optimale løsning ved dynamisk programmering.  
 Formuler problemet som et optimal kontrol problem.  
 således at totalværdien af lasten bliver maksimeret.  
 Problemet er at finde det antal af hver vare, der skal transporteres,

vægt/enhed	værdi/enhed
bil	2000 kg
køleskab	200 kg
håndvask	50 kg
	400 kr.

**Opgave 7.14** En lastbil har en kapacitet på 5.5 tons. Den skal transportere biler, køleskabe og håndvask. Disse varer har følgende vægt og værdi:

Trin	Kvalitet
1	$-0.1(n_1 - 35 + x_1/4)^2$
2	$-0.1(n_2 - 35 + x_2/2)^2$
3	$-0.2(n_3 - 32 + x_3/2)^2$

(Løs først problemet uden grænser.)  
 ønsker Peter hjælp til at bestemme de optimale  $n_i$ .  
 kvaliteten på de enkelte trin. Idet kvaliteten på disse er som vist nedenfor, nales størrelse  $x$  og forstærkningen  $n$ . Forstærkerens kvalitet er summen af kvaliteten af forstærkeren på det  $i$ 'te trin er en funktion af indgangssignalmellem  $-\infty$  og 8 dB. Signalerne overføres uden tab mellem trinene. tredje trin, kan forstærkningen i det tredje trin betragtes som varierende mellem 0 og 40 dB. Idet der indskydes et potentiometer mellem andet og Forstærkeren i første trin kan varieres mellem 0 og 50 dB, i andet trin. Indgangssignalet er på -20dB og udgangssignalet skal være på 60 dB.  
**Opgave 7.13** Peter skal bygge en forstærker, der sammensættes af tre

Opgave 7.16 I netværket i figur 7.15 angiver tallene delstrækningens længde, og man kan bevæge sig fra venstre mod højre.

ninger.

Bestem den optimale løsning og de hertil svarende minimale omkost-

ninger.

heder, som i så fald skal produceres, for at minimere de totale omkost-  
de tidsperioder, hvor produktionsprocessen skal igangsættes, og det antal en-  
Formuler en tidsdiskret dynamisk beslutningsmodel til bestemmelse af  
hvor den forekommer.

Det bemærkes, at efterspørgslen skal tilfredsstilles i den tidsperiode,  
lageret efter de 4 tidsperioder skal også være nul.

Det initiale antal enheder på lageret er nul, og antallet af enheder på  
kr.

Lageromkostningen ved at opbevare én enhed i én tidsperiode er 50.000

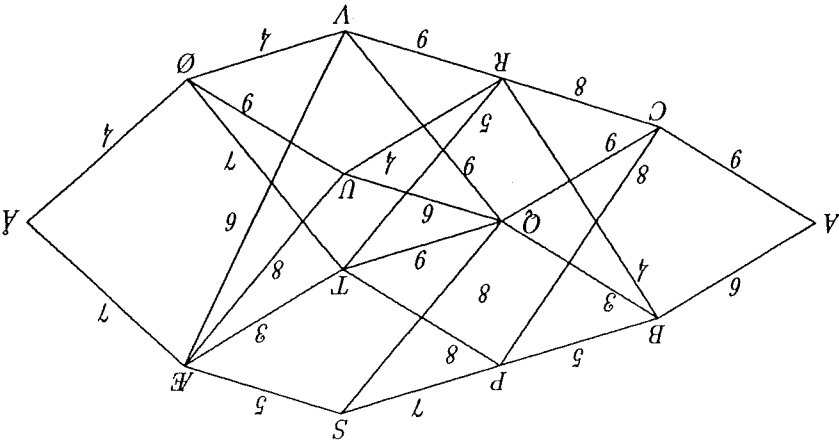
enhed yderligere 50.000 kr.

Når produktionsprocessen er igangsat, er produktionssomkostningen pr.

i hver enkelt tidsperiode uafhængigt af antal producerede enheder.

Hver gang Dypro igangsætter produktionsprocessen for de pågældende  
varer, er startomkostningen 100.000 kr. Produktionsprocessen kan igangsættes

Figur 7.15. Netværk





Opgave 7.19 Find den beliggenehed af husene, der minimerer den samlede støjene i husene i opgave 3.6.  
 Opgaven løses ved dynamisk programmering. Der skal både laves en generel løsning, udtrykt ved  $N$ ,  $c$  og  $a_i$ , og en løsning med  $N = 4$ ,  $c = 100m$ ,  $a_1 = 1000dBAm$ ,  $a_2 = 800dBAm$ ,  $a_3 = 1100dBAm$  og  $a_4 = 1300dBAm$ .

ved dynamisk programmering.

$$\begin{aligned} z_i & \text{ heltallig} \\ z_i & \geq 0 \\ z_1 & \leq 3 \\ z_1 + z_2 + 2z_3 & \leq 4 \\ \max[5z_1 + (z_2)^2 + 2(z_3)^2] \end{aligned}$$

Opgave 7.18 Løs problemet

ved dynamisk programmering.

$$\begin{aligned} z_i & \text{ heltallig} \\ z_i & \geq 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 & \leq 3 \\ \max[(z_1 - 1)^2 + (z_2 + 2)^2 + 2(z_3 + 1)^2] \end{aligned}$$

Opgave 7.17 Løs problemet

D: Det var formenuhigt nemt at besvare spørgsmålet  $C$  på baggrund af løsningen til  $A$ . Vil det være lige så nemt at finde ud af om der er kortest vej fra  $A$  til  $S$ ,  $T$ ,  $U$  eller  $V$ ?

C: Anvend dynamisk programmering til at finde ud af, om der er kortest vej fra  $P$ ,  $Q$  eller  $R$  til  $A$ .

B: Anvend dynamisk programmering til at finde den korteste vej fra  $A$  til  $A$  gennem netværket, når vejen skal passere punktet  $Q$ .

A: Anvend dynamisk programmering til at finde den korteste vej fra  $A$  til  $A$  gennem netværket.

Opgabe 7.25 Betragt et diskret tids optimal kontrol problem som f.eks. (7.11) - (7.15). Antag  $n = m = 1$ . Antag, at problemet løses ved dy-

Hvad er den optimale rute via Harwich?

af beregningerne udført ved besvarelsen af ovenstående spørgsmål?  
 er angivet med et  $H$  på figuren. Kan den optimale rute findes på baggrund

Umiddelbart før afgang besluttes det, at ruten skal passere Harwich, der  
 de mindste samlede omkostninger mellem London og Esbjerg.

Find ved anvendelse af dynamisk programmering den rute, der giver  
 er angivet med et  $E$ . Sejladsen må kun foregå fra vest mod øst.

Opgive 7.24 Ved planlægning af en sejlads mellem London og Esbjerg kan  
 omkostningerne ved at besøge de forskellige delstrækninger angives som på  
 figuren til eksempel 7.1.2 side 268. London er angivet med et  $L$  og Esbjerg

9 og  $12 \leq z_2 \leq 16$ . Find løsningen ved dynamisk programmering.

Opgive 7.23 Givet problemsstillingen og talværdierne i opgave 3.9. Antag  
 nu, at der yderligere kræves, at løsningen skal være heltallig, og at  $6 \leq z_1 \leq$

minimerer den forventede sum af vejlængderne på ruten.

30% for at man kommer til den modsatte side. Find den styrestrategi, der  
 sandsynlighed for, at man faktisk kommer der hen, hvor man ønsker det,  
 de første tre beslutninger skal implementeres. Dette betyder, at der er 70%  
 stre mod højre. Antag, at der er støj i styremekanismen, hver gang én af  
 Opgive 7.22 Man skal bevæge sig gennem netværket i figur 7.14 fra ven-

sandsynligheden for at komme ruten igennem i live.

(6 svarer til 0,6, osv.). Hjælp  $LL$  med at find den vej, der maksimerer  
 med dette, indtil han opdager, at sandsynlighederne er angivet i tiendedele

en delstrækning i live som anført på kortet.  $LL$  er ganske godt tilfreds  
 $LL$ ,  $JJ$  og Dalton brødrene vurderer sandsynligheden for at  $LL$  gennemfører

$A$ , fra vest mod øst. Korttegneren har ud fra et (begrænset) kendskab til  
 et kort (se figur 7.15), ifølge hvilket han skal gennem området fra  $A$  til

Opgive 7.21 Lucky Luke skal ride gennem fjendtligt terræn. Han har  
 maksimalt  $w$  empe, Ole Rytter vil blive udsat for på turen.

Find ved hjælp af dynamisk programmering den rute, der giver den mindste  
 angiver den  $w$  empe han vurderer, bakkene vil give på hver delstrækning.

ikke lide bækker. Han har derfor studeret ruten, og tallene på netværket  
 $A$  og går gennem netværket i figur 7.15 fra venstre mod højre. Rytter kan

Opgive 7.20 Ole Rytter skal cykle en tur, der starter ved  $A$  og slutter ved  
 maksimalt  $w$  empe, Ole Rytter vil blive udsat for på turen.

namisk programmering, idet tilstandsvariablen på hvert trin diskretiseres, så der er afstanden  $\delta$  mellem to nabopunkter. Kontrolvektoren diskretiseres tilsvarende.

Opstil et udtryk for, hvor mange regneoperationer, der skal udføres for at løse problemet. Vis, at hvis  $\delta$  halveres, så vokser antallet af regneoperationer cirka med en faktor 4. Hvorledes afhænger antallet af regneoperationer af  $N$ ? Giv et bud på tilsvarende sammenhænge, når  $n \geq 1$  og  $m \geq 1$ . Har resultatet nogen relation til "dimensionernes forandelse"?

**Opgave 7.26** Her er en klassisk dynamisk programmerings opgave. Du kommer kørende i bil til teatret, og du ønsker at parkere ved kantstenen så nær ved teatret som muligt. Det er tåget, så du kan ikke se, om der er en ledig plads, før du er lige ved den. Du kan heller ikke bage eller vende. Antag, at sandsynligheden for at enhver af  $p$ -pladserne er ledig, er  $p$ . Løs problemet.

**Opgave 7.27** Betragt varighedskurven i figuren til eksempel 2.4.1. Til dimensioneringsformål kan man foretage beregninger på baggrund af en sådan kurve. Hvis disse beregninger er meget komplicerede, kunne man ønske sig at approksimere kurven med en stepkurve. Man ville derfor inddele tidsaksen i  $k$  dele givet ved tidspunkterne  $t_0, t_1, \dots, t_k$ , og i tidsrummet  $t_i \leq t < t_{i+1}$ , ville kurven antage værdien  $y_i$ . Herefter opstår så spørgsmålet om, hvordan  $t_i$  og  $y_i$  skal vælges for en given varighedskurve og en givet værdi af  $k$ .

Man vil ønske sig at vælge  $t_i$  og  $y_i$ , så et mål for afvigelsen mellem varighedskurven og approksimationen er mindst muligt. Som mål kunne man vælge summen (integralerne, hvis tidsaksen var kontinuert) over absolutværdierne af eller kvadraterne på afvigelserne i alle tidspunkter. Diskuter problemstillingen.

Formuler en matematisk model. Diskuter løsningsmuligheder. Opfind et taleksekempel og løs det.

(Ide: John Maybee, Paul Randolph, Noel Uri: Optimal Step Function Approximation to Utility Load Duration Curves, Engineering Optimization, Vol. 4, pp. 89-93, 1979).

**Opgave 7.28** Diskuter følgende kendte citat af Richard Bellman: "Principle of Optimality. An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first

**Store og Små** Vi kigger kun på første halvleg af dette terningespil. Hver spiller tager efter tur seks terninger i bægere, ryster og vender det. Han skal nu tage mindst én terning fra. De resterende kommer i bægere, der rystes og vendes, og igen tages mindst én terning fra. Dette fortsætter, indtil spilleren har taget alle terninger fra. Spilleren optæller antallet af øjne som sit pointtal. Den spiller, der har flest, vinder halvlegene. A: Antag, at du sidder i baghånd, og at den bedste af de øvrige spillere har slået z points. Find den optimale spillestrategi. B: Antag, at du er næstsidst, at den sidste spiller vil spille optimalt som udlødt i A ovenfor, og at den bedste

eksampler på problemstillinger. spil kan være vanskelige at analysere til bunds. Prøv selv! Her er nogle er sidste omgang, og man sidder i baghånd. Det viser sig, at selv simple spille. I nogle spil og situationer er det dog relativt nemt, f.eks. hvis det er man nødt til at gøre antagelser om, hvordan mod- og medspillere vil vanskelighed, at når man skal finde den optimale spillestrategi for en selv, analyseres ved hjælp af dynamisk programmering. Det er dog en væsentlig opgave 7.30 En lang række spil - kortspil, terningespil, brætspil - kan

Illustrer, hvorledes systemets pålidelighed afhænger af b.

$i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\bar{u}_i$
1	0.9	10	2
2	0.7	10	4
3	0.85	10	3
4	0.95	20	3

$N = 4$ , og øvrige data som i tabellen:

Opgave 7.29 Et kommunikationssystem skal opbygges under hensyntagen til bl.a. økonomi og pålidelighed. Systemet opbygges af  $N$  delsystemer, der er koblet i serie. Inde i hvert delsystem er der  $u_i$  identiske komponenter i parallel. Hver komponent fungerer tilfredsstillende med sandsynligheden  $\alpha_i$ . Hvis blot én komponent i hvert delsystem fungerer, fungerer hele systemet. Sandsynligheden for, at hele systemet fungerer er da  $\prod_{i=1}^N (1 - (1 - \alpha_i)^{u_i})$ . Hver komponent i delsystemet i koster  $\beta_i$ . Find det optimale antal komponenter i hvert delsystem, således at sandsynligheden for, at hele systemet fungerer, maksimeres, idet der dog højst må være  $\bar{u}_i$  komponenter i delsystem  $i$ , og de samlede omkostninger ikke må overstige  $b = 100$ . Antag

decision." (Richard Bellman: Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957, p. 83.)

Opgave 7.31 På et stålvalseværk køres en såkaldt slab gentagne gange gennem en valse, og tykkelsen reduceres derved til det ønskede for en færdig

gen er naturligtvis, at du skal bruge dynamisk programmering.)  
 først, altid kan vinde. (Der findes et ad hoc argument for dette, men menin-  
 Den spiller, der trækker den sidste tændstik, taber. Vis, at den, der trækker  
 tages mindst én; der må gerne trækkes flere, men kun fra samme række.  
 i hver. To spillere skiftes til at trække tændstikker. I hvert træk skal der  
 Nim 12 tændstikker er anbragt i 3 rækker med henholdsvis 3, 4 og 5

med samme sandsynlighed, uafhængigt af tidligere kort.)  
 antage, at kortbunken er uendelig stor, således at ethvert kort fremkommer  
 optimale spillestrategi for hver af de to spillere. (Det vil være en god idé at  
 som 1. Spiller 2 kan valgfrit lade et es tælle som 1 eller 11. Find den  
 tæller et es som 11, hvis dette resulterer i en sum fra 17 til 21, og ellers  
 tilfælde vinder spiller 1. Knægt, dame og konge tæller 10. For spiller 1  
 sum. Hvis begge spillere får samme sum, er spillet uafgjort, i alle andre  
 1 taber, hvis han stopper med en sum, der er over 21 eller under spiller 2s  
 kort, et af gangen, dog mindst så mange, at hans sum er mindst 17. Spiller  
 2 stopper før summen overstiger 21, trækker spiller 1 nu et vilkårligt antal  
 Hvis summen at kortværdierne overstiger 21, har spiller 2 tabt. Hvis spiller  
 et kort fra bunken. Spiller 2 trækker nu et vilkårligt antal kort, et af gangen.  
 Blackjack Blackjack eller 21 kan spilles som følger. Spiller 1 trækker  
 der mangler).

situationen sig fra A ovenfor? (Se bl.a. på situationen hvor det er chancen,  
 skal stå. Hvad er de mulige tilstande? Find  $u_1^*(x_{15})$ . Hvorledes adskiller  
 bedste af de andre spillere har slået  $z$  points flere, end du har, lige før du  
 de andre spillere har slået, og at du altså sidder i baghånd. Antag, at den  
 Antag nu, at der er flere spillere. Antag, at det er sidste omgang, at alle  
 det næstsidste trin. Gå eventuelt endnu længere tilbage. Det er svært! C:  
 optimale kontrolstrategi  $u_1^*(x_{15})$ . B: Analyser tilsvarende situationen på  
 svarende til, at der op til to gange skal lægges terninger tilside. Find den  
 gler enere, toere, ..., Yatzy. Kontrollen er todimensionel,  $u_{15} = (u_{15}^1, u_{15}^2)^T$ ,  
 pointtal. På det sidste trin er der 15 tilstande svarende til, at man man-  
 tage, at der kun er én spiller, og at det drejer sig om at få højest muligt  
 til 15 trin i en dynamisk model. A: Lad os først som simplifikation an-  
 Yatzy De 15 omgange i Yatzy med fem terninger svarer naturligt nok  
 Analyser spillet fuldstændigt.

af de øvrige spillere har slået  $z$  points. Find den optimale spillestrategi. C:

$u_i = 0$  eller  $1 \leq u_i \leq 3$  for  $i = 1, 2, 3$

$$\sum_{i=1}^3 u_i = 4$$

$$\min \left[ \sum_{i=1}^3 r_i(u_i) \right]$$

### Opgave 7.32 Givet problemet

sekvens af reduktioner.

Man vil derfor med udgangspunkt i starttykkelsen 18 opnå slutttykkelsen 6 på kun 3 ture gennem valsen. Find ved dynamisk programmering den optimale sekvens af reduktioner.

Spørgsmål 3. Det besluttes, at ovenstående løsning er uhensigtsmæssig. optimale sekvens af reduktioner. ved netop 4 ture gennem valsen. Find ved dynamisk programmering den optimale sekvens af reduktioner.

Spørgsmål 2. Det viser sig, at der ikke er flere slabs af tykkelsen 16 på lager. Derfor vælger man at bruge slabs, så starttykkelsen er 18 i stedet for dynamisk programmering den optimale sekvens af reduktioner.

Spørgsmål 1. Ved en given ordre skal en slab reduceres fra starttykkelsen 16 til slutttykkelsen 6 ved netop 4 ture gennem valsen. Find ved dynamisk programmering den optimale sekvens af reduktioner.

Beregningerne til nedenstående spørgsmål skal så vidt muligt gennemføres under et.

Tykkelse før	8	10	12	14	16	18
	10	8	7	6	5	5
Reduktion	2	4	6	8	10	12
	6	4	8	10	12	14
Omkostning	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—

plade. Omkostningerne ved en tur gennem valsen afhænger af slabsens tykkelse lige før den kører gennem valsen samt af reduktionen i tykkelsen. Tabellen nedenfor viser, hvorledes omkostningerne afhænger dels af tykkelsen lige før en tur gennem valsen og dels af reduktionen. Et "—" angiver, at den pågældende kombination af tykkelse og reduktion ikke er mulig.

Problemet vedrører fordeling af en samlet produktion på 4 mellem 3 motorer, hvor  $u_i = 0$  svarer til, at motor nummer  $i$  er stoppet, og  $1 \leq u_i \leq 3$  svarer til, at den er kørende.

Funktionerne  $r_i$  er givet ved

$$r_1(u_1) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } u_1 = 0 \\ u_1 + 0.1(u_1)^2 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$r_2(u_2) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } u_2 = 0 \\ 0.5 + 0.8u_2 + 0.1(u_2)^2 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$r_3(u_3) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } u_3 = 0 \\ 1.0 + 0.6u_3 + 0.1(u_3)^2 & \text{ellers} \end{cases}$$

Spørgsmål 1: Vil et lokalt optimum i dette problem også være et globalt optimum?

Spørgsmål 2: Erstat intervallet fra 1 til 3 med punkterne 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 og 3.0, og find en optimal løsning til dette diskretiserede problem ved hjælp af dynamisk programmering. (Enhver motor har stadigvæk mulighed for at være stoppet eller kørende.)

Spørgsmål 3: Diskretiseringen har muligvis introduceret en fejl. Er det fundne punkt et lokalt optimum i det oprindelige problem? Hvis dette ikke er tilfældet, så find et lokalt optimum i nærheden af den løsning, der blev fundet ved dynamisk programmering.

Spørgsmål 4: Vis at  $u = (1, 0, 3)$  er det globale optimum for det oprindelige problem.

Opgave 7.33 Spørgsmål 1: Formulér problemet fra opgave 3.16 som et optimal kontrol problem.

Spørgsmål 2: Skibet sejler nu af sted, og gennemfører den første del-strækning med  $u_1 = 3.0$ . Løs det resterende problem for kapitaen ved hjælp af dynamisk programmering, idet kontrollerne diskretiseres, så de kun kan antage heltallige værdier.





# Kapitel 8

## Optimal kontrol - kontinuerlig tid

I foregående kapitel behandlede vi beslutningsproblemer, der kunne opfattes som vedrørende en sekvens af beslutninger. Emnet er det samme her, blot skal der træffes uendeligt mange beslutninger, svarende til at indkøbt  $t$  i foregående afsnit her er et indeks  $t$ , der antager alle værdier i et interval  $[t_0; t_1]$ .

Som vi skal se, er optimalitetsbetingelser i høj grad analoge til dem, som vi har set i foregående kapitel.

En lang række af betragtningerne i foregående kapitel har gyldighed her, og skal derfor ikke gentages.

### 8.1 Problemdefinition

Vi betragter problemet givet som følger:

$$(8.1) \quad \max \left[ \int_{t_1}^{t_0} f(x_t, u_t, t) dt + f_{t_1}(x_{t_1}) \right]$$

$$(8.2) \quad \dot{x}_t = d(x_t, u_t, t)$$

$$(8.3) \quad u_t \in U$$

$$(8.4) \quad x_{t_0} = \bar{x}_{t_0}$$

**Sætning 8.2.1 (Maksimumsprincippet)** Lad problemet (8.1) - (8.5) opfyldte antagelserne anført lige efter problemdefinitionen. Antag, at problemet er regulært (i samme betydning som i afsnit 3.1). Lad  $u_t^*$  være en optimal løsning, og  $x_t^*$  den tilhørende tilstand. Så eksisterer der en kontinuert og stykvis kontinuert differentiable funktion  $p$ , så der for alle  $t \in [t_0, t_1]$  gælder:

Vi har følgende nødvendige optimalitetsbetingelser:

Her er  $p_t \in R^n$  til tiden  $t$  en rækkevektor, bivektoren (costatevektoren). Vi opfatter  $p : R \rightarrow R^n$  som en vektorfunktion af  $t$ .

$$(8.7) \quad H(x_t, u_t, p_t, t) = f(x_t, u_t, t) + p_t d(x_t, u_t, t)$$

Mange optimalitetsbetingelser for dette problem udttrykkes i tilknytning til *Hamiltonfunktionen*  $H : R^{2n+m+1} \rightarrow R$  defineret som

## 8.2 Maksimumsprincippet

Om *målfunktionen*  $f : R^{n+m+1} \rightarrow R$  og enhver af de  $n$  komponenter  $d^j, j = 1, n$  i *dynamikfunktionen*  $d : R^{n+m+1} \rightarrow R^n$  forudsætter vi, at de er kontinuerte med hensyn til de  $(n + m + 1)$  variabler. Vi forudsætter desuden, at også  $\partial f(x_t, u_t, t) / \partial x_t^j$  og  $\partial d^k(x_t, u_t, t) / \partial x_t^j, j = 1, n, k = 1, n$ , eksisterer og er kontinuerte med hensyn til de  $(n + m + 1)$  variabler. Om *startmålfunktionen*  $f_1 : R^n \rightarrow R$  forudsætter vi, at den er kontinuert differentiable i de  $n$  variabler.

i ethvert diskontinuitetspunkt er endeligt. den forstand, at  $n$  har højst et endeligt antal diskontinuiteter, og springet i kontrolvektoren  $u$  skal som en funktion af  $t$  være stykvis kontinuert i mængden  $U \subseteq R^m$ . Bemærk at  $U$  er uafhængig af  $t$ .

Kontrolvektoren  $u_t$  til tiden  $t$  er en  $m$ -dimensional søjlevektor med komponenterne  $u_t^j, j = 1, m$ . Kontrolvektoren er til tiden  $t$  begrænset til

*Kontrolvektoren*  $u_t$  til tiden  $t$  er en  $m$ -dimensional søjlevektor med komponenterne  $x_t^j, j = 1, n$ . Starttilstanden  $x_{t_0}$  og eventuelt også sluttil-

standen  $x_{t_1}$  er givet som henholdsvis  $\bar{x}_{t_0}$  og  $\bar{x}_{t_1}$ .

*Tilstandsvektoren*  $x_t$  til tiden  $t$  er en  $n$ -dimensional søjlevektor med og *sluttilspunktet*.

Vi benævner parameteren  $t$  som *tiden*, med  $t_0$  og  $t_1$  som henholdsvis *start-*

$$(8.6) \quad x_{t_1} = \bar{x}_{t_1}$$

$$(8.5) \quad x_{t_1} \in R^n \text{ eller}$$

$$H(x_i, p_i, t) = \max_{u_i \in U} H(x_i, u_i, p_i, t)$$

Hvis funktionen  $H : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret som

Sætning 8.2.3 Lad antagelserne og konklusionerne i sætning 8.2.1 gælde. Bevis: Se Seierstad og Sydsæter (1987) side 105.  $\square$

Sætning 8.2.2 Lad antagelserne og konklusionerne i sætning 8.2.1 gælde. Antag, at  $U$  er konveks og at  $f$  og  $d$  er kontinuert differentiable med hensyn til  $u_i$  for alle  $t$ . Antag, at  $H(x_i, u_i, p_i, t)$  er konkav i  $(x_i, u_i)$  for alle  $t$ . Så er  $(x_i^*, u_i^*)$  en optimal løsning til problemet (8.1) - (8.5). Hvis  $H(x_i, u_i, p_i, t)$  er strengt konkav i  $(x_i, u_i)$  for alle  $t$ , så er  $(x_i^*, u_i^*)$  den entydige optimale løsning til problemet (8.1) - (8.5).

hvor forudsætningerne i den anden sætning er svagere end i den første: Mere generelt er tilstrækkelige optimalitetsbetingelser givet som følger, (igen: hvis der eksisterer en optimal løsning).

Hvis der eksisterer en optimal løsning, og hvis de nødvendige optimalitetsbetingelser udfører netop en løsning, er dette naturligvis den optimale. Hvis der udføres ganske få, kan man holde målfunktionsværdierne for disse op mod hinanden, og på den måde udpege den optimale løsning.

John betingelserne, dvs., der indføres en ekstra multiplikator, der ganges på målfunktionen. Vi skal ikke gå nærmere ind på dette. Derfor ser man ofte maksimumsprincippet formuleret i analogi til Fritz-er ikke i samme grad som det udviklet betingelser, der sikrer regularitet. Der med statisk optimering og ved diskret tids optimal kontrol modeller. Der

Antagelsen om regularitet er væsentlig på samme måde som i forbindelse svarende til de uendeligt mange tidspunkter i intervallet  $[t_0; t_1]$ . Årsagen spores til, at der er uendeligt mange variable og begrænsninger, sitet og konkaviteten i relation til al den foregående analyse er dette uventet. *Pontryagin's maksimumsprincip* - formuleres uden antagelser om konvek-

Det er bemærkelsesværdigt, at dette maksimumsprincip - også kaldet Bevis: Se Seierstad og Sydsæter (1987) side 72, 85, 182.  $\square$

Hvis (8.5) erstattes af (8.6), udelades den sidste betingelse.

- $p_1 = \Delta f_{t_1}(x_{t_1}^*)$
- $p_i = -\partial H(x_i^*, u_i^*, p_i, t) / \partial x$  for alle  $t$ , hvor  $u_i^*$  er kontinuert.
- $u_i^*$  maksimerer  $H(x_i^*, u_i, p_i, t)$  begrænset af (8.3).

Det ses, at  $H$  er lineær i  $u_i$ , og ud fra (8.9) og (8.10) findes nemt, at det optimale  $u_i^*$  følger maksimumsprincippet nødvendige optimalitetsbetingelser

$$(8.11) \quad H(x_t, u_t, p_t, t) = f_x(x_t, t) + f_{x_n}(x_t, t)u_t + p_t u_t$$

Vi finder Hamiltonfunktionen:  
suppleret med start- og slutbetingelser.

$$(8.10) \quad -\infty < u_i \leq \bar{u} < \infty$$

$$(8.9) \quad x_t = u_t$$

$$(8.8) \quad \max_{u_t} \int_{t_0}^{t_1} (f(x_t, t) + f_{x_n}(x_t, t)u_t) dt$$

Vi betragter følgende problem:

singularitet.  
I forbindelse med anvendelse af maksimumsprincippet kan én af vanskelighederne være, at den optimale kontrol er *singular*. Vi skal her beskrive

## Singularitet

gælder.  
en *kontinuerlig* bane. Dølløsningerne må derfor stykkes sammen, så dette væsentligt at bemærke, at under de givne forudsætninger vil  $x_t$  gennemløbe Ofte må man sammenslutte løsningen af flere dølløsninger. Det er her fald simpel - fremgangsmåde til løsning af et problem.  
række tilfælde kan man komme igennem med en analytisk - eller i hvert til relevante praktiske problemstillinger. Resultatet er, at man i en lang Der er udfoldet betydelige anstrengelser for at tilpasse betingelserne betingelser. Kan man løse dem, er man faktisk langt.

sammenhørende sædvanlige differentialligninger med  $2n$  tilhørende rand-dette dermed i realiteten tillader elimination af  $u_t$ . Der er nu tilbage  $2n$   $x_t$  og  $p_t$  giver maksimeringen af Hamiltonfunktionen et entydigt  $u_t$ , og at Stykken af maksimumsprincippet ligger i følgende. Antag, at for givet

Bevis: Se Seierstad og Sydsæter (1987) side 107, 182. □

For problemet, hvor (8.5) er erstattet af (8.6), gælder samme konklusion, forudsat  $f_{11}$  er konkav, henholdsvis strengt konkav.  
(8.1) - (8.5). Hvis  $H$  er strengt konkav i  $x_t$  for alle  $t$ , er  $x_t^*$  entydig (men eksisterer og er konkav i  $x_t$  for alle  $t$ , så er  $(x_t^*, u_t^*)$  en optimal løsning til  $u_t^*$  er ikke nødvendigt entydig).

Ud fra denne betingelse vil man i nogle tilfælde kunne fastlægge en singulær optimal kontrol. Vi skal bruge en tilsvarende argumentation i fskkeksesemplet i afsnit 8.6. Som det ses af fskkeksesemplet i afsnit 8.6, er tilstedeværelse af singulæritet ikke nødvendigvis udtryk for, at problemet er "mærkeligt". Tvertimod er den singulære kontrol i fskkeksesemplet intuitivt fornuftig. Derimod kan det i forskellige sammenhænge være vanskeligt at bestemme den optimale kontrol ved anvendelse af maksimumsprincippet, hvis den er singulær.

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\partial}{\partial t} f(x_i, t) + p_i &= \frac{\partial}{\partial x} f(x_i, t) \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial p_i} f(x_i, t) \frac{dp_i}{dt} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x_i, t) n_i + \frac{\partial}{\partial p_i} f(x_i, t) n_i \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x_i, t) n_i + \frac{\partial}{\partial p_i} f(x_i, t) n_i \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x_i, t) n_i + \frac{\partial}{\partial p_i} f(x_i, t) n_i
 \end{aligned}
 \tag{8.13}$$

Hvis problemet er singulært, må der om et singulært tidsinterval gælde, at skiftefunktionen er nul. Dette leder til følgende betingelse:

Funktionen  $(f_{x_n}(x_i, t) + p_i)$  kaldes *skiftefunktionen*. Det ses, at i mellemtilfældet i (8.12) kan  $u_i^*$  ikke fastlægges ud fra maksimumsprincippet. Hvis forløbet af skiftefunktionen er sådan, at mellemtilfældet i (8.12) kun optræder for et enkelt tidspunkt, eller for et begrænset antal isolerede tidspunkter, er der intet problem: selv om  $u_i^*$  til disse tidspunkter er vilkårlig, så er forløbet af  $x_i^*$  entydigt, fordi  $u_i^*$  ifølge (8.10) antager en endelig værdi.

Hvis mellemtilfældet i (8.12) optræder for alle  $t$  i et eller flere tidsintervaller af positiv længde, er situationen en anden. Vi siger da, at problemet er *singulært*. Tilsvarende omtales et singulært tidsinterval og en singulær kontrol.

Hvis problemet er singulært, må der om et singulært tidsinterval gælde, at skiftefunktionen er konstant nul. Heraf følger videre, at den tidsafdelte af skiftefunktionen er nul. Dette leder til følgende betingelse:

$$u_i^* = \begin{cases} \bar{u} & \text{hvis } f_{x_n}(x_i, t) + p_i < 0 \\ ? & \text{hvis } f_{x_n}(x_i, t) + p_i = 0 \\ \underline{u} & \text{hvis } f_{x_n}(x_i, t) + p_i > 0 \end{cases}
 \tag{8.12}$$

må tilfredsstille:

(8.21)

$$p_t = -\dot{p}_t$$

og da  $\partial H / \partial x = p_t$  betyder dette

(8.20)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}_t$$

Den ene er

Der næst anvendes de to nødvendige optimalitetsbetingelser i sætning 8.2.1.

(8.19)

$$H(x_t, u_t, p_t) = H = -(u_t)^2 + p_t(x_t + u_t).$$

Vi definerer Hamiltonfunktionen

(8.18)

$$0 \leq u_t \leq 1$$

(8.17)

$$x_4 = 5$$

(8.16)

$$x_0 = 0$$

(8.15)

$$x_t = x_t + u_t$$

(8.14)

$$\max \int_0^4 -(u_t)^2 dt$$

### Eksempel 8.2.1 Løs problemet

tænde og slukke inddrages - måske. Der vil være én, hvis omkostningerne ved at tænde er ikke nogen optimal kontrol. Det er vel klart, at vi skal tænde og slukke for kogepladen hele tiden, jo hurtigere vi skifter, desto bedre! Der er mange mulige løsninger, men der holdes så nær ved starttemperaturen  $100^\circ\text{C}$  som muligt. Man kan kun have kogepladen tændt eller slukket, ikke indstille effekten kontinuerligt. Betragt følgende eksempel. Man ønsker at styre en kogeplade, så den

tilstrækkelige til at sikre eksistens af en optimal løsning. Det bemærkes, at antagelser i stil med dem i sætning 2.1.1 ikke er med de uendeligt mange variabler at gøre.

Det forudsættes i sætning 8.2.1, at der eksisterer en optimal løsning. Det er måske intuitivt antageligt, at der eksisterer en optimal løsning til et velformuleret optimal kontrol problem med praktisk oprindelse. Man skal dog være noget mere omhyggelig med formuleringen i kontinuerligt optimal kontrol teori, end ved diskret tid og ved statiske problemer. Igen har dette

### Ekstistens af optimal løsning

Se til venstre på figur 8.1.

$$u_i^* = 0.183 \exp(-t) \quad (8.30)$$

Heraf følger ved anvendelse af (8.24) at

$$c_1 \approx 0.366 \text{ og } c_2 \approx 0.092 \quad (8.29)$$

Dette lineære ligningssystem løses til

$$x_4 = c_2 \exp(4) - (c_1/4) \exp(-4) = 5 \quad (8.28)$$

$$x_0 = c_2 - c_1/4 = 0 \quad (8.27)$$

Konstanterne fastlægges ud fra randbetingelserne  $x_0 = 0$  og  $x_4 = 5$ . De angivne randbetingelser giver ved anvendelse af (8.26)

$$x_i^* = c_2 \exp(t) - (c_1/4) \exp(-t) \quad (8.26)$$

der med  $c_2$  som en konstant løses til

$$x_i = x_i + u_i = x_i + \frac{5}{4} c_1 \exp(-t) \quad (8.25)$$

Indsættes (8.24) i den angivne dynamik findes Vi ser midlertidigt bort fra begrænsningen  $0 \leq u_i \leq 1$ .

$$u_i = \frac{5}{4} c_1 \exp(-t) \quad (8.24)$$

der ved anvendelse af (8.22) giver

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow u_i = \frac{5}{4} p_i \quad (8.23)$$

Vi finder

nærmeste grænse (0 eller 1).

grænsningen på  $u_i$  er en boks, findes løsningen hvor  $\partial H / \partial u_i = 0$  eller på  $H(x_i^*, u_i, p_i^*)$  er strengt konkav og differentiablel med hensyn til  $u_i$  og be-  $H(x_i^*, u_i, p_i^*)$  under hensyntagen til de givne begrænsninger på  $u_i$ . Da Den anden nødvendige optimalitetsbetingelse er, at  $u_i^*$  maksimerer

$$p_i^* = c_1 \exp(-t) \quad (8.22)$$

der med  $c_1$  som en konstant løses til

Løsningen er altså sammensat af to delforløb.

$$u_t = \begin{cases} 0.15 & \text{for } t \leq \ln c_1 - \ln 0.3 \\ \frac{1}{2} c_1 \exp(-t) & \text{for } \ln c_1 - \ln 0.3 \leq t \end{cases} \quad (8.32)$$

eller tilsvarende

$$u_t = \begin{cases} \frac{1}{2} c_1 \exp(-t) & \text{hvis } \frac{1}{2} c_1 \exp(-t) \leq 0.15 \\ 0.15 & \text{ellers} \end{cases} \quad (8.31)$$

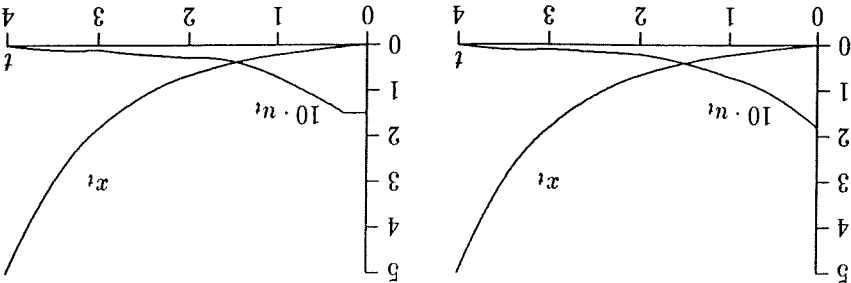
$c_1 > 0$ . Under denne antagelse ser vi, at (8.30) må revideres til  
Vi bemærker, at løsningen (8.22) stadig gælder. Desuden er jo nok  
fra begrænsningen  $0 \leq u_t$ .

Eksempel 8.2.2 Vi fortsætter ovenstående eksempel, idet vi dog indfører  
begrænsningen  $0 \leq u_t \leq 0.15$  i stedet for (8.18). Ovenstående løsning kan  
ikke bruges, idet de 0.15 overskrides for  $t$  nær 0. Vi ser midlertidigt bort

Vi fandt netop en løsning til de nødvendige optimalitetsbetingelser, og  
denne er derfor den optimale (såfremt der eksisterer en optimal løsning,  
men det gør der jo som netop fundet), sætning 8.2.1. Da betingelserne i  
sætning 8.2.2 er opfyldt, ses også heraf, at den fundne løsning faktisk er  
optimal i problemet.  $\square$

Idet  $t$  løber fra 0 til 4, ses det af (8.30), at  $u_t$  løber fra 0.183 til 0.003.  
Dermed er begrænsningen  $0 \leq u_t \leq 1$  overholdt for alle  $t$ . Løsningen til  
de nødvendige optimalitetsbetingelser er altså (8.30) og (8.26) med kon-  
stantværdierne (8.29).

Figur 8.1. Optimale løsninger for de to eksempler





**Eksempel 8.2.3** Målet her er at finde en afløser for den velkendte Carnot cyklus, der består af to isothermer og to adiabater, således at den endoreversible motor opnår sin optimale ydelse. Vi søger uden forhåndsantagelser om kredsprocessens stempelebevægelse, reservevoitilkobling, materialevalg m.m., og kredsprocess, der f.eks. leverer mest nyttigt arbejde i perioden  $\tau$ . Varmemaskinen er defineret ved følgende antagelser:

Opgave: vis at den fundne løsning er optimal.  $\square$   
 Se til højre på figur 8.1.

$$x_t^* = \begin{cases} 0.15 \exp(t) - 0.15 & \text{for } 0 \leq t \leq 0.25 \\ 0.0916 \exp(t) - 0.0963 \exp(-t) & \text{for } 0.25 \leq t \leq 4 \end{cases} \quad (8.38)$$

$$u_t^* = \begin{cases} 0.15 & \text{for } 0 \leq t \leq 0.25 \\ 0.193 \exp(-t) & \text{for } 0.25 \leq t \leq 4 \end{cases} \quad (8.37)$$

Løsningen er altså approksimativt:

er opfyldt.

$t = \ln c_1 - \ln 0.3 \approx 0.25$ . Man kan også verificere, at begrænsningen  $0 \leq u_t$  er dermed er (8.31) verificeret. Tidspunktet, der skiller de to forløb, er løses til  $c_1 \approx 0.385$  og  $c_3 \approx 0.0916$ . Vi ser, at  $c_1 > 0$  som forudsat, (8.34) og (8.36) har samme værdi. Ligningerne for disse betingelser kan dels at  $x_t = 5$ , og dels, at forløbet af  $x_t$  er kontinuert, hvoraf følger, at Vi har to konstanter,  $c_1$  og  $c_3$ , og to betingelser til fastlæggelse af dem:

$$x(\ln c_1 - \ln 0.3) = c_3(c_1/0.3) - (c_1/4)(0.3/c_1) \quad (8.36)$$

Til tidspunktet  $t = (\ln c_1 - \ln 0.3)$  har dette værdien

$$x_t = c_3 \exp(t) - (c_1/4) \exp(-t) \quad (8.35)$$

anvendelse af (8.32) og løsning af dynamikligningen (jævnfør (8.26)):

$$x(\ln c_1 - \ln 0.3) = 0.15(c_1/0.3) - 0.15 \quad (8.34)$$

Heraf følger, at  $x_t$  til tidspunktet  $t = (\ln c_1 - \ln 0.3)$  har værdien hvor konstanten  $c_2$  ud fra startbetingelsen  $x_0 = 0$  fastlægges til  $c_2 = 0.15$ .

$$x_t^* = c_2 \exp(t) - 0.15 \quad (8.33)$$

For den første del af tiden, frem til tidspunktet  $t = (\ln c_1 - \ln 0.3)$ , får vi ved anvendelse af (8.32) og løsning af dynamikligningen:

$$C_u T(t) = -C_u (\gamma - 1) T(t) V(t) / V(t) - k(t) [T(t) - T_h(t)], \quad (8.44)$$

eller, ved brug af antagelserne i) - iii) og lidt omformning,

$$\dot{Q}(t) = C_u T(t) + P(t) V(t) \quad (8.43)$$

sætning giver bibeholdelsen  
 cestylen, dvs. anden hovedsætning er automatisk opfyldt. Første hoved-  
 lisk proces medføre, at arbejds-gassens entropiændring er nul uanset pro-  
 er opfyldt for arbejds-gassen. Dog vil antagelse ii) samt kravet om en cyk-  
 Som matematiske betingelser kræves det, at første og anden hovedsætning

$$W = \int_0^T P(t) V(t) dt. \quad (8.42)$$

Da maskinens omløbstid er fast, er maksimering af dens middelleffekt  
 ækvivalent med maksimering af det arbejde, den leverer i perioden  $\tau$ ,  
 maksimeret.

Under disse antagelser ønskes varmemaskinens middelleffekt over en cyklus

i) der er ingen friktionsstab p.g.a. gnidning mellem bevægelige dele.

v) motorens omløbstid er valgt på forhånd og kaldes  $\tau$ ;

$$(8.41)$$

$$0 \leq k \leq k_0;$$

iv) varmekonduktansen  $k$  ligger i intervallet

$$\dot{Q}(t) = -k(T(t) - T_h(t)); \quad (8.40)$$

iii) når arbejds-gassen er i kontakt med et temperaturreservoir, er varme-  
 strømmen givet ved,

ii) arbejds-gassen er ideal med konstant varmekapacitet, og  $P(t)$ ,  $V(t)$  og  
 $T(t)$  er veldefinerede størrelser.

$$T_L \leq T_h \leq T_H; \quad (8.39)$$

i) der forefindes temperaturreservoirer med temperatur  $T_h$  i intervallet

$$\Delta H \equiv H(T^*, \beta^*, c^*, k^*, T_R^*, p^*) - H(T, \beta, c, k, T_R, p) \geq 0 \quad (8.51)$$

udtrykkes således:

I det optimale forløb skal Hamiltonfunktionen maksimeres. Dette kan også

$$H(T, \beta, c, k, T_R) \equiv c(t)T(t) + p_1(t)(-T(t)c(t) - k(t)T(t)) - T_R(t)(1) + p_2(t)c(t) \quad (8.50)$$

Hamiltonfunktionen kan derefter opstilles som

$$\beta(t) = c(t) \quad (8.49)$$

At dette og (8.45) følger da

således at en ny tilstandsvariabel  $\beta$  er defineret ved  $\beta(t) = (\gamma - 1) \ln(V(t)/V(0))$ . Det viser sig at være bekvemt at indføre en variabeltransformation,

$$T(t) = -T(t)c(t) - k(t)T(t) - T_R(t) \quad (8.48)$$

anvendelse af (8.45) omskrives (8.44) til

I det følgende antages  $C_v = 1$ , det er et spørgsmål om skalering. Ved

$$\max \int_0^t C_v c(t) T(t) dt \quad (8.47)$$

skives (8.42) ved hjælp af (8.40), (8.43), (8.44) og (8.45) til

Vi løser problemet ved hjælp af maksimumsprincippet. Først om-

maksimalt.

tingelserne  $T^*(0) = T(\tau)$  og  $V^*(0) = V(\tau)$ , samt gør integralet (8.42) som giver løsninger  $T^*(t)$  og  $V^*(t)$  til differentialligningen (8.44) med betingelserne  $k(t)$ ,  $c(t)$  og  $T_R(t)$  inden for intervallerne (8.39), (8.41) og (8.46),

Det endelige optimeringsproblem bliver hermed at finde kontrolfunk-

den den relative hastighed  $c$ .

hvor  $c_m$  og  $c_M$  betyder henholdsvis minimum- og maksimumsværdien af

$$-c_m \leq c(t) \leq c_M \quad (8.46)$$

er begrænset til intervallet

$$c(t) \equiv (\gamma - 1) \dot{V}(t)/V(t) \quad (8.45)$$

hvor  $\gamma$  er Poissons forhold  $\gamma = C_p/C_v$ . Endelig skal det af tekniske grunde kræves, at den relative volumenhastighed

En nøjere analyse, der ikke gennemføres her, leder til, at de ubestemte løsninger i (8.54) og (8.55) kun er relevante for isolerede tidspunkter, pro-blemet er altså ikke singulært med hensyn til  $k$  og  $T_R$ . Der er altså kun brug for to varmereservoarer, det varmest og det koldst mulige, og to konduktanser hertil, den maksimale og nul. Indsættes disse værdier i Hamiltons kanoniske ligninger, opnås et antal delløsninger (grene) svarende til antallet af kombinationer af værdierne for  $k^*(t), c^*(t)$  og  $T_R^H(t)$ .

$$(8.56) \quad c(t) = -p_1(t)k(t) = -p_1(t) \\ (8.57) \quad 0 = -p_2(t)$$

Videre fås, at den nødvendige optimalitetsbetingelse  $p^* = -\partial H/\partial x$  leder til

$$(8.55) \quad T_R^H(t) = \begin{cases} T_H & \text{hvis } p_1^*(t) < 0 \\ T_L & \text{hvis } p_1^*(t) > 0 \\ \text{ubestemt} & \text{hvis } p_1^*(t) = 0 \end{cases}$$

$$(8.54) \quad k^*(t) = \begin{cases} k_0 & \text{hvis } p_1^*(t)(T_R^H(t) - T^*(t)) < 0 \\ 0 & \text{hvis } p_1^*(t)(T_R^H(t) - T^*(t)) = 0 \\ \text{ubestemt} & \text{hvis } p_1^*(t)(T_R^H(t) - T^*(t)) > 0 \end{cases}$$

På lignende måde fastlægges  $k^*(t)$  og  $T_R^H(t)$ ,

$$(8.53) \quad c^*(t) = \begin{cases} c_M & \text{hvis } (1 - p_1^*(t)(T^*(t) + p_2^*(t))) < 0 \\ c_m & \text{hvis } (1 - p_1^*(t)(T^*(t) + p_2^*(t))) > 0 \\ \text{ubestemt} & \text{hvis } (1 - p_1^*(t)(T^*(t) + p_2^*(t))) = 0 \end{cases}$$

Da dette skal være opfyldt for alle funktioner  $c(t)$  inden for grænserne (8.46), må det gælde, at

$$(8.52) \quad \Delta H = [(1 - p_1^*(t)(T^*(t) + p_2^*(t))][c^*(t) - c(t)] \geq 0$$

Da uligheden (8.51) skal være opfyldt for alle kontrolfunktioner, der blot opfylder begrænsningerne (8.39), (8.41), (8.46), skal uligheden specielt være opfyldt i det tilfælde, hvor  $k(t) = k^*(t)$  og  $T_R^H(t) = T_R^H(t)$ . Indsættes disse udtryk for  $k(t)$  og  $T_R^H(t)$  i (8.51), fås uligheden

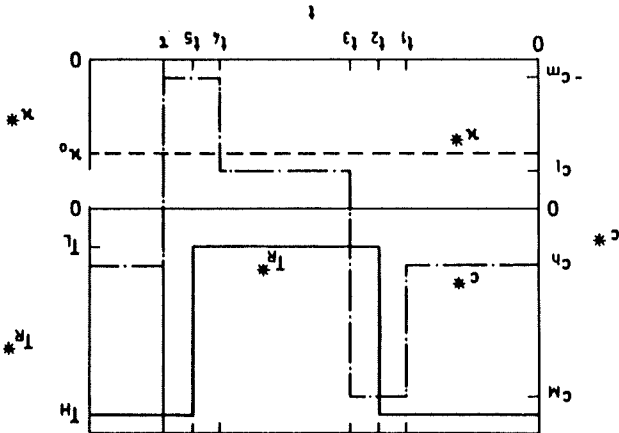
Vi ser også af figur 8.2, at den relative volumenhashtighed  $c^*(t)$  derimod ikke kun skal anlage sine ekstreme værdier. (Problemet er singulært med fra arbejdsgrassen.

Indgår ingen adiabater, og varmereservoierne skal således aldrig isoleres varmelædningsveje  $k^*(t)$  er maksimal under hele kredsprocessen, dvs. der to varmereservoier, det varmest og det koldest muligt, dels at den optimale Der er flere bemærkelsesværdige resultater, dels at der kun er brug for

er volumen  $V^*(t)$  og temperaturen  $T^*(t)$ ; de er vist i figur 8.3. Tilstandsunktionerne, som beskriver arbejdsgrassens tilstand, og altså ikke varmekonduktansen hertil  $k^*(t)$  og den relative volumenhashtighed  $c^*(t)$ . de størrelser, der kan varieres udefra; det er reserverttemperaturen  $T_R^*(t)$ , er vist i figurene 8.2 og 8.3. Figur 8.2 indeholder kontrolfunktionerne, altså Den samlede løsning i det konkrete tilfælde, dvs. den optimale cyklus, gennemføres ikke her.

liniale sammensætning er så den, der gør ydelsesindekset størst. Analysen dekset, ligning (8.42), (8.47) for hver af disse sammensætninger. Den op- mensætninger af deløsninger er bestemt, udregnes værdien af ydelsesin- let  $[0, \tau]$  samt periodiske med perioden  $\tau$ . Når alle de mulige legale sam-  $p_1(t)$  samt Hamiltonfunktionen skal være kontinuerle i tidsinterval- gen skal der tages hensyn til, at funktionerne  $T(t), \beta(t)$  (og dermed  $V(t)$ ), Ved sammenslykkin- Dette kan gøres efter følgende princip. Den sammenslykkin- Deltøsningerne skal stykkes sammen til en løsning på hele tidsinter-

Figur 8.2. De optimale kontrolfunktioner over en periode  $\tau$



(7.56) side 279.

løse "resten" af problemet (8.1) - (8.6) frem til tidspunktet  $t_1$ . Jævnfør funktionsværdi, givet vi starter til tiden  $t$  i tilstanden  $x_t$ , og i øvrigt skal Man definerer funktionen  $F : R^{n+1} \rightarrow R$ , der er den optimale mål-

Vi skal kun skitsere, hvorledes det formuleres.

optimalitetsbetingelser. idéerne i dynamisk programmering. Dette vil som der give tilstrækkelige Ganske som i foregående kapitel kan man anvende optimalitetsprincippet og

## 8.3 Optimalitetsprincippet

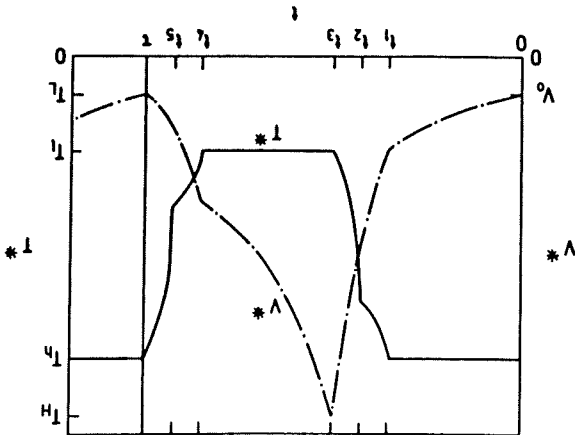
1983, No. 2.) □

(Ovenstående er stort set citeret fra Bjarne Andersen og Finn Mølgård Poulsen: Elementer af endelig-tids termodynamik, Fysisk Tidsskrift, 81,

sinusformede stempelebevægelse er slående.

ikke-differentiable i enkelte punkter. Forskellen fra den sædvanlige, næsten ses, at alle volumenændringer skal ske eksponentielt, og at funktionen er ikke være for stor. Den interessanteste funktion er måske  $V^*(t)$ , hvor det varmeoverførslen kan nå at følge med, må den relative volumenhasighed tionen i figur 8.3, ser vi, at der er to isotermer i kredsprocessen, og for at hensyn til  $c$ , jfr. (8.53).) Sammenligner vi nemlig med temperaturfunk-

Figur 8.3. De optimale trajektorier



Det ses tydeligt, at (8.61) og (7.96) svarer til hinanden. Derimod har (8.62) ikke nogen oplagt parallel i diskret tid.

$$(8.62) \quad H(x_t, u_t, p_t, t) = - \frac{\partial F(x_t, t)}{\partial t}$$

$$(8.61) \quad p_t = \frac{\partial F(x_t, t)}{\partial x}$$

Det ses, at der skabes en nydelig korrespondance til maksimumsprincippet ved følgende fortolkning:

Bevis: Se Basar og Olsder (1982) p. 222. □

**Sætning 8.3.1** Hvis der kan findes en kontinuert differentiable funktion  $F$  der tilfredsstiller (8.59) så giver det maksimerende  $u$  på højresiden af (8.59) en optimal løsning til problemet (8.1) - (8.6).

Vi har altså:

så giver  $\phi(x_t, t)$  en optimal kontrol.

$$(8.60) \quad f(x_t, \phi(x_t, t), t) + \frac{\partial F(x_t, t)}{\partial x} d(x_t, \phi(x_t, t), t) = \max_{u \in U} [f(x_t, u_t, t) + \frac{\partial F(x_t, t)}{\partial x} d(x_t, u_t, t)]$$

Desuden gælder som tilstrækkelige optimalitetsbetingelser: Hvis man kan finde en passende "pæn" funktion  $\phi : R^{n+1} \rightarrow R^m$  (sammenlign med  $\phi$  defineret i afsnit 7.4), således at

$$(8.59) \quad - \frac{\partial F(x_t, t)}{\partial t} = \max_{u \in U} [f(x_t, u_t, t) + \frac{\partial F(x_t, t)}{\partial x} d(x_t, u_t, t)]$$

*Belman-Jacoby-ligningen:*

fordr sætning, at  $F$  er kontinuert differentiable, gælder der følgende partielle differentialligning, der kaldes Hamilton-Jacoby-ligningen eller *Hamilton-differentialligning*,

Det kan herefter vises, at der under den supplerende, relativt stærke, under begrænsninger.

$$(8.58) \quad F(x_t, t) = \max_{s \in S} \int_t^T f(x_s, u_s, s) ds + f(x_{T1})$$

Vi får altså

$$(8.66) \quad x = f(x, u, t)$$

måde opnå en første ordens dynamik. Er den "naturlige" model således: (8.2). Et standard trick er da at indføre ekstra tilstandsvariable og på den indgår anden ordens differentia ligninger, i stedet for første ordens som i I en række tilfælde er det naturligt i problemformuleringen, at der stil med (7.28) - (7.32) side 271.

Optimalitetsbetingelserne hørende hertil kan formuleres i stil med ovenstående maksimumsprincp, hvor der dog tilføjes yderligere multiplikatorer, i

$$(8.65) \quad h(x_{t_0}, x_{t_1}) = 0$$

Specielt kan start- og slutbetingelserne formuleres mere generelt, f.eks. som

$$(8.64) \quad h(x_t, u_t, t) = c_t$$

$$(8.63) \quad g(x_t, u_t, t) \leq b_t$$

Belis: Se Seierstad og Sydsæter (1987) side 72, 143. □. Det er endvidere muligt at håndtere mere komplicerede begrænsninger, såvel rene tilstands begrænsninger som blandede kontrol- og tilstands begrænsninger, således at (8.3) i problemformuleringen (8.1) - (8.6), erstattes

$$H(x_{t_0}^*, u_{t_0}^*, p_{t_0}^*, t_0^*) = 0$$

**Sætning 8.4.1** *Betragt problemet (8.1) - (8.5), hvor det dog antages, at  $t_1$  er frit. Antag som i sætning 8.2.1. Så gælder samme nødvendige optimalitetsbetingelser som der for alle  $t \in [t_0; t_1^*]$ , og desuden*

har da følgende nødvendige optimalitetsbetingelser:  $t_1$  er frit - dvs.,  $t_1 \in (t_0; \infty)$ . Løsningen med hensyn til  $t_1$  kaldes  $t_1^*$ . Vi betragter problemstillingen (8.1) - (8.5), hvor det dog antages, at lader sig i øvrigt dertiligt formulere i diskret tid (prøv selv!).

på korteste tid. Her bliver målfunktionen min f. dt. Denne problemstilling vant, er fastlæggelsen af den kontrol, der styrer et system til en sluttilstand simunsprincpnet anvendes. Et eksempel, hvor denne formulering er relevant tidspunkt er frit, og dermed en af optimeringsvariable, kan mak- I ovenstående blev det antaget, at sluttidspunktet  $t_1$  var kendt. Også hvor

## 8.4 Problemvarianter



$$\partial f^*/\partial \bar{x}_{t_1} = -p_{t_1}$$

$$\partial f^*/\partial \bar{x}_{t_0} = p_{t_0}$$

afdelte givet som:

**Sætning 8.5.1** *Betragt problemet (8.1) - (8.4), (8.6). Antag, at alle forudsætningerne for entydighed i sætning 8.2.3 holder. Antag, at  $p$  er entydig. Så er  $f^*$  defineret og differentierbar i punktet  $(t_0, \bar{x}_{t_0}, t_1, \bar{x}_{t_1})$  med partielle*

forbindelse med løselighed af denne funktion:

Det viser sig, at  $p$  og Hamiltonfunktionen spiller en central rolle i også afsnit 2.6.

Lad os i tilknytning til problemet (8.1) - (8.4), (8.6) definere værdifunktionen  $f^* : R^{2n+2} \rightarrow R$  som den optimale målfunktionsværdi hørende til starttidspunktet, sluttidspunktet, starttilstanden og sluttilstanden. Jævnt for

## 8.5 Følsomhedsanalyse

Det er et eksempel på et simpelt problem inden for *variationsregning*. Variationsregning blev grundlagt 300 år før den optimale kontrolteori, og eksisterer som et selvstændigt område.

$$\max \int_{t_1}^{t_0} f(x_t, \dot{x}_t, t) dt \quad (8.69)$$

geproblemet sammenfattes til

er uden begrænsninger, så kan målfunktionen og dynamikken for Lagrangens dynamikken har den simple form  $\dot{x}_t = u_t$ , og problemet iøvrigt

kun det sidste led, bruges betegnelsen *Mayer-problemet*.

Indgår kun det første led, bruges betegnelsen *Lagrange-problemet*, og indgår intervallet  $[t_0, t_1]$  og sluttidspunktet  $t_1$ , kaldes det ofte *Bolza-problemet*.

Når målfunktionen som i (8.1) indeholder to led, knyttet til henholdsvis eksempel 8.7.1.)

Ved passende ombygning af  $f$  kan dette nemt bringes på formen (8.2). (Se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^t &= x_1^t \\ \dot{x}_2^t &= f(x_1^t, u_t, t) \end{aligned} \quad (8.67)$$

(8.68)

med  $x_t \in R$ , kan dette erstattes af

$$(8.71) \quad x_t = R(x_t)x_t$$

$r$  afhænge af  $x_t$ , således af (8.70) modificeres til  
 al evighed: der er naturgivne grænser. Dette kunne modelleres ved at lade  
 Nu er det ikke særligt realistisk at forestille sig eksponentiel ændring i  
 er naturligvis antaget, at  $x_0 > 0$ ).

Løsningen til differentialligningen er  $x_t = x_0 \exp(rt)$ . Hvis  $r < 0$ , vil  $x_t$   
 vokse mod  $\infty$  for  $t \rightarrow \infty$ , mens  $r > 0$  vil betyde, at  $x_t \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow \infty$  (det

$$(8.70) \quad \frac{dx_t}{dt} \equiv x_t = rx_t$$

følgende model af udviklingen i fiskebestanden:  
 Antag, at den relative nettolevlækst er givet ved parameteren  $r$ . Vi får da  
 Betragt en fiskebestand, og lad dens størrelse til tiden  $t$  være givet ved  $x_t$ .

### Nogle ligevægtsbetragtninger

træer eller tomater.  
 Vi skal i det følgende eksemplificere disse problemstillinger ved at tale  
 om fisk, men som det fremgår, kunne ressourcen lige så godt have været  
 gas og olie.

Andre typer af problemstillinger vedrører ressourcer, der ikke fornyes,  
 det gælder bl.a. i forbindelse med minedrift, grusgravning og udvinding af  
 analyse stationære forhold og at analysere dynamiske forløb.  
 i stand til at forny og forandre sig selv. Det er derfor både relevant at  
 bl.a. landbrug, gartneri, skovbrug og fiskeri. I disse tilfælde er ressourcerne  
 af udnyttelse af naturressourcer. Problemstillingen opstår i forbindelse med  
 Vi skal nu give et eksempel på anvendelse af optimal kontrol teori til analyse

## 8.6 Eksempel: Fisk

Det ses, at resultatet er som man kunne forvente det i lyset af bl.a.  
 sætning 3.1.4, (7.96) og (8.61) - (8.62).

Bevis: Se Seierstad og Sydsæter (1987) side 213.  $\square$

$$\begin{aligned} \partial f^* / \partial t_1 &= H(x_{t_1}^*, u_{t_1}^*, p_{t_1}, t_1) \\ \partial f^* / \partial t_0 &= -H(x_{t_0}^*, u_{t_0}^*, p_{t_0}, t_0) \end{aligned}$$

Vi vil først antage, at  $u_t$  er konstant,  $u_t = u$ . Som før kan vi analysere ligevægtspunkter. Det eftervises nemt, at den største værdi af højresiden af (8.72) er  $rK/4$ .

$$x_t = rx_t(1 - x_t/K) - u_t \quad (8.74)$$

Det er illustreret til højre på figur 8.4. Lad os nu antage, at vi fanger nogle af fiskene. Vi vil angive den mængde, der fanges, ved  $u_t$ . Vi modificerer derfor (8.72) til

$$x_t = \frac{K}{K - x_0} \left( 1 + c \exp(-rt) \right) \text{ med } c = \frac{x_0}{K - x_0} \quad (8.73)$$

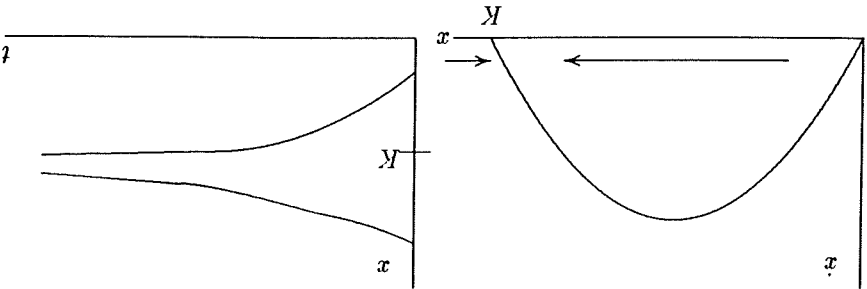
Løsningen til (8.72) kan ved ind sættelse verificeres til at være der er meget anvendt i forbindelse med analyse af vækstprocesser. til venstre på figur 8.4. Ligningen (8.72) er den såkaldte logistiske ligning, ustabil ligevægtspunkt, mens det andet er et stabilt ligevægtspunkt. Se ligevægtspunkter for (8.72), nemlig  $x_t \equiv 0$  og  $x_t \equiv K$ . Her er det første et  $x_t = K$  er  $x_t = 0$ , og hvis  $x_t > K$  er  $x_t > 0$ . Det følger, at der er to Det ses, at hvis  $x_t = 0$  er  $x_t = 0$ , hvis  $0 < x_t < K$  er  $x_t > 0$ , hvis

$$x_t = rx_t(1 - x_t/K) \quad (8.72)$$

hvor  $R$  er en aftagende funktion af  $x_t$ . En simpel og ofte brugt form af  $R$  er  $R(x_t) = r(1 - x_t/K)$ . Her er  $K$  og  $r$  konstanter. Vi får da denne specifikation af (8.71):

typiske forløb.

Figur 8.4. Den logistiske vækstkurve. Til venstre vises  $x_t$ , til højre vises





$$(8.83) \quad n_* = \begin{cases} \underline{n} & \text{hvis } c - p_i < 0 \\ ? & \text{hvis } c - p_i = 0 \\ 0 & \text{hvis } c - p_i > 0 \end{cases}$$

Maksimumsprincippet giver os (efter lidt manipulation) følgende nødvendige betingelse for  $n_*$ , idet det naturligt antages, at  $x_i > 0$ :

$$(8.82) \quad H(x_i, n_i, t) = cx_i n_i + p_i (r x_i (1 - n_i x_i / K) - n_i x_i)$$

Vi får Hamiltonfunktionen

$$(8.81) \quad x_{i1} = \bar{x}_{i1}$$

$$(8.80) \quad x_{i0} = \bar{x}_{i0}$$

$$(8.79) \quad 0 \leq n_i \leq \bar{n}$$

$$(8.78) \quad \dot{x}_i = r x_i (1 - x_i / K) - n_i x_i$$

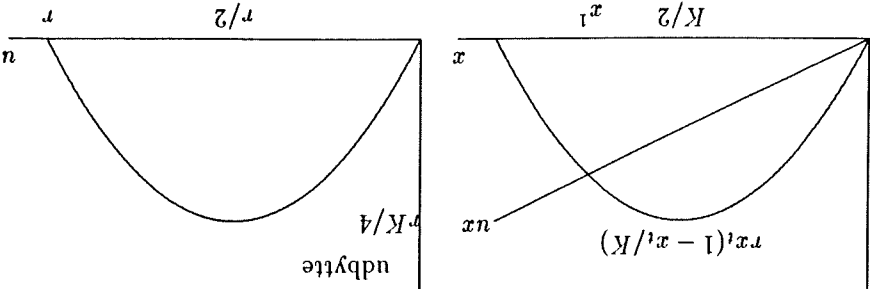
$$(8.77) \quad \max \int_{t_1}^{t_0} c x_i n_i dt$$

den konstante pris  $c$ .  
 Lad os nu analysere dynamiske forløb og optimal kontrol i forbindelse med Schaefermodellen (8.75). Vi betragter følgende model, der udtrykker, at vi ønsker at maksimere indtægterne fra salget af den samlede mængde fisk til

### Optimal kontrol

$nK(1 - n/r)$ . Til højre på figur 8.6 er udbytten vist som en funktion af  $n$ . Det ses, at maksimum opnås ved  $n = r/2$ . Hvis denne værdi vælges, fås ligevægtspunktet  $x^* = K/2$ , og udbytten  $rK/4$ .

Figur 8.6. Ligevægtsforhold og udbytte ved fangst



Konklusionen er, at det optimale forløb kan opdeles i højst 3 intervaller: interval tilsvarende vil have en konstant kontrol:  $u_t^* = 0$  eller  $u_t^* = \bar{u}$ .

Det overlades til læseren at argumentere for, at man før et singulært sænkede  $u_t$ , ville  $u_t^*$  derefter vedblive at være 0.

vedblive at have værdien  $\bar{u}$ . Tilsvarende ræsonnement vil vise, at hvis man  $\bar{u}$ . Vi ser altså, at hvis vi efter et singulært interval øger  $u_t$ , vil  $u_t^*$  derefter vokse; herved bliver  $p_t > c$ . Når  $p_t > c$ , vil  $u_t$  ifølge (8.83) antage værdien vokse. Når  $x_t$  vokser, bliver  $p_t$  ifølge (8.84) positiv, og derved vil også  $p_t$  Hvis vi forlader det ved at øge  $u_t$  fra værdien  $r/2$ , vil  $x_t$  ifølge (8.78) derved Lad os nu analysere hvad der sker, hvis vi forlader et singulært interval.

der giver maksimalt udbytte! indrette fiskerindsatsen  $u_t$  således, at vi får netop den stationære tilstand, se omkring (8.75) og (8.76), fremgår det, at i det singulære interval vil vi Ved sammenligning med den stationære analyse af Schaefermodellen, Det ses altså, at også  $u_t$  er konstant i det singulære interval.

(8.88)

$$u_t = r/2$$

Indsættes (8.86) i (8.87) fås heraf

(8.87)

$$rx_t(1 - x_t/K) - u_t x_t = 0$$

højresiden af dynamikfunktionen (8.78) er nul: Vi ser altså, at i et singulært interval er  $x_t$  konstant. (8.86) udtrykker, at

(8.86)

$$x_t = K/2$$

eller tilsvarende (da  $c$  og  $r$  må antages at være positive)

(8.85)

$$p_t r - 2p_t r x_t / K = 0$$

Når  $p_t \equiv c$  på et interval, er  $p_t = 0$ . Det følger da af (8.84), at

denne situation nøjere. singulær kontrol, er  $p_t \equiv c$  for  $t$  i det singulære interval. Lad os analysere Ifølge (8.83) er  $u_t^*$  entydigt givet, undtagen hvis  $p_t = c$ . Hvis vi har en

(8.84)

$$p_t = -(cu_t + p_t r - 2p_t r x_t / K - p_t u_t)$$

og følgende nødvendige betingelse for  $p_t$ :

De præcise tidspunkter, hvor der skiftes mellem de forskellige  $u_i^*$ , kan fastlægges ud fra parameter værdierne  $c, r, K, \bar{x}_{10}$  og  $\bar{x}_{11}$ . Maksimumsprincippet tillader altså en analytisk løsning til problemet.

Sammenlignende kan forløbene tolkes således, at den optimale kontrol er  $u_i^* = 0$ , derefter skiftes til  $u_i^* = \bar{u}$ , der holdes resten af tiden. En sådan kontrol, der skifter mellem ekstremværdier i  $U$  kaldes for bang-bang.

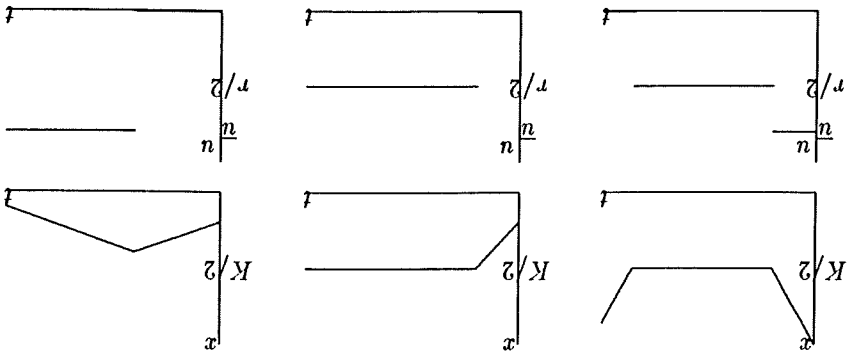
I den højre del af figur 8.7 vises en situation, hvor der ikke er noget singulært interval. Det ses, at  $x_1 > K/2$  hele tiden. Den første del af tiden er  $u_i^* = 0$ , derefter skiftes til  $u_i^* = \bar{u}$ , der holdes resten af tiden. En sådan ligevægten ved at sætte  $u_i^* = r/2$ . Da  $\bar{x}_{11} = K/2$ , kan ligevægten holdes

I den mellemste del af figur 8.7 startes med  $\bar{x}_{10} > K/2$ . Derfor und-lader man at fiske, indtil bestanden har størrelsen  $K/2$ . Derefter holdes fiskbestandens netop nær slutværdien  $\bar{x}_{11}$  til tiden  $t_1$ .

I den venstre del af figur 8.7 startes med  $\bar{x}_{10} < K/2$  og  $\bar{x}_{11} > K/2$ . Der startes med  $u_i^* = \bar{u}$ , og denne kontrol fastholdes, indtil  $x_1 = K/2$ . Så sættes  $u_i^* = r/2$ , hvorved  $x_1$  holdes på værdien  $K/2$ . Endelig stopper fiskeriet ved at  $u_i^*$  sættes til 0, således at

Figur 8.7 er der vist tre forskellige optimale forløb. Til venstre er værdierne af parameter værdierne  $c, r, K, \bar{x}_{10}$  og  $\bar{x}_{11}$ , og det

Figur 8.7. Tre forskellige optimale forløb i forbindelse med Schaefermodellen.



gør rækkefølgen af dem også (hvis der er tre, vil det singulære interval dog være det mellemste).

$$(8.89) \quad \max_{N-1} \sum_{i=0}^N \tau_i \tau_i(x; n_i) + \tau_N(x; N)$$

Vi deler tidsintervallet  $[t_0, t_1]$  i  $N$  delintervaller, der ikke nødvendigvis er lige lange, ved at indføre tidene  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , således at  $t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_1$ . Vi lader  $\tau_i$  betegne længden af det  $i$ 'te delinterval  $[t_i, t_{i+1}]$ , dvs  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ , der, hvis alle delintervallerne er lige lange, svarer til  $t_{i+1} - t_i = \tau = t_N - t_0$  for alle  $i = 0, \dots, N - 1$ . Vi har nu følgende model, idet vi antager, at (8.91) repræsenterer alle begrænsninger:

## Simpel metode

Vi skal her illustrere dette ved tre metoder. I alle tilfælde diskretiseres tidsaksen i et endeligt antal intervaller.

En anden mulighed er at omformulere det kontinuerlige problem til et problem med et endeligt antal variabler. Dette problem løses så ved metoder, der er omfattet i tidligere kapitler.

Vi skal ikke omtale dette yderligere.

Tilbage er så  $(x, d)$ , og til at finde disse har man to sæt af koblede differentialligninger. Vi skal ikke omtale disse yderligere.

Der er her mulighed for at anvende maksimumsprincipet i forbindelse med metoder til løsning af differentialligninger. Pointen er her, at maksimumsprincipet tillader en elimination af  $n$  for givet  $(x, d)$ . Ved større eller mere komplicerede modeller må man anvende numeriske metoder. Der er her mulighed for at anvende maksimumsprincipet i forbindelse med metoder til løsning af differentialligninger. Pointen er her, at maksimumsprincipet tillader en elimination af  $n$  for givet  $(x, d)$ .

## 8.7 Numeriske metoder

(Ide: Colin W. Clark: *Mathematical Bioeconomics*. The Optimal Management of Renewable Resources, Wiley 1976.)

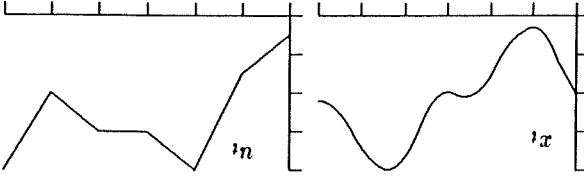
Det overlades til læseren at give videre udvidelser og fortolkninger af modellen.

Bemærk endeligt, at  $p_{t1}$  kan fortolkes som skyggeprisen på sluttilstanden  $\bar{x}_{t1}$ . Det ses bl.a. ved at studere ovenstående, at hvis  $\bar{x}_{t1} > K/2$ , er  $p_{t1} < c$ , hvis  $\bar{x}_{t1} = K/2$ , er  $p_{t1} = c$ , og hvis  $\bar{x}_{t1} < K/2$ , er  $p_{t1} > c$ . Lyder det rimeligt?



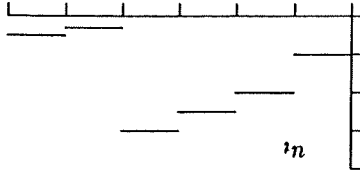
Denne metode er baseret på beskrivelsen i Hargraves & Paris (1987). Her lader vi kontrollerne være stykvis lineære og kontinuerle, tilstanden repræsenterer vi vedf stykvis tredjegradspolynomier (kubiske splines). Se figur 8.9. Tidsinddelingen er som beskrevet ovenfor.

Figur 8.9. Kubiske splines



## Kubiske splines

Figur 8.8. Stykvis konstant kontrol



7. Se figur 8.8. Modellen (8.89) - (8.91) kan nu løses som beskrevet i kapitel 8. Den umiddelbare antagelse er, at  $u_t$  er konstant på hvert delinterval, hvad værdierne af henholdsvis  $x_t$  og  $u_t$  til tidspunkterne imellem  $t_i$  og  $t_{i+1}$  I modellen (8.89) - (8.91) betragter vi kun værdierne af  $x_t$  og  $u_t$  til tidspunkterne  $t_i, i = 0, \dots, N$ . Vi har altså på dette sted ikke sagt noget om, variabel (når  $x_0$  ikke tælles med).

I det følgende skal vi forstå indeks  $i$  som  $t_i$ , således at  $x_i \equiv x_{t_i}, u_i \equiv u_{t_i}, r_i \equiv r_{t_i}, f_i \equiv f_{t_i}$ , og  $g_i \equiv g_{t_i}$ . Vi ser, at dette problem har  $N(n + m)$

$$(8.91) \quad g_i(x_i, u_i) \leq 0$$

$$(8.90) \quad x_{i+1} = x_i + \tau_i f_i(x_i, u_i)$$

Lad nu  $x(0) = x_0$ ,  $x(1) = x_1$ ,  $\frac{dx(0)}{dx} = x_0'$  og  $\frac{dx(1)}{dx} = x_1'$  hvor  $S(0)$  betegner starttidspunktet i det betragtede tidsinterval, og  $S(1)$  sluttidspunktet, og „ $\prime$ “ betegner differentiation med hensyn til  $S$ .

$$(8.98) \quad \frac{d(S(1))}{dx} = c_1^1 + 2c_2^1 + 3c_3^1$$

og tilsvarende i det andet endepunkt  $S = 1$ :

$$(8.97) \quad \frac{d(S(0))}{dx} = c_1^0$$

og i endepunktet  $S = 0$  at

$$(8.96) \quad \frac{dS}{dx} = c_1^0 + 2c_2^0 + 3c_3^0$$

(8.93):

Differentieres udtrykket i (8.95) med hensyn til  $S$  findes svarende til

$$(8.95) \quad x(S) = c_0^0 + c_1^0 S + c_2^0 (S)^2 + c_3^0 (S)^3$$

Transformerer vi nu, således at tiden løber fra 0 til 1 i hvert tidsinterval, og kalder denne transformerede tid for  $S$ ,  $S \in [0, 1]$ , og lader vi koefficienterne i polynomiet hedde  $c_j^i$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , finder man så at (8.92) bliver:

$$(8.94) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ t_{i+1} \\ I \\ t_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t_{i+1} \\ (t_{i+1})^2 \\ 2t_i \\ (t_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3(t_{i+1})^2 \\ (t_{i+1})^3 \\ 3(t_i)^2 \\ (t_i)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3^i \\ C_2^i \\ C_1^i \\ C_0^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ x_{i+1} \\ x_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

ligningssystem:

(8.93) kan altså opfattes som den dynamiske ligning fra det oprindelige problem. Ud fra (8.92) og (8.93), samt  $x_i, x_{i+1}$  kan vi nu opstille følgende

$$(8.93) \quad x_i = C_1^i + 2C_2^i t + 3C_3^i (t)^2$$

Differentieres (8.92) med hensyn til tid findes

$$(8.92) \quad x_i = C_0^i + C_1^i t + C_2^i (t)^2 + C_3^i (t)^3$$

da have formen:

Lad tilstandene være repræsenteret i hvert interval af de 4 konstanter  $C_0^i, C_1^i, C_2^i, C_3^i$ , der er koefficienterne til tredjegradspolynomiet, og hvor indeks  $i$  svarer til det  $i$ 'te interval,  $t \in [t_i, t_{i+1})$ . Tredjegradspolynomiet vil

$$x_{m_i} = -3(x_i - x_{i+1})/(2\tau_i) - (f_i(x_i, u_i) + f_{i+1}(x_{i+1}, u_{i+1}))/4 \quad (8.104)$$

hvor indeks  $m_i$  står for midtpunktet i det  $i$ 'te tidsinterval. På samme måde finder vi hældningens, ved at indsætte  $S = 1/2$  i (8.96) og (8.102):

$$x_{m_i} = (x_i + x_{i+1})/2 + \tau_i(f_i(x_i, u_i) - f_{i+1}(x_{i+1}, u_{i+1}))/8 \quad (8.103)$$

Betragter vi nu (8.95) og (8.102) til tid  $S = 1/2$ , som er midt i tidsintervallet, finder vi

$$(8.102) \quad \begin{pmatrix} c_0^i \\ c_1^i \\ c_2^i \\ c_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_i f_0^i \\ \tau_i f_1^i \\ \tau_i f_2^i \\ \tau_i f_3^i \end{pmatrix}$$

finder vi nu

$$(8.101) \quad \begin{cases} x_{i'} = \frac{dx_i}{dt} = f_i \\ x_i' = \tau_i f_i \end{cases} \Leftrightarrow x_{i'} = \tau_i x_i' = \tau_i f_i$$

Vi husker, at  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ , og at  $f_i$  er dynamikken taget i punktet  $(x_i, u_i)$ . Vi lader  $f_i(x_0^i, u_0^i) = f_0^i$  og tilsvarende  $f_i(x_1^i, u_1^i) = f_1^i$ , og idet

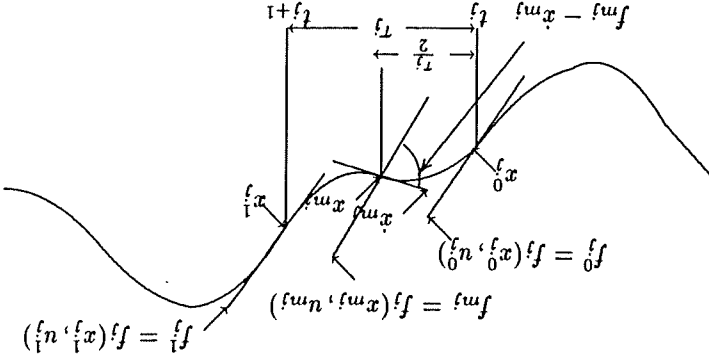
$$(8.100) \quad \begin{pmatrix} c_0^i \\ c_1^i \\ c_2^i \\ c_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix}$$

Inverteres koefficientmatricen findes løsningen:  
Dette lineære ligningssystem bestemmer konstanterne  $c_0^i, c_1^i, c_2^i$  og  $c_3^i$ .

$$(8.99) \quad \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0^i \\ c_1^i \\ c_2^i \\ c_3^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix}$$

Opstiller vi nu de fire ligninger for start- og sluttidspunkterne på matrix-form fås svarende til (8.94):

**Eksempel 8.7.1** Vi giver her et eksempel på ovenstående omskrivninger. Eksemplet kan beskrive en bil, der starter i position 0 ( $= x_0^j$ ) med hastighed 0 ( $= x_0^v$ ), kontrolfunktionen  $u$  kan betragtes som speeder for  $u$  positiv,



Figur 8.10. Illustration af kubiske splines

Problemet kan løses som diskuteret i kapitlerne 5 og 6. Anførte problem har da ialt begrænsningerne (8.91) og (8.107). Vi ser at denne reformulering giver os  $N(n + m) + m$  variable. Det løsningsen af bevægelsesligningen.

dette valg af  $x_i, u_i, x_{i+1}$  og  $u_{i+1}$  formenlig være en god approksimation til disse polynomium kan repræsentere løsningen i det givne interval, da vil Hvis der kan findes en løsning med (8.107) opfyldt, og hvis det ku- Proceduren beskrevet ovenfor illustreres i figur 8.10.

$$f_m^j - x_m^j = 0 \quad f(x_{m^j}, u_{m^j}) + 3(x_{i^j} - x_{i+1}^j)/(2T_j) + (f_i(x_i, u_i) + f_{i+1}(x_{i+1}, u_{i+1}))/4 \quad (8.107)$$

0: Vi definerer nu, at afvigelsen på hældningen midt i interval  $i$  skal være som er dynamikken taget midt i interval nummer  $i$ .

$$f_{mi} = f_i(x_{mi}, u_{mi}) \quad (8.106)$$

Endvidere indfører vi

$$u_{mi} = (u_i + u_{i+1})/2 \quad (8.105)$$

Kontrolen antager vi er lineært interpoleret:

$$\begin{aligned}
 x_2^{m_1} &= -3(x_1^i - x_2^i) / (2\tau) - (x_2^i + x_2^{i+1}) / 4 \\
 x_2^{m_2} &= (x_2^i + x_2^{i+1}) / 2 + \tau(u_i - n) / 8 \\
 x_1^{m_1} &= -3(x_1^i - x_2^i) / (2\tau) - (x_2^i + x_2^{i+1}) / 4 \\
 x_1^{m_2} &= (x_1^i + x_2^i) / 2 + \tau(x_2^i - x_2^{i+1}) / 8
 \end{aligned}$$

Med  $\tau = 1/N$  fås:

**Kubiske splines**

$$\begin{aligned}
 x_1^0 &= 0, \quad x_2^0 = 0 \\
 x_2^{i+1} &= x_2^i + \tau(x_2^i + u_i) \\
 x_1^{i+1} &= x_1^i + \tau(x_1^i + x_2^i)
 \end{aligned}$$

$$\max_{N-1}^{i=0} -\tau(u_i)^2 - 2(x_1^i)^2 - 100(x_2^i)^2$$

Med  $\tau = 1/N$  fås:

**Simpel metode**

Vi vil nu se de generelle udtryk for de to metoder:

1.

Sluttidspunktet er uden betydning, og er derfor for simpelhedens skyld sat til

$$x_0 = (0, 0)$$

$$x_2 = n$$

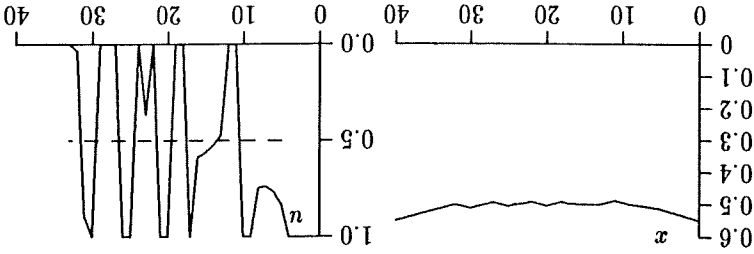
$$x_1 = x_2$$

$$\max_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^0 -(u)^2 dt - 2(x_1^i)^2 - 100(x_2^i)^2$$

kan formuleres som følger:  
 tager det som en omkostning, hvis vi ikke når disse værdier. Problemet i  $x_1$ -retningen, og vi ønsker at slutte med hastigheden tæt ved 0. Vi bruge speeder og bremse. Vi ønsker at komme tæt på 100 (dimensionløs) h.v. bremse for  $n$  negativ. Vi ønsker at minimere omkostningen ved at

Det kan erfaringsmæssigt være vanskeligt at løse kontinuert tids optimal kontrol problemer ved numeriske metoder. Vi skal illustrere dette ved

Figur 8.11. Numerisk løsning af fiskerieksempel



□

$$x_1^0 = 0, \quad x_2^0 = 0$$

$$0 = \frac{2}{n_i + n_{i+1}} + 3(x_2^i - x_2^{i+1}) / (2\tau) + (n_i + n_{i+1}) / 4$$

$$0 = (x_2^i + x_2^{i+1}) / 2 + \tau(n_i - n_{i+1}) / 8 + 3(x_1^i - x_1^{i+1}) / (2\tau) + (x_2^i + x_2^{i+1}) / 4$$

$$\max_N \left[ \sum_{i=0}^N -\tau(n_i)^2 - 2(x_1^N)^2 - 5(x_2^N)^2 \right]$$

ingsproblem:

Vi har nu følgende generelle udtryk for det matematiske programmer-

$$0 = \frac{2}{n_i + n_{i+1}} + 3(x_2^i - x_2^{i+1}) / (2\tau) + (n_i + n_{i+1}) / 4$$

$$0 = (x_2^i + x_2^{i+1}) / 2 + \tau(n_i - n_{i+1}) / 8 + 3(x_1^i - x_1^{i+1}) / (2\tau) + (x_2^i + x_2^{i+1}) / 4$$

Nu bliver begrænsningerne (8.107):

$$f_2^{m_i} = \frac{2}{n_i + n_{i+1}}$$

$$f_1^{m_i} = (x_2^i + x_2^{i+1}) / 2 + \tau(n_i - n_{i+1}) / 8$$

$$n_{m_i} = \frac{2}{n_i + n_{i+1}}$$

$$\begin{aligned} \max & \int_{t_1}^0 [-(n_1)^2 - 2n_1] dt \\ x_1 &= n_1 - x_1 \\ x_0 &= 1 \\ x_{t_1} &= 0 \\ n_1 &\in R \end{aligned}$$

Opgabe 8.2 Løs problemet

Løs også problemet med en alternativ kontrolbegrænsning  $0 \leq n_1 \leq 4.1$ .

$$\begin{aligned} \max & \int_1^0 [x_1 - (n_1)^2] dt \\ x_1 &= n_1 \\ x_0 &= 0 \\ x_1 &= 4 \\ -1 &\leq n_1 \leq 5 \end{aligned}$$

Opgabe 8.1 Løs problemet

## 8.8 opgaver

8.11. Vi ser nu af figur 8.11, at forløbet af tilstanden (fiskebestanden) ligger meget nær det forventede, men at kontrollen (fiskerindsatsen) ikke på det mellemste stykke giver det stationære forløb  $u_1^* = 0.5$ , vi forventer: forløbet springer mellem øvre og nedre grænse. Tager vi gennemsnittet af  $u_1$ erne, får vi  $\frac{1}{33} \sum_{i=5}^{29} u_i = \frac{14.537}{29} = 0.501$ , som er tæt på den forventede værdi af det stationære forløb. Dette er illustreret med den stiplede linie til højre i figur 8.11.

Vi ser nu af figur 8.11, at forløbet af tilstanden (fiskebestanden) ligger for at nå sluttilstanden, jævnt for afsnit 8.6.

Der næst en fiskerindsats på  $u_1 = 0.5$  og til sidst skal vi ikke fange noget først have maksimalt fiskeri indtil vi når den stationære tilstand  $x_1 = 0.5$ . benyttet  $c = 1$ ,  $r = 1$ ,  $K = 1$ , og  $N = 40$ . Vi skal i den optimale løsning I figur 8.11 viser vi forløbet når  $x_{t_0} = 0.55$ , og  $x_{t_1} = 0.55$ . Vi har her med kubiske splines.

at kigge på resultater vi har fået, når vi løser fiskerikseksemplet i afsnit 8.6

**Opgave 8.6** I et elektrisk netværk ønskes spændingen i et punkt at vokse tilnærmet lineært fra 0 volt til 5 volt i løbet af 20 millisekunder. Man kan

nul. Løs problemet.

Antag nu, at det ikke længere kræves, at Ole slutter med hastigheden. Formuler problemet som et optimal kontrol problem. Løs problemet.

**Opgave 8.5** Ole Olsen skal på sin motorcykel køre strækningen 8 km hurtigst muligt. Han starter og slutter med hastigheden nul. Han kan kontrollere accelerationen, der skal ligge mellem  $-2000 \text{ m/s}^2$  og  $400 \text{ m/s}^2$ .

Formuler resten af problemstillingen som et optimal kontrolproblem under passende simple supplerende forudsættninger. Opsstil optimalitetsbetingelser. Løs problemet for  $T = 1$ ,  $c_0/c_1 = 20$ ,  $I^* = 100$ ,  $Q^* = 80$  og  $S_1 = 10t + 80$ . Hvorfor er det kun forholdet  $c_0/c_1$ , der indgår, og ikke værdierne  $c_0$  og  $c_1$ ?

$$\min_x \int_0^T (c_1(x_t - I^*)^2 + c_0(u_t - Q^*)^2) dt$$

herefter angives som

være nul. Lad  $c_1$  og  $c_0$  være givne positive konstanter. Målfunktionen kan tiden  $t$ . Antag salget kendt, og givet ved funktionen  $S(t)$ . Lad startlageret angive lagerstørrelsen til tiden  $t$ , og  $u_t$  angive produktionens størrelse til målværdier  $I^*$  og  $Q^*$  for henholdsvis lagerstørrelse og produktion. Lad  $x_t$  **Opgave 8.4** Betragt et produktionsplanlægningsproblem, hvor der er givet

$0 \leq f \leq \bar{f}$ , hvor  $\bar{f}$  er givet. Hvorledes vil det påvirke løsningen? Antag nu, at bådens fart  $f$  kan varieres, dog således at der kræves

Hvorledes vil det påvirke løsningen?

Antag nu, at strømmeens hastighed afhænger af, hvor i den den er. Find eventuel løsning.

den optimale kurs er retlinet. Opsstil optimalitetsbetingelser for den optimale løsning. Argumenter for, at der ikke er løsninger for vilkårlige betingelser af de to punkter. Vis at Formuler problemet som et optimalt kontrolproblem. Argumenter for, der på kortest tid fører båden mellem to givne punkter i strømmen.

**Opgave 8.3** En båd bevæger sig med konstant fart  $f$  i en å, hvori der er en strøm med den konstante hastighed  $s$ . Problemet er at finde den kurs, der



Opgave 8.9 Der skal vælges hastighedsprofil på den første del af sejladsen mellem London og Esbjerg omløb i eksempel 7.1.2 side 268. Til dette formål

Opvasker problemet i opgave 3.6 som et optimal kontrol problem i kontinuerlig tid. Løs problemet, idet det antages, at  $a_t$  er en tid-

afhængig konstant, dvs.,  $a_t = a$  for alle  $t$ .

Opvasker problemet i opgave 3.9, jævnfør også opgave 7.23. hvor  $m_1 = 20t$ . Vis, at dette problem kan betragtes som en tidskontinuerlig

$$\min \int_0^1 \left( \frac{1}{2} u_t^2 + (x_t - m_t)^2 \right) dt$$

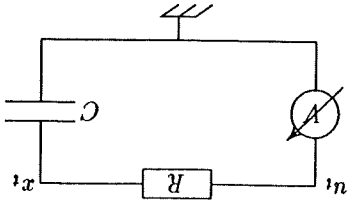
$$x_1 = u_1$$

$$0 \leq u_t$$

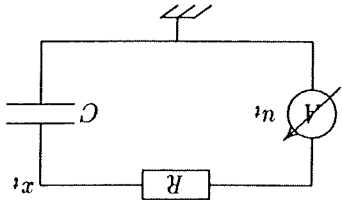
$$x_0 = 15$$

Opgave 8.7 Løs problemet

af kondensatoren og modstanden. Formuler problemet. Spændingsændringen over modstanden, hvor proportionalitetskonstanten afhænger af kondensatoren. Spændingsændringen i punktet er nu proportional med kondensatoren. men spændingen i den ende, der ikke er forbundet til kan kontrolleres, at det ikke er strømmen gennem modstanden, der Det antages nu, at det ikke er strømmen gennem modstanden, der Formuler problemet som et optimal kontrol problem. Løs problemet.



Spændingsstyring



Strømsstyring

styre strømmen, der gennem en modstand oplader en kondensator, således at spændingsændringen i punktet er proportional med strømstyrken. Proportionalitetskonstanten afhænger af kondensatoren. Man ønsker at minimere integralet af den kvadratiske afvigelse fra lineært plus integralet af kvadratet på strømstyrken.

opstilles følgende model:

$$\max \int_1^0 -(u_t)^2 dt$$

$$\dot{x}_t = 10(t + \frac{1}{2})u_t$$

$$0.9 \leq u_t \leq 3.0$$

$$x_0 = 0 \text{ og } x_1 = 29.27$$

Det påstås, at det til en optimal løsning hørende  $p_t^*$  er uafhængig af tiden  $t$ , og at  $p_t^* = 0.8$ .

Vis, at dette er rigtigt, find de optimale  $x_t^*$  og  $u_t^*$ , og vis, at de er globalt optimale.

### Opgave 8.10 Givet problemet

$$\max \int_3^0 -(0.5t + (1 - 0.2t)u_t + 0.1(u_t)^2) dt$$

$$x_t = u_t$$

$$1 \leq u_t \leq 3$$

$$x_0 = 0 \text{ og } x_3 = 4$$

Det påstås, at den til en optimal løsning hørende costatevektor  $p_t^*$  er uafhængig af tiden, og at  $p_t^* = 0.883$ .

Vis at dette er rigtigt, og find de optimale  $x_t^*$  og  $u_t^*$ .

### Opgave 8.11 Kapitajnen fra opgave 8.16 mantrer sig med at formulere følgende model for den sidste del af sejladsen:

$$\max \int_6^3 -\alpha_t(u_t)^3 dt$$

$$\text{Her er } \alpha_t = 0.003(t + 3)^2.$$

Find den optimale kontrol  $u_t^*$  for dette problem. (Vink:  $\int 1/(t + 3) dt = \ln(t + 3)$ .)

## Kapitel 9

# Afslutning

Vi skitserede i figur 1.2 side 10 en opdeling af problemløsning i nogle delfaser. Denne bog har indtil nu kun behandlet et par af figurens kasser og deres samspil. Der er undervejs ikke blevet ofret mange ord på de øvrige kasser, og dermed heller ikke på det, det hele i den sidste ende handler om: problemløsning.

Sigtet med problemløsning har dog ligget under det hele - *gemt* måske, men ikke *glemt*. Vi har peget på dette i forbindelse med bl.a. diskussionen af løsningsstrukturer og værdifunktion. Der er givet et solidt grundlag for at læseren selv kan gå videre med dette efter det klassiske motto: "The purpose of mathematical programming is insight, not numbers."

På dette sted skulle der nu have været en diskussion af dette tema. Det kommer der imidlertid ikke; diskussionen tages i stedet op i forbindelse med undervisningen.

Jeg slutter med et citat, jeg (som så meget andet i denne bog) har lånt fra Victor. Jeg synes det også i denne sammenhæng er et godt citat, selv om jeg endnu ikke helt har forstået det:

Matajura wanted to become a great swordsman, but his father said he wasn't quick enough and could never learn. So Matajura went to the famous dueller Banzo, and asked to become his pupil. "How long will it take me to become a master?" he asked. "Suppose I become your servant, to be with you every minute; how long?"

“Ten years,” said Banzo.

“My father is getting old. Before ten years have passed I will have to return home to take care of him. Suppose I work twice as hard; how long will it take me?”

“Thirty years,” said Banzo.

“How is that?” asked Matajura. “First you say ten years. Then when I offer to work twice as hard, you say it will take three times as long. Let me make myself clear: I will work unceasingly; no hardship will be too much. How long will it take?”

“Seventy years” said Banzo. “A pupil in such a hurry learns slowly.”

Her er kortfattet forklaret nogle ord, der har relevans for stoffet. Ordene er grupperet nogenlunde efter kapiteltilhørsforhold.

## Kapitel 1 og 2

*affine* : (engelsk) affn. Man kan skelne mellem affn og lineær ved at sige at en lineær funktion er en affn funktion hvor konstantleddet er nul.  
*artificial variable* : (engelsk) kunstig variabel. Bruges f.eks. om en variabel, der ikke umiddelbart repræsenterer en størrelse i virkeligheden, men som er indført at tekniske grunde. Et eksempel er slækevARIABLE.  
*branch and bound* : (engelsk) dette har vi oversat til gren og grænse. En metode, der især anvendes, hvor der indgår heltallige variable.  
*closed set*: afsluttet mængde.  
*compact* : (engelsk) compact set: begrænset og afsluttet mængde.  
*concave* : (engelsk) konkav.  
*cone* : (engelsk) konus.  
*constraint* : (engelsk) begrænsning.  
*convex* : (engelsk) konvex. Også convex combination, convex set, convex hull (konvext hylster), convex cone. Med et "convex problem" forstås ofte hvad vi har kaldt et "pænt" problem.

*criterion function* : (engelsk) målfunktion.  
*derivative* : (engelsk) afledt.  
*directional derivative* : (engelsk) retningsafledt.  
*economic lot size* : (engelsk) se lot size.  
*eigenvalue, eigenvector* : (engelsk) egenværdi, egenvektor.  
*epigraph* : (engelsk) epigraf.  
*extreme point* : (engelsk) ekstrempunkt.  
*feasible* : (engelsk) mulig.  
*fractional programming* : (engelsk) optimering hvor indgår forholdet mellem to størrelser.

*geometric programming* : (engelsk) geometrisk programmering.  
*global* : (engelsk) global, modsat lokal. Global optimum, global optimization, global method.

*halfspace* : (engelsk) halvrum.  
*hull* : (engelsk) convex hull: konvex hylster.  
*integer* : (engelsk) heltal, heltallig. Integer programming.

*interior* : (engelsk) indre.  
*intersection* : (engelsk) fællesmængde.  
*kunstig variabel*: en variabel, der ikke umiddelbart repræsenterer en størrelse i den reelle problemsstilling. Eksempel: en slækevariabel.  
*knapssack* : (engelsk) rygsæk. Knapssack problem, knapsack model.  
*linear* : (engelsk) lineær, se også affine.  
*lot size* : (engelsk) lot size problem: stort set som det vi har kaldt fordelingsproblemet.  
*lower bound* : (engelsk) nedre grænse, undertal.  
*lower semi continuous* : (engelsk) nedadtil halvkontinueret.  
*l.s.c.* : (engelsk) forkortelse for lower semi continuous.  
*necessary conditions* : (engelsk) nødvendige betingelser (for optimalitet).  
*neighbourhood* : (engelsk) omegn, kugle.  
*objective function* : (engelsk) målfunction.  
*optimal value function* : (engelsk) værdifunction.  
*optimization* : (engelsk) optimering.  
*portfolio* : (engelsk) portefølje. Portfolio selection, portfolio selection problem.  
*posynomial* : (engelsk) posynomium.  
*quadratic* : (engelsk) kvadratisk. Quadratic programming, quadratic function, quadratic convergence.  
*rank* : (engelsk) rang.  
*relative max, min* : (engelsk) lokalt maksimum, minimum.  
*relaxation* : (engelsk) relaxasjon.  
*restriction* : (engelsk) begrænsning.  
*set* : (engelsk) mængde.  
*smooth* : (engelsk) blød, glat, differentiable.  
*stationary* : (engelsk) stationær.  
*strict optimum* : (engelsk) nogle gange menes entydigt optimum.  
*subdifferential* : (engelsk) subdifferentiale.  
*sufficient condition* : (engelsk) tilstrækkelige betingelser (for optimalitet).  
*superdifferential* : (engelsk) superdifferentiale.  
*upper bound* : (engelsk) øvre grænse, overtal.  
*upper semi continuous* : (engelsk) opadtil halvkontinueret.  
*u.s.c.* : (engelsk) forkortelse for upper semi continuous.  
*quasilinear* : (engelsk) en funktion, der er både kvasikonkav og kvasikonkav.  
*variable splitting* : (engelsk) opdeling af en variabel i to (eller flere), for at opnå en beregningsmæssig fordel, f.eks. i forhold til dekomposition.

## Kapitel 3

*active set* : (engelsk) aktivt sæt. Mængden af begrænsninger, for hvilke der gælder lighedstegn.

*complementary slackness* : (engelsk) komplementært slæk.

*constraint qualifications* : (engelsk) refererer til regularitet af begrænsningerne, sådan som det anvendes i forbindelse med KKT-betingelserne, og også nogle gange Lagrangereaktion.

*decomposition* : (engelsk) dekomposition.

*dual gap* : (engelsk) dualt gab.

*duality* : (engelsk) dualitet.

*first order conditions* : (engelsk) første ordens optimalitetsbetingelser, bruges nogle gange om KKT-betingelserne.

*Fritz-John* : Betingelsen (3.9) side 122 udtrykkes nogle gange således:

$$\kappa \Delta f(x^0) = \lambda \Delta g(x^0) + \mu \Delta h(x^0) \quad (9.1)$$

Her er  $\kappa$  en ikke-negativ parameter. Hvis vi kan vælge  $\kappa \neq 0$ , kan (9.1) omskrives til (3.9). Det kan vises, at dette er muligt, netop når begrænsningerne er regulære. Hvis begrænsningerne ikke er regulære, må vi sætte  $\kappa = 0$  (men uden dog at  $\lambda = 0$  og  $\mu = 0$ ). Fritz-John nødvendige optimalitetsbetingelser er da: "Lad  $x^0$  være et lokalt optimum for et problem af formen (3.1) - (3.4), og antag at  $f$ ,  $h$  og de aktive  $g$  er differentiable i  $x^0$ . Så gælder (9.1) og (3.10) - (3.11), med  $(\kappa, \lambda, \mu) \neq (0, 0, 0)$ ." Det ses, at vi i denne formulering undgår ordet "regulær", mod at vi indfører  $\kappa$  i stedet for.

*gap* : (engelsk) gab.

*imputed price* : (engelsk) bruges nogle gange om marginalprisen.

*Lagrangian* : (engelsk) Lagrangefunktionen. Staves nogle gange Lagrangian. Lagrangean relaxation, Lagrangean function, Lagrangean multiplier.

*marginal price, value* : (engelsk) marginalpris med videre.

*non-degenerate* : (engelsk) dette kan jo være mange ting! Nogle gange menes et punkt, der er regulært i KKT-betingelsernes betydning.

*primal* :

*price relaxation, decomposition* : (engelsk) dual dekomposition som beskrevet i afsnit 3.4.

*regular* : (engelsk) se non-degenerate.

*second order conditions* : (engelsk) anden orden betingelser, som omtalt i afsnit 3.2. Nogle gange omtalt som "standard second order conditions".

*sensitivity* : (engelsk) følsomhed. Bruges nogle gange om marginalanalyser, skyggepriser m.m.

*s.t.* : (engelsk) forkortelse for "subject to", anvendes nogle gange i forbindelse med begrænsninger, f.eks. "maksimize  $f(x)$  s.t.  $g(x) \leq b$ ".

*ascent* : (engelsk) opstigen, bruges f.eks. om retninger, der øger målfunktionen. Modsat *descent*.

*augmented* : (engelsk) udvidet. Augmented Lagrangean.

*conjugate* : (engelsk) konjugeret.

*convergence* : (engelsk) konvergens.

*convergence rate* : (engelsk) konvergenshastighed.

*convex simplex* : (engelsk) en metode til løsning af lineært begrænsede problemer med ikke-lineær målfunktion. Ligner simplex-metoden lidt.

*descent* : (engelsk) nedstigen, bruges f.eks. om retninger, der mindsker målfunktionen. Modsat *ascent*.

*exterior point method* : (engelsk) en metode, der itererer gennem "ydre" (ikke-mulige) punkter.

*Fibonacci* : Fibonacci's søgning er en metode til endimensionel optimering, hvor skridtlængderne alle er ligeså store som Fibonacci-serien: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, 17, 24, 32, 41, 52, 65, 80, 97, 117, 142, 172, 209, 251, 300, 357, 422, 500, 597, 704, 831, 988, 1177, 1400, 1667, 1980, 2350, 2789, 3309, 3918, 4639, 5492, 6499, 7672, 9033, 10696, 12689, 15042, 17785, 20957, 24598, 28759, 33500, 38971, 45220, 52309, 60298, 69257, 79256, 90365, 102654, 116295, 131366, 147947, 166128, 186009, 206680, 229231, 253762, 279373, 306164, 334245, 363726, 394607, 426988, 460969, 496550, 533741, 572552, 612993, 655074, 698805, 744186, 791227, 839938, 890319, 942370, 996101, 1051522, 1108643, 1167464, 1227995, 1289236, 1352187, 1416848, 1483219, 1551290, 1621061, 1692532, 1765703, 1840574, 1917145, 1995416, 2075387, 2157058, 2240429, 2325500, 2412271, 2499742, 2588913, 2679784, 2772355, 2866626, 2962597, 3060268, 3159639, 3260710, 3363481, 3467952, 3574123, 3682004, 3791595, 3902896, 4015907, 4130628, 4247059, 4365190, 4485021, 4606652, 4729983, 4855014, 4981745, 5110176, 5240307, 5372138, 5505769, 5641190, 5778401, 5917392, 6058153, 6200674, 6344945, 6490966, 6638737, 6788258, 6939529, 7092550, 7247321, 7403842, 7562113, 7722134, 7883905, 8047426, 8212697, 8379718, 8548489, 8718910, 8891081, 9064992, 9240743, 9418324, 9597745, 9778996, 9962077, 10147098, 10334069, 10522990, 10713861, 10906682, 11101453, 11298174, 11496845, 11697466, 11899937, 12104358, 12310729, 12519050, 12729321, 12941542, 13155713, 13371834, 13589905, 13809926, 14031997, 14256118, 14482289, 14709510, 14937781, 15167102, 15398473, 15630894, 15865365, 16101886, 16340457, 16581078, 16823749, 17068470, 17315241, 17564062, 17814933, 18067854, 18322825, 18579846, 18838917, 19099038, 19360209, 19623430, 19888701, 20156072, 20425543, 20697114, 20970785, 21246556, 21524427, 21804398, 22086469, 22370640, 22656911, 22945282, 23235753, 23528324, 23822995, 24119766, 24418637, 24719608, 25022679, 25327850, 25635121, 25944492, 26255963, 26569534, 26885205, 27202976, 27522847, 27844818, 28168889, 28495060, 28823331, 29153702, 29486173, 29820744, 30157415, 30496186, 30837057, 31179928, 31524899, 31871970, 32221141, 32572412, 32925783, 33281254, 33638825, 34008496, 34380267, 34754138, 35129999, 35507950, 35887991, 36270122, 36654353, 37040684, 37429115, 37819646, 38212277, 38606908, 39003539, 39402170, 39802801, 40205432, 40609963, 41016494, 41425025, 41835556, 42248087, 42662618, 43079149, 43497680, 43918211, 44340742, 44765273, 45191804, 45620335, 46050866, 46483397, 46917928, 47354459, 47792990, 48233521, 48676052, 49120583, 49567114, 50015645, 50466176, 50918707, 51373238, 51829769, 52288290, 52748811, 53211342, 53675873, 54142404, 54610935, 55081466, 55553997, 56028528, 56505059, 56983590, 57464121, 57946652, 58431183, 58917714, 59406245, 59896776, 60389307, 60883838, 61380369, 61878890, 62379421, 62881952, 63386483, 63892914, 64401345, 64911776, 65424207, 65938638, 66455069, 66973490, 67493921, 68016352, 68540783, 69067214, 69595645, 70126076, 70658507, 71192938, 71729369, 72267790, 72808221, 73350652, 73895083, 74441514, 74989945, 75540376, 76092807, 76647238, 77203669, 77762090, 78322521, 78884952, 79449383, 80015814, 80584245, 81154676, 81727107, 82301538, 82877969, 83456390, 84036821, 84619252, 85203683, 85789914, 86378045, 86968076, 87559907, 88153538, 88748969, 89346190, 89945221, 90546052, 91148683, 91753114, 92359345, 92967376, 93577107, 94188538, 94791669, 95396490, 95999921, 96606052, 97213883, 97823414, 98434645, 99047576, 99662207, 100278538, 100896569, 101516290, 102137711, 102760832, 103385553, 104011874, 104639795, 105269316, 105900437, 106533058, 107167279, 107803090, 108440491, 109079482, 109720063, 110362234, 111005995, 111651346, 112298287, 112946818, 113596939, 114248650, 114901951, 115556842, 116213323, 116871394, 117531055, 118192306, 118855147, 119519578, 120185599, 120853200, 121522381, 122193142, 122865483, 123539394, 124214875, 124891926, 125570547, 126250738, 126932509, 127615850, 128300761, 128987242, 129675293, 130364914, 131056115, 131748896, 132443257, 133139198, 133836719, 134535820, 135236501, 135938762, 136642603, 137348024, 138055035, 138763636, 139473827, 140185608, 140898979, 141613940, 142330491, 143048632, 143768363, 144489684, 145212595, 145937096, 146663187, 147390868, 148120139, 148850990, 149583421, 150317432, 151053013, 151789174, 152526915, 153266236, 154007147, 154749648, 155493739, 156239420, 156986691, 157735552, 158485993, 159238014, 160000615, 160764796, 161530557, 162297898, 163066819, 163837320, 164609401, 165383062, 166158293, 166935094, 167713475, 168493436, 169274977, 170057608, 170841329, 171626140, 172412041, 173199032, 173987113, 174776284, 175566545, 176357896, 177150337, 177943868, 178738489, 179534190, 180330971, 181128832, 181927773, 182727794, 183528895, 184330076, 185132337, 185935678, 186740099, 187545590, 188352151, 189159782, 190068493, 190878284, 191689155, 192499996, 193311907, 194124888, 194938939, 195754060, 196569251, 197385512, 198202843, 199021244, 199840715, 200661256, 201482867, 202305548, 203129299, 203954120, 204779911, 205606672, 206434503, 207263404, 208093375, 208924416, 209756527, 210589708, 211423959, 212259280, 213095671, 213933132, 214771663, 215611264, 216451935, 217293676, 218136487, 218980368, 219825319, 220671340, 221518431, 222366592, 223215823, 224066134, 224917525, 225769986, 226623517, 227478118, 228333789, 229190530, 230048341, 230907222, 231767173, 232628194, 233489285, 234351446, 235214677, 236078978, 236944349, 237810790, 238678301, 239546882, 240416533, 241287254, 242159045, 243031906, 243905827, 244780808, 245656849, 246533950, 247412111, 248291332, 249171613, 250052954, 250935355, 251818816, 252703337, 253588918, 254475559, 255363260, 256252021, 257141842, 258032723, 258924664, 259817665, 260711726, 261606847, 262503028, 263400269, 264298570, 265197931, 266098352, 266999833, 267902374, 268805975, 269710636, 270616357, 271523138, 272430979, 273339880, 274249841, 275160862, 276072943, 276986084, 277899285, 278813546, 279728867, 280645248, 281562689, 282481190, 283400751, 284321372, 285243053, 286165794, 287089595, 288014456, 288940377, 289867358, 290795399, 291724500, 292654661, 293585882, 294518163, 295451504, 296385905, 297321366, 298257887, 299195468, 300134109, 301073810, 302014571, 302956392, 303899273, 304843214, 305788215, 306734276, 307681397, 308629578, 309578819, 310529120, 311480481, 312432902, 313386383, 314340924, 315296525, 316253186, 317210907, 318169688, 319129529, 320090430, 321052391, 322015412, 322979493, 323944634, 324910835, 325878096, 326846417, 327815798, 328786239, 329757740, 330730301, 331703922, 332678603, 333654344, 334631145, 335609006, 336587927, 337567908, 338548949, 339530050, 340512211, 341495432, 342479713, 343465054, 344451455, 345438916, 346427437, 347417018, 348407659, 349399360, 350392121, 351385942, 352380823, 353376764, 354373765, 355371826, 356370947, 357371128, 358372369, 359374670, 360378031, 361382452, 362387933, 363394474, 364402075, 365410736, 366420457, 367431238, 368443079, 369455980, 370469941, 371484962, 372499943, 373515984, 374533085, 375551246, 376570467, 377590748, 378612089, 379634490, 380657951, 381682472, 382708053, 383734694, 384762395, 385791156, 386820977, 387851858, 388883799, 389916790, 390950841, 391985952, 393022123, 394059354, 395097645, 396136996, 397177407, 398218878, 399261409, 400304990, 401349631, 402395332, 403442093, 404489914, 405538795, 406588736, 407639737, 408691798, 409744919, 410799090, 411854321, 412910612, 413967963, 415026374, 416085845, 417146376, 418207967, 419270618, 420334329, 421399090, 422464911, 423531792, 424599733, 425668734, 426738795, 427809916, 428882097, 429955338, 431029639, 432104990, 433181391, 434258842, 435337353, 436416924, 437497555, 438579246, 439661997, 440745808, 441830679, 442916610, 444003611, 445091672, 446180793, 447270974, 448362215, 449454516, 450547877, 451642298, 452737779, 453834320, 454931921, 456030582, 457130303, 458231084, 459332925, 460435826, 461539787, 462644808, 463750889, 464858030, 465966231, 467075492, 468185813, 469297194, 470409635, 471523136, 472637697, 473753278, 474869879, 475987500, 477106141, 478225792, 479346453, 480468124, 481590805, 482714496, 483839197, 484964908, 486091629, 487219360, 488348101, 489477852, 490608613, 491740384, 492873165, 494006956, 495141757, 496277568, 497414389, 498552220, 499691061, 500830912, 501971773, 503113644, 504256525, 505400416, 506545317, 507691228, 508838149, 509986080, 511135021, 512284972, 513435933, 514587904, 515740885, 516894876, 518049877, 519205888, 520362909, 521520940, 522679981, 523839032, 525000093, 526162164, 527325245, 528489336, 529654437, 530820548, 531987669, 533155790, 534324921, 535495062, 536666213, 537838374, 539011545, 540185726, 541360917, 542537118, 543714329, 544892550, 546071781, 547252022, 548433273, 549615534, 550798805, 551983086, 553168377, 554354678, 555541989, 556730300, 557919621, 559109952, 560301293, 561493644, 562686995, 563881356, 565076727, 566273108, 567470499, 568668900, 569868311, 571068732, 572270163, 573472604, 574676055, 575880516, 577085987, 578292468, 579499959, 580708460, 581917971, 583128492, 584339023, 585550564, 586763115, 587976676, 589191247, 590406828, 591623419, 592840930, 594059461, 595279012, 596499573, 597721144, 598943725, 600167316, 601391917, 602617528, 603844149, 605071780, 606300431, 607530092, 608760763, 609992454, 611225165, 612458886, 613693617, 614929358, 616166109, 617403870, 618642641, 619882432, 621123243, 622365064, 623607895, 624851736, 626096587, 627342448, 628589319, 629837190, 631086071, 632335962, 633586863, 634838774, 636091695, 637345626, 638599567, 639854518, 641109479, 642365450, 643622431, 644880422, 646139423, 647409434, 648680455, 649952486, 651225527, 652509578, 653794639, 655080710, 656367791, 657655882, 658944983, 660235094, 661526215, 662818346, 664111487, 665405638, 666700799, 668006970, 669314151, 670622342, 671931543, 673241754, 674552975, 675865206, 677178447, 678492698, 679807959, 681124230, 682441511, 683759802, 685079103, 686399414, 687720735, 689043066, 690366407, 691690758, 693016119, 694342490, 695669871, 697008262, 698347663, 699688074, 701029495, 702371926, 703715367, 705059818, 706405279, 707751750, 709099231, 710447722, 711797223, 713147734, 714499255, 715851786, 717205327, 718559878, 719915439, 721271990, 722629551, 723988122, 725347703, 726708294, 728069895, 729432506, 730796127, 732160758, 733526399, 734893050, 736260711, 737629382, 739000063, 740371764, 741744485, 743118226, 744492987, 745868768, 747245569, 748623390, 749999231, 751376092, 752753973, 754132874, 755512795, 756893736, 758274697, 759656678, 761039679, 762423690, 763808711, 765194742, 766581793, 767969864, 769358955, 770749066, 772140187, 773532318, 774925459, 776319610, 777714771, 779110942, 780508123, 781906314, 783305515, 784705726, 786106947, 787509178, 788912419, 790316670, 791721931, 793128202, 794535483, 795943784, 797353095, 798763416, 800174747, 801587088, 802999439, 804412790, 805827151, 807242522, 808658903, 810076294, 811494695, 812914106, 814334527, 815755958, 817178399, 818601840, 820026291, 821451752, 822878223, 824305704, 825734195, 827163696, 828594207, 830025728, 831458259, 832891790, 834326331, 835761882, 837198443, 838636014, 840074595, 841514186, 842954787, 844396398, 845839019, 847282650, 848727291, 850172942, 851619603, 853067274, 854515955, 855965646, 857416347, 858868058, 860320779, 861774500, 863229231, 864684972, 866141723, 867599484, 869058255, 870518036, 871978827, 873440628, 874903439, 876367260, 877832091, 879297932, 880764783, 882232644, 883701515, 885171396, 886642287, 888114198, 889587119, 891061050, 892536001, 894011962, 895488933, 896966914, 898445905, 899925906, 901406917, 902888938, 904371969, 905855990, 907341021, 908827062, 910314113, 91



*parallel tangents* : (engelsk) navnet på en optimeringsmetode til ubegrænsede problemer i  $R^n$ . Metoden kan ses som en variant af en konjugeret gradient metode. Luenberger (1984) side 254.

*partan* : sådan kaldes nogle gange metoden omtalt under parallel tangents.

*penalty* : (engelsk) straf, bøde.

*projected Lagrangean* : (engelsk) optimeringsmetode der anvender Lagrange-funk-tions "projektion" på begrænsningerne.

*programming* : (engelsk) i denne sammenhæng: optimering *rank-one, rank-two* : (engelsk) begreber der anvendes i forbindelse med kvasinewtonmetoderne. Or-dene refererer til rangen af en opdateringsmatrix.

*scaling* : (engelsk) skalering.

*simpler* : navnet på en metode til løsning af LP problemer, og på en metode til løsning af ubegrænsede problemer uden brug af afledede.

*steplength* : (engelsk) skridtlængde.

*steepest* : (engelsk) *steepest descent* og *steepest ascent* refererer til gradientmeto-den anvendt på henholdsvis minimerings- og maksimeringsproblemer.

*sublinear convergence* : (engelsk) konvergenstasighed langsommere end lineær.

*watchdog* : (engelsk) anvendes i forbindelse med en teknik til at undgå Maratos-effekten.

*Wolfe* : en metode til kvadratisk programmering er opkaldt efter Wolfe. *Wolfe test* : Wolfe's test anvendes med samme formål som Armijo-reglen, nemlig at sikre en tilstrækkelig forbedring af målfunktionen i en numerisk metode, således at global konvergens sikres.

## Kapitel 7 - 8

*adjoint* : (engelsk) tilknyttet, eller lignende. Adjoint vector: vektor. Adjoint condition.

*bang-bang* : karakteristisk af optimal kontrol, typisk at den skifter diskontinuer-t mellem nedre og øvre grænser.

*calculus of variations* : (engelsk) variationsregning.

*canonical* : (engelsk) f.eks. canonical difference equations om betingelserne (7.2) - (7.44).

*closed loop* : (engelsk) lukket sløjte, om løsningsstrategi i kontrol.

*costate* : (engelsk) bitilstand.

*course of dimensionality* : (engelsk) dimensionens forandelse.

*equation of motion* : (engelsk) bevægelsesligning, dynamik.

*feedback* : (engelsk) tilbagekobling.

*Hamiltonian* : (engelsk) hamiltonfunktion.

*jump conditions* : (engelsk) betingelser for, hvornår vektoren kan springe. (være

## Litteratur

diskontinuerl)  
*Mittlen* : Mittlen har opstillet generelle betingelser for, hvornår dynamisk pro-  
 grammering og optimalitetsprincippet kan anvendes.  
*motion* : (engelsk) bevægelse, equation of motion; dynamik.  
*open loop* : (engelsk) åben sløjfe, se closed loop.  
*principle of optimality* : (engelsk) optimalitetsprincip.  
*singular* : (engelsk) singular control; singular kontrol.  
*stage* : (engelsk) trin (! kontrolmodel).  
*state* : (engelsk) tilstand (! kontrolmodel).

Nedenstående liste indeholder dels referencer, dels eksempler på bøger, der  
 anvender optimering inden for specifikke områder.  
 Litteratur om matematisk modellering (ikke blot om optimeringsmod-  
 eller):

Mathematical Modelling [34]

A Concrete Approach to Mathematical Modelling [32]

Mathematical Modelling. A Source Book of Case Studies [25]

Litteratur om optimering, med forskellige tekniske og ingeniørmæssige an-  
 vendelser:

Introduction to Optimum Design [1]

Structural Modelling and Optimization [6]

Optimization of Chemical Processes [12]

Optimal Engineering Design [41]

Design of Thermal Systems [44]

Optimal Economic Operation of Electric Power Systems [13]

Power Generation, Operation and Control [49]

Numerical Optimization Techniques for Engineering Design [47]

Litteratur om anvendelser inden for økonomi:

- Investeringssplanlægning [8], [46]
- Optimale Kontrolle Ökonomischer Prozesse [14]
- Optimal Control Theory and Economic Analysis [15]
- Optimal Control Theory with Economic Applications [39]
- Mathematical Optimization and Economic Theory [26]
- Litteratur om anvendelser af optimal kontrol teori:
- Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources [7]
- Optimale Kontrolle Ökonomischer Prozesse [14]
- Optimal Control Theory and Economic Analysis [15]
- Optimal Control Theory with Economic Applications [39]
- Application of Optimal Control Theory in Biomedicine [45]



# Bibliografi

[1] Arora, Jasbir S.: *Introduction to Optimum Design*, McGraw Hill, Inc. 1989.

[2] Bazaraa, Mohktar S. og C.M. Shetty: *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, Wiley, 1979.

[3] Bertsekas, Dimitri P.: *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, 1982.

[4] Bertsekas, Dimitri P.: *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice-Hall, 1987.

[5] Brooke, Anthony, David Kendrick and Alexander Meeraus: *GAMS, A User's Guide*, Scientific Press, 1988.

[6] Carmichael, D. G.: *Structural Modelling and Optimization*, Ellis Horwood, 1981.

[7] Clark, Colin W.: *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, John Wiley & Sons, Inc. 1976.

[8] Danø, Sven: *Investeringsplanlægning*, Akademisk Forlag, 1988.

[9] Denardo, Eric V.: *Dynamic Programming: Models and Applications*, Prentice-Hall, Inc. 1982.

[10] Det økonomiske Råd: *Dansk økonomi*, maj 1993.

[11] Dreyfus, Stuart E. and Averill M. Law: *The Art and Theory of Dynamic Programming*, Academic Press, Inc. 1977.

- [12] Edgar, T. F. and D. M. Himmelblau: *Optimization of Chemical Processes*, McGraw-Hill, 1988.
- [13] El-Hawary, M.E. and G.S. Christensen: *Optimal Economic Operation of Electric Power Systems*, Academic Press, 1979.
- [14] Feichtinger, Gustav and Richard F. Hartl: *Optimale Kontrolle Ökonomischer Prozesse*, Walter de Gruyter & Co. 1986.
- [15] Feichtinger, G. (ed.): *Optimal Control Theory and Economic Analysis* 1, 2, 3, North-Holland, 1988 og senere.
- [16] Fiacco, A.V. and G.P. McCormick: *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Technique*, Wiley, 1968.
- [17] Finansministeriet/Budgetdepartementet: *Statens lægning og gæld*, 1987.
- [18] Fletcher, R.: *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, Inc. 1987.
- [19] Gill, Philip E., Walter Murray and Margaret H. Wright: *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- [20] Hargraves, C.R. and S.W. Paris: *Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation*, Journal of Guidance, Vol. 10, No. 4, July 1987, pp. 338 - 342.
- [21] Hestenes, Magnus R.: *Conjugate Direction Methods in Optimization*, Springer-Verlag, 1980.
- [22] Hestenes, Magnus R.: *Optimization Theory, The Finite Dimensional Case*, Krieger, 1981.
- [23] Himmelblau, David M.: *Applied Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, 1972.
- [24] Horst, Reiner and Hoang Tuy: *Global Optimization*, Springer-Verlag, 1990.
- [25] Huntley, I.D. and D.J.G. James (ed.): *Mathematical Modelling. A Source Book of Case Studies*, Oxford University Press, 1990.

- [26] Intilligator, Michael D.: *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, 1971.
- [27] Jacobsen, Søren K.: *Elementær Operationsanalyse*, IMSOR, 1983.
- [28] Lasdon, Leon S.: *Optimization Theory for Large Systems*, MacMillan, 1970.
- [29] Lenstra, J.K., A.H.G. Rinnooy Kan, A. Schrijver (ed.): *History of Mathematical Programming*, North-Holland, 1991.
- [30] Luenberger, David G.: *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1984.
- [31] Mangasarian, Olvi L.: *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, 1969.
- [32] Mesterton-Gibbons, Michael: *A Concrete Approach to Mathematical Modelling*, Addison-Wesley, 1989.
- [33] Moores, Brian: *Dynamic Programming in Transformier Design*, J. Opt. Res. Soc., Vol. 37, No. 10, 1986, pp. 967-969.
- [34] Murthy, D.N.P., N.W. Page, E.Y. Rodin: *Mathematical Modelling. A Tool for Problem Solving in Engineering, Physical, Biological and Social Sciences*, Pergamon Press, 1990.
- [35] Nemhauser, George L.: *Introduction to Dynamic Programming*, John Wiley & Sons, Inc. 1966.
- [36] Nemhauser, George L. and Laurence A. Wolsey: *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, 1988.
- [37] Puterman, Martin L. (ed.): *Dynamic Programming and Its Applications*, Academic Press, 1978.
- [38] Schabale, Siegfried and William T. Ziemba (ed.): *Generalized Convexity in Optimization and Economics*, Academic Press, 1981.
- [39] Seierstad, Atle og Knut Sydsæter: *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, 1987.
- [40] Shapiro, Jeremy F.: *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*, Wiley, 1979.

- [41] Siddall, James N.: *Optimal Engineering Design: Principles and Applications*, Marcel Dekker, Inc. New York 1982.
- [42] Snedovich, Moshe: *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Inc. New York 1992.
- [43] Soliman, F.I. and B.A. Murtagh: *The Solution of Large-Scale Gas Pipeline Design Problems*, Engineering Optimization, Vol. 6, 1982, pp. 77-83.
- [44] Stoecker, W.F.: *Design of Thermal Systems*, Third Edition, McGraw Hill, Inc. 1989.
- [45] Swan, George W.: *Applications of Optimal Control Theory in Biomedicine*, Marcel Dekker, Inc. New York 1984.
- [46] Thygesen, Inge: *Investeringsplanlægning. Operationsanalytiske metoder til forbedring af beslutningsgrundlaget*, Polyteknisk Forlag, 1972.
- [47] Vanderplaats, Garret N.: *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design; With Applications*, McGraw-Hill, 1986.
- [48] Vidal, R.V.V.: *A Simple Method to Solve Some Simple Allocation Problems*, IEE Transactions, Vol. 19, No. 2, 1987, pp. 234-237.
- [49] Wood, Allan J. and Bruce F. Wollenberg: *Power Generation, Operation and Control*, Wiley, 1984.





- gyldne snit, 187, 188
- halspace, 363
- Hamilton, 341
- Hamiltonfunktion, 328
- Hamiltonfunktioner, 273
- Hamiltonian, 367
- hellsprogrammering, 31
- hessiamatrix, 34
- hull, 363
- hyperplan, 48
- hypograf, 52
- hårde begrænsninger, 240
- ikke-basis, 222
- implicit enumeration, 88
- imputed price, 365
- indre punkts metode, 241
- infnun, inf, 25
- integer, 363
- interior, 364
- interior point method, 366
- intersection, 364
- Jacoby, 341
- Jamning, 366
- jump conditions, 367
- KKT, 121, 122, 271
- KKT punkt, 123
- knapsack, 364
- komplementært sæk, 122, 128
- konditionstal, 203
- konkav, 57
- kontrol, 266, 328
- konveks, 48, 52
- konveks kombination, 49
- konvekse hyster, 49
- konvergens, 201
- konvergenshastighed, 189, 201
- KT, 121
- kubisk interpolation, 185
- kunstig variabel, 364
- kvadratisk form, 112
- kvadratisk interpolation, 182, 184
- kvadratisk-linær, 227
- kvasi-Newton, 196
- kvasi-konkav, 58
- kvasi-konveks, 58
- GRG, 225
- gren og grænse, 87, 93, 145
- gradientmetoden, 192
- Goldstein, 366
- golden section, 366
- global konvergens, 201
- global, 24, 363
- geometrisk programmering, 94
- geometric programming, 363
- generalized reduced gradient, 366
- gap, 365
- gab, 250
- 343
- følsomhedsanalyse, 225, 232, 233, 272,
- følsomhed, 278
- følsomheds, 29
- Fritz-John, 329, 365
- rational programming, 363
- foreningssæmngde, 29
- fordelingsmodel, 13
- fordelende retning, 33
- first order conditions, 365
- Fibonacci, 366
- feedback, 367
- feasible, 363
- Farkas lemma, 127
- extreme point, 363
- exterior point method, 366
- equation of motion, 367
- epigraf, 363
- epigraf, 52
- enumeration, 32, 88
- entydig, 24
- ekstretnun, 25
- ekstretpunkt, 50
- eksplicit enumeration, 32
- eigenvalue, eigenvector, 363
- economic lot size, 363
- dynamisk programmering, 278, 340
- dynamisk model, 265
- dynamik, 266
- dualt gab, 250
- dualproblem, 247, 255
- duality, 365
- dualitet, 254

- l.s.c., 364  
 Lagrange, 343  
 Lagrangean, 365  
 Lagrangefunktion, 123, 253  
 Lagrange-relaksation, 141, 246, 272  
 Lembecke, 366  
 line search, 366  
 linear, 364  
 lineær programmering, 225  
 linjefølgning, 192  
 local convergence, 366  
 lokal, 24, 266  
 lot size, 364  
 lower bound, 364  
 lower semi continuous, 364  
 LP, 225  
 LP-relaksation, 89  
 lukket sløjfe, 300  
 maksimumsprincip, 273, 328  
 maksimumsprincipet, 273  
 Mangasarian-Fromowitz, 124  
 Maratos effect, 366  
 marginal price, value, 365  
 marginalhytte, 45  
 marginalpris, 126, 145  
 matematisk programmering, 366  
 matrix, 39  
 Mayer, 343  
 merit function, 366  
 Mitten, 368  
 motion, 368  
 muliggjortning, 36  
 muliggjortnings, 24  
 muliggjortningsmængde, 24  
 målfunktion, 24  
 mængdedekomposition, 156  
 necessary conditions, 364  
 neighbourhood, 364  
 Newton, 180, 193  
 niveaukurver, 29  
 non-degenerate, 365  
 normalfordeling, 61  
 notation, 5  
 nødvendig, 32  
 objective function, 364  
 omslutte, 183  
 open loop, 368  
 optimal, 24  
 optimal kontrol, 265  
 optimal value function, 364  
 optimalitetsprincip, 340  
 optimalitetsprincipet, 279  
 optimization, 364  
 order of convergence, 366  
 overfal, 86  
 parallel tangents, 367  
 parametriske programmering, 226, 232, 233  
 partan, 367  
 penalty, 367  
 perturbationsmængde, 72  
 polyeder, 48  
 polytop, 48  
 Pontryagin, 329  
 portfolio, 364  
 postinomium, 94  
 postynomium, 364  
 price relaxation, decomposition, 365  
 primal, 365  
 primal dekomposition, 156  
 primalproblem, 255  
 principle of optimality, 368  
 prisdekomposition, 156  
 prisrelaksation, 235  
 programmering, 367  
 projected Lagrangean, 367  
 projektion, 199, 212  
 projektiionsmatrix, 218  
 pseudokonkav, 58  
 pseudokonvekts, 58  
 pænt problem, 65, 125, 143  
 quadratisk, 364  
 quasilinear, 364  
 rank, 364  
 rank-one, rank-two, 367  
 reduceret hessian, 229  
 regular, 365  
 regulær, 129, 329  
 regulæritet, 124

- strict optimum, 364  
 struktur, 64  
 stærk dualitet, 256  
 stærke maksimumsprincp, 275  
 støtte, 50, 262  
 subdifferentiale, 364  
 subdifferentiale, 53  
 subgradient, 53  
 subgradientmetoden, 198  
 sublinear convergence, 367  
 sufficient condition, 364  
 SUMT, 241  
 superdifferential, 364  
 superlinear, 190, 202  
 supremum, sup, 25  
 svage maksimumsprincp, 275  
 svage dualitet, 256  
 tangent-konuseretning, 128  
 tilstand, 266, 328  
 tilstrækkelig, 32  
 tilstrækkelig forbedring, 191  
 tracking, 306  
 transportmodel, 89  
 trin, 266  
 u.s.c., 364  
 udvalgt Lagrangefunktion, 253  
 undertal, 87  
 upper bound, 364  
 upper semi continuous, 364  
 variabel metrik, 196  
 variabelspilteori, 308  
 variable splitting, 364  
 variationsregning, 343  
 varighedskurve, 61  
 værdifunktion, 71, 125  
 værdifunktion, 299  
 wachtdog, 367  
 Weierstrass, 26  
 Wollfe, 367  
 Wollfe test, 367  
 zig-zag (sik-sak), 193  
 åben sløjfe, 300
- relaxasjon, 85, 235  
 relaxsere, 85  
 relative max, min, 364  
 relaxation, 364  
 ressource, 71  
 restriction, 364  
 Riccati ligning, 306  
 rullende horison, 312  
 rygsækmodel, 14  
 s.t., 365  
 saddlepunkt, 34, 256  
 scaling, 367  
 second order condition, 365  
 sekventiel kvadratisk, 244  
 sekventiel kvadratisk pr., 232  
 sekventiel lineær p., 226  
 sekventiel LP, 227  
 sensitivitet, 365  
 separabel, 145  
 separationsprincp, 306  
 set, 364  
 sidebetingelse, 27  
 sik-sak, 193  
 simplex, 67, 225, 231, 367  
 simplexmethode, 225  
 singular, 368  
 singulær, 276, 330  
 skalering, 203  
 skiftfunktion, 331  
 skridtlængde, 199  
 styrggepris, 126, 145  
 Slater, 124  
 slæk, 27  
 slækvariabel, 27  
 sløjfe, 300  
 smooth, 364  
 stage, 368  
 state, 368  
 stationary, 364  
 stationær, 33  
 statisk, 270  
 stepest, 367  
 step length, 367  
 stokastisk kontrol, 300  
 straffpris, 235  
 strengt konvex, 50, 53