


**ANALYSE  
AF  
BISPEKTRE**

**Thorkild Nielsen**

**LYNGBY 1982  
EKSAMENSPROJEKT  
NR 15/82**

**imsot**

Trykt af  - DTH  
Bogbinder Hans Meyer

## FORORD

Denne rapport beskriver resultatet af et eksamensprojekt udført ved Institutet for Matematisk Statistik og Operationsanalyse i foråret 1982.

Jeg vil her rette en tak til min vejleder lektor lic. tech. Henrik Spliid for hjælp med projektet, samt til alle IMSOR's øvrige medarbejdere for det gode arbejdsmiljø på instituttet.

Lundtofte d. 31.8.1982



Thorkild Nielsen



## INDHOLD

	side
1. INDLEDNING.....	1
1.1 Problemformulering	1
1.2 Oversigt over rapportens indhold	1
2. MOMENT- OG KUMULANTFUNKTIONER.....	3
2.1 Momenter og momentfunktioner	3
2.2 Kumulanter og kumulantfunktioner	3
3. ANDEN ORDENS MOMENTFUNKTIONEN.....	7
3.1 Grundliggende egenskaber	7
3.2 Lineære processer	8
3.3 MA, AR og ARMA processer	9
3.4 Estimation	12
3.5 Egenskaber ved estimater	12
4. TREDJE ORDENS MOMENTFUNKTIONEN.....	15
4.1 Grundliggende begreber	15
4.2 Lineære processer	16
4.3 MA, AR og ARMA processer	17
4.4 Estimation	20
4.5 Egenskaber ved estimater	21
5. SPEKTRET.....	23
5.1 Definition og grundliggende egenskaber	23
5.2 Lineære processer	26
5.3 MA, AR og ARMA processer	28
5.4 Estimation	32
5.5 Glattede estimater	35
5.6 Egenskaber ved glattede estimater	38
5.7 Periodogram	40

6. BISPEKTRET.....	43
6.1 Definition og grundliggende egenskaber	43
6.2 Lineære processer	46
6.3 MA, AR og ARMA processer	47
6.4 Estimation	52
6.5 Glattede estimater	54
6.6 Egenskaber ved glattede estimater	56
7. BISPEKTRETS ANVENDELSESMULIGHEDER.....	59
7.1 Bispektrets fortolkning	60
7.2 Test for linearitet og normalitet	60
7.3 Test for linearitet og ikke-normalitet	64
7.4 Beregningsmæssige aspekter	66
8. ANALYSE AF VANDSTANDSDATA.....	69
8.1 Problemstilling	69
8.2 Analyse	70
9. KONKLUSION.....	73
APPENDIX A: Moment- og kumulantfunktioner	77
APPENDIX B: Fourier transformation	79
APPENDIX C: Sampling og aliasing	83
APPENDIX D: Plot i forbindelse med vandstandsdata	89
APPENDIX E: Programmer	121
LITTERATURLISTE	133

## 1. INDLEDNING

### 1.1 Problemformulering

I litteraturen er rapporteret en række tilfælde, hvor bispektret er anvendt i forbindelse med tidsrækkeanalyse. Denne anvendelse har fundet sted i forbindelse med problemer af ikke lineær natur.

Det er denne opgaves formål, at undersøge hvilken information bispektret indeholder og hvorledes denne information skaffes til veje og udnyttes i tidsrækkeanalysen. Dette er sket dels på baggrund af et litteraturstudium og dels på baggrund af anvendelse af bispektret på et givet datasæt.

Bispektret er den naturlige første udvidelse fra det sædvanlige spektrum af anden orden til højere ordens spektre. Spektre af højere orden har særlig interesse i forbindelse med ikke normale og ikke lineære processer.

I rapporten her er bispektret undersøgt dels i det kontinuerte og dels i det diskrete tilfælde.

### 1.2 Oversigt over rapportens indhold

Rapporten omhandler både det sædvanlige spektrum og bispektret, så det er muligt at sammenholde spektrene.

I kap. 2 er beskrevet nogle grundliggende definitioner og egenskaber ved moment- og kumulantfunktioner.

I kap. 3 beskrives anden ordens momentfunktionen eller autokovariansfunktionen.

I kap. 4 beskrives tredje ordens momentfunktionen. Der gives eksempler for forskellige processer og estimation behandles.

I kap. 5 behandles anden ordens spektret. Der gives eksempler for forskellige processer og estimation behandles.

I kap. 6 behandles bispektret. Dette kapitel omhandler definitioner, egenskaber og eksempler for forskellige processer. Estimation behandles indgående.

I kap. 7 beskrives bispektrets anvendelsesmuligheder. Her beskrives et test for linearitet af en tidsrække ved anvendelse af bispektret.

I kap. 8 er beskrevet en analyse af vandstandsdata. Der er foretaget en sædvanlig anden ordens analyse og bispektralanalyse.

Kap. 9 indeholder konklusionen af dette arbejde samt nogle reflektioner over bispektret og dets anvendelsesmuligheder i tidsrækkeanalysen.



## 2. MOMENT- OG KUMULANTFUNKTIONER

I dette kapitel gives en række definitioner på momenter og kumulanter samt på moment- og kumulantfunktioner. Som det vil fremgå, kan kumulanter betragtes som en slags momenter, der med fordel kan anvendes ved teoretiske undersøgelser.

### 2.1 Momenter og momentfunktioner

Der betragtes en stokastisk variabel  $X$  med fordelingsfunktion  $F$ . Momentet af  $k$ 'te orden for  $X$  defineres da ved Stieltjes-integralet

$$\mu_k' = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF \quad (2.1)$$

Det centrale moment af  $k$ 'te orden defineres tilsvarende ved

$$\mu_k = E[(X-\mu)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k dF \quad (2.2)$$

hvor  $\mu = \mu_1' = E[X]$ .

For en diskret variabel fås

$$\mu_k' = \sum_i x_i^k p_i$$

$$\mu_k = \sum_i (x_i - \mu)^k p_i$$

hvor  $p_i$  angiver sandsynligheden for udfaldet  $x_i$ .

Udvikles den karakteristiske funktion

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF, \quad t \text{ reel}$$

i en Taylor-udvikling om 0 fås

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mu_k' \quad (2.3)$$

hvor momenterne er koefficienterne i udviklingen.

Der betragtes nu en stokastisk proces  $X(t)$  med forventningsværdi  $E[X(t)] = 0$ . Momentfunktionen af  $k$ 'te orden defineres ved

$$M_k(t_1, \dots, t_k) = E[X(t_1) \dots X(t_k)] \quad (2.4)$$

Er processen stationær, kan (2.4) skrives

$$M_k(u_1, \dots, u_{k-1}) = E[X(t) \cdot X(t+u_1) \cdot \dots \cdot X(t+u_{k-1})] \quad (2.5)$$

hvor  $u_i = t_{i+1} - t_1$ .

## 2.2 Kumulanter og kumulantfunktioner

Kumulanter og kumulantfunktioner for en stokastisk variabel er nært beslægtede med momenterne og momentfunktionerne, idet kumulanter kan udtrykkes ved momenterne og omvendt.

Momenterne er koefficienterne i Taylor-udviklingen af den karakteristiske funktion  $\phi(t)$ , mens kumulanterne  $\kappa_k$  er koefficienterne i udviklingen af  $\log\phi(t)$ , dvs.

$$\log\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \kappa_k \quad (2.6)$$

I det følgende gengives en række generelle resultater om kumulanter og kumulantfunktioner fra Brillinger [4].

Der betragtes en  $k$ -dimensional variabel  $(X_1, \dots, X_k)$ , hvor  $E[X_j^k] < \infty$ ,  $j=1, \dots, k$ . Kumulanten af  $k$ 'te orden for variabelen defineres da ved

$$\text{Cum}(X_1, \dots, X_k) = \sum_{j \in \nu_1} \dots \sum_{j \in \nu_p} (-1)^{p-1} (p-1)! (E[\prod_{j \in \nu_1} X_j] \dots E[\prod_{j \in \nu_p} X_j]) \quad (2.7)$$

hvor summationen er over alle permutationer  $(\nu_1, \dots, \nu_p)$  af heltallene  $1, \dots, k$ ,  $p = 1, \dots, k$ .

Kumulanten  $\kappa_k$  for den stokastiske variabel  $X$  fås da for  $X_i = X$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Kumulanterne benævnes også semi-invarianter.

For kumulanterne givet ved (2.7) gælder en række vigtige egenskaber, hvoraf de vigtigste nævnes her

- $\text{Cum}(a_1 X_1, \dots, a_k X_k) = a_1 \dots a_k \cdot \text{Cum}(X_1, \dots, X_k)$  for  $a_1, \dots, a_k$  konstant.
- $\text{Cum}(X_1, \dots, X_k)$  ændres ikke ved ombytning af argumenterne.

- c)  $\text{Cum}(X_1+a, X_2, \dots, X_k) = \text{Cum}(X_1, \dots, X_k)$  for  $a$  konstant og  $k \geq 2$ .
- d) Hvis et eller flere af  $X$ 'erne er uafhængige af de øvrige er  $\text{Cum}(X_1, \dots, X_k) = 0$ .
- e) Hvis  $(X_1, \dots, X_k)$  og  $(Y_1, \dots, Y_k)$  er uafhængige gælder  $\text{Cum}(X_1+Y_1, \dots, X_k+Y_k) = \text{Cum}(X_1, \dots, X_k) + \text{Cum}(Y_1, \dots, Y_k)$
- f)  $\text{Cum}(X_i) = E[X_i]$  ,  $i = 1, \dots, k$ .
- g)  $\text{Cum}(X_i, X_i) = \text{Var}[X_i]$  ,  $i=1, \dots, k$ .
- h)  $\text{Cum}(X_i, X_j) = \text{Cov}[X_i, X_j]$  ,  $i, j = 1, \dots, k$ .

Der betragtes nu en  $r$ -dimensional stokastisk proces  $\underline{X}_a(t) = (X_1(t), \dots, X_r(t))$ , hvor  $E[(X_a(t))^k] < \infty$ ,  $a = 1, \dots, r$ . Kumulantfunktionen defineres på tilsvarende måde som momentfunktionen (2.4) ved

$$C_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) = \text{Cum}(X_{a_1}(t_1), \dots, X_{a_k}(t_k)) \quad , \quad (2.8)$$

$$a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$$

Er processen stationær fås

$$C_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \text{Cum}(X_{a_1}(t), X_{a_2}(t+u_1), \dots, X_{a_k}(t+u_{k-1}))$$

I appendix A er sammenhængen mellem kumulanter og momenter samt mellem kumulantfunktioner og momentfunktioner angivet.

Det fremgår her, at moment- og kumulantfunktionerne er ens for  $k = 2, 3$ . Dvs. for anden og tredje ordens tilfældet gælder (stationær proces)

$$M_2(u) = C_2(u)$$

$$M_3(u_1, u_2) = C_3(u_1, u_2)$$

hvilket benyttes en del i det følgende.



### 3. ANDEN ORDENS MOMENTFUNKTIONEN

Momentfunktionen af anden orden eller autokovariansfunktionen indtager en central plads ved behandling af stokastiske processer. Dette gælder både kontinuerte og diskrete processer, og dermed også i forbindelse med tidsrækkeanalyse. I dette kapitel gives nogle grundliggende egenskaber og eksempler.

#### 3.1 Grundliggende egenskaber

Autokovariansfunktionen eller momentfunktionen af anden orden er ifølge (2.5) defineret ved

$$\begin{aligned} M_2(u) &= E[ (X(t)-\mu)(X(t+u)-\mu) ] \\ &= \text{Cov}[ X(t), X(t+u) ] \end{aligned} \quad (3.1)$$

hvor  $\mu = E[X(t)]$ .

Det bemærkes som tidligere nævnt

$$M_2(u) = C_2(u)$$

For  $u=0$  fås processens varians

$$M_2(0) = \text{Var}[X(t)]$$

Autokorrelationsfunktionen defineres ved

$$R_2(u) = M_2(u)/M_2(0) \quad (3.2)$$

For autokorrelationsfunktionen gælder følgende

a)  $R_2(u) = R_2(-u)$

b)  $|R_2(u)| \leq 1 \quad \forall u$

c) Matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & R_2(u_1) & \dots & R_2(u_n) \\ R_2(u_1) & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ R_2(u_n) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

er positiv semi-definit, hvilket betyder at ikke alle funktioner kan optræde som autokorrelations- eller autokovariansfunktioner.

d) Er  $R_2(u)$  kontinuert for  $u=0$  er den kontinuert overalt.

### 3.2 Lineære processer

En proces  $X(t)$ , der fås som output fra et lineært system med en hvid støj proces  $Z(t)$  som input, betegnes en lineær proces. Kaldes det lineære systems impulsresponsfunktion (dvs. systemets svar når inputtet er en enhedspuls)  $h(v)$ , fås i det kontinuerte tilfælde

$$X(t) - \mu = \int_0^{\infty} h(v) \cdot Z(t-v) dv \quad (3.3)$$

og i det diskrete tilfælde

$$X_t - \mu = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \cdot Z_{t-k} \quad (3.4)$$

med  $E[Z(t)] = E[Z_t] = 0$ .

Idet  $Z(t)$  er en stationær hvid støj proces haves

$$E[Z(t)] = 0$$

$$\text{Cov}[Z(t), Z(t+u)] = \sigma_Z^2 \cdot \delta(u)$$

Autokovariansfunktionen for  $X(t)$  bliver da

$$\begin{aligned} M_2(u) &= E\left[ \int_0^{\infty} h(v_1) Z(t-v_1) dv_1 : \int_0^{\infty} h(v_2) Z(t+u-v_2) dv_2 \right] \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(v_1) h(v_2) \cdot E[Z(t-v_1) Z(t+u-v_2)] dv_1 dv_2 \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(v_1) h(v_2) \cdot \sigma_Z^2 \delta(u+v_1-v_2) dv_1 dv_2 \\ &= \sigma_Z^2 \int_0^{\infty} h(v) h(v+u) dv \end{aligned} \quad (3.5)$$

Det ses, at autokovariansfunktionen bestemmes - på nær faktoren  $\sigma_Z^2$  - af systemets impulsresponsfunktion.

$\delta(u)$  angiver Dirac's deltafunktion.

For  $u=0$  fås variansen

$$M_2(0) = \text{Var}[X(t)] = \sigma_Z^2 \int_0^{\infty} h^2(v) dv \quad (3.6)$$

Det bemærkes ( Brillinger [4] ), at  $X(t)$  er stationær hvis

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(v)| dv < \infty \quad (3.7)$$

De lineære processer spiller en uhyre central rolle ved behandlingen af tidsrækker. F.eks. er de såkaldte Box-Jenkins modeller lineære.

### 3.3 MA, AR og ARMA processer

En moving average proces af orden  $q$  -  $MA(q)$  - er af formen

$$\begin{aligned} X_t - \mu &= Z_t^{-\theta_1} Z_{t-1}^{-\theta_2} \dots Z_{t-q}^{-\theta_q} Z(t) \\ &= (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) Z(t) \\ &= \Theta(B) Z(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

hvor den sædvanlige operatorfremstilling er anvendt, og  $Z_t$  er diskret hvid støj.

Det ses, at en MA proces er af formen (3.4), dvs. en lineær proces med vægtene (impulsresponsen)

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= -\theta_1 \\ &\vdots \\ h_q &= -\theta_q \\ h_j &= 0 \text{ for } j > q \text{ eller } j < 0. \end{aligned}$$

Autokovariansfunktionen fås da af (3.5) i diskret form, dvs.

$$\begin{aligned} M_2(k) &= \sigma_Z^2 \sum_{j=0}^{q-k} h_j \cdot h_{j+k} \\ &= \sigma_Z^2 \cdot \left( -\theta_k + \sum_{j=1}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Variansen bliver

$$M_2(0) = \sigma_X^2 = \sigma_Z^2 \cdot (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \quad (3.10)$$

Af (3.7) fås, at en  $MA(q)$  proces altid er stationær, da  $q$  er endelig.

En kontinuert autoregressiv proces  $X(t)$  defineres som løsning til den stokastiske differentialligning

$$T \frac{dX(t)}{dt} + (X(t) - \mu) = Z(t) \quad (3.11)$$

Impulsresponsfunktionen for processen er

$$h(v) = \begin{cases} \frac{1}{T} \exp(-v/T) & \text{for } u \geq 0 \\ 0 & \text{for } u < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Autokovariansfunktionen bliver ved anvendelse af (3.5)

$$\begin{aligned} M_2(u) &= \sigma_Z^2 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{T} \exp(-v/T) \cdot \frac{1}{T} \exp(-(u+v)/T) dv \\ &= \sigma_Z^2 \cdot \frac{1}{2T} \exp(-|u|/T) \end{aligned} \quad (3.13)$$

For en diskret AR(p) proces

$$\begin{aligned} X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} &= Z_t \\ (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) X_t &= Z_t \\ \Phi(B) X_t &= Z_t \end{aligned} \quad (3.14)$$

gælder, at autokorrelationsfunktionen tilfredsstiller differensligningerne

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) R_2(k) = 0 \quad , \quad k \neq 0 \quad (3.15)$$

Disse p ligninger med  $k \leq p$  kaldes Yule - Walker ligningerne.

Variansen på processen bliver

$$\sigma_X^2 = \phi_1 M_2(1) + \dots + \phi_p M_2(p) + \sigma_Z^2 \quad (3.16)$$

hvor  $M_2(\cdot)$  er autokovariansfunktionen.



Ved sammensætning af en moving average og en autoregressiv proces fås en såkaldt ARMA proces (autoregressiv - moving average).

For en ARMA(p,q) proces

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t \quad (3.17)$$

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)Z_t$$

tilfredsstiller autokovariansfunktionen ligningen

$$M_2(k) = \phi_1 M_2(k-1) + \dots + \phi_p M_2(k-p) + M_{XZ}(k) - \theta_1 M_{XZ}(k-1) - \dots - \theta_q M_{XZ}(k-q) \quad (3.18)$$

hvor

$$M_{XZ}(k) = E[X_{t-k} Z_t] = \begin{cases} 0 & , \quad k > 0 \\ \neq 0 & , \quad k \leq 0 \end{cases}$$

For en ARMA(1,1) proces fås

$$M_2(0) = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2} \sigma_Z^2$$

$$M_2(1) = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma_Z^2$$

$$M_2(k) = \phi_1 M_2(k-1) \quad , \quad k \geq 2$$

### 3.4 Estimation

Momentfunktionen af anden orden - autokovariansfunktionen - er defineret ved (3.1). Et naturligt estimat fås da ved at indsætte en realisation af processen. I det kontinuerte tilfælde fås da, idet symmetrien  $m_2(u) = m_2(-u)$  udnyttes

$$m_2(u) = \frac{1}{T} \int_0^{T-u} (x(t) - \bar{x})(x(t+u) - \bar{x}) dt, \quad 0 \leq u \leq T \quad (3.19)$$

når realisationen er  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . For  $u > T$  er  $m_2(u) = 0$ .

For en diskret proces observeret til tidspunkterne  $t=1, \dots, N$  er det tilsvarende estimat

$$m_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad k=0, 1, \dots, (N-1) \quad (3.20)$$

hvor  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t$ .

Undertiden anvendes også et estimat, hvor der divideres med  $N-k$  i (3.20) eller  $T-u$  i (3.19) i stedet for  $N$  eller  $T$ . Herved opnås et centralt estimat, hvad (3.19) og (3.20) ikke er, men et estimat med større varians.

### 3.5 Egenskaber ved estimater

Idet det forudsættes, at  $X(t)$  er en stationær proces af mindst 4. orden med  $E[X(t)] = 0$  gælder for estimaterne (3.19) og (3.20) (Parzen [26])

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{T} \cdot |E[m_2(u)] - M_2(u)| = 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \text{Cov}[m_2(u_1), m_2(u_2)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \{M_2(u) \cdot M_2(u+u_1-u_2) + M_2(u+u_1) \cdot M_2(u-u_2) \\ + C_4(u, u_1, u_2)\} du \end{aligned} \quad (3.22)$$

Der er forudsat stationaritet af 4. orden, så derfor haves

$$\text{Cov}[X(t), X(t+u)] = M_2(u)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X(t) \cdot X(t+u_1), X(s) \cdot X(s+u_2)] &= M_2(s-t) \cdot M_2(s-t+u_2-u_1) \\ &+ M_2(s-t-u_1) \cdot M_2(s-t+u_2) + C_4(s-t, u_1, u_2) \end{aligned}$$

og hvis det yderligere antages, at kumulantfunktionerne af orden  $k=2,3,4$  er absolut integrable, dvs.

$$\int_{u_1, \dots, u_{k-1}} C_k(u_1, \dots, u_{k-1}) du_1 \dots du_{k-1}, \quad k=2,3,4$$

vil integralet i (3.22) være endeligt. Herved indses, at estimerne (3.19) og (3.20) er asymptotisk centrale og asymptotisk konsistente.

Da  $E[X(t)] = 0$  vil  $\bar{x} \approx 0$ , og endvidere kan det vises (Bartlett [1]), at kumulantfunktionens bidrag i (3.22) kan udelades. Herved fås

$$E[m_2(u)] \approx M_2(u) (1 - |u|/T) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[m_2(u_1), m_2(u_2)] &\approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \{M_2(u) \cdot M_2(u+u_1-u_2) \\ &+ M_2(u+u_1) \cdot M_2(u-u_2)\} du \end{aligned} \quad (3.24)$$

Det bemærkes, at estimerne af autokovariansfunktionens værdier i sig selv er korrelerede. Dette forhold kan godt volde problemer i praksis, f.eks. hvis den estimerede autokovariansfunktion bruges til identifikation af en passende ARMA proces.

De angivne udtryk er opskrevet for det kontinuerte tilfælde, men gælder også i det diskrete tilfælde, når integration erstattes med summation.



#### 4. TREDJE ORDENS MOMENTFUNKTIONEN

I dette kapitel behandles momentfunktionen af tredje orden, som danner grundlaget for bispektret. Tredje ordens momentfunktionen anvendes ikke synderligt meget ved tidsrækkeanalyse, ligesom tredje ordens momentet heller ikke så ofte tages i betragtning i forbindelse med stokastiske variable.

##### 4.1 Grundliggende begreber

For en stationær stokastisk proces  $X(t)$  er momentfunktionen af 3. orden

$$M_3(u_1, u_2) = E[(X(t) - \mu)(X(t+u_1) - \mu)(X(t+u_2) - \mu)] \quad (4.1)$$

hvor  $E[X(t)] = \mu$ .

Som tidligere nævnt er moment- og kumulantfunktionen identiske for tredje orden, dvs.

$$M_3(u_1, u_2) = C_3(u_1, u_2)$$

For  $(u_1, u_2) = (0, 0)$  i (4.1) fås det tredje centrale moment

$$M_3(0, 0) = E[(X(t) - \mu)^3]$$

Som skævhedsmål for en fordeling benyttes ofte størrelsen  $\gamma_1$  givet ved

$$\gamma_1 = \frac{E[(X(t) - \mu)^3]}{\text{Var}[X(t)]^{3/2}} = \frac{M_3(0, 0)}{(M_2(0))^{3/2}} \quad (4.2)$$

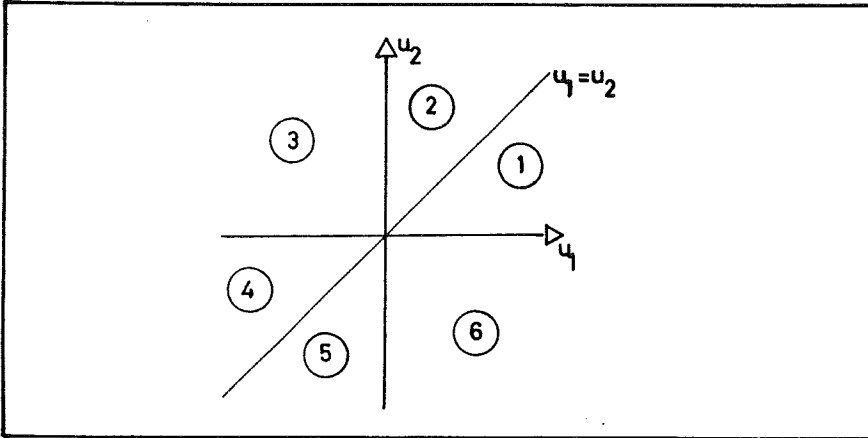
Hvis  $\gamma_1 > 0$  er fordelings højre hale større end den venstre og omvendt hvis  $\gamma_1 < 0$ .

For tredje ordens momentfunktionen gælder symmetriegenskaberne

$$M_3(u_1, u_2) = M_3(u_2, u_1) = M_3(-u_1, u_2 - u_1) \quad (4.3)$$

hvor det sidste lighedstegn følger af (4.1) ved substitutionen  $s = t + u_1$ .

Af symmetriegenskaberne (4.3) ses, at  $M_3(u_1, u_2)$  er fuldstændig bestemt i hele  $(u_1, u_2)$  - planen ud fra værdierne i en enkelt af delplanerne (1) - (6) (incl. grænser) på nedenstående figur.



Figur 4.1

#### 4.2 Lineære processer

Der betragtes en lineær proces  $X(t)$ , med hvid støj processen  $Z(t)$  som input, dvs

$$X(t) - \mu = \int_0^{\infty} h(v)Z(t-v) dv \quad (4.4)$$

Tredje ordens momentfunktionen fås da af

$$\begin{aligned} M_3(u_1, u_2) &= E[\int_0^{\infty} h(v_1)Z(t-v_1)dv_1 \cdot \int_0^{\infty} h(v_2)Z(t-v_2)dv_2 \\ &\quad \cdot \int_0^{\infty} h(v_3)Z(t-v_3)dv_3] \\ &= \iiint_0^{\infty} h(v_1)h(v_2)h(v_3) \cdot E[Z(t-v_1)Z(t+u_1-v_2)Z(t+u_2-v_3)] \\ &\quad \cdot dv_1 dv_2 dv_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_3(u_1, u_2) &= \iiint_0^\infty h(v_1)h(v_2)h(v_3) \cdot E[Z(t)^3] \delta(u_1+v_1-v_2) \\
 &\quad \delta(u_2+v_1-v_3) \cdot dv_1 dv_2 dv_3 \\
 &= E[Z(t)^3] \cdot \int_0^\infty h(v)h(v+u_1)h(v+u_2) dv \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Tredje ordens momentfunktionen bestemmes altså af det tredje centrale moment for  $Z(t)$  og impulsresponsfunktionen for det lineære system.

Det bemærkes, at begrebet hvid støj ikke indebærer at det tredje centrale moment er 0, men begrebet normal hvid støj proces betyder at  $E[Z(t)^3]=0$ , da alle momenter af orden højere end 2 er 0 for en normalproces.

For  $(u_1, u_2)=(0,0)$  fås det tredje centrale moment for  $X(t)$

$$M_3(0,0) = E[Z(t)^3] \cdot \int_0^\infty h(v)^3 dv \quad (4.6)$$

#### 4.3 MA og AR processer

For en MA( $q$ ) proces

$$X_t - \mu = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) Z_t \quad (4.7)$$

håves impulsresponsfunktionen eller vægtsfunktionen

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 1 = -\theta_0 \\
 h_1 &= -\theta_1 \\
 &\vdots \\
 h_q &= -\theta_q \\
 h_j &= 0 \text{ for } j > q.
 \end{aligned}$$

Tredje ordens momentfunktionen fås da ved den diskrete form af (4.5), dvs.

$$M_3(k_1, k_2) = E[Z_t^3] \cdot \sum_{j=0}^{q-k} h_j \cdot h_{j+k_1} \cdot h_{j+k_2} \quad (4.8)$$

hvor  $(k_1, k_2)$  tages i delplanen (1) på figur 4.1, dvs,  $0 \leq k_1$  og  $0 \leq k_2 \leq k_1$ .

Det ses, at tredje ordens momentfunktionen er 0 for lags  $k_1$  og/eller  $k_2$  større end  $q$ .

For en MA(1) proces fås

$$M_3(0,0) = E[Z_t^3] \cdot (1-\theta_1^3)$$

$$M_3(1,0) = E[Z_t^3] \cdot (-\theta_1)$$

$$M_3(1,1) = E[Z_t^3] \cdot (\theta_1^2)$$

og de øvrige værdier kan bestemmes af symmetriegenskaberne for momentfunktionen (4.3).

For en MA(2) proces fås

$$M_3(0,0) = \mu_3 \cdot (1-\theta_1^3-\theta_2^3) \quad M_3(1,1) = \mu_3 \cdot (\theta_1^2-\theta_1\theta_2^2)$$

$$M_3(1,0) = \mu_3 \cdot (-\theta_1-\theta_1^2\theta_2) \quad M_3(2,1) = \mu_3 \cdot (\theta_1\theta_2)$$

$$M_3(2,0) = \mu_3 \cdot (-\theta_2) \quad M_3(2,2) = \mu_3 \cdot (\theta_2^2)$$

hvor  $\mu_3 = E[Z_t^3]$ .

For en AR(p) proces

$$\Phi(B)X_t = Z_t$$

$$(1-\phi_1B-\dots-\phi_pB^p)X_t = Z_t$$

$$X_t = \phi_1X_{t-1} + \phi_2X_{t-2} + \dots + \phi_pX_{t-p} + Z_t \quad (4.9)$$

findes tredje ordens momentfunktionen på følgende måde.

Udtrykket (4.9) multipliceres med  $X_{t-k_1}X_{t+k_2-k_1}$

$$\begin{aligned} X_t X_{t-k_1} X_{t+k_2-k_1} &= \phi_1 X_{t-1} X_{t-k_1} X_{t+k_2-k_1} + \dots \\ &+ \phi_p X_{t-p} X_{t-k_1} X_{t+k_2-k_1} + Z_t X_{t-k_1} X_{t+k_2-k_1} \end{aligned}$$

Idet  $0 < k_1$  og  $0 < k_2 < k_1$  fås da de forventede værdier

$$\begin{aligned} M_3(-k_1, k_2-k_1) &= \phi_1 M_3(-k_1+1, k_2-k_1+1) + \dots \\ &+ \phi_p M_3(-k_1+p, k_2-k_1+p) \end{aligned}$$



da  $E[Z_t X_{t-k_1} X_{t+k_2-k_1}]$  bliver 0.

Ved anvendelse af symmetriegenskaberne (4.3) fås

$$M_3(k_1, k_2) = \phi_1 M_3(k_1-1, k_2) + \dots + \phi_p M_3(k_1-p, k_2) \quad (4.10)$$

For  $(k_1, k_2) = (0, 0)$  fås

$$\begin{aligned} M_3(0, 0) &= \phi_1 M_3(-1, 0) + \dots + \phi_p M_3(-p, 0) \\ &= \phi_1 M_3(1, 1) + \dots + \phi_p M_3(p, p) + E[Z_t^3] \end{aligned} \quad (4.11)$$

For  $k_1 = k_2$  fås bidraget

$$E[Z_t X_{t-k_1} X_t] = E[Z_t X_{t-k_1} (\phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t)]$$

Ved at tage forventningsværdien af de enkelte led ses at

$$E[Z_t X_{t-k_1} \phi_j X_{t-j}] = E[Z_t] \cdot E[X_{t-k_1} \phi_j X_{t-j}] = 0$$

mens

$$E[Z_t X_{t-k_1} Z_t] = E[Z_t^2] \cdot E[X_t]$$

Dvs. at tredje ordens momentfunktionen for AR(p) processen bliver, idet  $(k_1, k_2)$  tages i delplanen (1) på figur 4.1, dvs.

$$0 \leq k_1, \quad 0 \leq k_1 \leq k_2$$

$$\begin{aligned} M_3(k_1, k_2) &= \left\{ \begin{aligned} &\phi_1 M_3(1, 1) + \dots + \phi_p M_3(p, p) + E[Z_t^3] \\ &\phi_1 M_3(k_1-1, k_2) + \dots + \phi_p M_3(k_1-p, k_2) \\ &\phi_1 M_3(k_1-1, k_2) + \dots + \phi_p M_3(k_1-p, k_2) + E[Z_t^2] E[X_t] \end{aligned} \right. \quad (4.12) \end{aligned}$$

hvor ligningerne benyttes for henholdsvis  $\{(k_1, k_2) = (0, 0)\}$  og  $\{(k_1, k_2) \neq (0, 0), k_1 \neq k_2\}$  og  $\{k_1 = k_2 \text{ eller } k_1 = p\}$ .

Disse ligninger er analoge til Yule-Walker ligningerne (3.15).

#### 4.4 Estimation

Tredje ordens momentfunktionen estimeres på tilsvarende måde som autokovariansfunktionen.

For en kontinuert proces for hvilken der foreligger realisationen  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  fås estimatet

$$m_3(u_1, u_2) = \frac{1}{T} \int_0^{D_T} (x(t) - \bar{x})(x(t+|u_1|) - \bar{x})(x(t+|u_2|) - \bar{x}) dt \quad (4.13)$$

hvor integrationsgrænsen  $D_T$  bestemmes af

$$D_T = \begin{cases} 0 & \text{for } |u_1|, |u_2| \text{ eller } |u_2 - u_1| > T \\ T - \max[|u_1|, |u_2|, |u_2 - u_1|] & \text{ellers} \end{cases} \quad (4.14)$$

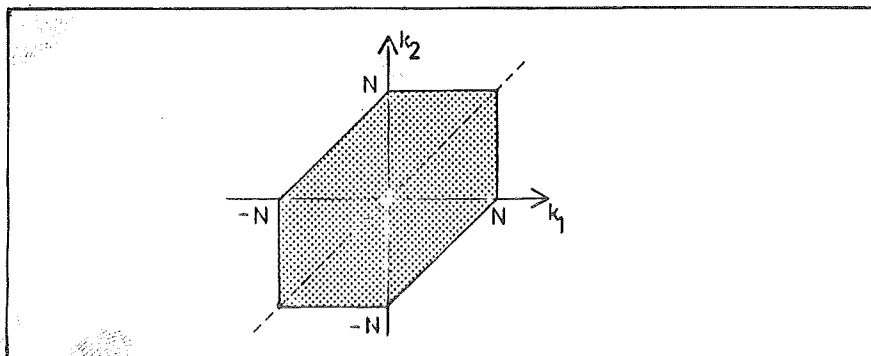
For en tidsrække observeret til tidspunkterne  $t = 1, \dots, N$  er det tilsvarende estimat

$$m_3(k_1, k_2) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{D_N} (x_t - \bar{x})(x_{t+|k_1|} - \bar{x})(x_{t+|k_2|} - \bar{x}) \quad (4.15)$$

hvor den øvre summationsgrænse  $D_N$  bestemmes af

$$D_N = \begin{cases} 0 & \text{for } |k_1|, |k_2| \text{ eller } |k_2 - k_1| \geq N \\ N - \max[|k_1|, |k_2|, |k_2 - k_1|] & \text{ellers} \end{cases}$$

På figur 4.2 er optegnet det område i  $(k_1, k_2)$  - planen, hvor estimatet er forskellig fra 0 i det diskrete tilfælde.



Figur 4.2

#### 4.5 Egenskaber ved estimater

Det forudsættes nu, at processen  $X(t)$  er stationær af mindst 6. orden med  $E[X(t)] = 0$ . Endvidere forudsættes, at kumulantfunktionerne for  $k=2,3,4,6$  er absolut integrable ligesom bispektret (bispektret defineres i kapitel 6).

Under disse forudsætninger gælder følgende (Rosenblatt og Van Ness [32]) analogt til (3.21) og (3.22) for anden ordens tilfældet

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma(T) |E[m_3(u_1, u_2)] - M_3(u_1, u_2)| = 0 \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \text{Cov}[m_3(u_1, u_2), m_3(u_3, u_4)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \{M_6(u_1, u_2, v, v+u_3, v+u_4) - M_3(u_1, u_2)M_3(u_3, u_4)\} dv \end{aligned} \quad (4.17)$$

hvor  $\gamma(T)$  er en reel funktion som er  $o(T)$ .

Ved at benytte sammenhængen mellem moment- og kumulantfunktioner i appendix A, kan integralet omformes

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \{M_6(u_1, u_2, v, v+u_3, v+u_4) - M_3(u_1, u_2)M_3(u_3, u_4)\} dv \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} [C_6(u_1, u_2, v, v+u_3, v+u_4) \\ & + \{M_3(0, u_1, u_2)M_3(v, v+u_3, v+u_4)\}_{10} - M_3(u_1, u_2)M_3(u_3, u_4) \\ & + \{M_2(0, u_1)C_4(u_2, v, v+u_3, v+u_4)\}_{15} \\ & + \{M_2(0, u_1)M_2(u_2, v)M_2(v+u_3, v+u_4)\}_{15}] dv \end{aligned}$$

hvor  $\{ \cdot \}_j$  betyder summen af de  $j$  led, der fås ved ombytning af argumenterne.

Ved at skrive alle leddene ud kan det indses, at integralet er endeligt.

Udtrykkene viser altså, at estimaterne givet ved (4.13) og (4.15) er asymptotisk centrale og asymptotisk konsistente. Endvidere er estimaterne af tredje ordens momentfunktionens værdier i sig selv korrelerede.



## 5. SPEKTRET

I dette afsnit behandles det sædvanlige anden ordens spektrum. Fremstillingen er kortfattet, da dens primære formål er at introducere begreber, notation m.v., som siden benyttes i kap. 6 om bispektret, dvs. tredje ordens spektret.

### 5.1 Definition og grundliggende egenskaber

Der betragtes en r-dimensional stationær proces  $\underline{X}(t)$  hvor

$$\int_{-\infty}^{\infty} |M_{ab}(u)| du < \infty \quad a, b=1, \dots, r \quad (5.1)$$

$M_{ab}(u)$  er momentfunktionen af anden orden for  $(X_a(t), X_b(t+u))$ .

Denne betingelse svarer til at antage, at afhængigheden mellem  $X_a(t)$  og  $X_b(t)$  mindskes for  $u \rightarrow \infty$ . Betingelsen, samt krav om stationaritet og at alle momenter eksisterer, sikrer samtidig, at processen er ergodisk (Brillinger [4]).

Spektret af anden orden for processerne  $X_a(t)$  og  $X_b(t)$  defineres ved

$$\Gamma_{ab}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} M_{2,ab}(u) \cdot \exp(-i2\pi uf) du \quad (5.2)$$

for  $-\infty < f < \infty$  og  $a, b=1, \dots, r$ .

Argumentet  $f$  benævnes frekvensen.

Det bemærkes, at spektret er den Fourier transformerede af moment- eller kumulantfunktionen.

I visse fremstillinger defineres spektret ved

$$\Gamma_{ab}(f) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} M_{2,ab}(u) \cdot \exp(-iu\omega) du$$

hvilket blot svarer til skalaændringen  $f=\omega/2\pi$  ved Fourier transformationen - se appendix B. Frekvensen  $\omega$  betegner da vinkelfrekvensen.

Ved inversion af (5.2) fås

$$M_{2,ab}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{ab}(f) \cdot \exp(i2\pi uf) df \quad (5.3)$$

hvor eksistensen er sikret ved (5.1).

Ud fra symmetriegenskaberne for momentfunktionen fås følgende symmetriegenskaber for spektret

$$\Gamma_{ab}(f) = \Gamma_{ab}(-f)^* = \Gamma_{ba}(-f) = \Gamma_{ab}(f)^* \quad (5.4)$$

hvor \* angiver kompleks konjugering.

Er  $a \neq b$  i (5.2) fås krydsspektret mellem processerne  $X_a(t)$  og  $X_b(t)$

$$\Gamma_{ab}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} M_{ab}(u) \cdot \exp(-i2\pi uf) du \quad (5.5)$$

Da krydskovariansfunktionen  $M_{ab} = M_{2,ab}$  ikke som autokovariansfunktionen er lige (symmetrisk), vil krydsspektret være komplekst.

Realdelen af krydsspektret kaldes co-spektret og imaginærdelen kvadratspektret. Endvidere kaldes modulus amplitudespektret og argumentet fasespektret.

Nu betragtes det almindeligste tilfælde hvor  $a=b$  i (5.2).

Herved fås anden ordens spektret eller blot spektret for processen  $X(t)$

$$\Gamma_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} M_2(u) \cdot \exp(-i2\pi uf) du, \quad -\infty < f < \infty \quad (5.6)$$

For en diskret proces  $X_t$ ,  $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$  fås spektret

$$\Gamma_2(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_2(k) \cdot \exp(-i2\pi kf), \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2} \quad (5.7)$$

Spektret er altså den Fourier transformerede af autokovariansfunktionen. Det bemærkes, at spektret er kontinuert, hvadenten processen er kontinuert eller diskret.

For den diskrete proces med  $\Delta t=1$  optræder kun frekvenserne  $-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$ , hvilket skyldes, at alle øvrige frekvenser er aliased med frekvenser i dette område. Se appendix C.

Da autokovariansfunktionen er en lige funktion, vil Fourier transformationen kun indeholde de lige led, hvorved (5.6) og (5.7) kan skrives

$$\begin{aligned}\Gamma_2(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_2(u) \cdot \cos(2\pi uf) \, du \\ &= 2 \int_0^{\infty} M_2(u) \cdot \cos(2\pi uf) \, du\end{aligned}\quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_2(k) \cdot \cos(2\pi kf) \\ &= M_2(0) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} M_2(k) \cdot \cos(2\pi kf) \quad , \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}\end{aligned}\quad (5.9)$$

hvor  $M_2(0)$  er processens varians.

Spektret er altså en reel funktion og endvidere er spektret ikke-negativt overalt.

Ved inversion af (5.6) og (5.7) fås

$$M_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_2(f) \cdot \exp(i2\pi uf) \, df \quad , \quad -\infty < u < \infty \quad (5.10)$$

$$M_2(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Gamma_2(f) \cdot \exp(i2\pi kf) \, df \quad , \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (5.11)$$

Sættes  $u=0$  fås

$$M_2(0) = \text{Var}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_2(f) \, df \quad (5.12)$$

Dette udtryk viser den meget vigtige egenskab, at spektret angiver, hvorledes processens varians - eller "power" - er fordelt efter frekvenser. Spektret benævnes også power-spektrum eller energispektrum.

Udtrykket (5.12) viser også spektrets lighed med en tæthedsfunktion, hvorfor følgende definitioner er naturlige.

Det integrerede spektrum er

$$G_2(f_0) = \int_{-f_0}^{f_0} \Gamma_2(f) \, df \quad (5.13)$$

og angiver, hvor stor en del af variansen, der skyldes frekvenser mindre end  $f_0$ .

Spektralfordelingen defineres ved

$$F_2(f_0) = \int_{-\infty}^{f_0} \Gamma_2(f) df \quad (5.14)$$

Spektralfordelingen defineres ofte ved teoretiske undersøgelser ved at formulere inversionsformlerne (5.10) og (5.11) som et Stieltjes integral, dvs.

$$M_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi uf) dF_2(f) \quad (5.15)$$

hvilket er analogt til, hvordan fordelingsfunktionen for stokastiske variable kan defineres.

I de følgende afsnit gives en række eksempler på spektre for forskellige processer.

### 5.2 Lineære processer

I det følgende betragtes den meget vigtige og store klasse af processer, som er lineære og stationære.

Formler m.v. er angivet for det kontinuerte tilfælde, men omsettes let til det diskrete ved at erstatte integration med summation m.v.

Der betragtes den lineære proces  $X(t)$

$$X(t) - \mu = \int_0^{\infty} h(v) \cdot Z(t-v) dv \quad (5.16)$$

For denne proces er autokovariansfunktionen i (3.5) fundet til

$$M_{2,X}(u) = \iint_0^{\infty} h(v_1)h(v_2) M_{2,Z}(u+v_1-v_2) dv_1 dv_2 \quad (5.17)$$

Ved anvendelse af (5.6) bliver spektret da

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,X}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_0^{\infty} h(v_1)h(v_2) \cdot M_{2,Z}(u+v_1-v_2) dv_1 dv_2 \right\} \exp(-i2\pi uf) du \\ &\quad y=u+v_1-v_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} h(v_1)h(v_2) \cdot M_{2,Z}(y) \cdot \exp(-i2\pi f(y-v_1+v_2)) dv_1 dv_2 dy \\ &= \int_0^{\infty} h(v_1) \exp(i2\pi v_1 f) dv_1 \cdot \int_0^{\infty} h(v_2) \exp(-i2\pi v_2 f) dv_2 \cdot \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} M_{2,Z}(y) \cdot \exp(-i2\pi y f) dy \end{aligned}$$



Herefter fås

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,X}(f) &= H(-f) \cdot H(f) \cdot \Gamma_{2,Z}(f) \\ &= |H(f)|^2 \Gamma_{2,Z}(f)\end{aligned}\quad (5.18)$$

hvor

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(v) \cdot \exp(-i2\pi v f) dv \quad (5.19)$$

er frekvensresponsfunktionen, dvs. den Fourier transformerede af impulsresponsfunktionen. Da  $h(v)$  er 0 for  $v < 0$  integreres kun over den positive halvplan.

Frekvensresponsfunktionen er en kompleks funktion, da impulsresponsfunktionen ikke er lige, jfr. ovenfor.

I næste afsnit er spektret udregnet for en hvid støj proces.

Ligning (5.18) viser, at foldning i tidsdomænet (5.17) svarer til multiplikation i frekvensdomænet. Det gælder også omvendt, at foldning i frekvensdomænet svarer til multiplikation i tidsdomænet.

Spektret for processen  $X(t) \cdot Y(t)$ , hvor  $X(t)$  og  $Y(t)$  er uafhængige bliver da

$$\Gamma_{2,XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{2,X}(f-g) \cdot \Gamma_{2,Y}(g) dg \quad (5.20)$$

I tilfældet hvor  $X(t)$  er en normalproces fås spektret for  $X(t)^2$

$$\Gamma_{2,X^2}(f) = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{2,X}(f-g) \cdot \Gamma_{2,X}(g) dg \quad (5.21)$$

De lineære processer er særdeles vigtige, idet netop lineariteten betyder, at de har en række egenskaber, som danner grundlag for en stor del af tidsrækkeanalysen.

### 5.3 MA, AR og ARMA processer

Først beregnes spektret for en hvid støj proces  $Z_t$  med

$$E[Z_t] = 0$$

$$M_2(k) = \sigma_Z^2 \cdot \eta(k)$$

hvor  $\eta(\cdot)$  angiver Kroneckers delta, dvs.  $\eta(k)=1$  for  $k=0$  og  $\eta(k)=0$  for  $k \neq 0$ .

Heraf fås

$$\begin{aligned} \Gamma_2(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_Z^2 \cdot \eta(k) \cdot \exp(-i2\pi kf) \quad , \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2} \\ &= \sigma_Z^2 \end{aligned}$$

Dvs. for en hvid støj proces er spektret konstant lig med variansen, hvilket betyder at alle frekvenser bidrager lige meget til variationen.

Der betragtes nu en diskret MA(1) proces

$$X_t - \mu = (1 - \theta_1^2) Z_t$$

Autokovariansfunktionen er fundet i (3.9)

$$M_2(k) = \begin{cases} \sigma_Z^2 (1 + \theta_1^2) & \text{for } k=0 \\ \sigma_Z^2 (-\theta_1) & \text{for } k=\pm 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

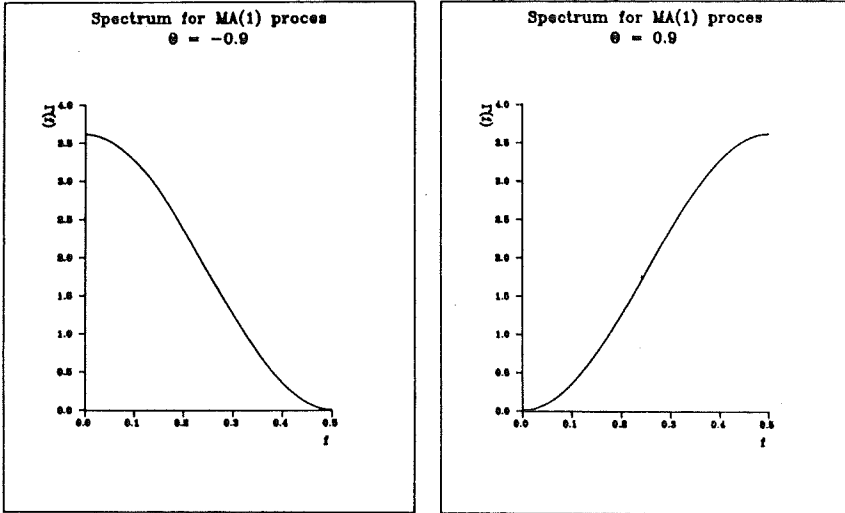
Spektret bliver da

$$\begin{aligned} \Gamma_2(f) &= \sigma_Z^2 \{-\theta_1 \exp(i2\pi f) + (1 + \theta_1^2) - \theta_1 \exp(-i2\pi f)\} \\ &= \sigma_Z^2 \{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \cos(2\pi f)\} \quad , \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Spektret kan også udregnes ved anvendelse af (5.18) med vægtene (impulsresponsfunktionen) givet i afsnit 3.3.

På figur 5.1 er spektret vist for henholdsvis  $\theta_1 = -0.9$  og  $\theta_1 = 0.9$  med  $\sigma_Z^2 = 1$ .

Det ses, at  $\theta_1$  negativ svarer til en højfrekvent proces, mens  $\theta_1$  positiv svarer til en lavfrekvent proces. Dette viser sig også tydeligt hvis realisationer for de to processer sammenholdes.



Figur 5.1

For en diskret AR(1) proces  $X_t$  med  $E[X_t] = 0$

$$(1 - \phi_1 B) X_t = Z_t$$

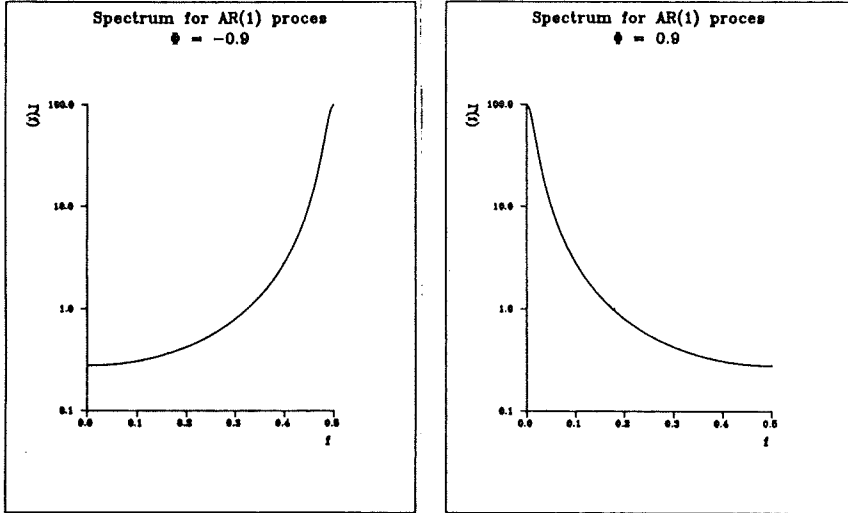
fås af (3.15) og (3.16)

$$M_2(k) = \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1^2} \phi_1^{|k|} \quad (5.24)$$

og spektret af (5.7)

$$\begin{aligned} \Gamma_2(f) &= \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_1^{|k|} \exp(-i2\pi kf) \\ &= \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1^2} \cdot \left( \frac{1}{1 - \phi_1 \exp(-i2\pi f)} + \frac{\phi_1 \exp(i2\pi f)}{1 - \phi_1 \exp(i2\pi f)} \right) \\ &= \frac{\sigma_Z^2}{1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \cos(2\pi f)} \quad , \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.25)$$

På figur 5.2 er spektret optegnet for  $\phi_1 = -0.9$  og  $\phi_1 = 0.9$  og med  $\sigma_z^2 = 1$ . Det ses, at for  $\phi_1 = -0.9$  er svingningerne meget højfrekvente, mens de for  $\phi_1 = 0.9$  er lavfrekvente. Bemærk logaritmisk spektralskala.



Figur 5.2

En ARMA(p,q) proces  $X_t$

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)Z_t$$

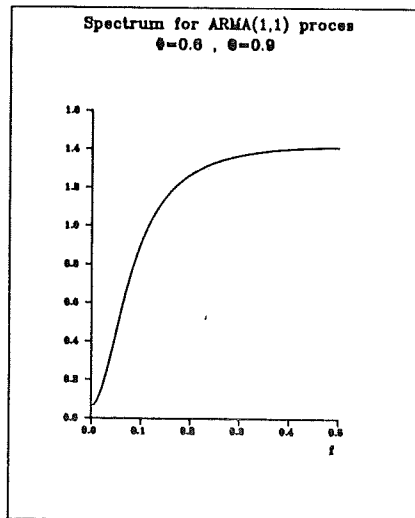
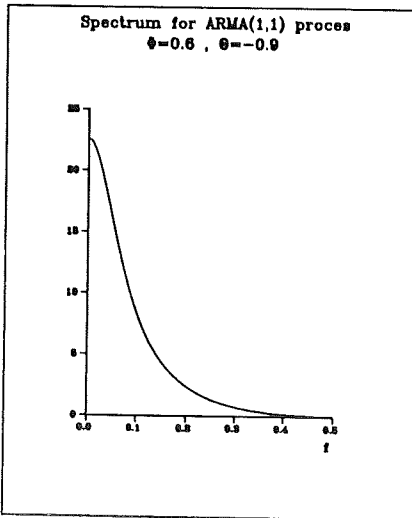
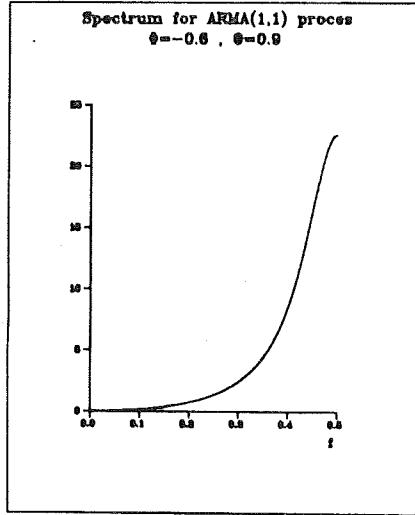
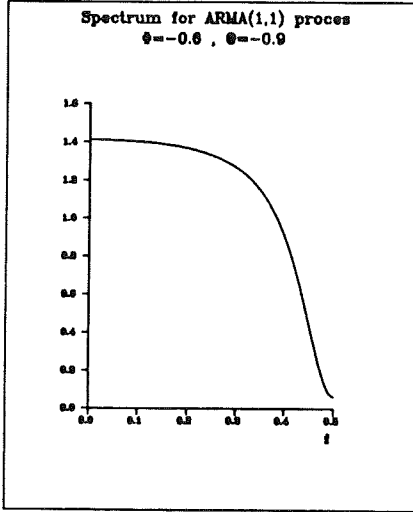
har frekvensresponsfunktionen

$$H(f) = \frac{1 - \theta_1 \exp(-i2\pi f) - \dots - \theta_q \exp(-i2\pi f)}{1 - \phi_1 \exp(-i2\pi f) - \dots - \phi_p \exp(-i2\pi f)} \quad (5.26)$$

Spektret fås af (5.18)

$$\Gamma_2(f) = \sigma_z^2 \cdot |H(f)|^2, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2} \quad (5.27)$$

På fig. 5.3 er vist spektret for en ARMA(1,1) proces med forskellige valg af  $\phi$  og  $\theta$ . Som det fremgår kan en ARMA proces være både lav- og højfrekvent samt som i dette eksempel meget bredbåndet.



Figur 5.3

### 5.4 Estimation

I dette afsnit angives, hvorledes spektret estimeres. Formler m.v. angivet for kontinuerte processer "oversættes" let til at gælde for diskrete processer og omvendt.

Det antages i det følgende, at der for en kontinuert proces  $X_t$  foreligger en realisation  $0 \leq t < T$  og for en diskret proces tidsrækken  $X_t$ ,  $t=1, 2, \dots, N$ .

Et umiddelbart estimat for spektret fås ved i (5.6) og (5.7) at erstatte autokovariansfunktionen med et estimat  $m_2(u)$ , hvorved der fås følgende estimater for spektret

$$S_2(f) = \int_{-T}^T m_2(u) \cdot \exp(-i2\pi uf) du, \quad -\infty < f < \infty \quad (5.29)$$

$$S_2(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} m_2(k) \cdot \exp(-i2\pi kf), \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2} \quad (5.30)$$

hvor integrations- og summationsområdet er indskrænket, da estimatet for autokovariansfunktionen er 0 udenfor.

I (3.23) er angivet et approximativt udtryk for forventningsværdien af autokovariansfunktionsestimatet. Ved udnyttelse af dette fås

$$\begin{aligned} E[S_2(f)] &\approx \int_{-T}^T M_2(u) (1 - |u|/T) \exp(-i2\pi uf) du, \quad |u| \leq T \\ &= \int_{-T}^T T \cdot \left[ \frac{\sin(\pi T f)}{T f \pi} \right]^2 \Gamma_2(f-g) dg \end{aligned} \quad (5.31)$$

Forventningsværdien af spektralestimatet fås altså ved at folde det sande spektrum med funktionen

$$T \cdot \left[ \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} \right]^2 \quad (5.32)$$

Da denne funktion nærmer sig en deltafunktion  $T \rightarrow \infty$  fås

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[S_2(f)] = \Gamma_2(f) \quad (5.33)$$

Dvs. estimatet (5.29) er asymptotisk centralt (unbiased).

I det kontinuerte tilfælde fås kovariansen mellem spektral-estimatets værdier til forskellige frekvenser for en hvid støj proces ( Jenkins & Watts [17] s.415 )

$$\text{Cov}[S_2(f_1), S_2(f_2)] = \frac{\kappa_4}{T} + \sigma^4 \left\{ \left( \frac{\sin \pi T(f_1 + f_2)}{\pi T(f_1 + f_2)} \right)^2 + \left( \frac{\sin \pi T(f_1 - f_2)}{\pi T(f_1 - f_2)} \right)^2 \right\} \quad (5.34)$$

hvor  $\kappa_4$  er kumulantfunktionen af 4. orden. Hvis processen er normal er  $\kappa_4 = 0$ .

Af (5.34) fås i det kontinuerte tilfælde

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}[S_2(f)] = \sigma^4 = (\Gamma_2(f))^2 \quad (5.35)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Cov}[S_2(f_1), S_2(f_2)] = 0 \quad (5.36)$$

Dvs. selvom estimerne er asymptotisk ukorrelerede, vil variansen være uafhængig af realisationens længde T. Denne ubehagelige egenskab gælder også generelt for ikke hvid støj processer.

I det diskrete tilfælde fås tilsvarende for en hvid støj proces ( Jenkins & Watts [17] s.238)

$$\text{Cov}[S_2(f_1), S_2(f_2)] = \frac{\kappa_4}{N} + \sigma^4 \left\{ \left( \frac{\sin \pi N(f_1 + f_2)}{N \sin \pi(f_1 + f_2)} \right)^2 + \left( \frac{\sin \pi N(f_1 - f_2)}{N \sin \pi(f_1 - f_2)} \right)^2 \right\} \quad (5.37)$$

og følgende approximative resultater

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}[S_2(f)] = \begin{cases} \sigma^4 & f \neq 0, \pm \frac{1}{2} \\ 2\sigma^4 & f = 0, \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.38)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Cov}[S_2(f_1), S_2(f_2)] = 0 \quad (5.39)$$

Altså lignende ubehagelige forhold for variansen som i det kontinuerte tilfælde. Endvidere bemærkes diskontinuiteterne for variansen med en faktor 2 for  $f = 0, \pm \frac{1}{2}$ .

For de såkaldt fundamentale eller harmoniske frekvenser  $f_k = \{0, 1/N, 2/N, \dots, \frac{1}{2}\}$  gælder (5.38) og (5.39) dog eksakt for normal hvid støj processer og med bidraget  $\kappa_4/N$  for ikke normal processer.

Endvidere gælder for de harmoniske frekvenser, at estimerne er  $\chi^2$ -fordelte med 2 frihedsgrader, når processen er en normal hvid støj proces, dvs.

$$S_2(f) \in \begin{cases} \sigma^2 \cdot \chi^2(2) & , f \neq 0, \pm \frac{1}{2} \\ \sigma^2 \cdot \chi^2(1) & , f = 0, \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.40)$$

Estimerne (5.29) og (5.30) er altså asymptotisk centrale, men ikke asymptotisk konsistente, da variansen er uafhængig af antallet af observationer respektive realisationens længde.

En umiddelbar måde at forbedre estimatet på i det diskrete tilfælde, hvor nu kun de fundamentale frekvenser betragtes, er ved at tage midling af formen

$$S_2'(f) = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=-m}^m S_2(f+j) \quad (5.41)$$

Herved bliver variansen for en normal hvid støj proces

$$\text{Var}[S_2'(f)] = \begin{cases} \frac{1}{2m+1} \text{Var}[S_2(f)] & f \neq 0, \pm \frac{1}{2} \\ \frac{1}{m} \text{Var}[S_2(f)] & f = 0, \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.42)$$

hvor  $\text{Var}[S_2(f)]$  er givet ved (5.38).

Man kan også vægte de enkelte estimer med vægtene  $W_j$ , hvor  $\sum W_j = 1$

$$S_2''(f) = \sum_{j=-m}^m W_j \cdot S_2(f+j) \quad (5.43)$$



Herved bliver variansen

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=-m}^m w_j^2 \right)^2 \cdot \text{Var}[S_2(f)] + O(1/N) \quad , \quad f \neq 0, \pm \frac{1}{2} \\ \text{Var}[S_2''(f)] = & \begin{cases} \left( \sum_{j=-m}^m w_j^2 \right)^2 \cdot \text{Var}[S_2(f)] & , \quad f \neq 0, \pm \frac{1}{2} \\ \left\{ \left( \sum_{j=1}^m w_j^2 \right) / \left( \sum_{j=1}^m w_j \right)^2 \right\} \text{Var}[S_2(f)] & , \quad f = 0, \pm \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ideen i det sidste estimat  $S_2''(f)$  danner grundlag for de såkaldt glattede estimater, der omhandles i næste afsnit.

### 5.5 Glattede estimater

Der indføres nu en klasse af estimater - de såkaldt glattede estimater, der foruden at være asymptotisk centrale er asymptotisk konsistente.

I det kontinuerte tilfælde fås det glattede estimat  $\bar{S}_2(f)$

$$\begin{aligned} \bar{S}_2(f) &= \int_{-M}^M w(u) \cdot m_2(u) \cdot \exp(-i2\pi uf) \, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \cdot S_2(f-g) \, dg \end{aligned} \quad (5.45)$$

hvor

$$W(g) = \int_{-M}^M w(u) \cdot \exp(-i2\pi ug) \, du \quad (5.46)$$

I det diskrete tilfælde haves

$$\begin{aligned} \bar{S}_2(f) &= \sum_{k=-M}^M w(k) \cdot m_2(k) \cdot \exp(-i2\pi kf) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W(g) \cdot S_2(f-g) \, dg \end{aligned} \quad (5.47)$$

hvor

$$W(g) = \sum_{s=-M}^M w(s) \cdot \exp(-i2\pi sg) \quad (5.48)$$

hvor  $S_2(\cdot)$  angiver estimaterne (5.29) og (5.30).

Funktionen  $w(k)$  som autokovariansfunktionsestimatet multipliceres med kaldes en vægtsfunktion eller et lag vindue, mens dens Fourier transformerede  $W(g)$  kaldes et spektral vindue.

Et lag vindue  $w(u)$  defineres ved

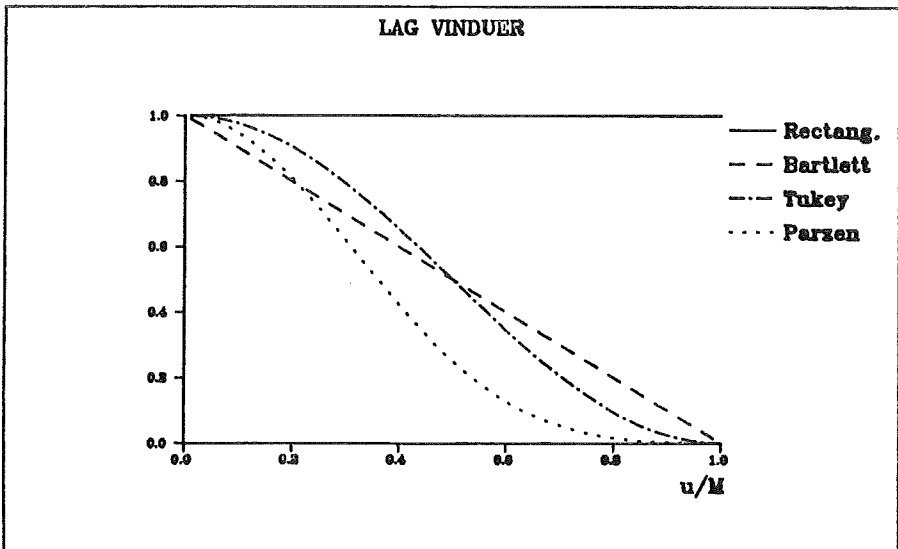
- i)  $w(0)=1$
- ii)  $w(u)=w(-u)$
- iii)  $w(u)=0$  for  $|u|>M$ ,  $M<T$
- iv)  $\int_{-\infty}^{\infty} w(u)^2 du$

Spektralvinduet  $W(g)$  tilfredsstiller

- i)  $W(g)=W(-g)$
- ii)  $W(g_1)=0$   $|W(g_1^+)-W(g_1^-)|=2/M$  hvor  $g_1^+=-g_1^-$
- iii)  $\int_{-\infty}^{\infty} W(g) dg = 1$

Der eksisterer en række standardvinduer, som næsten altid benyttes i praksis. I tabel 5.1 er de almindeligste angivet. Almindeligvis benyttes de kontinuerte lag vinduer også i det diskrete tilfælde.

Størrelsen  $M$  betegner lag vinduets bredde, dvs. fra hvilket lag  $k=M$  autokovariansfunktionen regnes at være 0.



Figur 5.4

Rektangulær	$w_R(u) = 1$ $W_R(g) = 2M \cdot \frac{\sin 2\pi g M}{2\pi g M}$
Bartlett	$w_B(u) = 1 -  u /M$ $W_B(g) = M \cdot \left[ \frac{\sin \pi g M}{\pi g M} \right]^2$
Tukey (Hanning)	$w_T(u) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\pi u/M))$ $W_T(g) = M \cdot \frac{\sin 2\pi g M}{2\pi g M} \cdot \frac{1}{1 - (2\pi g M)^2}$
Hamming	$w_H(u) = 0.54 + 0.46 \cdot \cos(\pi u/M)$ $W_H(g) = M \frac{\sin 2\pi g M}{2\pi g M} \cdot \frac{1.08 - 0.64g^2 M^2}{1 - 4\pi g^2 M^2}$
Parzen	$w_P(u) = \begin{cases} 1 - 6(u/M)^2 + 6( u /M)^3, &  u  \leq M/2 \\ 2(1 -  u /M)^3, & M/2 <  u  \leq M \end{cases}$ $W_P(g) = (3/4)M \left[ \frac{\sin \pi g M/2}{\pi g M/2} \right]^4$

Tabel 5.1

### 5.6 Egenskaber ved glattede estimater

For de glattede estimater (5.45) og (5.47) gælder følgende resultater ( Brillinger [4] )

$$E[\bar{S}_2(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} W(f-g) \cdot \Gamma_2(f) dg + O(M/T) \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\bar{S}_2(f_1), \bar{S}_2(f_2)] &= \frac{1}{T} \{ \int_{-\infty}^{\infty} W(f_1-g)W(f_2+g) \cdot \Gamma_2^2(g) dg \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} W(f_1-g)W(f_2-g) \cdot \Gamma_2^2(g) dg \} + O\left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Heraf fås

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\bar{S}_2(f)] = \Gamma_2(f) \quad (5.51)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Cov}[\bar{S}_2(f_1), \bar{S}_2(f_2)] = 0 \quad (5.52)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}[\bar{S}_2(f)] = \frac{1}{T} \cdot \Gamma_2^2(f) \cdot I \quad (5.53)$$

og i det diskrete tilfælde

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}[\bar{S}_2(f)] = \begin{cases} \frac{1}{T} \cdot \Gamma_2^2(f) \cdot I & , f \neq 0, \pm \frac{1}{2} \\ \frac{2}{T} \cdot \Gamma_2^2(f) \cdot I & , f = 0, \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.54)$$

hvor størrelsen  $I$  er givet ved

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} W(g)^2 dg = \int_{-\infty}^{\infty} w(u)^2 du \quad (5.55)$$

hvor det sidste lighedstegn følger af Parsevals sætning.

Dvs. det glattede estimat er asymptotisk centralt og asymptotisk konsistent. Endvidere er værdier i det glattede estimat asymptotisk uafhængige.

Det bemærkes, at variansen i det diskrete tilfælde har diskontinuiteter i frekvensintervallets endepunkter  $|f| = \frac{1}{2}$  og for  $f = 0$ .

Der gælder endvidere, at estimerne er konsistente i middelvadrat, dvs.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[(\bar{S}_2(f) - \Gamma_2^2(f))^2] = 0 \quad (5.56)$$

hvis  $M \rightarrow \infty$  og  $T/M \rightarrow \infty$  for  $T \rightarrow \infty$ .

Af (5.53) og (5.54) fremgår, at variansen er stor for store  $M$ , da  $I$  herved bliver stor. For at gøre variansen lille skal  $M$  da være lille, men dette er det stik modsatte af, hvad der er nødvendigt for at sikre lille skævhed, idet skævheden ( bias )  $B(f)$  for de almindelige vinduer er af formen

$$\begin{aligned} B(f) &= E[\bar{S}_2(f)] - \Gamma_2(f) \\ &= \frac{c}{M} \Gamma_2''(f) + O(M^{-3}) \end{aligned} \quad (5.57)$$

hvor  $c$  er en positiv konstant og  $\Gamma_2''$  er den anden afledede af spektret.

Dvs. lille skævhed fås for store  $M$ , så  $M$  må fastlægges som et kompromis mellem ønsket om lille skævhed og lille varians.

For det glattede spektrum (5.45) og (5.47) gælder følgende ( Jenkins & Watts [7] s.253 )

$$\bar{S}_2(f) \text{ approx. } a \cdot \chi^2(\nu) \quad (5.58)$$

hvor

$$\nu \approx \frac{2 \cdot E[\bar{S}_2(f)]^2}{\text{Var}[\bar{S}_2(f)]} \quad (5.59)$$

$$a \approx \frac{E[\bar{S}_2(f)]}{\nu} \quad (5.60)$$

Ved anvendelse af (5.51) og (5.53) fås

$$\nu \approx \frac{2T}{I} \quad (5.61)$$

$$a \approx \frac{\Gamma_2(f)}{\nu} \quad (5.62)$$

Herudfra kan dannes et approximativt konfidensinterval for det teoretiske spektrum  $\Gamma_2(f)$  ved

$$\left[ \frac{v \cdot \bar{S}_2(f)}{\chi^2(v)_{1-\alpha/2}}, \frac{v \cdot \bar{S}_2(f)}{\chi^2(v)_{\alpha/2}} \right] \quad (5.63)$$

Afbildes spektret, som det ofte sker i en logaritmisk skala, fås konfidensintervallet for  $\log \Gamma_2(f)$  ved

$$\left[ \log \bar{S}_2(f) + \log \frac{v}{\chi^2(v)_{1-\alpha/2}}, \log \bar{S}_2(f) + \log \frac{v}{\chi^2(v)_{\alpha/2}} \right] \quad (5.64)$$

### 5.7 Periodogram

Periodogrammet spiller en vigtig rolle i forbindelse med analyse af tidsrækker.

For en diskret proces  $X_t$  for hvilken der foreligger observationer  $t=1, \dots, N$ , defineres den Fourier transformerede af tidsrækken  $x_1, \dots, x_N$  ved

$$d(f) = \sum_{k=1}^N x_k \cdot \exp(-i2\pi kf) \quad (5.65)$$

hvor  $f$  antager værdierne  $f_k = \{0, 1/N, \dots, \frac{1}{2}\}$ , dvs. de fundamentale frekvenser.

Periodogrammet defineres da ved

$$I_2(f) = \frac{1}{N} |d(f)|^2 \quad (5.66)$$

Ved omskrivning fås

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{N} \cdot \left\{ \left( \sum_{k=1}^N x_k \cdot \cos 2\pi kf \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N x_k \cdot \sin 2\pi kf \right)^2 \right\} \\ &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} m_2(k) \cdot \exp(-i2\pi kf) \end{aligned}$$

hvilket viser, at periodogrammet angiver et "råt" eller uglattet estimat for spektret.

Det normerede kumulerede periodogram defineres ved

$$C_2(f_j) = \frac{2}{N \cdot s^2} \sum_{i=1}^j I_2(f_i) \quad , \quad j=1, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (5.67)$$

hvor  $s^2$  er tidsrækkens empiriske varians.

Det normerede kumulerede periodogram benyttes til, at teste om en tidsrække kan regnes at være hvid støj, da variansen i så fald fordeler sig ligeligt på frekvenserne  $-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$  - se afsnit 5.3.

Hvis man derfor plotter  $C_2(f)$  som funktion af frekvenserne  $0 \leq f < \frac{1}{2}$  (symmetrien udnyttes), vil dette give en ret linie fra  $(0,0)$  til  $(\frac{1}{2},1)$ , hvis forudsætningen om hvid støj er opfyldt.

Da  $C_2(f)$  har egenskaber som en fordelingsfunktion, kan som et approximativt test anvendes et Kolmogorov-Smirnov test for fordelingsstype, hvorved der kan indtegnes et sæt konfidensgrænser over og under den teoretiske linie, dvs. linien fra  $(0,0)$  til  $(\frac{1}{2},1)$ . Konfidensgrænserne indtegnes i afstanden  $\pm K_\alpha / \sqrt{q}$ , hvor  $q=(N-1)/2$  for  $N$  ulige og  $q=(N-2)/2$  for  $N$  lige.

Approximative konfidensgrænser fås af tabel 5.2

Signifikansniveau	0.01	0.05	0.10	0.25
$K_\alpha$	1.63	1.36	1.22	1.02

Tabel 5.2

1.  $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$   
 $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

2.  $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$   
 $\frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$



## 6. BISPEKTRET

Dette kapitel er opbygget på samme måde som kapitel 5 om anden ordens spektret, så det er muligt at sammenholde spektret og bispektret. Kapitlet her indeholder mange formler m.v., mens egenskaber og fortolkning m.m. af bispektret hovedsageligt kan findes i kapitel 7.

### 6.1 Definition og grundliggende egenskaber

Der betragtes en stationær proces  $X(t)$ , for hvilken der gælder

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |M_3(u_1, u_2)| du_1 du_2 < \infty \quad (6.1)$$

Bispektret for  $X(t)$  defineres da ved

$$\Gamma_3(f_1, f_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} M_3(u_1, u_2) \exp(-i2\pi(u_1 f_1 + u_2 f_2)) du_1 du_2 \quad , \quad (6.2)$$

$$-\infty < f_1, f_2 < \infty$$

Er  $X_t$  en diskret proces, hvor tredje ordens momentfunktionen tilfredsstiller den diskrete form af (6.1), defineres bispektret tilsvarende ved

$$\Gamma_3(f_1, f_2) = \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} M_3(k_1, k_2) \exp(-i2\pi(k_1 f_1 + k_2 f_2)) \quad , \quad (6.3)$$

$$-\frac{1}{2} \leq f_1, f_2 < \frac{1}{2}$$

Bispektret er altså den to-dimensionale Fourier transformation af tredje ordens moment- eller kumulantfunktionen.

Da tredje ordens momentfunktionen ikke er en lige funktion er bispektret en kompleks funktion af to variable.

De to variable frekvenser  $f_1$  og  $f_2$  er et frekvenspar eller en bifrekvens af den variable frekvens  $f$  i spektret. Derfor er frekvenser  $|f| < \frac{1}{2}$  aliased i det diskrete tilfælde. Se appendix C.

Ved inversion fås

$$M_3(u_1, u_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma_3(f_1, f_2) \exp(i2\pi(u_1 f_1 + u_2 f_2)) df_1 df_2, \quad (6.4)$$

$$-\infty < u_1, u_2 < \infty$$

$$M_3(k_1, k_2) = \iint_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Gamma_3(f_1, f_2) \exp(i2\pi(k_1 f_1 + k_2 f_2)) df_1 df_2, \quad (6.5)$$

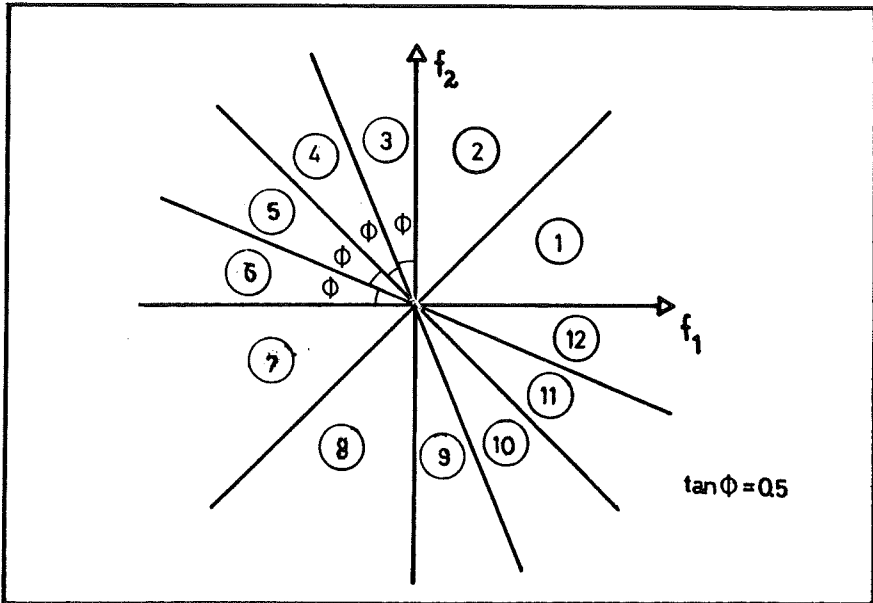
$$k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots$$

Som følge af symmetriegenskaberne ved tredje ordens momentfunktionen (4.3), gælder følgende symmetrier for bispektret

$$\Gamma_3(f_1, f_2) = \Gamma_3(f_2, f_1) = \Gamma_3(f_1, -f_1 - f_2) = \Gamma_3(-f_1, -f_2)^* \quad (6.6)$$

hvor \* angiver kompleks konjugering.

Heraf følger at bispektret er fuldstændigt bestemt i hele frekvensplanen  $(f_1, f_2)$  ud fra værdierne i en enkelt af delplanerne (1) - (12) (incl. grænser) på figur 6.1.



Figur 6.1

Ved at sætte  $(u_1, u_2) = (0, 0)$  i (6.4) fås

$$\begin{aligned} M_3(0,0) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma_3(f_1, f_2) df_1 df_2 \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[\Gamma_3(f_1, f_2)] df_1 df_2 + i \iint_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}[\Gamma_3(f_1, f_2)] df_1 df_2 \end{aligned}$$

hvor  $\operatorname{Re}[\cdot]$  og  $\operatorname{Im}[\cdot]$  angiver henholdsvis real- og imaginærdel.

Da  $M_3(0,0)$  er reel, når  $X(t)$  er en reel proces, fås

$$M_3(0,0) = \iint_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[\Gamma_3(f_1, f_2)] df_1 df_2 \quad (6.7)$$

$$0 = \iint_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}[\Gamma_3(f_1, f_2)] df_1 df_2 \quad (6.8)$$

Da  $M_3(0,0) = \gamma_1 M_2(0)^{3/2}$  - se (4.2) - hvor  $\gamma_1$  er skævhedsmålet, ses at realdelen af bispektret viser, hvorledes processens skævhed fordeler sig på bifrekvenser eller frekvenspar.

Ved en bifrekvens forstås her et frekvenspar, dvs. to frekvenser hvis "samspil" giver anledning til en større eller mindre bispektralværdi.

Som for spektret defineres også det integrerede bispektrum

$$I_3(f_1', f_2') = \int_{-f_1'}^{f_1'} \int_{-f_2'}^{f_2'} \Gamma_3(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (6.9)$$

Bispektralfordelingen defineres ved

$$F_3(f_1', f_2') = \int_{-\infty}^{f_1'} \int_{-\infty}^{f_2'} \Gamma_3(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (6.10)$$

eller ved at udtrykke (6.4) som et Stieltjes integral

$$M_3(u_1, u_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi(u_1 f_1 + u_2 f_2)) dF_3(f_1, f_2) \quad (6.11)$$

I næste afsnit gives eksempler på bispektret for specielle procestyper og specielle processer.

## 6.2 Lineære processer

For den lineære proces  $X(t)$

$$X(t) - \mu = \int_0^{\infty} h(v)Z(t-v)dv \quad (6.12)$$

hvor  $Z(t)$  er en hvid støj proces (ikke nødvendigvis normal), er tredje ordens momentfunktionen (4.5) fundet til

$$\begin{aligned} M_{3,X}(u_1, u_2) &= E[Z(t)^3] \cdot \int_0^{\infty} h(v)h(v+u_1)h(v+u_2)dv \\ &= \iiint_0^{\infty} h(v_1)h(v_2)h(v_3)M_{3,Z}(u_1+v_1-v_2, u_2+v_1-v_3) \\ &\quad dv_1 dv_2 dv_3 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Bispektret for  $X(t)$  bliver da ved anvendelse af (6.2)

$$\begin{aligned} \Gamma_{3,X}(f_1, f_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} [\iiint_0^{\infty} h(v_1)h(v_2)h(v_3)M_{3,Z}(u_1+v_1-v_2, u_2+v_1-v_3) \\ &\quad dv_1 dv_2 dv_3] \cdot \exp(-i2\pi(u_1 f_1 + u_2 f_2)) du_1 du_2 \\ & \quad y_1 = u_1 + v_1 - v_2 \quad y_2 = u_2 + v_1 - v_3 \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} [\iiint_0^{\infty} h(v_1)h(v_2)h(v_3)M_{3,Z}(y_1, y_2) \\ &\quad \exp(-i2\pi((y_1 - v_1 + v_2)f_1 + (y_2 - v_1 + v_3)f_2)] dv_1 dv_2 dv_3 dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^{\infty} h(v_1) \exp(i2\pi v_1(f_1 + f_2)) dv_1 \cdot \int_0^{\infty} h(v_2) \exp(-i2\pi v_2 f_1) dv_2 \\ &\quad \int_0^{\infty} h(v_3) \exp(-i2\pi v_3 f_2) dv_3 \cdot \\ &\quad \iint_{-\infty}^{\infty} M_{3,Z}(y_1, y_2) \exp(-i2\pi(y_1 f_1 + y_2 f_2)) dy_1 dy_2 \\ &= H(f_1) \cdot H(f_2) \cdot H(-(f_1 + f_2)) \cdot \Gamma_{3,Z}(f_1, f_2) \end{aligned} \quad (6.14)$$

hvor

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(v) \cdot \exp(-i2\pi v f) dv \quad (6.15)$$

er systemets frekvensresponsfunktion.

### 6.3 MA, AR og ARMA processer

Der bestemmes først bispektret for en hvid støj proces  $Z(t)$  med

$$E[Z(t)] = 0$$

$$M_2(u) = \sigma_Z^2 \cdot \delta(u)$$

$$M_3(u_1, u_2) = \mu_3 \cdot \delta(u_1) \cdot \delta(u_2) = \gamma_1 \cdot \sigma_Z^3 \delta(u_1) \cdot \delta(u_2)$$

hvor  $\mu_3 = E[Z(t)^3]$  er det centrale moment af tredje orden (2.2).

Bispektret bliver da

$$\begin{aligned} \Gamma_3(f_1, f_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mu_3 \delta(u_1) \delta(u_2) \exp(-i2\pi(u_1 f_1 + u_2 f_2)) du_1 du_2 \\ &= \mu_3 \\ &= \gamma_1 \cdot \sigma_Z^3 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dvs. bispektret er reelt og proportionalt med skævheden  $\gamma_1$  for  $Z(t)$ . Er  $Z(t)$  en normalproces er  $\gamma_1 = 0$ , dvs. bispektret er 0 for en normal hvid støj proces. I appendix A er angivet  $\mu_3$  for forskellige processer.

For en MA(1) proces  $X_t$

$$X_t - \mu = (1 - \theta_1 B) Z_t$$

fås af (4.8) tredje ordens momentfunktionen

$$M_3(k_1, k_2) = \begin{cases} \mu_3 \cdot (1 - \theta_1^3) & (k_1, k_2) = (0, 0) \\ \mu_3 \cdot (-\theta_1) & (k_1, k_2) = (1, 0) \\ \mu_3 \cdot (\theta_1^2) & (k_1, k_2) = (1, 1) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

idet  $0 \leq k_1$  og  $0 \leq k_2 \leq k_1$ , dvs.  $(k_1, k_2)$  taget i delplan (1) på figur 4.1.

Bispektret bliver da

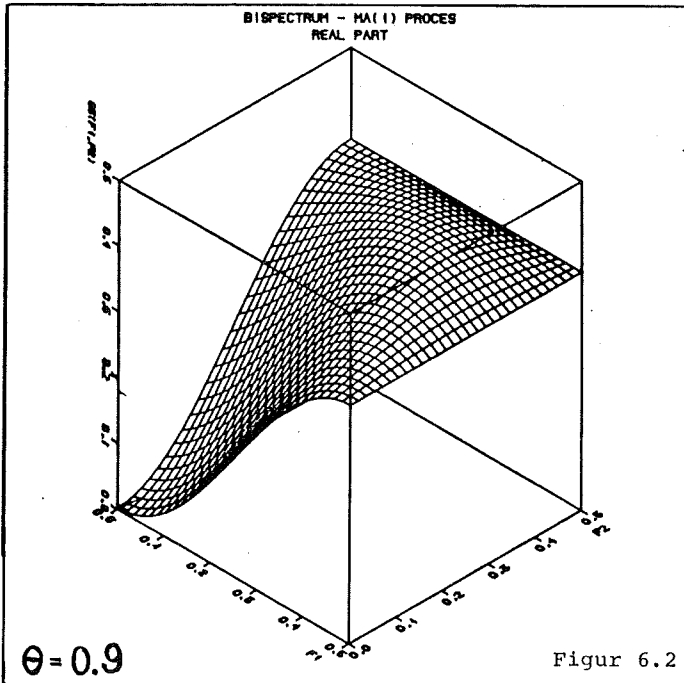
$$\begin{aligned} \Gamma_{3,X}(f_1, f_2) &= \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} M_{3,Z}(k_1, k_2) \cdot \exp(-i2\pi(k_1 f_1 + k_2 f_2)) \\ &= \mu_3 \{ (1 - \theta_1^3) - \theta_1 [\exp(i2\pi(f_1 + f_2)) + \exp(-i2\pi f_1) + \\ &\quad \exp(-i2\pi f_2)] + \theta_1^2 [\exp(i2\pi f_1) + \exp(i2\pi f_2) + \\ &\quad \exp(-i2\pi(f_1 + f_2))] \} \quad , \quad -\frac{1}{2} \leq f_1, f_2 < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ved opdeling i real- og imaginærdel fås

$$\begin{aligned} \text{Re}[\Gamma_{3,X}(f_1, f_2)] &= \mu_3 \{ (1 - \theta_1^3) + (\theta_1^2 - \theta_1) [\cos 2\pi f_1 + \cos 2\pi f_2 + \\ &\quad \cos 2\pi(f_1 + f_2)] \} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}[\Gamma_{3,X}(f_1, f_2)] &= \mu_3 \{ (\theta_1^2 + \theta_1) [\sin 2\pi f_1 + \sin 2\pi f_2 - \\ &\quad \sin 2\pi(f_1 + f_2)] \} \end{aligned} \quad (6.19)$$

På figur 6.2 er bispektret optegnet for henholdsvis  $\theta_1 = -0.9$  og  $\theta_1 = 0.9$  med  $\mu_3 = 1$ .



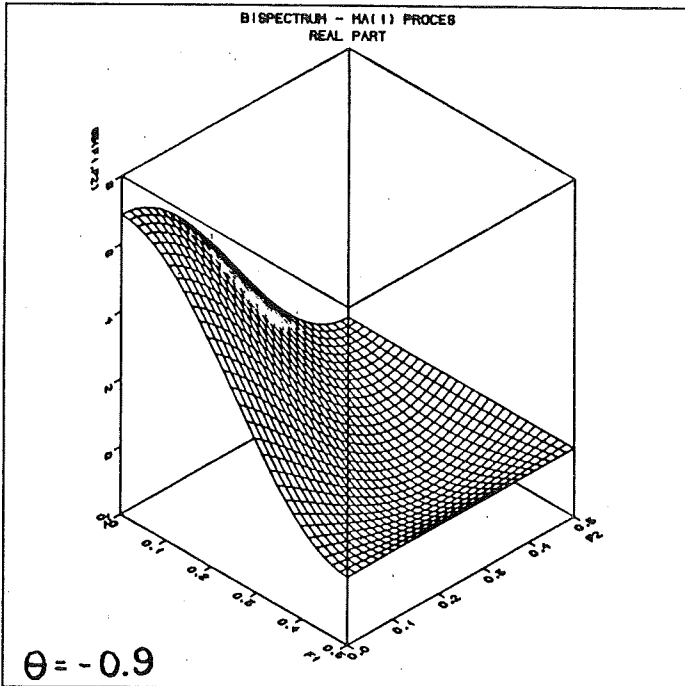
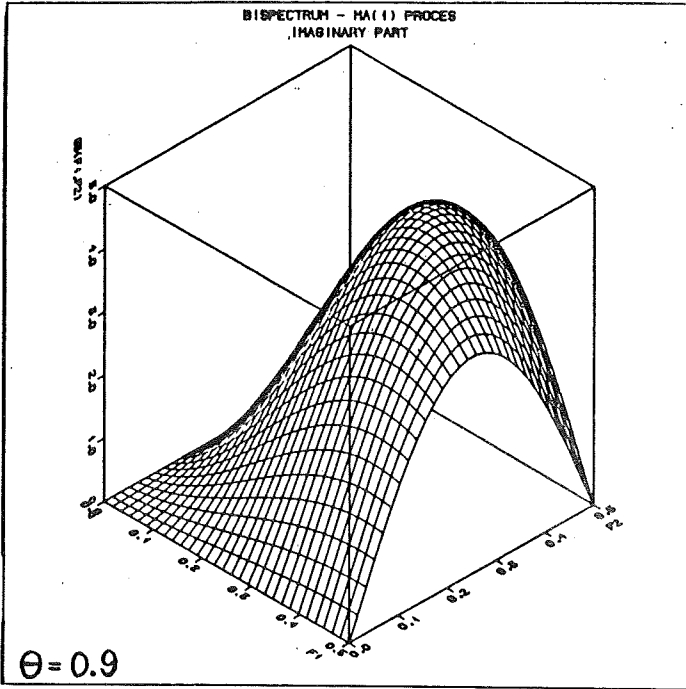
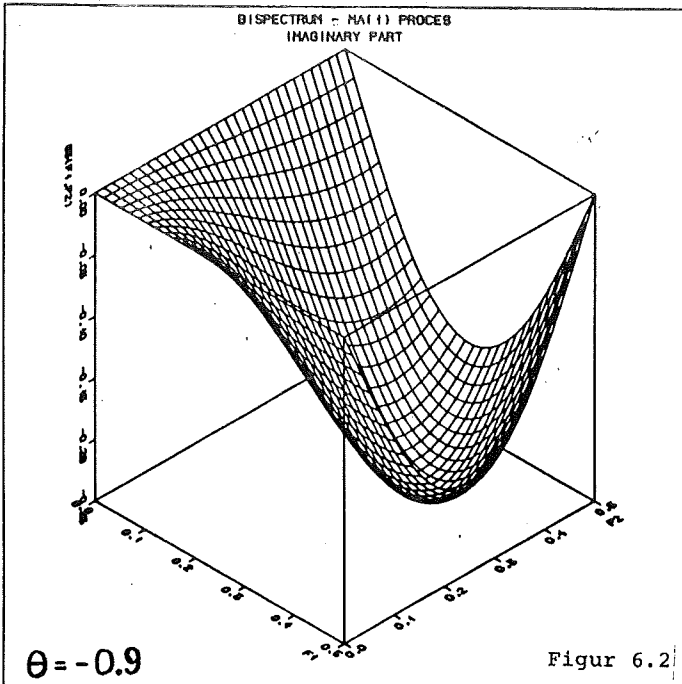


Figure 6.2



Der betragtes nu en AR(1) proces  $X_t$  med  $E[X_t] = 0$

$$(1 - \phi_1 B)X_t = Z_t$$

Tredje ordens momentfunktionen for  $X_t$  fås af (4.12)

$$M_3(k_1, k_2) = \begin{cases} M_3(1, 1) + \mu_3 & \text{for } (k_1, k_2) = (0, 0) \\ M_3(k_1 - 1, k_2) & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor  $\mu_3 = E[Z_t^3]$  og  $0 \leq k_1$  og  $0 \leq k_2 \leq k_1$ .

Heraf fås

$$M_3(k_1, k_2) = \frac{1}{1 - \phi_1^3} \phi_1^{k_1 + k_2} \cdot \mu_3 \quad (6.20)$$



Bispektret bliver da

$$\Gamma_3(f_1, f_2) = \frac{\mu_3}{1-\phi_1^3} \left\{ \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} \phi_1^{k_1+k_2} \exp(-i2\pi(k_1 f_1 + k_2 f_2)) \right\} \quad (6.21)$$

For en ARMA(p, q) proces  $X_t$

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

$$(1-\phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)X_t = (1-\theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)Z_t$$

haves frekvensresponsfunktionen

$$H(f) = \frac{1-\theta_1 \exp(-i2\pi f) - \dots - \theta_q \exp(-i2\pi q f)}{1-\phi_1 \exp(-i2\pi f) - \dots - \phi_p \exp(-i2\pi p f)} \quad (6.22)$$

Bispektret fås da af (6.14) og (6.16)

$$\Gamma_3(f_1, f_2) = \gamma_1 \cdot \sigma_Z^3 \cdot H(f_1) \cdot H(f_2) \cdot H(-(f_1 + f_2)) \quad (6.23)$$

#### 6.4 Estimation

Ved estimation af bispektret benyttes samme fremgangsmåde som ved estimation af spektret. Der tages udgangspunkt i et "rå" estimat, som ikke, viser det sig, har tilfredsstillende statistiske egenskaber, men dette forhold afhjælpes ved at indføre glattede estimater.

Som nævnt tages der udgangspunkt i et "rå" estimat, som fremkommer ved i definitionen af bispektret (6.2) og (6.3), at erstatte den sande tredje ordens momentfunktion med et estimat givet ved (4.13) og (4.15).

For en kontinuert proces  $X(t)$ , hvor der foreligger en realisation  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  fås

$$S_3(f_1, f_2) = \iint_{-T}^T m_3(u_1, u_2) \exp(-i2\pi(u_1 f_1 + u_2 f_2)) du_1 du_2 \quad (6.25)$$

$$-\infty < f_1, f_2 < \infty$$

For en diskret proces  $X_t$  observeret til  $t=1, \dots, N$  fås

$$S_3(f_1, f_2) = \sum_{k_1, k_2 = -(N-1)}^{N-1} m_3(k_1, k_2) \exp(-i2\pi(k_1 f_1 + k_2 f_2)) \quad (6.26)$$

$$-\frac{1}{2} \leq f_1, f_2 < \frac{1}{2}$$

Et første estimat for bispektret fås altså som den to-dimensionale Fourier transformation af den estimerede tredje ordens momentfunktion, idet integrations/summationsområdet er indskrænket, da momentfunktionsestimatet er 0 udenfor.

For disse estimater gælder følgende (Brillinger & Rosenblatt [7]), hvor det forudsættes at  $E[X_t] = 0$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[S_3(f_1, f_2)] = \Gamma_3(f_1, f_2) \quad (6.27)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \cdot \text{Cov}[S_3(f_1, f_2), S_3(f_4, f_5)] =$$

$$\sum \left\{ \frac{\sin \pi N(f_a + f_b)}{\sin \pi N(f_a + f_b)} \cdot \frac{\sin \pi N(f_c + f_d)}{\sin \pi N(f_c + f_d)} \cdot \frac{\sin \pi N(f_e + f_g)}{\sin \pi N(f_e + f_g)} \times \right.$$

$$\left. \Gamma_2(f_a) \cdot \Gamma_2(f_c) \cdot \Gamma_2(f_e) \right\} \quad (6.28)$$

hvor summationen er over alle frekvenspar  $(f_a, f_b)$ ,  $(f_c, f_d)$  og  $(f_e, f_g)$ , hvor  $(a, b, \dots, g)$  hver antager en af værdierne  $1, 2, \dots, 6$  - ialt 15 led.

Frekvenserne  $f_3$  og  $f_6$  er pga. stationariteten bestemt så  $f_1 + f_2 + f_3 = 0$  og  $f_4 + f_5 + f_6 = 0$ .

Udtrykkene (6.27) og (6.28) svarer til (5.33) og (5.37) for spektret.

De to udtryk viser, at estimerterne i det "rå" bispektralestimat er asymptotisk centrale og asymptotisk ukorreleerede. Men de er ikke konsistente - heller ikke asymptotisk, så problemet er det samme som ved estimation af spektret. Det er derfor naturligt at benytte samme fremgangsmåde som i spektraltilfældet for at nedbringe variansen på spektralestimerterne.

En første forbedring af estimerterne fås ved for et givet frekvenspar at tage gennemsnittet af de omkringliggende frekvenspar, idet der nu kun betragtes de fundamentale frekvenser  $f_k = \{0, 1/N, 2/N, \dots, \frac{1}{2}\}$ .

Herved fås

$$S_3^1(f_1, f_2) = \frac{1}{(2m+1)^2} \sum_{i,j=-m}^m S_3(f_1+i, f_2+j) \quad (6.29)$$

og variansen bliver nu

$$\text{Var}[S_3^1(f_1, f_2)] = \frac{1}{(2m+1)^2} \text{Var}[S_3(f_1, f_2)] \quad (6.30)$$

hvor  $\text{Var}[S_3(f_1, f_2)]$  fås af det asymptotiske udtryk (6.28) med  $f_1=f_4$  og  $f_2=f_5$ .

I stedet for at tillægge alle de omkringliggende punkter samme betydning, kan de tillægges vægte  $W_{ij}$ , således at punkter tæt ved det givne frekvenspar vægtes højest.

Idet

$$\sum_i \sum_{j=-m}^m W_{ij} = 1$$

fås estimatet

$$S_3''(f_1, f_2) = \sum_i \sum_{j=-m}^m W_{ij} \cdot S_3(f_1+i, f_2+j) \quad (6.31)$$

Variansen bliver nu

$$\text{Var}[S_3''(f_1, f_2)] = \left( \sum_i \sum_{j=-m}^m W_{ij}^2 \right) \cdot \text{Var}[S_3(f_1, f_2)] \quad (6.32)$$

Begge ovennævnte estimater har bedre variansegenskaber end det "rå" estimat (6.26). Men for at få et asymptotisk konsistent estimat er det nødvendigt som ved spektret at indføre glattede estimater.

### 6.5 Glattede estimater

Det glattede bispektralestimat er i det kontinuerte tilfælde

$$\begin{aligned} \bar{S}_3(f_1, f_2) &= \iint_{-M}^M w_3(u_1, u_2) \cdot m_3(u_1, u_2) \exp(-i2\pi(u_1 f_1 + u_2 f_2)) \\ &\quad du_1 du_2 \quad (6.33) \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} W_3(g_1, g_2) \cdot S_3(f_1 - g_1, f_2 - g_2) dg_1 dg_2 \end{aligned}$$

hvor

$$W_3(g_1, g_2) = \iint_{-M}^M w_3(u_1, u_2) \exp(-i2\pi(u_1 g_1 + u_2 g_2)) du_1 du_2 \quad (6.34)$$

I det diskrete tilfælde fås

$$\begin{aligned} \bar{S}_3(f_1, f_2) &= \sum_{k_1, k_2}^M w_3(k_1, k_2) \cdot m_3(k_1, k_2) \exp(-i2\pi(k_1 f_1 + k_2 f_2)) \\ &= \iint_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W_3(g_1, g_2) \cdot S_3(f_1 - g_1, f_2 - g_2) dg_1 dg_2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

hvor

$$W_3(g_1, g_2) = \sum_{k_1, k_2}^M w_3(k_1, k_2) \exp(-i2\pi(k_1 g_1 + k_2 g_2)) \quad (6.36)$$

$S_3(\cdot, \cdot)$  angiver de uglattede estimater (6.25) og (6.26).

Funktionen  $w_3(u_1, u_1)$  kaldes for nemheds skyld også her i tredje ordens tilfældet for et lag vindue, selvom det er en funktion af to variable og derfor snarere er en "kuppel". En generel betegnelse er en lag kernel. Funktionen  $W_3(g_1, g_2)$  kaldes tilsvarende et bispektral vindue.

Lag vinduet og bispektral vinduet tilfredsstiller tilsvarende egenskaber som for anden ordens tilfældet, blot udvidet til det to-dimensionale tilfælde.

Lag vinduet  $w_3(u_1, u_2)$  defineres ved

- i)  $w_3(u_1, u_2) \in \mathbb{R}$
- ii)  $w_3(0, 0) = 1$
- iii)  $w_3(u_1, u_2) = w_3(u_2, u_1) = w_3(-u_1, u_2 - u_1)$
- iv)  $w_3(u_1, u_2) = 0$  for  $|u_1|, |u_2| > M$  ,  $M < T$
- v)  $\iint_{-\infty}^{\infty} w_3^2(u_1, u_2) du_1 du_2 < \infty$

Bispektral vinduet tilfredsstiller da følgende

- i)  $W_3(f_1, f_2) = W_3(f_2, f_1) = W_3(f_1, -f_1 - f_2) = W_3(-f_1, -f_2)^*$
- ii)  $W_3(f_1^-, f_2^-) = 0$  ,  $|W_3(f_1^+, f_2^+) - W_3(f_1^-, f_2^-)| = 2/M$   
 hvor  $f_1^+ = f_2^+ = -f_1^- = -f_2^-$
- iii)  $\iint_{-\infty}^{\infty} W_3(f_1, f_2) df_1 df_2 = 1$

Det bemærkes, at lag og spektral vinduet har de samme symmetri-egenskaber som momentfunktionen og bispektret.

Det er naturligt at tage udgangspunkt i lag og spektral vinduerne fra anden ordens tilfældet ved dannelsen af vinduerne i tredje ordens tilfældet.

Herved kan lag vinduet fås af

$$w_3(u_1, u_2) = w(u_1) \cdot w(u_2) \cdot w(u_1 - u_2) \quad (6.37)$$

og bispektral vinduet

$$W_3(f_1, f_2) = W(f_1) \cdot W(f_2) \cdot W(-f_1 - f_2) \quad (6.38)$$

hvor  $w(\cdot)$  og  $W(\cdot)$  er lag og spektral vinduerne - se tabel 5.1.

Størrelsen  $M$  er bestemmende for vinduets bredde.

I det diskrete tilfælde anvendes værdier fra det kontinuerte vindue.

### 6.6 Egenskaber ved glattede estimater

De glattede estimater (6.33) og (6.35) er asymptotisk centrale, asymptotisk konsistente og asymptotisk ukorrelerede, idet der gælder følgende (Rosenblatt[3] , Rosenblatt & Van Ness [32] samt Brillinger & Rosenblatt [7] )

Det forudsættes, at  $X(t)$  er stationær af mindst 6. orden med

i)  $M_2(u)$ ,  $M_3(u_1, u_2)$ ,  $C_4(u_1, u_2, u_3)$ ,  $C_6(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  og  $\Gamma_3(f_1, f_2)$  alle absolut integrable/summable.

ii)  $M \rightarrow \infty$  og  $TM^{-2} \rightarrow \infty$  for  $T \rightarrow \infty$ .

Idet frekvensparrene  $(f_1, f_2)$  og  $(f_3, f_4)$  tages i delplan (1) på figur 6.1 , dvs.  $0 \leq f_1$ ,  $0 \leq f_2 \leq f_1$  og  $0 \leq f_3$ ,  $0 \leq f_4 \leq f_3$  gælder

$$E[\bar{S}_3(f_1, f_2)] = \iint_{-\infty}^{\infty} W_3(f_1 - g_1, f_2 - g_2) \cdot \Gamma_3(f_1, f_2) dg_1 dg_2 \quad (6.39)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\bar{S}_3(f_1, f_2)] = \Gamma_3(f_1, f_2) \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} TM^{-2} \cdot \text{Cov}[\bar{S}_3(f_1, f_2), \bar{S}_3(f_4, f_5)] = \\ [\Gamma_2(f_1)\Gamma_2(f_2)\Gamma_2(f_1+f_2)\Gamma_2(f_4)\Gamma_2(f_5)\Gamma_2(f_4+f_5)]^{\frac{1}{2}} \times \\ \{w_1 \cdot \delta(f_2)\delta(f_5)(1+2\delta(f_1))(1+2\delta(f_4)) + \\ w_2 \cdot \delta(f_1-f_4)\delta(f_2-f_5)(1+\delta(f_1-f_5)+4\delta(f_1)\delta(f_2))\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

hvor

$$w_1 = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w_3(0, u_2) du_2 \right]^2, \quad w_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} w_3^2(u_1, u_2) du_1 du_2$$

For variansen fås da

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} TM^{-2} \cdot \text{Var}[\bar{S}_3(f_1, f_2)] = \Gamma_2(f_1)\Gamma_2(f_2)\Gamma_2(f_1+f_2) \times \\ \{w_1 \cdot \delta(f_2)(1+2\delta(f_1)) + w_2 \cdot (1+\delta(f_1-f_2)+4\delta(f_1)\delta(f_2))\} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Det bemærkes, at der er diskontinuiteter ved kovariansen og variansen på de såkaldte submanifolds. Hvis man ser bort fra disse, fås følgende

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TM^{-2} \cdot \text{Cov}[\bar{S}_3(f_1, f_2), \bar{S}_3(f_4, f_5)] = 0 \quad (6.43)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TM^{-2} \cdot \text{Var}[\bar{S}_3(f_1, f_2)] = \Gamma_2(f_1)\Gamma_2(f_1)\Gamma_2(f_1+f_1) \cdot w_2 \quad (6.44)$$

som svarer til formlerne (5.52) og (5.54).

Udtrykkene (6.39) - (6.44) viser altså, at de glattede estimater (6.33) og (6.35) er asymptotisk centrale, asymptotisk ukorrelerede og asymptotisk konsistente overalt.

På submanifolds, dvs.  $f_1=0, \pm\frac{1}{2}$  og/eller  $f_2=0, \pm\frac{1}{2}$  og/eller  $f_1=f_2$ , er der diskontinuiteter for variansen, som det var tilfældet for spektret - se (5.54).

Under forudsætningerne i) og ii) i det foregående og under den yderligere forudsætning, at processen er stationær af mindst 12. orden, fås følgende om fordelingen af estimaterne (Van Ness [38])

$$\frac{\sqrt{T}}{M} \cdot \{\bar{S}_3(f_1, f_2) - E[\bar{S}_3(f_1, f_2)]\} \rightarrow X + iY \quad (6.45)$$

hvor  $\rightarrow$  betyder konvergens i fordeling.

For  $X + iY$  gælder

i)  $X$  og  $Y$  er stokastisk uafhængige.

ii)  $X \in N(0, \sigma_X^2)$  ,  $Y \in N(0, \sigma_Y^2)$

med

$$\sigma_X^2 = w_1 \Gamma_2(f_1) \Gamma_2(f_2) \Gamma_2(f_1 + f_2) (8\delta(f_1) + \delta(f_2)) + A + B$$

$$\sigma_Y^2 = A - B$$

hvor

$$A = \frac{1}{2} w_2 \cdot \Gamma_2(f_1) \Gamma_2(f_2) \Gamma_2(f_1 + f_2) \{ (1 + \delta(f_1 - f_2)) (1 + \delta(f_1 + 2f_2 - 1)) + \delta(2f_1 + f_2 - 1) + 4\delta(f_1) \}$$

$$B = \frac{1}{2} w_2 \cdot \Gamma_2(f_1) \Gamma_2(f_2) \Gamma_2(f_1 + f_2) \{ 5\delta(f_1) + \delta(f_2) (1 + \delta(f_1 - \frac{1}{2})) \}$$

Størrelserne  $w_1$  og  $w_2$  er defineret på foregående side.



## 7. BISPEKTRETS ANVENDELSESMULIGHEDER

Ved analyse af tidsrækker gøres næsten altid den grundliggende forudsætning, at den betragtede tidsrække eller en transformering heraf er udfald af en ergodisk, stationær og lineær proces. Disse forudsætninger giver mulighed for en lang række modeller, f.eks. Box-Jenkins modellerne. Det viser sig, at en lang række i praksis forekommende processer med rimelighed kan antages at opfylde forudsætningerne.

I de fleste tilfælde foretages ikke noget egentligt test for, om forudsætningerne er opfyldte. Stationariteten kontrolleres dog ved Box-Jenkins analyse, mens ergodicitet må antages uden testmulighed. Den sidste forudsætning om linearitet testes ofte inddirekte, idet residualerne testes for normalitet. Kan residualerne ikke antages normale, skyldes det enten, at processen ikke er lineær eller at residualerne ikke er normalfordelte eller begge dele.

Bispektrets anvendelsesmuligheder i tidsrækkeanalysen ligger dels i de tilfælde, hvor linearitet ikke kan antages, og dels i de tilfælde hvor residualerne ikke er normale. I disse to tilfælde vil bispektret indeholde væsentlig information om den tilgrundliggende stokastiske proces.

I andre tilfælde ved analyse af stokastiske processer af ikke lineær natur kan bispektret benyttes i et forsøg på at få større kendskab til det bagvedliggende fysiske system. Denne anvendelse af bispektre sker i [15], [16] og [22], hvor bølgehastigheder analyseres. Det er velkendt, at der under visse omstændigheder optræder turbulens, som er et ikke lineært fænomen. I [23] benyttes bispektre ved undersøgelse af bygningskonstruktioners dynamiske egenskaber.

Bispektrets væsentligste anvendelsesområde er dog nok i forbindelse med tidsrækkeanalyse, idet det er muligt som vist i næste afsnit, at konstruere test for linearitet af en proces ved hjælp af bispektret. Dette test kan så anvendes ved en indledende analyse af tidsrækken, og hvis linearitet kan antages, fortsættes analysen som vanligt. Kan linearitet ikke

antages, kan der f.eks. forsøges med en ikke lineær transformation af data. Herved er der håb om at undgå tilfælde, hvor der f.eks. er problemer med residualerne, fordi tidsrækken ikke er lineær.

### 7.1 Bispektrets fortolkning

Bispektret for en stationær proces er en funktion af to frekvenser  $f_1$  og  $f_2$ . Disse frekvenser er de "samme" som frekvensen  $f'$ , der indgår i anden ordens spektret, som jo beskriver, hvorledes variationen i processen er fordelt på frekvenser.

Antages at en proces i hovedsagen indeholder frekvenserne  $f'_1$  og  $f'_2$ , og denne proces undergår en ikke lineær transformation, f.eks. kvadreres den, vil resultatet blive en proces, der foruden at indeholde de oprindelige frekvenser  $f'_1$  og  $f'_2$  også indeholder frekvenserne  $\pm(f'_1+f'_2)$  og  $\pm(f'_1-f'_2)$ . Dette forhold vil da kunne aflæses på bispektret. Man taler da om bifrekvenser, dvs. et "samspil" mellem to frekvenser.

Det kan dog i praksis være vanskeligt at opdage sådanne bifrekvenser, selvom et tre-dimensionalt perspektivisk plot eller et konturdiagram er til rådighed. Sådanne plot er altid vanskelige at tyde end en funktion i planen.

### 7.2 Test for linearitet og normalitet

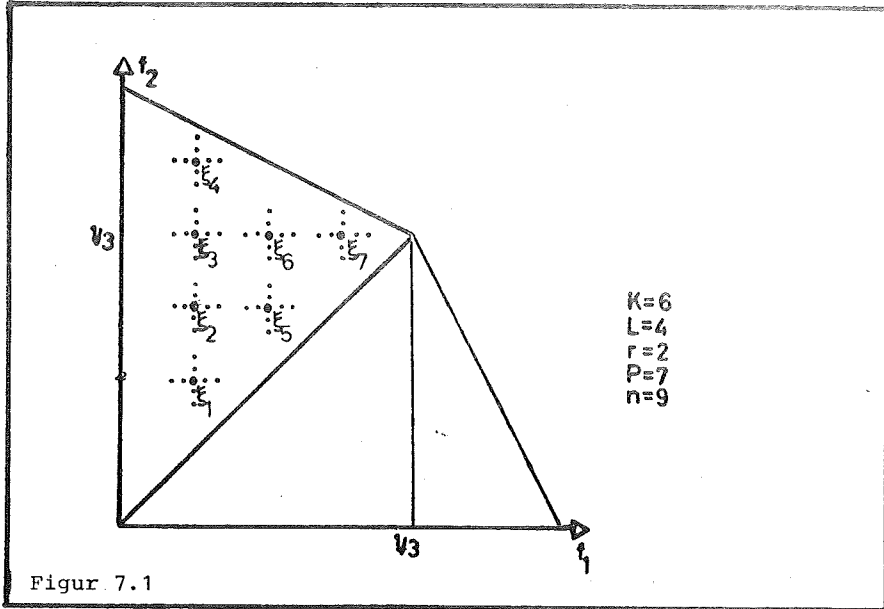
Det er tidligere nævnt, at for en lineær normal eller Gaussisk proces er bispektret  $\Gamma_3(f_1, f_2) = 0$  i hele frekvensplanen.

I dette afsnit angives et approximativt test (Subba Rao & Gabr [38]) for hypotesen

$$\begin{aligned} H_0 &: \forall(f_1, f_2) : \Gamma_3(f_1, f_2) = 0 \quad \text{mod} \\ H_1 &: \exists(f_1, f_2) : \Gamma_3(f_1, f_2) \neq 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Accept af  $H_0$  betyder da, at den betragtede tidsrække  $X_t$  regnes normal og lineær. Forkastes  $H_0$  regnes tidsrækken ikke-normal og/eller ikke-lineær. Ved derefter at udføre testet i næste afsnit (7.3) kan lineariteten testes alene.

Ved testet betragtes det glattede bispektralestimat (6.35) i nedenstående område



I afsnit 6.6 er egenskaberne ved det glattede bispektralestimat angivet. Det fremgår her, at der er diskontinuiteter for variansen på randene (submanifolds) af området.

Derfor undersøges først det indre område, hvorefter randene undersøges for sig.

Testet bygger på Hotellings  $T^2$ , der jo normalt anvendes til middelværditest for en stokastisk vektor.

Der udvælges et primært "gitter" af frekvenser - se figuren. Om hvert af disse primære frekvenspar indlægges et sekundært "gitter", og af bispektralværdierne her dannes en vektor indeholdende approximativt centrale og ukorreleerede estimater af den sande bispektralværdi i det primære "gitter".

Det primære gitter består af frekvenserne

$$\begin{aligned} f_{i_1} &= i/(2K) \quad i = 1, 2, \dots, L \quad L = [2K/3] \\ f_{j_2} &= j/(2K) \quad j = i+1, i+2, \dots, K-[j/2]-1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

hvor  $[\cdot]$  angiver den hele del, og hvor  $K$  bestemmer tætheden af det primære gitter - se figur 7.1.

Omkring disse primære frekvenspar betragtes de sekundære frekvenser

$$\begin{aligned} f_{ia} &= f_i + \frac{ad}{2N} \quad a = -r, -r+1, \dots, 0, \dots, r \\ f_{jb} &= f_j + \frac{bd}{2N} \quad b = -r, -r+1, \dots, -1, 1, \dots, r \end{aligned} \quad (7.3)$$

hvor  $d$  er bestemmende for finheden af det sekundære gitter.

Dvs. at der betragtes  $n=4r+1$  sekundære værdier om hvert primært frekvenspar. I alt er der

$$P = \sum_{j=1}^L (K-[j/2]^* - j)$$

primære frekvenspar. Udtrykket  $[h]^*$  er  $h-1$  hvis  $h$  er hel og blot den hele del af  $h$  hvis  $h$  ikke er hel.

Af de estimerede bispektralværdier dannes følgende

$$\underline{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underline{\xi}(k) \quad (7.4)$$

$$\underline{A} = \sum_{k=1}^n (\underline{\xi}(k) - \underline{\eta})(\underline{\xi}(k) - \underline{\eta})^*{}^T \quad (7.5)$$

hvor

$$\begin{aligned} \underline{\xi}(k) &= [\xi_{1k}, \xi_{2k}, \dots, \xi_{pk}] \\ &= \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \xi_{p1} & \dots & \dots & \xi_{pn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.6)$$

hvor en række fås ved - idet  $(i, j)$  refererer til et punkt i det primære gitter

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_3(f_i - \frac{rd}{2N}, f_j) \\ \bar{S}_3(f_i - \frac{(r-1)d}{2N}, f_j) \\ \vdots \\ \bar{S}_3(f_i, f_j) \\ \vdots \\ \bar{S}_3(f_i + \frac{rd}{2N}, f_j) \\ \bar{S}_3(f_i, f_j - \frac{rd}{2N}) \\ \bar{S}_3(f_i, f_j - \frac{(r-1)d}{2N}) \\ \vdots \\ \bar{S}_3(f_i, f_j + \frac{rd}{2N}) \end{bmatrix}^T$$

Vektoren  $\underline{n}$  har dimensionen  $P \times 1$ .

Heraf dannes Hotellings  $T^2$

$$T^2 = n \cdot \underline{n}^* \underline{A}^{-1} \underline{n} \quad (7.7)$$

Under  $H_0$ , dvs. hvis  $\underline{n} = \underline{0}$  haves

$$(2(n-P)/2P) \cdot T^2 \in F(2P, 2(n-P)) \quad (7.8)$$

På randen  $f_1=0$  dannes kun de sekundære frekvenser  $f_{1a}$ , hvilket fører til fordelingen under  $H_0$

$$((n-P)/P) \cdot T^2 \in F(P, n-P) \quad (7.9)$$

Parametrene  $K, L, P, r, n$  og  $d$  må vælges med omhu for at forudsætningerne holder. Typisk kan  $K$  vælges ved  $K = 1/3 - 1/6$  af  $M$ , hvor  $M$  angiver størrelsen af lag vinduet.

I tabel 7.1 er angivet forslag til værdier.

K	L	P	r	n
4	2	2	$\geq 1$	$\geq 5$
5	3	4	$\geq 1$	$\geq 5$
6	4	7	$\geq 2$	$\geq 9$
7	4	10	$\geq 3$	$\geq 13$
8	5	4	$\geq 4$	$\geq 17$

Tabel 7.1

I Subba Rao & Gabr [38] findes en mere udførlig beskrivelse for valg af parameterverdier.

### 7.3 Test for linearitet og ikke-normalitet

Hvis man i det foregående test for normalitet og linearitet har forkastet  $H_0$  og derfor regner med, at tidsrækken er ikke-lineær og/eller ikke-normal, kan man da teste en hypotese om linearitet og ikke-normalitet.

Ved dette approximative test (Subba Rao & Gabr [38]) testes

$$H_0 : X_t \text{ er lineær og } \mu_3 \neq 0 \quad \text{mod} \quad (7.10)$$

$$H_I : \text{alle alternativer}$$

hvor  $\mu_3$  er tredje ordens momentet.

For en lineær proces er tidligere angivet (5.18) og (6.14)

$$\Gamma_2(f) = \sigma^2 \cdot |H(f)|^2 \quad (7.11)$$

$$\Gamma_3(f_1, f_2) = \mu_3 \cdot H(f_1) \cdot H(f_2) \cdot H(-(f_1 + f_2)) \quad (7.12)$$

hvor  $H(\cdot)$  er frekvensresponsfunktionen.

Betragtes nu størrelsen  $X_{ij}$

$$X_{ij} = \frac{|\Gamma_3(f_i, f_j)|^2}{\Gamma_2(f_i) \cdot \Gamma_2(f_j) \cdot \Gamma_2(f_i + f_j)}$$

fås ved udnyttelse af (7.11) og (7.12)

$$X_{ij} = \mu_j^2 / \sigma^2 \quad \forall i, j \quad (7.13)$$

Dvs. størrelsen  $X_{ij}$  er konstant over frekvensplanen (også på randene), hvis processen er lineær.

Til at teste om  $X_{ij}$  er konstant over frekvensplanen benyttes som i testet i afsnit 7.2 et primært og et sekundært gitter af frekvenser - se figur 7.1.

Af de  $P$  primære frekvenspar dannes vektoren

$$\underline{Y} = [\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_P]^T \quad (7.14)$$

hvor

$$\underline{Y}_k = [X_{i_1j}, X_{i_2j}, \dots, X_{i_{2r+1}j}, X_{ij}, \dots, X_{ij_{2r}}] \quad (7.15)$$

og  $i, j$  refererer til det  $k$ 'te punkt i det primære gitter.

Der dannes nu vektorerne

$$\underline{\bar{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \quad (7.16)$$

$$\underline{S}_Y = \sum_{k=1}^n (\underline{Y}_k - \underline{\bar{Y}}) (\underline{Y}_k - \underline{\bar{Y}})^* \quad (7.17)$$

$$\underline{E} = \underline{B} \cdot \underline{\bar{Y}} \quad (7.18)$$

$$\underline{S} = \underline{B} \cdot \underline{S}_Y \cdot \underline{B}^T \quad (7.19)$$

hvor  $\underline{B}$  er en matrix af orden  $Q \times P$ ,  $Q=P-1$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Hotellings  $T^2$  kan nu dannes ved

$$T^2 = n \cdot \bar{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \bar{\underline{\beta}} \quad (7.21)$$

Under  $H_0$ , dvs. hvis tidsrækken er lineær men ikke nødvendigvis normal, fås

$$((n-Q)/Q) \cdot T^2 \in F(Q, n-Q) \quad (7.22)$$

Det er nok på sin plads her at understrege, at testet her og testet i afsnit 7.2 er approximative, og ikke ufølsomme overfor valgene af parameterværdierne, hvorfor man ikke skal teste strengt på et ønsket niveau, men i højere grad bruge teststørrelserne som relative størrelser.

#### 7.4 Beregningsmæssige aspekter

I kap. 6 er angivet, hvorledes bispektret estimeres. Det uglattede bispektralestimat er for en diskret proces

$$S_3(f_1, f_2) = \sum_{k_1, k_2 = -(N-1)}^{N-1} m_3(k_1, k_2) \cdot \exp(-i2\pi(k_1 f_1 + k_2 f_2)) \quad (7.23)$$

$$-\frac{1}{2} \leq f_1, f_2 < \frac{1}{2}$$

hvor der foreligger tidsrækken  $X_t$ ,  $t=1, 2, \dots, N$ .

Det glattede estimat er givet ved

$$\begin{aligned} \bar{S}_3(f_1, f_2) &= \sum_{k_1, k_2 = -M}^M w_3(k_1, k_2) m_3(k_1, k_2) \exp(-i2\pi(k_1 f_1 + k_2 f_2)) \\ &= \iint_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w_3(g_1, g_2) \cdot S_3(f_1 - g_1, f_2 - g_2) dg_1 dg_2 \end{aligned} \quad (7.24)$$

hvor

$$w_3(g_1, g_2) = \sum_{k_1, k_2 = -M}^M w_3(k_1, k_2) \cdot \exp(-i2\pi(k_1 g_1 + k_2 g_2)) \quad (7.25)$$

Af ovenstående udtryk ses, at der i alle tilfælde skal foretages en to-dimensional Fourier transformation.



I det følgende betragtes tre metoder for praktisk estimation, dvs. ved hjælp af datamaskine, ud fra en forelagt tidsrække.

Metode 1 er ved anvendelse af det første udtryk i (7.24), dvs. ud fra det glattede momentfunktionsestimat

$$\bar{m}_3(k_1, k_2) = w_3(k_1, k_2) m_3(k_1, k_2) \quad (7.26)$$

Der foretages da en inddeling af frekvensplanen med en ønsket finhed, dvs.  $\Delta f$ . For hvert frekvenspar  $(f_1, f_2)$  fås da, idet symmetriegenskaberne ved  $\bar{m}_3(k_1, k_2)$  udnyttes

$$\bar{S}_3(f_1, f_2) = \bar{m}_3(0, 0) + 4 \sum_{k_1=2}^M \sum_{k_2=0}^M \bar{m}_3(k_1, k_2) \exp(-i2\pi(k_1 f_1 + k_2 f_2))$$

Denne metode er kostbar mht. beregningstid, hvis  $\Delta f$  vælges lille. Den har derimod den fordel, at "nettet" i frekvensplanen bliver netop, som man ønsker og uafhængig af tidsrækkens længde, hvilket er en fordel, hvis man f.eks. ønsker bispektret udtegnet, hvor et net på f.eks.  $30 \times 30$  punkter er passende, naturligvis afhængig af hvor glat bispektret er.

Metode 2 udnytter FFT-algoritmen (Fast Fourier Transformation) - se appendix B. Ved metode 2 foretages en Fast Fourier Transformation af  $\bar{m}_3(k_1, k_2)$ . Idet hele  $(k_1, k_2)$  planen betragtes, dvs. en plan på  $2M \times 2M$  punkter fås en frekvensplan på  $M \times M$  punkter.

Denne metode er økonomisk mht. regnetid, men ikke så fleksibel, hvis  $M$  ikke er omkring 20-30, og bispektret skal udtegnes.

Metode 3 benytter også FFT-algoritmen. Der defineres

$$d(f) = \sum_{k=1}^N w(k + \frac{1}{2}M) \cdot x_k \cdot \exp(-i2\pi kf) \quad (7.28)$$

Bispektralestimatet er da

$$\bar{S}_3(f_1, f_2) = \frac{1}{N} d(f_1) \cdot d(f_2) \cdot d(-(f_1 + f_2)) \quad (7.29)$$

Dette svarer til det glattede tredje ordens periodogram.  
Denne metode giver  $\frac{1}{2}N \times \frac{1}{2}N$  frekvenser.

Metoden er økonomisk mht. regnetid, men ikke så velegnet med henblik på udtegning pga. manglende fleksibilitet.

Hvilken af de tre nævnte metoder man vælger at anvende, afhænger af hvad resultatet skal bruges til.

## 8. ANALYSE AF VANDSTANDSDATA

### 8.1 Problemstilling

Dette kapitel indeholder et eksempel på analyse af tidsrækker, hvor bispektret medtages i analysen. Der udføres først en indledende analyse af tidsrækken, og ud fra denne analyse estimeres en model, hvorefter denne models residualer analyseres. Dvs. en ganske almindelig tidsrækkeanalyse.

De anvendte data er vandstandsdata fra Esbjerg havn. Problemet vedrører prediktion af vandstanden specielt i stormvejrperioder. Det er her ønskeligt, at kunne foretage en præcis forudsigelse af vandstanden i det mindste få timer frem, med henblik på at afgøre om en evakuering evt. er påkrævet. Det centrale problem er altså at få forudsagt ekstreme vandstande så præcist som muligt.

Der eksisterer en hydrodynamisk-numerisk grundmodel for Nordøen, den såkaldte HN-model, som ud fra vindretning, -styrke, tryk mv. giver en forudsigelse af vandstanden. Det har dog vist sig, at denne model giver ikke uvæsentlige forudsigelsesfejl. Disse fejl betragtes da som en tidsrække.

Den betragtede tidsrække  $Z_t$  bliver da

$$Z_t = \text{OBS}_t - \text{HN}_t$$

hvor  $\text{OBS}_t$  er den observerede vandstand til tiden  $t$  og  $\text{HN}_t$  er HN-modellens beregnede vandstand til tiden  $t$ .

Der foreligger målinger fra hver time.

Til analysen er anvendt data fra tre perioder. Dels fra en relativ lang, rolig periode uden storme i oktober og november 1976 og dels fra to kortere perioder med stormvejr i begyndelsen og slutningen af januar 1976.

Det skal bemærkes, at estimation af den senere omtalte model udelukkende sker på grundlag af perioden med stille vejr, hvorefter modellen afprøves på stormvejrperioderne.

## 8.2 Analyse

Først skal det nævnes, at når der i det følgende henvises til et plot, findes dette i appendix D.

For de tre datasæt, som i det følgende betegnes STILLE, STORM1 og STORM2, gælder følgende

Data		STILLE	STORM1	STORM2
Antal	N	900	156	120
Gennemsnit	$\bar{x}$	311.071	286.051	287.042
Spredning	s	16.147	29.088	27.137

Det skal bemærkes, at data er kodede, hvorfor gennemsnittet ikke er et udtryk for den faktiske forskel mellem observationerne og HN-modellen.

I appendix D er de tre datasæt optegnet.

Der er nu beregnet autokorrelationsfunktioner og spektre for de tre datasæt.

Autokorrelationsfunktionen for STILLE viser en smuk sæsonsvingning, ligesom spektret fremhæver frekvenser svarende til tidevandet med en periode på ca. 12 timer.

I [24] er det vist, hvorledes man ved differensning mv. når frem til en Box-Jenkins model til at beskrive tidsrækken  $Z_t$  for tilfældet STILLE. Modellen er en sæson model af typen

$$\phi(B)\phi(B^S) \cdot W_t = \theta(B)\theta(B^S) \cdot A_t \quad (8.1)$$

hvor der er benyttet en 12.42 timers differensning pga. tidevandet taget som et vægtet gennemsnit af 12 og 13 timers værdierne, således at

$$W_t = Z_t - 0.58Z_{t-12} - 0.42Z_{t-13} \quad (8.2)$$

For polynomierne gælder

$$\begin{aligned}
 \phi(B) &= 1 - 0.751B + 0.348B^2 \\
 \Phi(B^S) &= 1 + 0.22B^{12} \\
 \theta(B) &= 0 \\
 \Theta(B^S) &= 1 - 0.151B^{12}
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

Modellen er altså en  $(2,1,1) \times (1,0,0)_{12}$  model anvendt på den 12.42 timer differensede tidsrække.

Før modellen kontrolleres via residualerne, betragtes de to øvrige datasæt STORM1 og STORM2. Disse er også udteget, og der er beregnet autokorrelationsfunktioner og spektre. Det ses, at STORM2 passer fint til STILLE, mens STORM1 afviger væsentligt ved at indeholde en helt anden sæsonsvingning. Disse forhold ses både ved autokorrelationsfunktionen og ved spektret. På forhånd kan det derfor ventes, at modellen vil forudsige STORM2 godt og STORM1 dårligt.

For de tre datasæt er nu beregnet residualer ved anvendelse af modellen (8.1) og for residualerne gælder

Residualer		STILLE	STORM1	STORM2
Antal	N	885	142	106
Gennemsnit	$\bar{x}$	0.0129	-0.2081	-0.0607
Spredning	s	5.1033	12.1325	8.9432
Skævhed	$\gamma_1$	0.2554	-0.2061	-0.3941
Kurtosis	$\gamma_2$	1.9024	1.1483	0.3473

For residualerne er medtaget skævhed og kurtosis (topstejlhed), da residualerne jo, hvis modellen er god og forudsætningerne er opfyldte, skal være udfald af en hvid støj normal proces.

I [24] er v.h.j.a. et periodogramtest vist, at residualerne STILLE kan antages at være normal hvid støj.

Man bemærker den store spredning ved STORM1, hvilket indikerer, at modellen har vanskeligt ved at forudsige i dette tilfælde.

Betragtes autokorrelationsfunktioner og spektre for residualerne ses også, at STORM1 endnu indeholder sæsonsvingninger i residualerne, mens STILLE og STORM2 er rensede for sæsonsvingninger.

Alt i alt viser denne analyse, at der er et væsentligt problem ved prediktering af vandstandene, da forskellige stormvejr øjensynligt kan indeholde forskellige frekvenser, hvilket gør det uhyre vanskeligt at estimere en enkelt model, som giver tilfredsstillende resultater i alle situationer.

I appendix D er også vist nogle tredje ordens momentfunktioner. Tredje ordens momentfunktionerne har træk til fælles med autokorrelationsfunktionerne, men specielt STORM1 giver et meget forvirret billede, hvilket formodentligt skyldes den lille datamængde (156) og derfor store varians på estimatet.

For residualerne er både angivet en glattet og en uglattet momentfunktion. Det bemærkes, som det kunne forventes, at tredje ordens momentfunktionerne for residualerne ser "tilfældige" ud svarende til autokorrelationsfunktionerne, da residualerne for STILLE og STORM2 kan regnes at være hvid støj normalprocesser, mens STORM1 har en smule sæson tilbage i residualerne. For en hvid støj normalproces er tredje ordens momentfunktionen jo nul overalt.

Som nævnt i appendix D har det ikke været muligt at udtegne bispektrene.

I stedet er der vist et eksempel på en udskrift af bispektret (real- og imaginærdel), men det er faktisk umuligt at tolke noget ud fra en sådan udskrift.

## 9. KONKLUSION

I denne rapport er der foretaget en analyse af bispektre. Analysen er faldet i to dele, dels et litteraturstudium dvs. en teoretisk analyse og dels en beregningsmæssig anvendelse dvs. en praktisk analyse.

Rapporten er opbygget således, at det er muligt at sammenholde bispektret med det sædvanlige anden ordens spektrum. Herved fremgår det tydeligt, at spektret og bispektret har en række lighedspunkter og forskelle. Spektret er den Fourier transformerede af autokovariansfunktionen, mens bispektret er den (to-dimensionale) Fourier transformation af tredje ordens momentfunktionen.

Lighedspunkterne mellem spektrum og bispektrum udnyttes i høj grad ved den teoretiske behandling af bispektret, idet principperne fra spektralanalysen overføres til bispektralanalysen. Dette gælder først og fremmest ved estimation, hvor bispektret glattes, som det sædvanligvis sker med spektret.

Forskellene mellem spektret og bispektret ligger i, at spektret er en reel funktion, mens bispektret er en kompleks funktion af to variable og derved sværere at fortolke. Endvidere er bispektret for enhver normalproces nul, da momentfunktionen af orden større end to er nul.

Ved ikke lineære processer vil bispektret indeholde en væsentlig information om processen, som det er beskrevet i en række artikler. Bispektrets anvendelse i sædvanlig tidsrækkeanalyse, dvs. Box-Jenkins analyse, kan, mener jeg, være som et nyttigt redskab til at undersøge forudsætningen om linearitet, som det er beskrevet i kapitel 7.

Den praktiske analyse er desværre delvis mislykkedes, da det ikke har været muligt at udtegne bispektrene for de anvendte datasæt. En udskrift af bispektrene er ikke nok til at kunne foretage en ordentlig vurdering af ligheder og forskelle for så komplicerede to-dimensionale funktioner. Jeg tror dog, at bispektrene indeholder en nyttig information om de tre datasæt, og måske specielt kan give svar på, hvorfor det end stormvejr er forskelligt fra de to øvrige datasæt.

Sammenfattende mener jeg, at bispektret kan anvendes med fordel på to måder.

Dels til en grundliggende analyse af processer som er af en ikke lineær natur.

Dels i forbindelse med den sædvanlige tidsrækkeanalyse, hvor lineære modeller danner grundlaget, som et redskab til at undersøge om en forelagt tidsrække er lineær.







APPENDIX AMoment- og kumulantfunktioner

Sammenhængen mellem momentet (2.1) - her kaldet  $m_k$  og det centrale moment  $\mu'_k$  (2.2) er

$$\mu'_k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot (-1)^r \cdot \eta^r \cdot m_{k-r}$$

$$m_k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \eta^r \cdot \mu_{k-r}$$

hvor  $\eta = \mu_k = E[X]$ .

Sammenhængen mellem centrale momenter (2.2)  $m_k$  og kumulanter  $\kappa_k = \text{Cum}(X_1, \dots, X_k)$  (2.5) er

$$m_1 = \kappa_1$$

$$m_2 = \kappa_2$$

$$m_3 = \kappa_3$$

$$m_4 = \kappa_4 + 3\kappa_2^2$$

$$m_5 = \kappa_5 + 10\kappa_2\kappa_3$$

$$m_6 = \kappa_6 + 15\kappa_2\kappa_4 + 10\kappa_3^2 + 15\kappa_2^3$$

Sammenhængen mellem momentfunktioner  $M_k(u_1, \dots, u_{k-1})$  (2.4) og kumulantfunktioner  $C_k(u_1, \dots, u_{k-1})$  (2.7) for stationære processer er

$$M_2(u) = C_2(u)$$

$$M_3(u_1, u_2) = C_3(u_1, u_2)$$

$$M_4(u_1, u_2, u_3) = C_4(u_1, u_2, u_3) + M_2(u_1)M_2(u_2) + M_2(u_1)M_2(u_3) + M_2(u_2)M_2(u_3)$$

$$M_6(u_1, \dots, u_5) = C_6(u_1, \dots, u_5) + \{C_3(u_1, u_2)C_3(u_3, u_4)\}_{10} + \{C_2(u_1)C_4(u_2, u_3, u_4)\}_{15} + \{C_2(u_1)C_2(u_2)C_2(u_3)\}_{15}$$

hvor  $\{\cdot\}_j$  angiver summen af de  $j$  forskellige bidrag, som fremkommer ved at ombytte argumenterne.

I nedenstående tabel er angivet henholdsvis  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  for nogle almindelige fordelinger

Fordeling	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
Bin( $n, p$ )	$np$	$np(1-p)$	$np(1-p)(1-2p)$
Gam( $k, \beta$ )	$k\beta$	$k\beta^2$	$2k\beta^3$
LN( $\alpha^2, \beta^2$ )	$e^{\alpha + \frac{1}{2}\beta^2}$	$e^{2\alpha + \beta^2} (e^{\beta^2} - 1)$	$e^{3(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2)} (e^{\beta^2} - 1) (e^{\beta^2} + 2)$
N( $\mu, \sigma^2$ )	$\mu$	$\sigma^2$	0
Pois( $\lambda$ )	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$

APPENDIX BFourier transformation

I dette appendix omtales ganske kort den en- og todimensionale Fourier transformation samt den såkaldte FFT-algoritme (Fast Fourier Transformation)

En-dimensional Fourier transformation

Den Fourier transformerede til en kontinuert funktion  $f(x)$  defineres ved

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \exp(-i2\pi ux) dx \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{B.1})$$

Ved inversion fås

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot \exp(i2\pi ux) du \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{B.2})$$

Den Fourier transformerede til  $f(x)$ , hvor  $x$  kun antager værdier forskellig fra 0 for  $x = \dots, -\Delta, 0, \Delta, \dots$ , defineres ved

$$F(u) = \Delta \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \exp(-i2\pi ux\Delta) \quad , \quad -\frac{1}{2\Delta} \leq u < \frac{1}{2\Delta} \quad (\text{B.3})$$

Ved inversion fås

$$f(x) = \int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} F(u) \cdot \exp(i2\pi ux\Delta) du \quad , \quad x=0, \pm\Delta, \dots \quad (\text{B.4})$$

Foretages en nulpunkts- og skalaændring for  $f$  bliver den Fourier transformerede til  $c \cdot f(ax+b)$

$$\frac{c}{|a|} \cdot \exp(i2\pi \frac{ub}{a}) \cdot F(\frac{u}{a}) \quad (\text{B.5})$$

Den Fourier transformerede til  $f^{(m)}(x)$  er

$$(i2\pi u)^m \cdot F(u) \quad (\text{B.6})$$

Har  $f(x)$  og  $w(x)$  de Fourier transformerede  $F(u)$  og  $W(u)$  vil produktet  $f(x) \cdot w(x)$  have den Fourier transformerede

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(v) \cdot W(u-v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} W(v) \cdot F(u-v) dv \quad (\text{B.7})$$

Ovenstående benævnes også foldningssætningen og viser, at multiplikation i tidsdomænet svarer til foldning i frekvensdomænet, hvor  $x$  og  $u$  er de variable i henholdsvis tids- og frekvensdomæne. Det gælder også omvendt at multiplikation i frekvensdomæne svarer til foldning i tidsdomæne.

To-dimensional Fourier transformation

Den to-dimensionale eller dobbelte Fourier transformation af en funktion  $f(x,y)$  defineres ved

$$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot \exp(-i2\pi(ux+vy)) \, dx dy \quad , \quad -\infty < u, v < \infty \quad (\text{B.8})$$

Ved inversion fås

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v) \cdot \exp(i2\pi(ux+vy)) \, dudv \quad , \quad -\infty < x, y < \infty \quad (\text{B.9})$$

Den dobbelt transformerede til den diskrete funktion  $f(x,y)$  defineres ved

$$F(u,v) = \Delta^2 \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot \exp(-i2\pi\Delta(ux+vy)) \quad , \quad -\frac{1}{2\Delta} \leq u, v < \frac{1}{2\Delta} \quad (\text{B.10})$$

Ved inversion fås

$$f(x,y) = \iint_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} F(u,v) \cdot \exp(i2\pi\Delta(ux+vy)) \, dudv \quad , \quad x, y = 0, \pm\Delta, \dots \quad (\text{B.11})$$

Foretages en nulpunkts- og skalaændring for  $f$  bliver den dobbelt Fourier transformerede til  $a \cdot f(bx+x_0, cy+y_0)$

$$\left| \frac{a}{bc} \right| \exp(i2\pi \left( \frac{ux}{b} + \frac{vy}{c} \right)) \cdot F\left(\frac{u}{b}, \frac{v}{c}\right) \quad (\text{B.12})$$

Har funktionerne  $f(x,y)$  og  $g(x,y)$  henholdsvis  $F(u,v)$  og  $G(u,v)$  som deres Fourier transformerede har produktfunktionen  $f(x,y) \cdot g(x,y)$  den transformerede

$$\iint_{-\infty}^{\infty} F(w,z) \cdot G(u-w, v-z) \, dw dz \quad (\text{B.13})$$

Omvendt gælder at produktet  $F(u,v) \cdot G(u,v)$  har den transformerede

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(w,z) \cdot g(x-w, y-z) \, dw dz \quad (\text{B.14})$$

Fast Fourier transformation

Beregning af den en-dimensionale Fourier transformation for en funktion  $f(x)$  med  $\Delta=1$ , der er givet i  $N$  punkter  $x=1, \dots, N$ , sker ved udtrykket

$$F(u) = \sum_{x=1}^N f(x) \cdot \exp(-i2\pi ux) \quad (\text{B.15})$$

Antallet af komplekse multiplikationer og additioner det er nødvendigt at foretage er da proportionalt med  $N$ .

For den to-dimensionale transformation er antallet  $N^2$ , da denne kan betragtes som  $N \times N$  en-dimensionale transformationer.

En beregningsmæssig meget effektiv metode til transformationen i (B.15) er den såkaldte FFT-algoritme. En nærmere beskrivelse kan f.eks. findes i [29]. Ved brug af denne metode bliver antallet af komplekse multiplikationer og additioner i det en-dimensionale tilfælde  $N \cdot \log_2 N$ , hvilket for  $N=128$  er ca. 18 gange mindre end  $N^2$ . Ovenstående gælder hvis  $N$  kan skrives som  $N=2^p$ , hvor  $p$  er et heltal. Er dette ikke muligt vil metoden være langsommere, men alligevel væsentligt hurtige end andre metoder.

Ved anvendelse af FFT-algoritmen beregnes den Fourier transformerede i  $N$  punkter i det en-dimensionale tilfælde og i  $N \times N$  punkter i det to-dimensionale tilfælde.



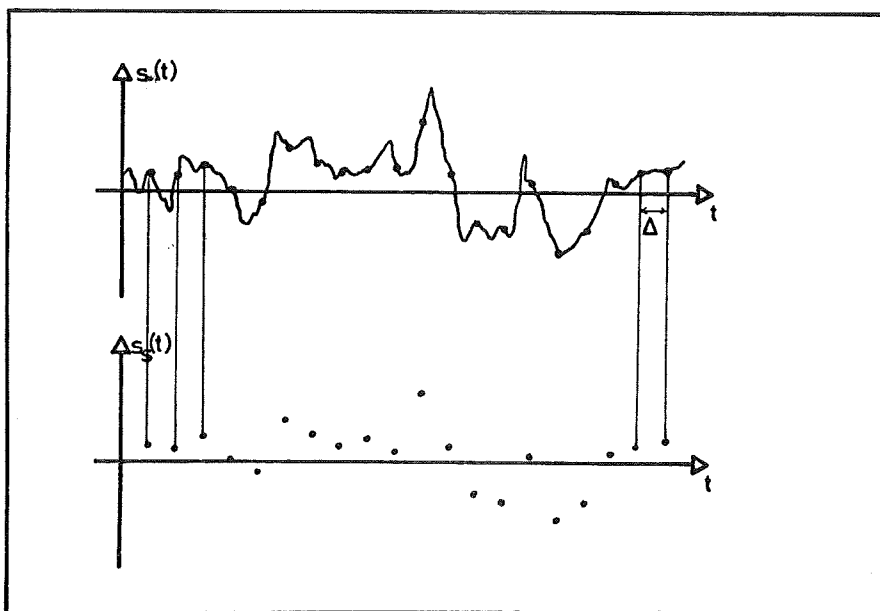


APPENDIX CSampling og aliasing

Når en kontinuert proces  $X(t)$  samples, dvs. kun observeres til diskrete tidspunkter, optræder aliasing, hvilket betyder, at svingninger med frekvenser større end den såkaldte Nyquist frekvens ikke kan udskilles.

Sampling

Der betragtes en realisation  $s(t)$  ( $s$  for signal) af en kontinuert proces. Denne samples med tidsafstanden  $\Delta$ , hvorved det samlede signal bliver  $s_s(t)$  - se nedenstående figur.



Det samlede signal kan opfattes som det kontinuerte signal multipliceret med et "tog" af Dirac's deltafunktioner  $i(t)$

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\Delta) \quad (C.1)$$

$$s_s(t) = s(t) i(t) \quad (C.2)$$

Ved overgangen fra tidsdomænet til frekvensdomænet, dvs. ved Fourier transformationen af det samlede signal (benævnes også det impuls-modulerede signal) (C.2) fås ved brug af foldnings-sætningen - se appendix B.

$$\begin{aligned}
 S_S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f-g) \cdot I(g) \, dg \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f-g) \cdot \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(g - \frac{n}{\Delta}) \, dg \\
 &= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f-g) \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

Ved indsættelse i (C.3) ses nu at

$$S_S(f) = S_S(f + \frac{1}{\Delta}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - \frac{n-1}{\Delta})$$

hvilket viser, at det samplede signal i frekvensdomænet er periodisk med perioden  $\frac{1}{\Delta}$ .

#### Aliasing for spektret

Da spektret er den Fourier transformerede af autokovariansfunktionen, svarer denne altså til signalet  $s(t)$ .

Hvis nu  $S(f)$  er 0 udenfor intervallet

$$I_{\Delta} = [-\frac{1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}]$$

er  $S_S(f)$  blot en periodisk version af  $S(f)$ .

Ved da at multiplicere  $S_S(f)$  med  $H(f)$

$$H(f) = \begin{cases} \Delta & |f| \leq \frac{1}{2\Delta} \\ 0 & |f| > \frac{1}{2\Delta} \end{cases} \tag{C.4}$$

kan  $S(f)$  bestemmes ud fra  $S_S(f)$

$$S(f) = H(f) \cdot S_S(f)$$

Ved anvendelse af foldningssætningen fås

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi u/\Delta)}{\pi u/\Delta} \cdot s_S(t-u) \, du \tag{C.5}$$

Dvs. hvis der ikke optræder frekvenser større end  $\frac{1}{2\Delta}$  i  $S_S(f)$  kan signalet bestemmes ved at folde det samplede spektrum med det "ideelle filter"  $H(f)$ .

Hvis  $S(f)$  derimod ikke er 0 udenfor intervallet  $I_{\Delta}$  kan disse frekvenser ikke udskilles. Man kan da omskrive (C.3) til

$$S_S(f) = S(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \{S(f + \frac{n}{\Delta}) + S(f - \frac{n}{\Delta})\} \quad (C.6)$$

Dvs. bidraget til  $S_S(f)$  består dels af  $S(f)$  samt bidrag fra frekvenserne  $f \pm \frac{n}{\Delta}$ ,  $n=1,2,\dots$  og det er ikke muligt at udskille de enkelte bidrag. Man siger at frekvenserne større end  $\frac{1}{2\Delta}$  er aliased eller foldet med de lavere frekvenser.

For spektret betyder dette, at det ikke er muligt at afsløre svingninger med frekvenser større end  $\frac{1}{2\Delta}$ . Ønsker man f.eks. at afsløre døgnsvingninger i en proces, må der altså samples med en samplingsafstand på højst  $\Delta=12$  timer, hvorved Nyquist frekvensen bliver  $f_N = \frac{1}{2\Delta} = \frac{1}{24}$  timer<sup>-1</sup>. Omvendt betyder (C.6) også, at hvis samplingsafstanden er for stor, vil spektret blive forstyrret, da svingninger med frekvenser større end  $f_N = \frac{1}{2\Delta}$  vil optræde i frekvensintervallet  $|f| \leq \frac{1}{2\Delta}$ , da de foldes herind.

#### Aliasing for bispektret

For anden ordens spektret var frekvenser større end Nyquist frekvensen  $f_N = \frac{1}{2\Delta}$  aliased. Dette fulgte umiddelbart af at spektret er symmetrisk.

For bispektret gælder symmetriegenskaberne (6.6) og samtidig er bispektret for en samplet proces periodisk med perioden  $\frac{1}{\Delta}$ .

Dvs. for frekvenserne i bispektret gælder udover (6.6)

$$-\frac{1}{2\Delta} < f_i \leq \frac{1}{2\Delta} \quad , \quad i=1,2,3$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \pmod{\frac{1}{\Delta}}$$

grundet stationaritet.

En given frekvensvektor  $(f_1, f_2, f_3)$  repræsenteres da på en af planerne

$$f_1 + f_2 + f_3 = -\frac{1}{\Delta}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

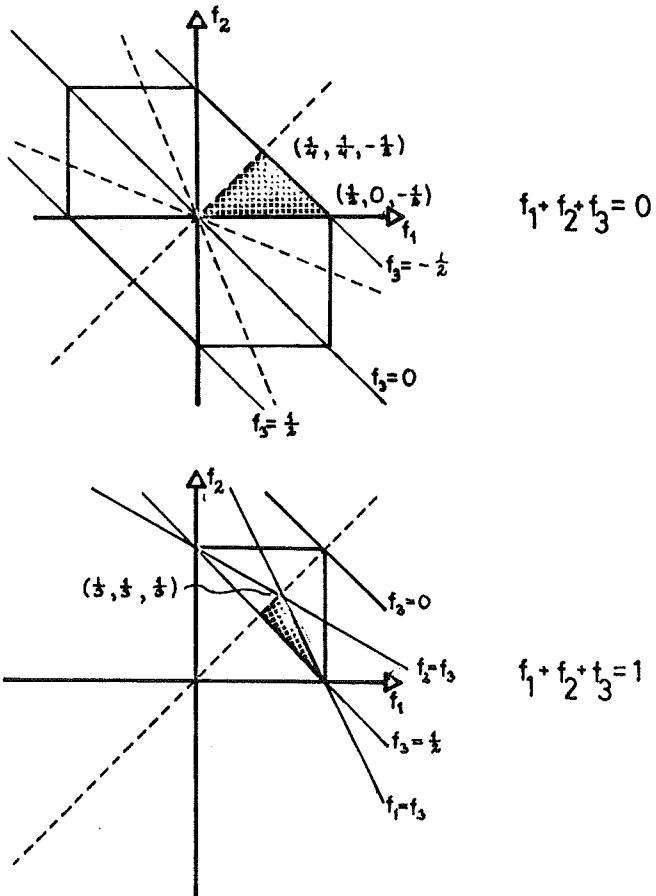
$$f_1 + f_2 + f_3 = \frac{1}{\Delta}$$

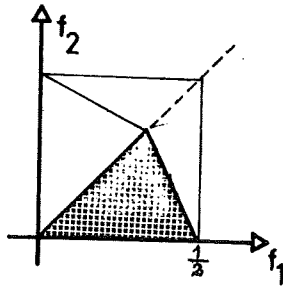
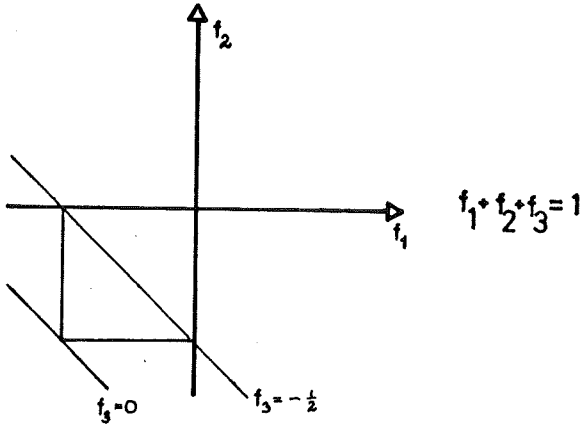
bestemt ved de to første koordinater  $f_1$  og  $f_2$ .

I nedenstående figur er situationen optegnet med  $\Delta=1$  i de tre tilfælde, hvor de stiplede linier angiver symmetrilinierne (6.6).

Ved at udnytte symmetriegenskaberne ses, at bispektret er bestemt i de to skraverede områder, dvs. for frekvenserne  $f_1$  og  $f_2$  givet i det trekantformede område i nedenstående figur.

Det er altså ikke nødvendigt, at beregne bispektret i mere end trekanten på den sidste figur.







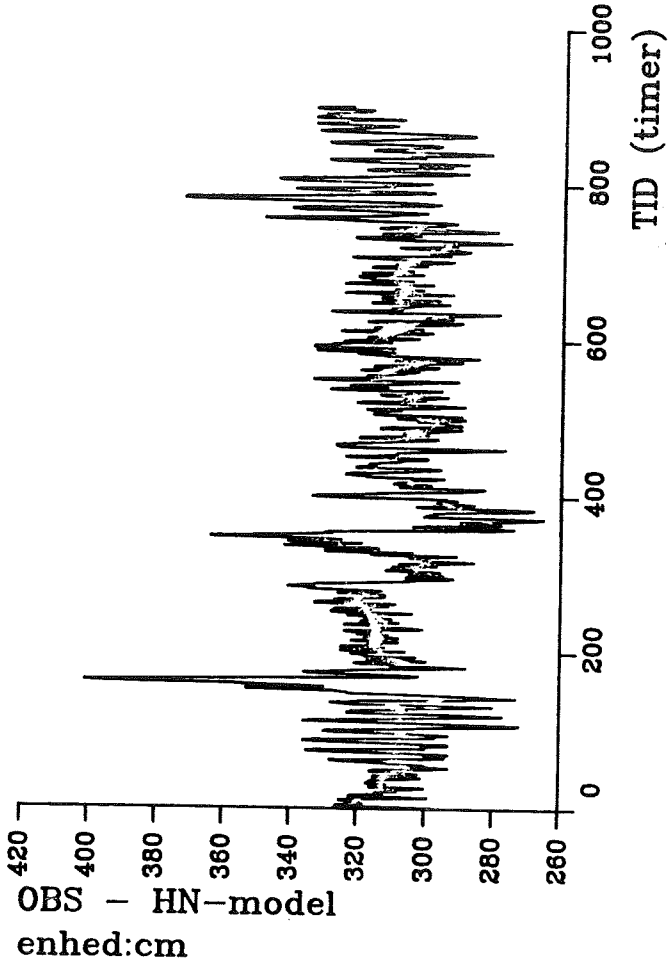
APPENDIX DPlot i forbindelse med vandstandsdata

På de følgende sider er gengivet en række plot af vandstandsdata.

Først kommer plottene i forbindelse med anden ordens analysen og dernæst plottene fra tredje ordens analysen.

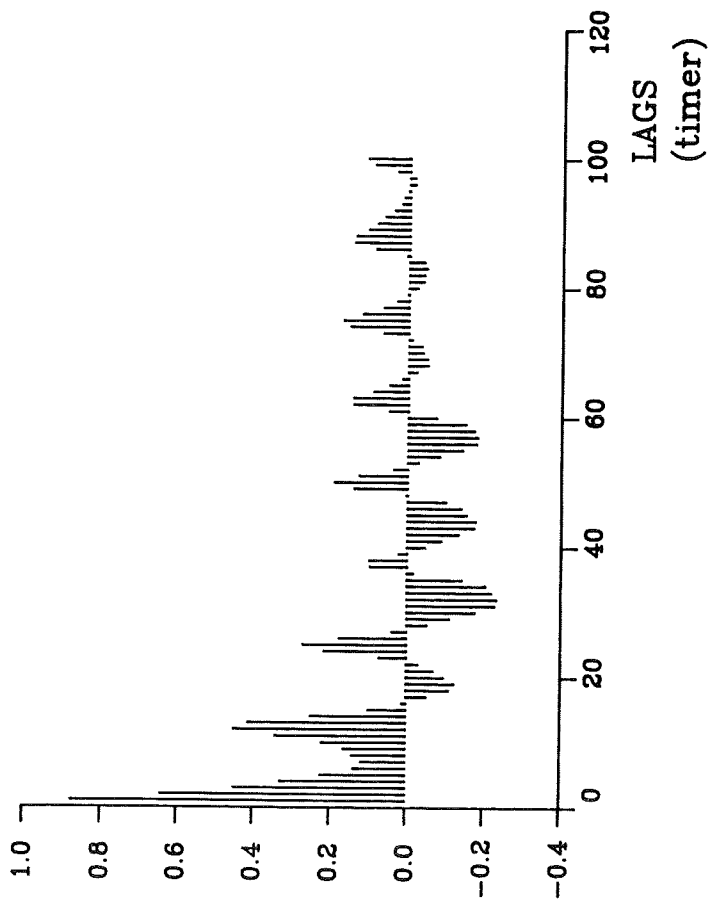
Desværre har det ikke været muligt at vise plot af bispektrene, da det anvendte standardprogram SURRENDER under GPGS til udtegnning af tre-dimensionale plot indeholder en systemfejl, som bevirker, at funktioner der fluktuerer meget - som bispektret - ikke kan udtegnes.

DATA FOR STILLE VEJR  
900 data



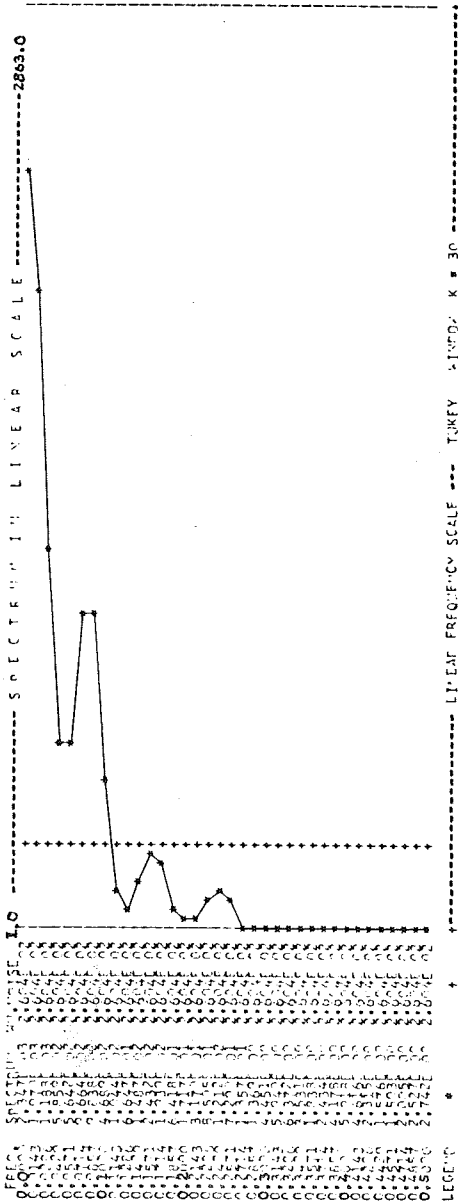


# AUTOKORRELATIONSFUNKTION STILLE VEJR



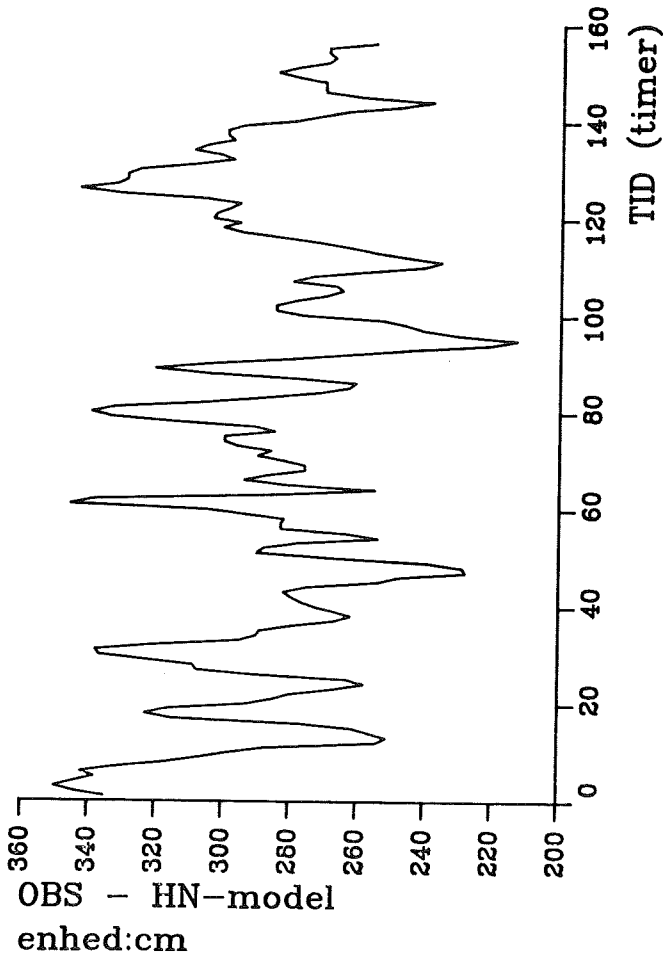
Data: STILLE

SPECTRUM IN LINEAR SCALE



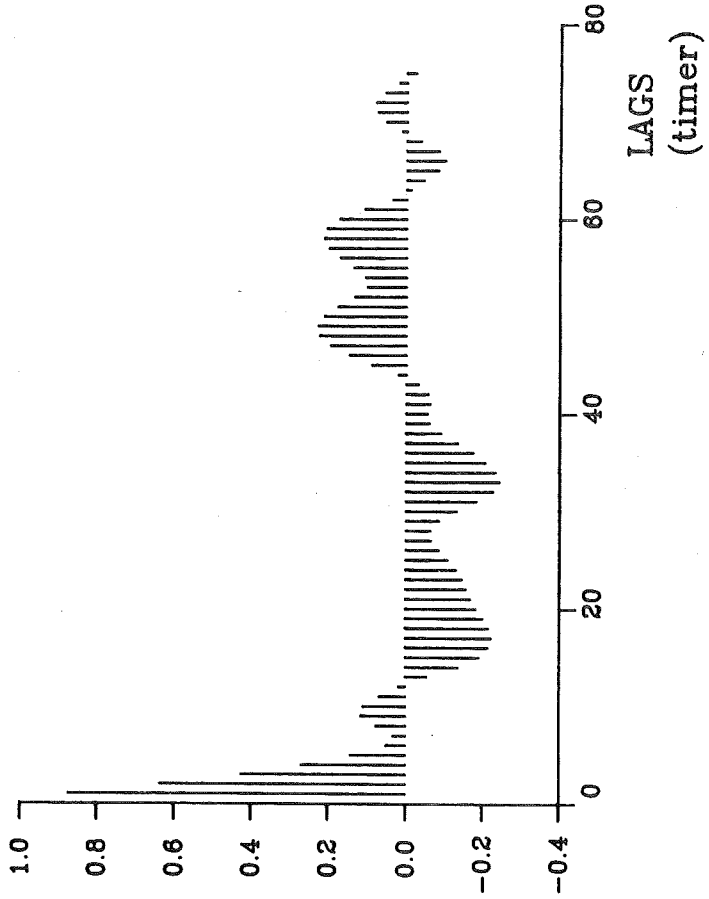
TUKEY 5 INFDY K 30

DATA FOR STORMVEJR1  
156 data



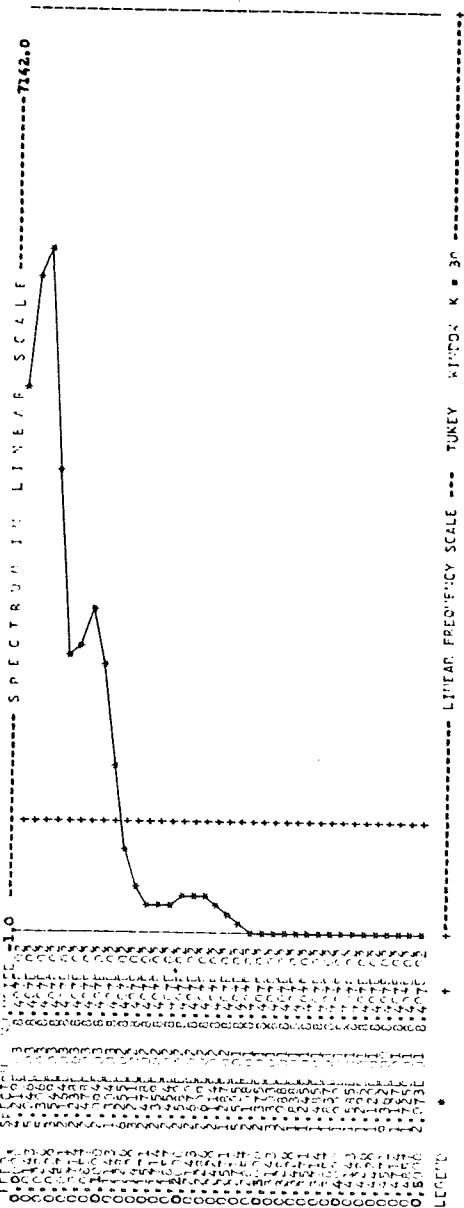
## AUTOKORRELATIONSFUNKTION

stormvejr 1

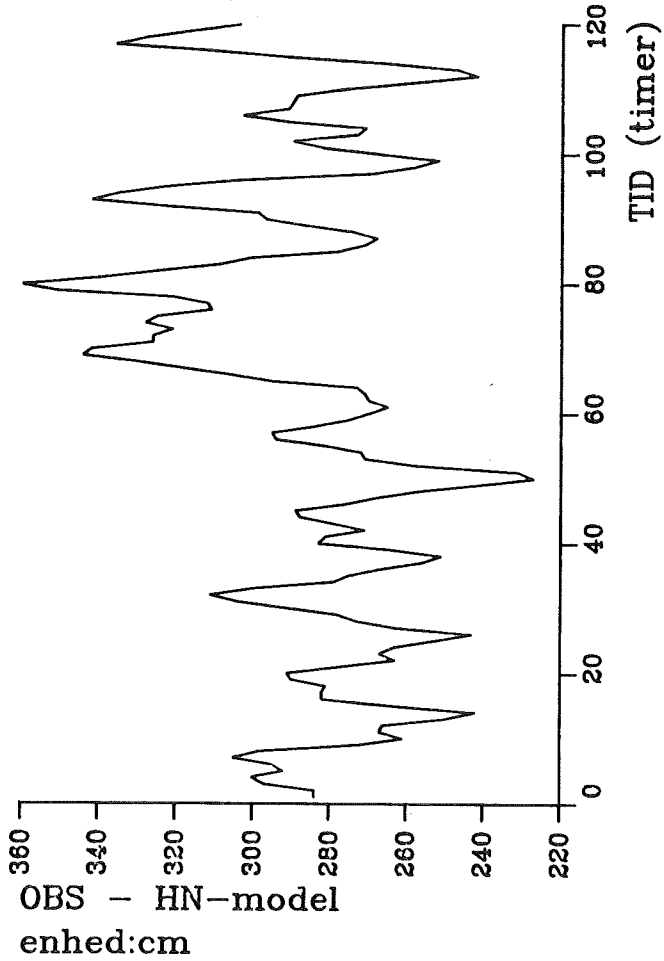


Data: STORM1

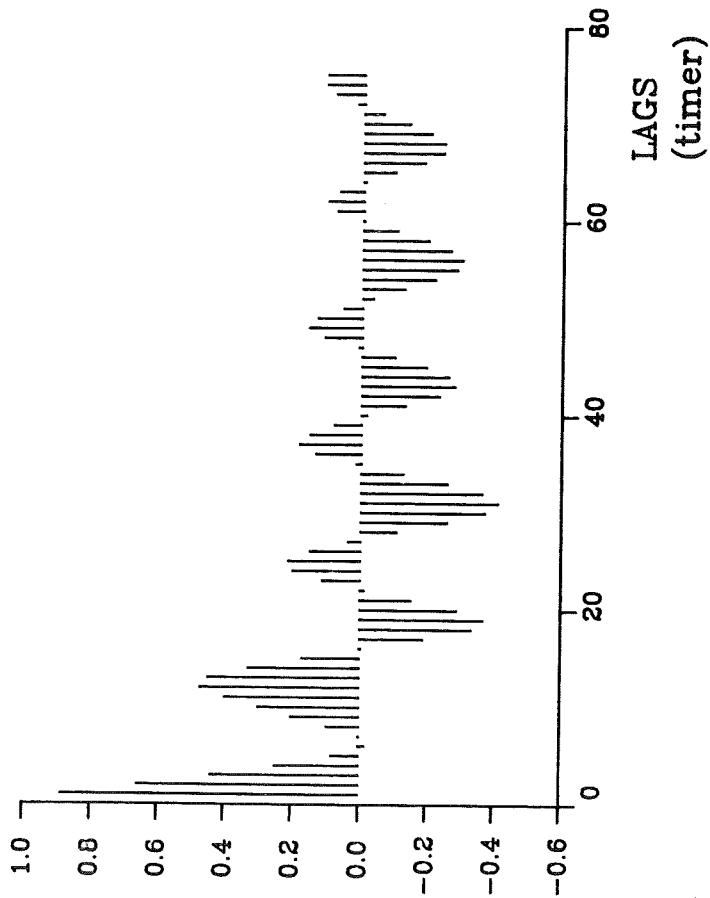
S  
C  
T  
I  
O  
N  
S  
C  
O  
U  
N  
T  
S  
S  
E  
C  
O  
N  
D  
S  
P  
E  
C  
T  
R  
U  
M  
I  
N  
L  
I  
N  
E  
A  
R  
S  
C  
A  
L  
E



DATA FOR STORMVEJR2  
120 data

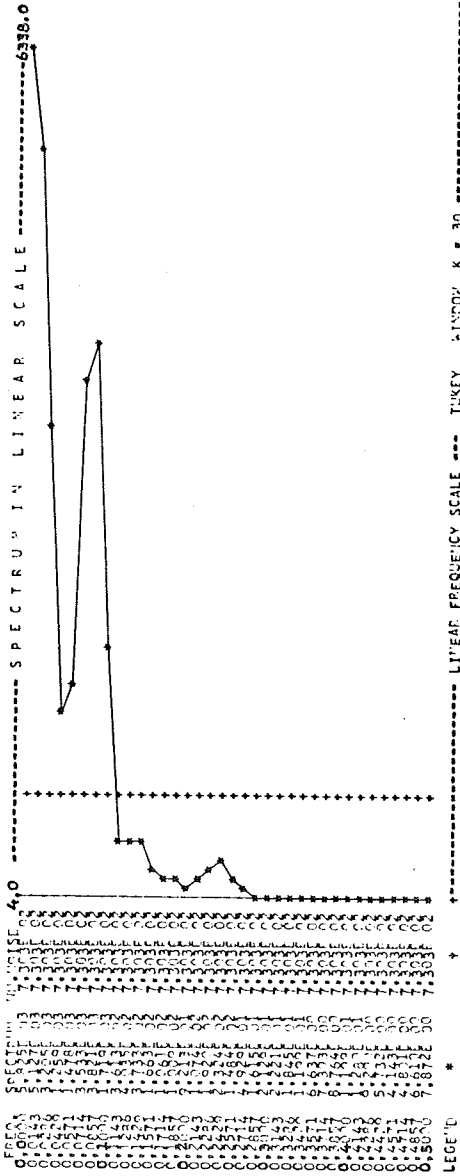


# AUTOKORRELATIONSFUNKTION stormvejr 2



Data: STORM2

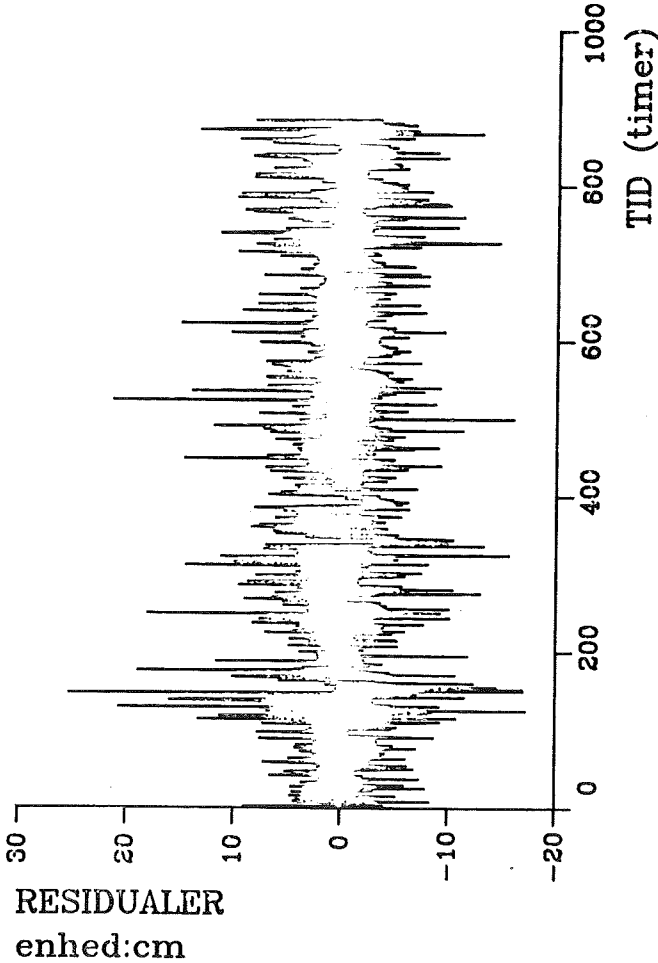
\*\*\*\*\*  
SPECTRUM IN LINEAR SCALE  
\*\*\*\*\*



\*\*\*\*\*  
SPECTRUM IN LINEAR SCALE  
\*\*\*\*\*

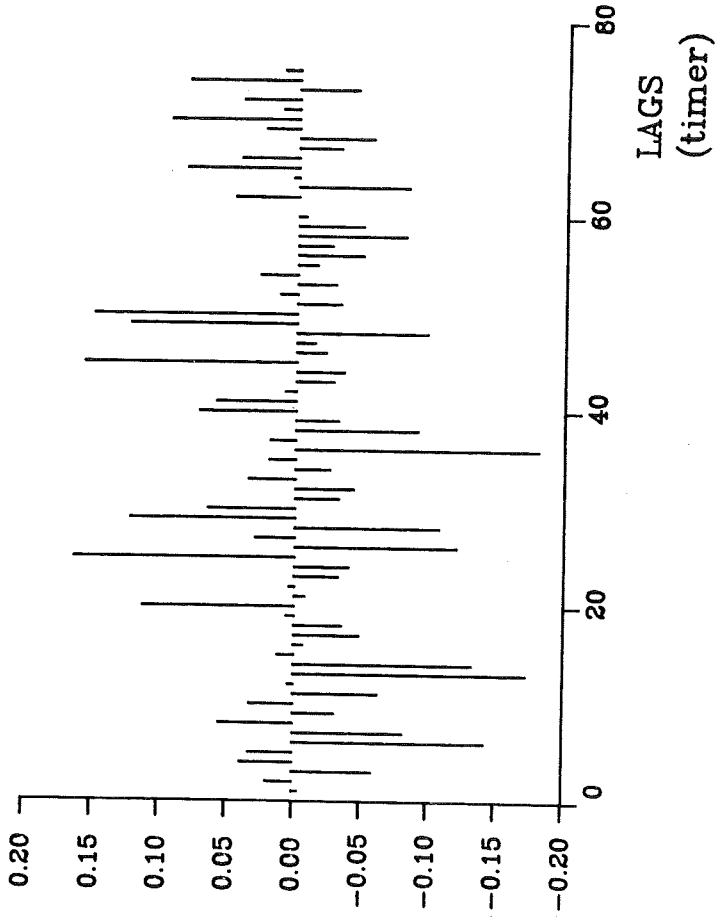


RESIDUALER FOR MODEL - STILLE VEJR  
885 residualer



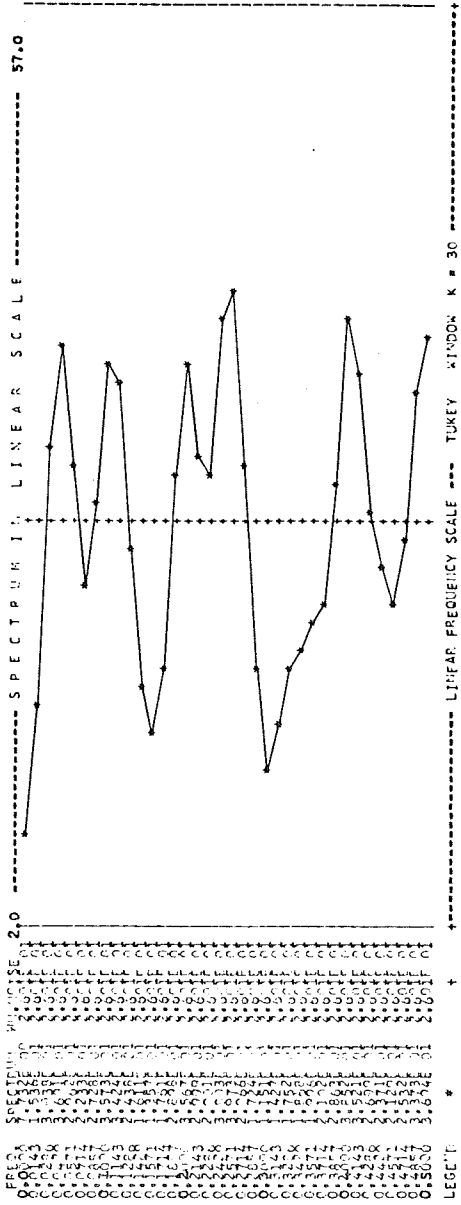
# AUTOKORRELATIONSFUNKTION

residualer - stille

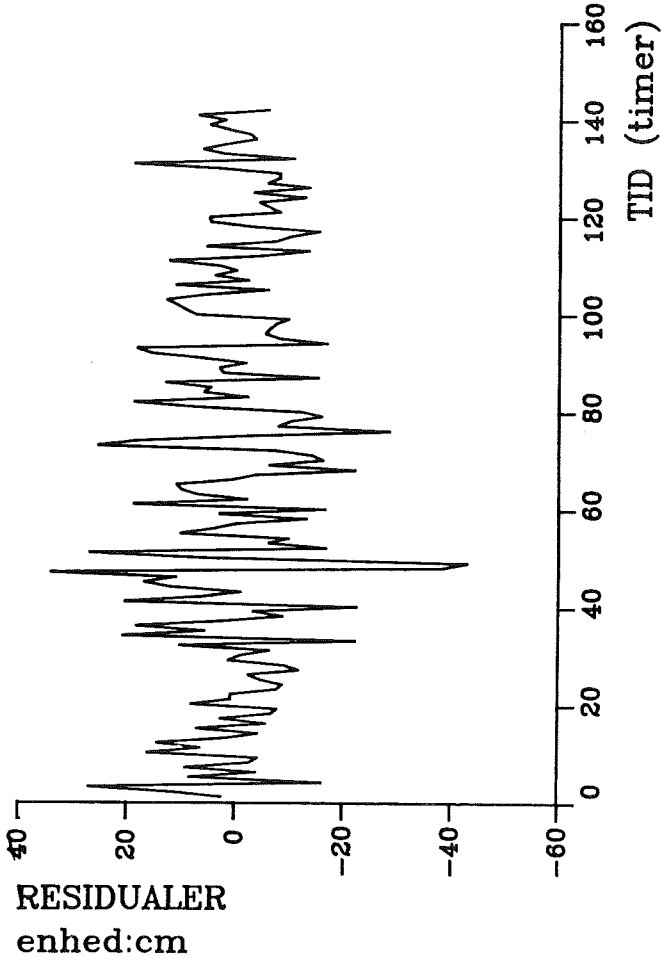


Data: Res. STILLE

SUBJECT: SPECTRUM

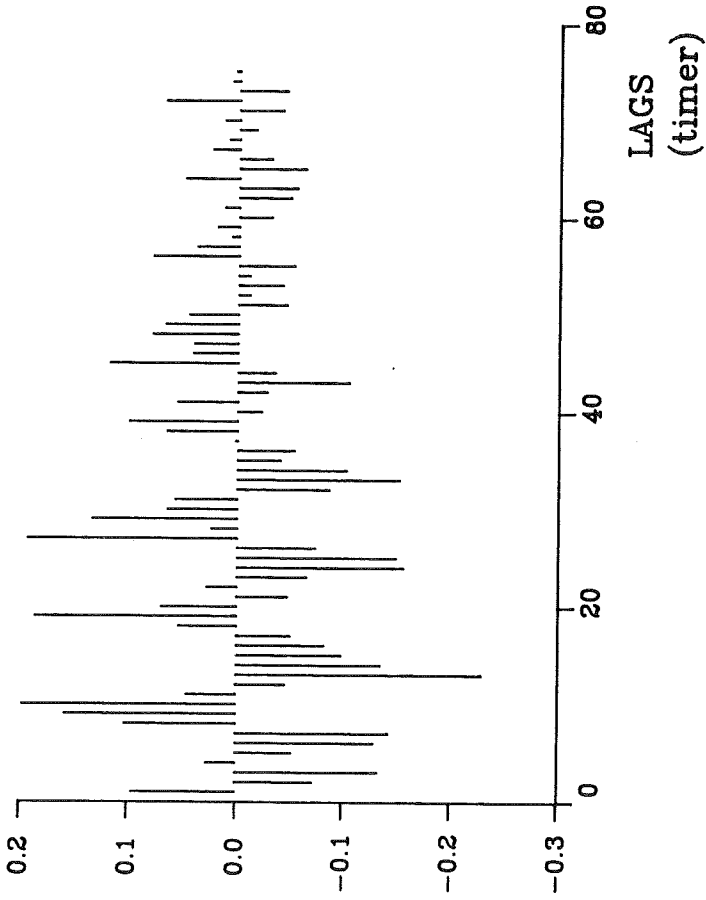


RESIDUALER FOR MODEL -- STORM1  
142 residualer



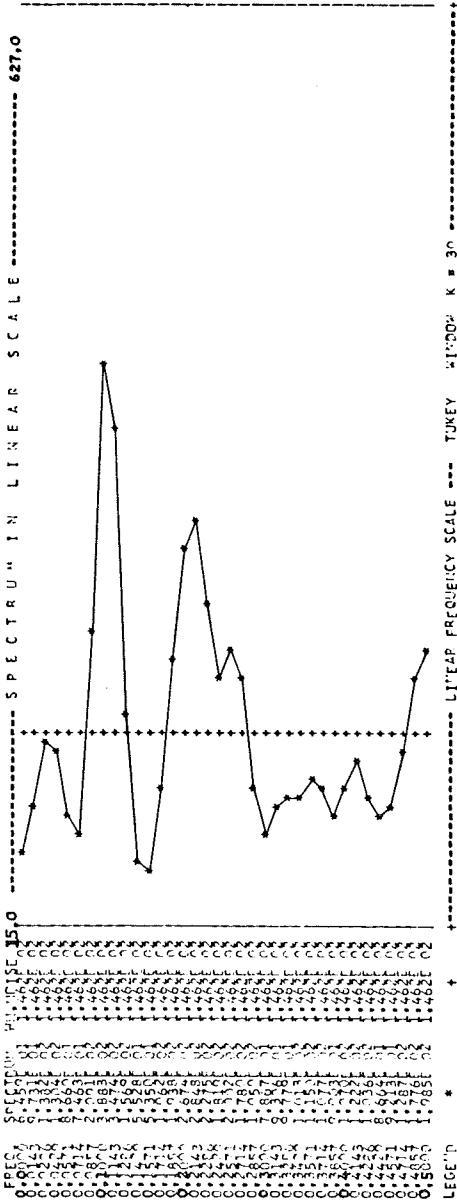
# AUTOKORRELATIONSFUNKTION

residualer - storm1



Data: Res. STORMI

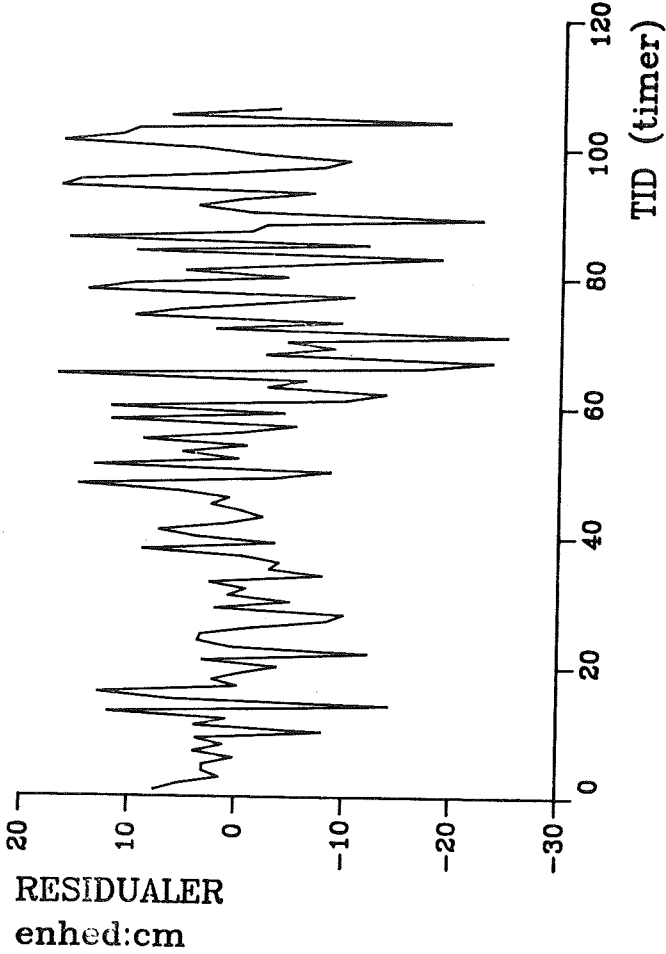
SPECTRUM IN LINEAR SCALE



TUKEY WINDO W K 30

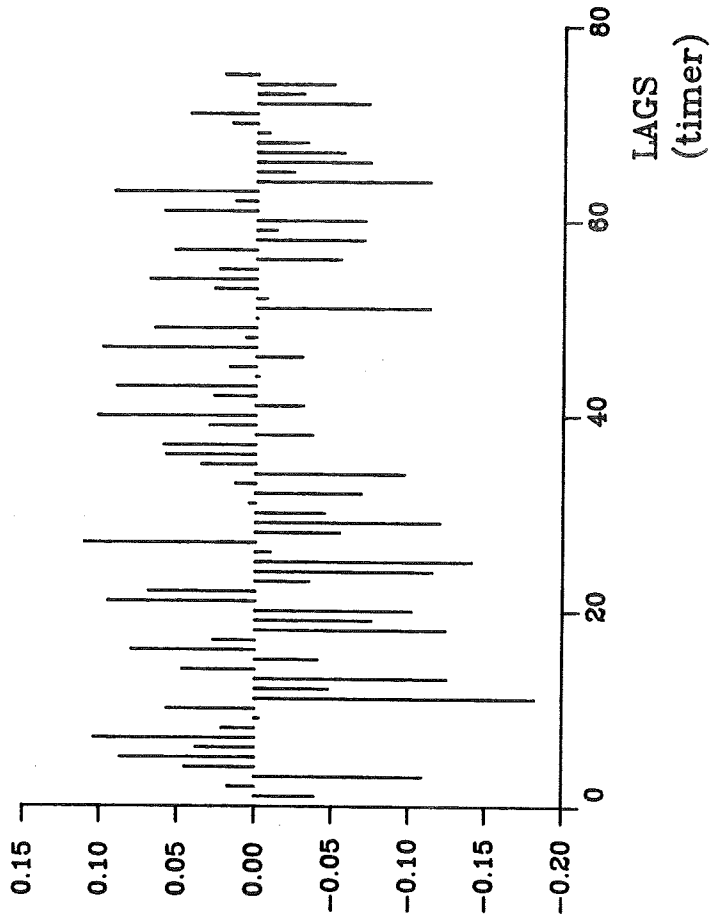
LEGEIN

RESIDUALER FOR MODEL - STORM2  
106 residualer



## AUTOKORRELATIONSFUNKTION

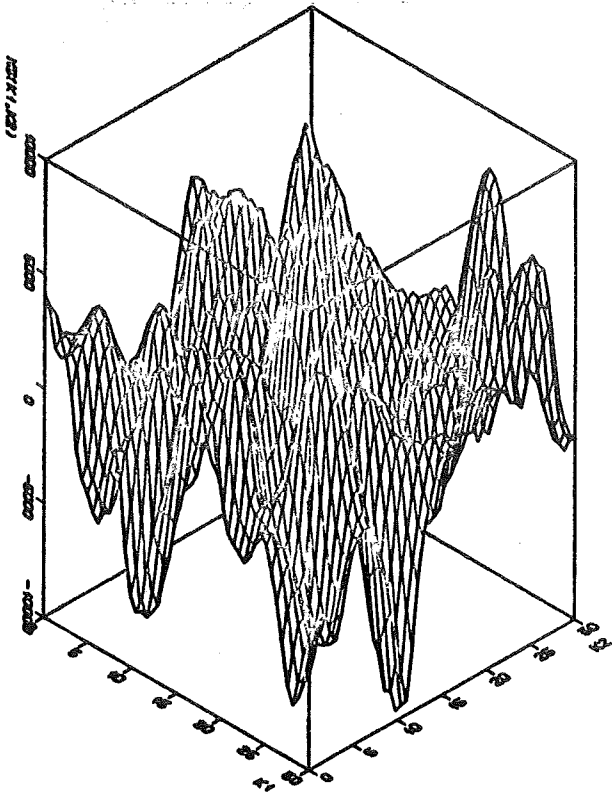
residualer - storm2



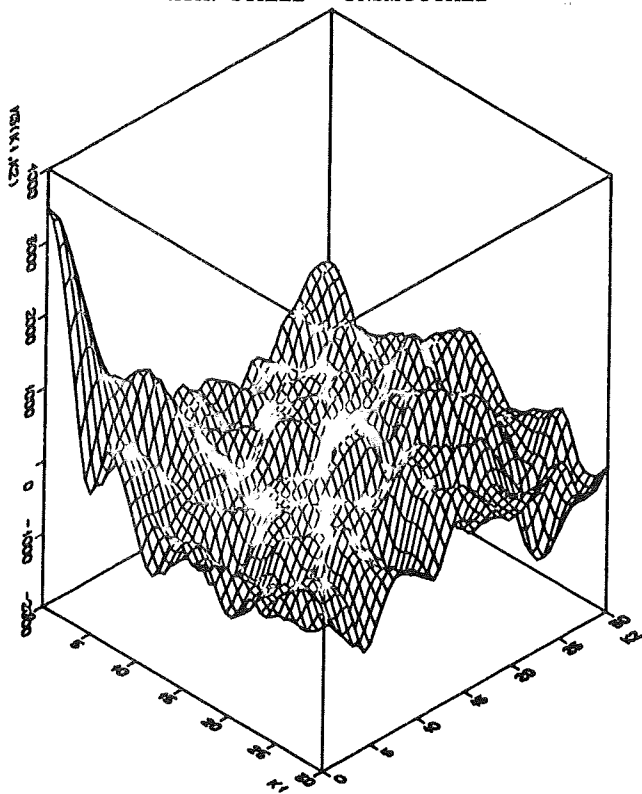




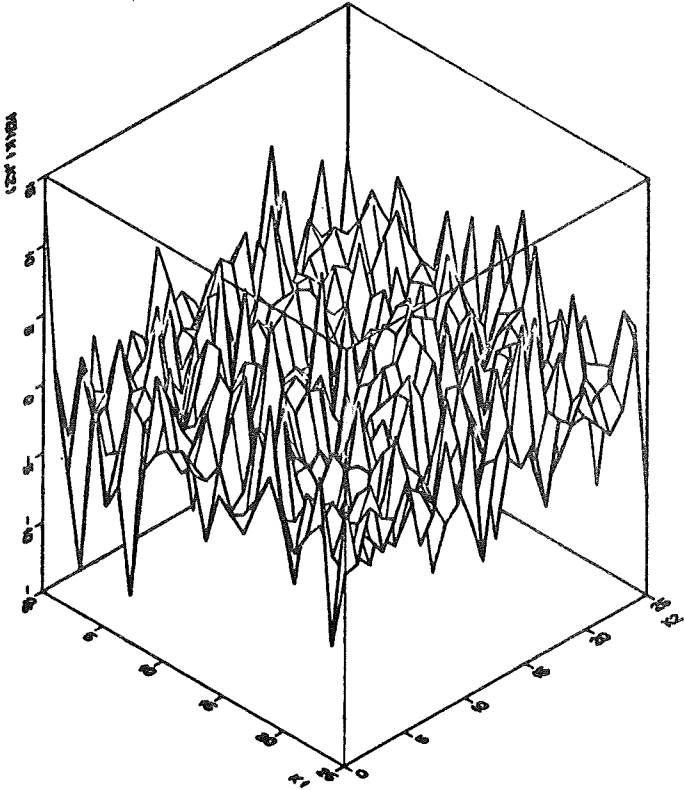
THIRD-ORDER MOMENTFUNCTION  
DATA: STORM1 - UNSMOOTHED



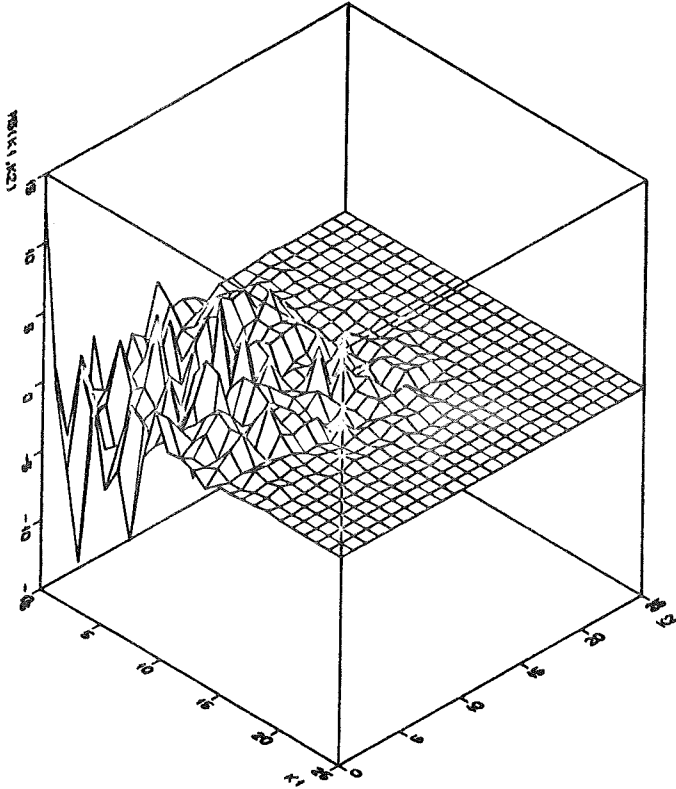
THIRD-ORDER MOMENTFUNCTION  
DATA: STILLE - UNSMOOTHED



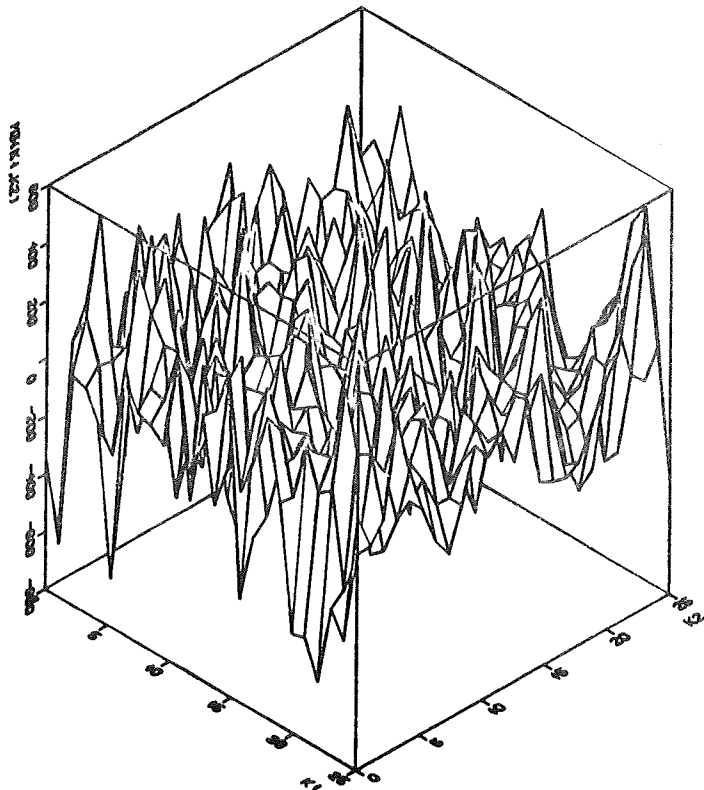
THIRD-ORDER MOMENTFUNCTION  
DATA: RES. STILLE : UNSMOOTHED



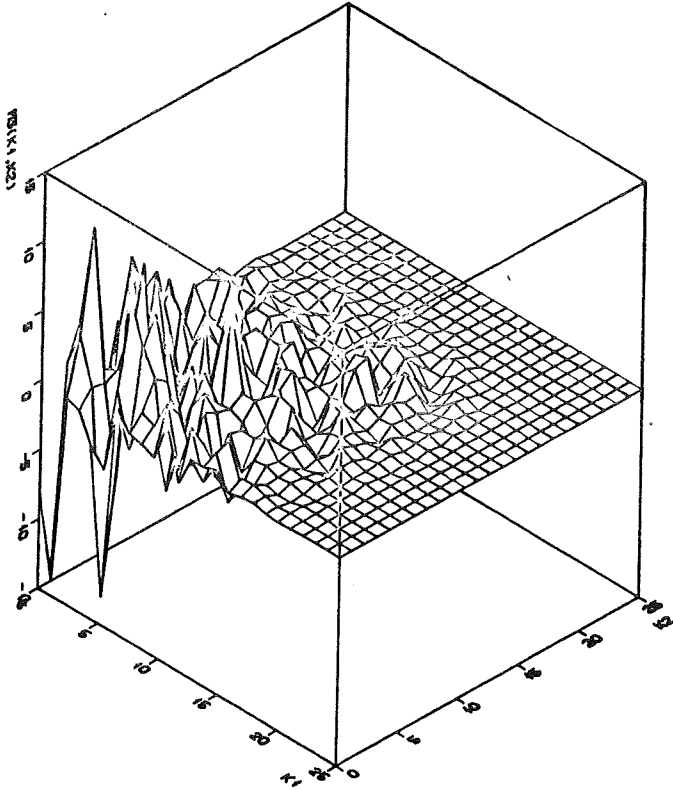
THIRD-ORDER MOMENTFUNCTION  
DATA: RES. STILLE - SMOOTH. TUKEY KERNEL (M=30)



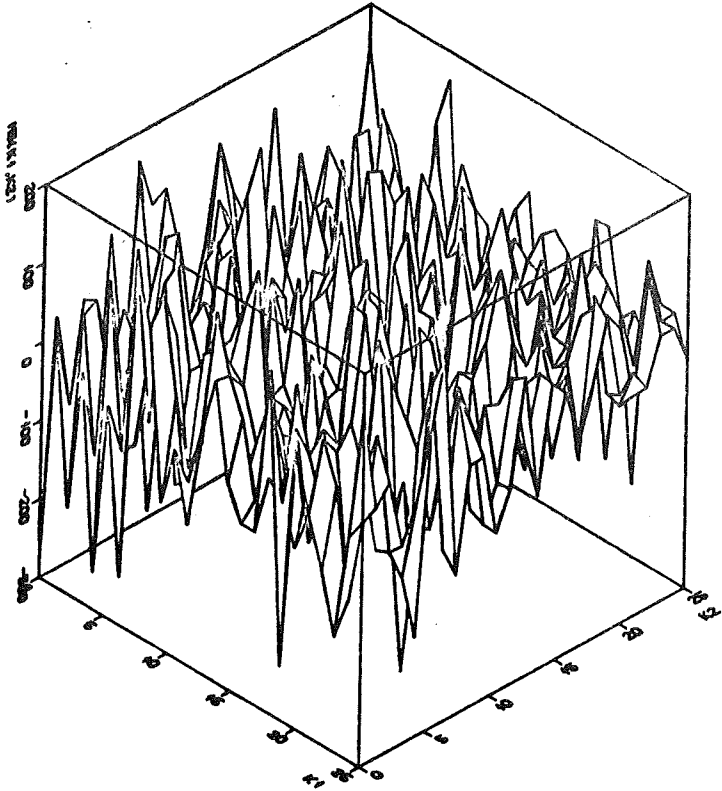
THIRD-ORDER MOMENTFUNCTION  
DATA: RES. STORM1 - UNSMOOTHED



THIRD-ORDER MOMENTFUNCTION  
DATA: RES. STORM1 - SMOOTH. TUKEY KERNEL (H=80)

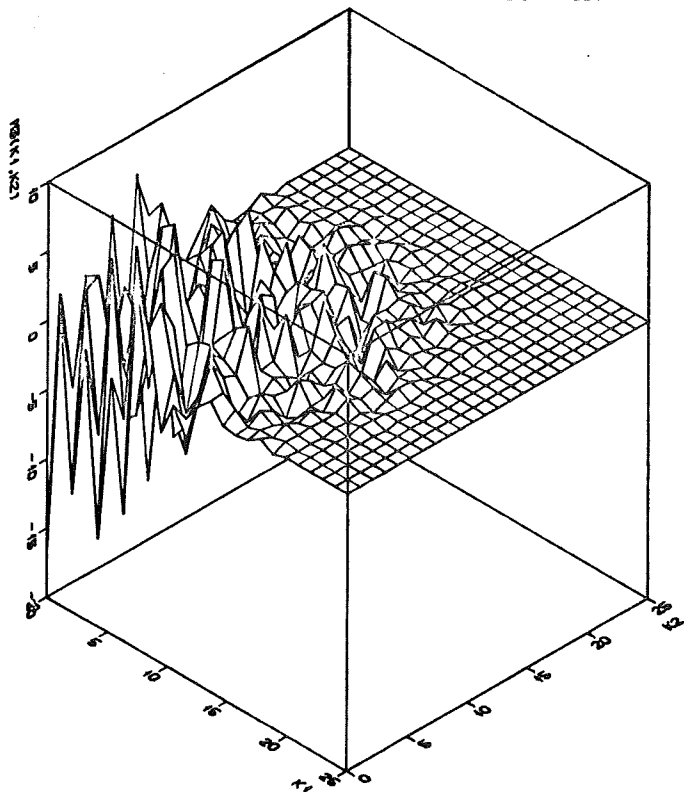


THIRD-ORDER MOMENTFUNCTION  
DATA: RES. STORM2 - UNSMOOTHED





THIRD-ORDER MOMENTFUNCTION  
DATA: RES. STORM2 - SMOOTH. TUKEY KERNEL (M=80)



## B I S P E C T R U M - R E A L P A R T

UNSMOOTHED

=====

	0.0	0.020	0.040	0.060	0.080	0.100	0.120	0.140	0.160	0.180	F1
0.0	0.149E 12	-0.263E 12	0.210E 11	-0.115E 12	0.136E 12	-0.485E 11	0.671E 11	-0.191E 11	0.102E 12	0.765E 10	
0.020		0.144E 12	0.569E 11	-0.675E 11	0.101E 12	-0.308E 11	0.485E 11	0.565E 10	0.555E 10	0.382E 10	
0.040			-0.443E 12	-0.605E 11	0.218E 12	0.417E 10	0.554E 11	0.402E 11	0.950E 11	0.367E 11	
0.060				0.658E 12	0.242E 12	-0.535E 11	0.302E 11	-0.351E 11	-0.375E 11	-0.252E 11	
0.080					-0.393E 12	-0.280E 12	-0.807E 10	0.723E 10	0.585E 11	0.104E 11	
0.100						0.170E 12	-0.265E 12	-0.157E 11	0.428E 11	0.852E 10	
0.120							-0.296E 12	0.611E 11	0.106E 12	-0.940E 10	
0.140								0.274E 12	-0.148E 12	0.603E 11	
0.160									0.143E 12	-0.983E 11	
0.180										-0.316E 12	
	0.200	0.220	0.240	0.260	0.280	0.300	0.320	0.340	0.360	0.380	F1
0.0	0.599E 11	0.400E 10	0.161E 11	0.123E 11	0.343E 11	-0.651E 09	-0.554E 10	-0.384E 10	-0.178E 11	0.703E 10	
0.020	-0.272E 11	0.152E 11	-0.220E 11	-0.443E 10	0.310E 10	0.553E 10	-0.198E 11	0.182E 11	-0.301E 11	0.453E 10	
0.040	0.382E 11	0.114E 11	-0.355E 10	0.167E 11	0.181E 11	-0.119E 11	-0.200E 11	-0.222E 11	-0.137E 11	-0.113E 11	
0.060	-0.715E 11	-0.116E 11	-0.622E 11	-0.317E 11	-0.164E 11	-0.196E 11	-0.333E 11	-0.598E 09	-0.410E 11	-0.130E 10	
0.080	0.113E 11	0.448E 10	-0.455E 10	0.235E 11	0.304E 11	-0.258E 10	0.199E 10	-0.115E 10	0.204E 11	0.851E 10	
0.100	-0.215E 11	0.252E 11	-0.334E 11	-0.645E 10	0.178E 11	-0.101E 11	-0.163E 11	-0.151E 09	-0.410E 11	-0.859E 09	
0.120	-0.212E 11	-0.269E 11	-0.365E 11	0.141E 11	-0.447E 10	-0.155E 11	-0.308E 11	-0.197E 10	-0.119E 10	0.494E 10	
0.140	-0.117E 12	0.660E 11	-0.972E 11	0.223E 11	0.579E 10	-0.342E 10	-0.182E 11	-0.199E 10	-0.342E 11	0.215E 10	
0.160	-0.370E 10	0.879E 11	-0.235E 11	-0.153E 11	0.252E 11	-0.468E 11	0.323E 10	-0.141E 11	0.344E 11	-0.860E 10	
0.180	-0.440E 10	0.103E 12	-0.525E 11	0.551E 11	0.744E 11	0.460E 10	0.187E 11	0.315E 10	-0.145E 11	0.214E 11	
	0.400	0.420	0.440	0.460	0.480						
0.0	-0.271E 11	0.377E 09	-0.163E 11	-0.217E 10	-0.738E 11						
0.020	-0.232E 11	0.559E 10	-0.120E 11	0.201E 10	0.668E 10						
0.040	-0.197E 11	-0.187E 11	-0.242E 10	-0.301E 11	-0.580E 11						
0.060	-0.225E 11	0.865E 10	-0.386E 10	0.132E 11	0.153E 11						
0.080	0.118E 11	0.126E 10	0.262E 11	-0.235E 11	-0.283E 11						
0.100	-0.290E 11	0.406E 10	-0.178E 11	0.139E 11	-0.130E 11						
0.120	-0.555E 10	0.191E 10	0.144E 11	-0.296E 11	-0.178E 11						
0.140	-0.114E 11	0.209E 10	0.576E 10	0.124E 11	-0.273E 10						
0.160	0.225E 11	-0.306E 10	0.354E 11	-0.363E 11	0.760E 10						
0.180	-0.313E 10	0.193E 10	0.440E 10	0.244E 11	-0.249E 11						

BI SPECTRUM - REAL PART

UNSCUTTED

	0.200	0.220	0.240	0.260	0.280	0.300	0.320	0.340	0.360	0.380
0.200	0.261E 12	-0.142E 12	0.476E 11	-0.102E 11	0.568E 11	-0.599E 11	0.878E 10	-0.122E 11	0.262E 11	-0.191E 11
0.220	0.688E 11	-0.136E 12	0.698E 11	0.944E 11	-0.248E 11	-0.236E 10	-0.942E 10	-0.355E 11	0.318E 11	
0.240	-0.765E 11		-0.765E 11	0.461E 11	-0.405E 10	0.401E 11	0.494E 10	-0.147E 10		
0.260				0.382E 12	-0.139E 12	-0.229E 12	-0.463E 11	-0.130E 12	-0.519E 11	-0.375E 11
0.280					-0.628E 12	-0.239E 12	0.679E 11	0.579E 10	0.402E 11	
0.300						0.328E 12	0.542E 11	-0.790E 09	0.109E 11	0.726E 11
0.320							-0.189E 12	0.270E 12	-0.784E 11	0.509E 11
0.340								-0.128E 12	-0.157E 12	0.117E 12
0.360								0.262E 12		0.120E 11
0.380										-0.344E 11

F2

	0.400	0.420	0.440	0.460	0.480
0.200	0.522E 10	-0.111E 11	0.124E 11	-0.494E 11	0.261E 10
0.220	-0.242E 11	0.363E 11	-0.914E 10	0.343E 11	-0.569E 11
0.240	-0.845E 10	-0.347E 10	0.777E 09	-0.555E 11	0.161E 11
0.260	-0.355E 11	-0.141E 11	-0.654E 10	-0.613E 10	-0.691E 11
0.280	0.102E 10	0.584E 11	0.112E 11	0.863E 10	0.469E 11
0.300	-0.514E 10	0.437E 11	0.124E 11	0.341E 10	-0.798E 11
0.320	-0.523E 11	0.522E 11	-0.388E 11	-0.765E 10	0.245E 11
0.340	-0.599E 11	0.440E 11	0.756E 10	-0.355E 11	-0.824E 11
0.360	0.188E 11	0.237E 11	0.651E 09	-0.309E 11	0.669E 11
0.380	-0.148E 12	0.171E 11	-0.351E 10	-0.931E 11	-0.107E 12

F2

	0.400	0.420	0.440	0.460	0.480
0.200	0.543E 10	0.254E 12	-0.329E 11	0.456E 11	1.605E 11
0.220	0.251E 11	-0.115E 12	-0.266E 12	-0.150E 12	-0.150E 12
0.240		-0.302E 12	-0.159E 12	0.108E 12	0.108E 12
0.260			-0.284E 12	-0.285E 12	-0.285E 12
0.280				0.124E 13	0.124E 13

B I S P E C T R U M - I M A G I N A R Y P A R T

UNRESOLVED

I	0.0	0.020	0.040	0.060	0.080	0.100	0.120	0.140	0.160	0.180	F1
0.0	0.0	-0.592E 11	0.135E 12	0.744E 11	0.106E 12	-0.155E 11	0.611E 11	0.308E 11	0.297E 11	-0.153E 11	
0.020	0.342E 12	-0.232E 12	-0.842E 11	0.170E 12	-0.842E 11	0.569E 11	-0.469E 11	0.206E 11	-0.506E 11	0.132E 11	
0.040	-0.518E 11	0.433E 12	0.564E 11	0.433E 12	0.564E 11	0.207E 10	0.474E 11	0.325E 11	0.849E 10	-0.466E 11	
0.060	0.310E 12	-0.473E 12	-0.624E 11	-0.334E 12	-0.473E 12	-0.624E 11	-0.155E 12	-0.479E 11	-0.887E 11	-0.213E 11	
0.080	0.080	0.125E 12	0.411E 12	0.080	0.125E 12	0.411E 12	0.154E 12	0.109E 12	0.562E 11	-0.152E 11	
0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	
0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	
0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	
0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	0.160	
0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	
0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	
0.0	-0.124E 11	-0.491E 11	-0.258E 11	0.161E 11	-0.473E 11	-0.174E 11	-0.446E 11	-0.415E 09	-0.247E 11	0.425E 09	
0.020	-0.435E 11	0.319E 11	-0.460E 11	0.52E 11	-0.152E 11	-0.459E 10	-0.101E 10	-0.777E 10	-0.734E 10	0.735E 0E	
0.040	-0.193E 11	-0.507E 11	-0.127E 11	-0.149E 11	-0.346E 11	-0.424E 11	-0.226E 11	-0.139E 11	-0.507E 10	-0.114E 11	
0.060	-0.542E 11	0.294E 11	-0.495E 11	0.479E 11	-0.4975E 10	0.812E 10	0.132E 11	0.770E 10	0.137E 11	0.243E 11	
0.080	0.310E 11	-0.165E 11	0.436E 11	0.106E 11	0.523E 10	-0.220E 10	0.118E 11	0.220E 10	0.109E 11	-0.923E 10	
0.100	-0.445E 11	0.123E 11	-0.668E 11	0.495E 11	-0.417E 11	-0.657E 10	-0.191E 11	-0.103E 11	-0.123E 11	0.122E 11	
0.120	-0.399E 11	-0.102E 11	0.179E 11	0.560E 10	-0.645E 10	-0.202E 11	0.201E 11	0.963E 10	0.207E 11	-0.551E 10	
0.140	-0.769E 10	-0.115E 10	-0.333E 11	0.579E 11	-0.171E 11	-0.179E 11	0.975E 10	-0.222E 11	0.194E 11	0.449E 10	
0.160	0.640E 11	-0.423E 11	0.991E 11	-0.172E 10	0.341E 11	-0.215E 11	0.520E 11	0.175E 11	0.244E 11	0.377E 10	
0.180	0.228E 12	0.420E 11	-0.255E 10	0.117E 12	-0.444E 11	-0.591E 09	-0.192E 11	-0.109E 11	-0.363E 10	0.105E 11	
0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	
0.0	0.0	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	
0.020	-0.252E 11	0.445E 10	-0.156E 11	-0.343E 11	-0.101E 07						
0.040	0.711E 10	0.200E 10	0.112E 11	0.173E 10	0.120E 11						
0.060	-0.110E 11	0.264E 10	-0.711E 10	-0.376E 11	0.191E 11						
0.080	0.264E 11	0.243E 11	0.222E 11	0.180E 11	0.139E 11						
0.100	-0.710E 10	-0.747E 09	-0.154E 11	-0.339E 11	0.126E 11						
0.120	0.116E 11	0.519E 10	-0.168E 10	-0.225E 11	0.439E 11						
0.140	0.369E 09	0.131E 11	0.328E 10	0.595E 10	-0.646E 10						
0.160	0.636E 10	0.190E 11	0.175E 11	-0.673E 10	-0.106E 11						
0.180	0.636E 10	0.190E 11	-0.203E 11	-0.681E 09	0.297E 11						
0.200	-0.125E 11	0.484E 10	-0.116E 11	-0.217E 11	-0.327E 11						

E I S P E C T R U M - I M A G I N A R Y P A R T

UNSMULTEd

	0.200	0.220	0.240	0.260	0.280	0.300	0.320	0.340	0.360	0.380	F1
0.200	-0.651E 11	-0.107E 12	0.810E 11	-0.275E 11	-0.973E 10	-0.439E 11	0.300E 11	0.173E 10	-0.576E 10	-0.710E 10	
0.220		0.117E 12	-0.100E 12	0.249E 12	-0.145E 12	0.308E 11	-0.567E 11	0.197E 11	-0.959E 10	0.324E 11	
0.240			0.311E 12	0.153E 11	-0.573E 11	-0.738E 11	0.438E 11	-0.357E 11	-0.807E 10	-0.412E 11	
0.260				0.129E 11	-0.451E 12	-0.970E 11	-0.751E 11	0.119E 10	0.117E 11	0.403E 11	
0.280					-0.278E 12	0.356E 12	0.161E 12	0.123E 12	0.253E 11	0.590E 11	
0.300						0.213E 12	-0.153E 12	0.246E 11	0.137E 11	-0.186E 10	
0.320							0.205E 12	-0.877E 11	0.576E 10		
0.340								-0.365E 12	0.237E 12	-0.683E 11	
0.360									0.115E 12	-0.124E 12	
0.380										-0.136E 12	

F2

	0.400	0.420	0.440	0.460	0.480	0.500	0.520	0.540	0.560	0.580	0.600
0.200	-0.964E 10	0.134E 11	-0.315E 11	0.846E 10	0.323E 11						
0.220	-0.162E 11	0.290E 11	-0.105E 11	-0.237E 11	-0.187E 11						
0.240	0.218E 10	-0.172E 11	-0.216E 11	-0.599E 10	0.427E 11						
0.260	-0.506E 10	0.470E 11	-0.401E 10	0.555E 09	0.239E 10						
0.280	0.291E 11	0.404E 11	-0.105E 11	0.318E 11	0.403E 11						
0.300	-0.313E 11	-0.552E 10	-0.388E 11	-0.670E 11	-0.243E 10						
0.320	-0.772E 10	0.207E 10	-0.271E 11	0.214E 11	0.297E 11						
0.340	0.424E 11	-0.283E 11	0.217E 10	-0.897E 11	0.702E 11						
0.360	0.259E 11	-0.313E 11	-0.366E 11	0.286E 11	-0.780E 10						
0.380	-0.122E 10	0.536E 11	-0.544E 11	-0.480E 11	0.110E 12						

F2

	0.400	0.420	0.440	0.460	0.480
0.400	0.307E 12	-0.376E 11	-0.734E 11	0.331E 11	-0.469E 11
0.420		-0.333E 12	-0.142E 12	-0.794E 11	0.250E 12
0.440			0.207E 12	0.266E 12	-0.917E 11
0.460				-0.439E 12	0.718E 12
0.480					0.716E 08



APPENDIX EProgrammer

På de følgende sider findes en udskrift af de væsentligste subrutiner.

Herunder en kort beskrivelse af den enkelte subrutines formål.

SUBROUTINE BISPEC

Styrer kald af de øvrige rutiner ved estimation, udskrivning og udtegnning af tredje ordens momentfunktionen og bispektret.

SUBROUTINE MM3FKT

Beregner tredje ordens momentfunktionen - glattet eller uglattet.

SUBROUTINE BISPEK

Beregner bispektret efter metode 1 omtalt i afsnit 7.4.

SUBROUTINE BISPK2

Beregner bispektret efter metode 2 omtalt i afsnit 7.4.

SUBROUTINE TRANMF

Transformerer momentfunktionen så kun 1.kvadrant betragtes.

SUBROUTINE TRANBS

Transformerer bispektret så kun 1.kvadrant betragtes.

SUBROUTINE PRINT

Udskriver momentfunktionen eller bispektret på linieskriver, kun halvdelen af 1.kvadrant udskrives pga. symmetrien.

SUBROUTINE TEGNMF

Danner plot af momentfunktionen

SUBROUTINE TEGNBS

Danner plot af bispektret (real- og imaginærdel)

SUBROUTINE TESTLN

Udfører test for linearitet og normalitet samt for linearitet og ikke-normalitet som beskrevet i afsnit 7.2 og 7.3.





```

00830      DIMENSION XT(N)
00840      REAL M3(100,100),MH3(200,200)
00850      DATA SUM/0.0/,PI/3.141593/
00860      INTEGER T,TOHH1,TOM
00870 C
00880 C
00890      DO 10 I=1,N
00900      SUM=SUM+XT(I)
00910 10    CONTINUE
00920      XM=SUM/N
00930 C
00940 C
00950      ND2=N/2
00960      KMAX=AMINO(100,ND2)
00970      DO 30 K1=1,KMAX
00980      DO 30 K2=1,K1
00990      HAXT=N-K1+1
01000      SUM=0.0
01010      DO 20 T=1,HAXT
01020      SUM=SUM+(XT(T)-XM)*((XT(T+K1-1)-XM)*((XT(T+K2-1)-XM)
01030 20    CONTINUE
01040      XM3=SUM/N
01050      M3(K1,K2)=XM3
01060      M3(K2,K1)=XM3
01070 30    CONTINUE
01080 C
01090 C
01100      IF (IWIN.EQ.0) GOTO 50
01110      DO 40 K1=1,M
01120      DO 40 K2=1,K1
01130      RAT1=FLOAT(K1-1)/FLOAT(M-1)
01140      RAT2=FLOAT(K2-1)/FLOAT(M-1)
01150      RAT3=FLOAT((K1-1)-(K2-1))/FLOAT(M-1)
01160      IF (IWIN.EQ.1) W1=1.0-RAT1
01170      IF (IWIN.EQ.1) W2=1.0-RAT2
01180      IF (IWIN.EQ.1) W3=1.0-RAT3
01190      IF (IWIN.EQ.2) W1=(1.0+COS(PI*RAT1))/2
01200      IF (IWIN.EQ.2) W2=(1.0+COS(PI*RAT2))/2
01210      IF (IWIN.EQ.2) W3=(1.0+COS(PI*RAT3))/2
01220      IF (IWIN.EQ.3) W1=0.54+0.46*ACOS(PI*RAT1)
01230      IF (IWIN.EQ.3) W2=0.54+0.46*ACOS(PI*RAT2)
01240      IF (IWIN.EQ.3) W3=0.54+0.46*ACOS(PI*RAT3)
01250      IF (IWIN.EQ.4) GOTO 35
01260      IF (K1.LE.H/2) W1=1.0-6.0*ARAT1*AA2+6.0*ARAT1*AA3
01270      IF (K2.LE.H/2) W2=1.0-6.0*ARAT2*AA2+6.0*ARAT2*AA3
01280      IF (K1-K2.LE.H/2) W3=1.0-6.0*ARAT3*AA2+6.0*ARAT3*AA3
01290      IF (K1.GT.H/2) W1=2.0*AA(1.0-RAT1)*AA3
01300      IF (K2.GT.H/2) W2=2.0*AA(1.0-RAT2)*AA3
01310      IF (K1-K2.GT.H/2) W3=2.0*AA(1.0-RAT3)*AA3
01320 35    CONTINUE
01330      M3(K1,K2)=M3(K1,K2)*W1*W2*W3
01340      IF (K1.GT.K2) M3(K2,K1)=M3(K1,K2)*W1*W2*W3
01350 40    CONTINUE
01360 50    CONTINUE
01370 C
01380 C
01390      TOHH1=2*M-1
01400      DO 55 I=1,TOHH1
01410      DO 55 J=1,TOHH1
01420      MH3(I,J)=0.0
01430 55    CONTINUE
01440      DO 60 K2=1,M
01450      DO 60 K1=1,M
01460      KK1=M-1+K1
01470      KK2=M-1+K2
01480      MH3(KK1,KK2)=M3(K1,K2)
01490      KK1=M+1-K1
01500      KK2=M+1-K2
01510      MH3(KK1,KK2)=M3(K1,K2)
01520      MH3(KK2,KK1)=M3(K1,K2)
01530 60    CONTINUE
01540      DO 70 K1=1,TOHH1
01550      DO 70 K2=1,TOHH1
01560      H3(K1,K2)=MH3(K1,K2)
01570 70    CONTINUE
01571      WRITE(6,6000) ((M3(I,J),J=M,TOHH1),I=M,TOHH1)
01572 6000    FORHAT(1H0,1X,10(F10.3))
01580 C
01590 C
01600      RETURN
01610      END
01620 C
01630 C-----

```

```

03500 C
03510 C-----
03520      SUBROUTINE BISPEK(M3,M,S3)
03530 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
03540 C FOURIERTRANSFORMATION AF MOMENTFUNKTIONEN
03550 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
03560      DIMENSION M3(100,100),IWK(750),RWK(750)
03570      COMPLEX S3(100,100),CHK(100),CHF
03580      REAL HF
03590 C
03600 C
03610      MH=24H-1
03620      DO 10 K1=1,MH
03630      DO 10 K2=1,MH
03640      HF=M3(K1,K2)
03650      CHF=CHPLX(HF,0.0)
03660      S3(K1,K2)=HF
03670 10  CONTINUE
03680 C
03690      CALL FFT3D(S3,100,100,MH,MH,1,-1,IWK,RWK,CHK)
03700 C
03710 C
03720      RETURN
03730      END
03740 C
03750 C-----

```

```

05720 C-----
05730      SUBROUTINE BISPK2(M3,M,S3)
05740 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
05750 C FAST FOURIER TRANSFORMATION AF MOMENTFUNKTIONEN
05760 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
05770 C
05780      DIMENSION M3(100,100),IWK(750),WK(750),A(100)
05790      COMPLEX S3(100,100),B(100)
05800      INTEGER TOHH1
05810 C
05820 C FOURIER TRANSFORMATION AF RAEKKER
05830 C
05840      TOHH1=24H-1
05850      DO 10 I=1,TOHH1
05860      DO 20 J=1,TOHH1
05870      A(J)=M3(I,J)
05880 20  CONTINUE
05890      CALL FFTRC(A,TOHH1,B,IWK,WK)
05900      HD2P1=M/2+1
05910      DO 10 J=1,HD2P1
05920      S3(I,J)=CONJG(B(J))/TOHH1
05930 10  CONTINUE
05940 C
05950 C FOURIER TRANSFORMATION AF SOEJLER
05960 C
05970      DO 40 J=1,TOHH1
05980      DO 50 I=1,TOHH1
05990      B(I)=CONJG(S3(I,J))
06000 50  CONTINUE
06010      CALL FFTCC(B,TOHH1,IWK,WK)
06020      DO 40 I=1,TOHH1
06030      S3(I,J)=CONJG(B(I))/TOHH1
06040 40  CONTINUE
06050 C
06060      RETURN
06070      END
06080 C-----

```

```

05310 C
05320 C-----
05330      SUBROUTINE TRANHP(M3,M,TH3)
05340 C
05350 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
05360 C TRANSFORMERER MOMENTFUNKTIONEN M3((2M-1)^(2M-1)) - TH3(MAM)
05370 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
05380 C
05390      REAL M3(100,100),TH3(50,50)
05400 C
05410      DO 10 K1=1,M
05420      DO 10 K2=1,M
05430      KK1=M-1+K1
05440      KK2=M-1+K2
05450      TH3(K1,K2)=M3(KK1,KK2)
05460 10  CONTINUE
05470 C
05480 C
05490      RETURN
05500      END
05510 C-----

```

```

05520 C
05530 C-----
05540      SUBROUTINE TRANBS(S3,M,TS3)
05550 C
05560 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
05570 C TRANSFORMERER BISPEKTRET S3((2M-1)^(2M-1)) - TS3(H,H)
05580 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
05590 C
05600      COMPLEX S3(100,100),TS3(50,50)
05610 C
05620 C
05630      DO 10 N1=1,M
05640      DO 10 N2=1,M
05650      TS3(N1,N2)=S3(N1,N2)&((-1)^(N1+N2))
05660 10  CONTINUE
05670 C
05680 C
05690      RETURN
05700      END
05710 C-----

```

```

01640 C
01650 C-----
01660 C
01670 SUBROUTINE PRINT(CF,RF,N,IND,IWIN,HLWIN)
01680 C
01690 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
01700 C
01710 C PRINT MOMENT FUNCTION AND BISPECTRUM
01720 C-----
01730 C
01740 C CF = BISPECTRUM (COMPLEX)
01750 C RF = MOMENT FUNCTION (REAL)
01760 C N = SIZE OF CF OR RF = CF(NAN),RF(NAN)
01770 C IND = 0: PRINT OF MOMENT FUNCTION RF
01780 C = 1: PRINT OF BISPECTRUM CF = REAL AND IMAGINARY PART
01790 C IWIN = 0: NO SMOOTHING USED
01800 C = 1: SMOOTHED BY BARTLETT
01810 C = 2: SMOOTHED BY TUKEY (HANNING)
01820 C = 3: SMOOTHED BY HAMMING
01830 C = 4: SMOOTHED BY PARZEN
01840 C HLWIN = NU. OF LAGS SMOOTHED
01850 C
01860 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
01870 C
01880 DIMENSION NBUF(10),BUF(10),IFMT(6),NX(10),JWIN(2,4),RBUF(10),
01890 A IEHT(6)
01900 DATA IFMT/'(H','',3X,',',',',',X',10','(F12','',3)')'/
01910 DATA IEHT/'(H','',3X,',',',',',X',10','(E12','',3)')'/
01920 DATA NX/'4','16','28','40','52','64','76','88',
01930 A '100','112'/'
01940 DATA JWIN/'BART','LETT','TUK','BY','HAMH','ING',
01950 A 'PARZ','EN'/'
01960 INTEGER ANTT,ANTF,REST
01970 COMPLEX CF(N,N)
01980 REAL RF(N,N)
01990 IF (IND.EQ.0) ISLUT=1
02000 IF (IND.EQ.1) ISLUT=2
02010 DO 1 IDEL=1,ISLUT
02020 10 ANTT=0
02030 ANTF=0
02040 FNY=2AN
02050 M=N/10
02060 MO=M
02070 NREST=N-MA10
02080 IF (MO.EQ.0) M=1
02090 DO 90 JJ=1,M
02100 DO 90 II=JJ,M
02110 I=II
02120 J=JJ
02130 IF (I.EQ.J) GOTO 60
02140 30 CONTINUE
02150 REST=NREST
02160 IF ((IND.EQ.0).AND.(IWIN.EQ.0)) WRITE(6,6001)
02170 IF ((IND.EQ.0).AND.(IWIN.NE.0)) WRITE(6,6101)
02180 A (JWIN(LL,IWIN),LL=1,2),HLWIN
02190 IF ((IND.EQ.1).AND.(IWIN.EQ.0).AND.(IDEL.EQ.1)) WRITE(6,6011)
02200 IF ((IND.EQ.1).AND.(IWIN.NE.0).AND.(IDEL.EQ.1)) WRITE(6,6111)
02210 A (JWIN(LL,IWIN),LL=1,2),HLWIN
02220 IF ((IND.EQ.1).AND.(IWIN.EQ.0).AND.(IDEL.EQ.2)) WRITE(6,6021)
02230 IF ((IND.EQ.1).AND.(IWIN.NE.0).AND.(IDEL.EQ.2)) WRITE(6,6121)
02240 A (JWIN(LL,IWIN),LL=1,2),HLWIN
02250 WRITE(6,6002)
02260 IF (I.LE.M) REST=10
02270 DO 40 K=1,REST
02280 K1=(I-1)A10+K-1
02290 IF (IND.EQ.0) NBUF(K)=K1
02300 IF (IND.EQ.1) RBUF(K)=FLOAT(K1)/FLOAT(2AN)
02310 40 CONTINUE
02320 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,6003) (NBUF(L),L=1,REST)
02330 IF (IND.EQ.1) WRITE(6,6013) (RBUF(L),L=1,REST)
02340 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,6004)
02350 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.1)) WRITE(6,6014)
02360 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.2)) WRITE(6,6024)
02370 DO 50 K2=1,10
02380 K=(J-1)A10+K2-1
02390 K2J=K+1
02400 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,6005) K
02410 FFF=FLOAT(K)/FNY
02420 IF (IND.EQ.1) WRITE(6,6015) FFF
02430 DO 45 K1=1,REST
02440 K1I=(I-1)A10+K1
02450 IF (IND.EQ.0) BUF(K1)=RF(K1I,K2J)
02460 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.1)) BUF(K1)=REAL(CF(K1I,K2J))
02470 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.2)) BUF(K1)=AIMAG(CF(K1I,K2J))
02480 45 CONTINUE
02490 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,6006) (BUF(L),L=1,REST)
02500 IF (IND.EQ.1) WRITE(6,6016) (BUF(L),L=1,REST)

```

```

02510 50 CONTINUE
02520 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,6007)
02530 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.1)) WRITE(6,6017)
02540 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.2)) WRITE(6,6027)
02550 IF (I.GT.M) ANTF=ANTF+1
02560 IF (ANTF.EQ.M) J=J+1
02570 IF (ANTF.EQ.M) GOTO 50
02580 IF (I.GT.M) GOTO 90
02590 IF (I.LT.M) GOTO 90
02600 IF ((I.EQ.M).AND.(REST.EQ.0)) GOTO 90
02610 IF ((I.EQ.M).AND.(REST.NE.0)) I=I+1
02620 IF ((I-1.EQ.M).AND.(REST.NE.0)) GOTO 30
02630 60 CONTINUE
02640 C
02650 C
02660 REST=NREST
02670 IF ((IND.EQ.0).AND.(IWIN.EQ.0)) WRITE(6,6001)
02680 IF ((IND.EQ.0).AND.(IWIN.NE.0)) WRITE(6,6101)
02690 A (JWIN(LL,IWIN),LL=1,2),MLWIN
02700 IF ((IND.EQ.1).AND.(IWIN.EQ.0).AND.(IDEL.EQ.1)) WRITE(6,6011)
02710 IF ((IND.EQ.1).AND.(IWIN.NE.0).AND.(IDEL.EQ.1)) WRITE(6,6111)
02720 A (JWIN(LL,IWIN),LL=1,2),MLWIN
02730 IF ((IND.EQ.1).AND.(IWIN.EQ.0).AND.(IDEL.EQ.2)) WRITE(6,6021)
02740 IF ((IND.EQ.1).AND.(IWIN.NE.0).AND.(IDEL.EQ.2)) WRITE(6,6121)
02750 A (JWIN(LL,IWIN),LL=1,2),MLWIN
02760 WRITE(6,6002)
02770 IF ((I.LE.M).AND.(MO.NE.0)) REST=10
02780 DO 70 K=1,REST
02790 K1=(I-1)A10+K-1
02800 IF (IND.EQ.0) NBUF(K)=K1
02810 IF (IND.EQ.1) NBUF(K)=FLOAT(K1)/FLOAT(2AN)
02820 70 CONTINUE
02830 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,6003) (NBUF(L),L=1,REST)
02840 IF (IND.EQ.1) WRITE(6,6013) (NBUF(L),L=1,REST)
02850 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,6004)
02860 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.1)) WRITE(6,6014)
02870 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.2)) WRITE(6,6024)
02880 DO 80 K2=1,REST
02890 K=(J-1)A10+K2-1
02900 K2J=K+1
02910 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,6005) K
02920 FFF=FLOAT(K)/FHY
02930 IF (IND.EQ.1) WRITE(6,6015) FFF
02940 DO 75 K1=1,REST
02950 K1I=(I-1)A10 +K1
02960 IF (K1.LT.K2) GOTO 75
02970 IF (IND.EQ.0) BUF(K1)=RF(K1I,K2J)
02980 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.1)) BUF(K1)=REAL(CF(K1I,K2J))
02990 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.2)) BUF(K1)=AIMAG(CF(K1I,K2J))
03000 75 CONTINUE
03010 IFMT(3)=NX(K2)
03020 IEHT(3)=NX(K2)
03030 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,IFMT) (BUF(L),L=K2,REST)
03040 IF (IND.EQ.1) WRITE(6,IEMT) (BUF(L),L=K2,REST)
03050 80 CONTINUE
03060 ANTT=ANTT+1
03070 IF (IND.EQ.0) WRITE(6,6007)
03080 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.1)) WRITE(6,6017)
03090 IF ((IND.EQ.1).AND.(IDEL.EQ.2)) WRITE(6,6027)
03100 IF (MO.EQ.0).AND.(ANTT.EQ.1)) GOTO 1
03110 IF (ANTT.EQ.(M+1)) GOTO 1
03120 IF (I.EQ.M) I=I+1
03130 IF (I-1.EQ.M) GOTO 30
03140 90 CONTINUE
03150 C
03160 C
03170 6001 FORMAT('1 T H I R D - O R D E R M O M E N T',
03180 A ' F U N C T I O N'// ' U N S H O O T H E D'// ',53(=)')
03190 6101 FORMAT('1 T H I R D - O R D E R M O M E N T F U N C T I O N'
03200 A // ' S M O O T H I N G B Y ',2A4,' K E R N E L M =',I3,' / ' ',53(=))
03210 6011 FORMAT('1 B I S P E C T R U M - R E A L P A R T'//
03220 A ' U N S H O O T H E D'// ',41(=)')
03230 6111 FORMAT('1 B I S P E C T R U M - R E A L P A R T'//
03240 A ' S M O O T H I N G B Y ',2A4,' K E R N E L M =',I3,' / ' ',41(=)')
03250 6021 FORMAT('1 B I S P E C T R U M - I M A G I N A R Y P A R T'//
03260 A ' U N S H O O T H E D'// ',51(=)')
03270 6121 FORMAT('1 B I S P E C T R U M - I M A G I N A R Y P A R T'//
03280 A ' S M O O T H I N G B Y ',2A4,' K E R N E L M =',I3,' / ' ',51(=)')
03290 6002 FORMAT(1H-,6X,' ')
03300 6003 FORMAT(1H-,7X,10(5X,I2,5X))
03310 6013 FORMAT(1H-,7X,10(4X,F5.3,3X))
03320 6004 FORMAT(1H,125('-',),'K1')
03330 6014 FORMAT(1H,125('-',),'F1')
03340 6024 FORMAT(1H,125('-',),'F1')
03350 6005 FORMAT(1H0,16,' ')
03360 6015 FORMAT(1H0,F6.3,' ')
03370 6006 FORMAT(1H-,7X,10(F12.3))
03380 6016 FORMAT(1H-,7X,10(E12.3))
03390 6007 FORMAT(1H0,5X,'K2')
03400 6017 FORMAT(1H0,5X,'K2')
03410 6027 FORMAT(1H0,5X,'F2')
03440 1 CONTINUE
03450 RETURN
03460 END
03470 C
03480 C
03490 C

```

```

03760 C
03770 C
03780 C      SUBROUTINE TEGMHF(MF,N)
03790 C
03800 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
03810 C
03820 C PLOT MOMENT FUNCTION
03830 C *****
03840 C
03850 C MF      = MOMENT FUNCTION
03860 C N      = SIZE OF MF - MF(NAN)
03870 C
03880 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
03890 C
03900 C      DIMENSION WORK(3000)
03910 C      REAL MF(N,N),MAX,MIN
03920 C      MAX=-1.0E10
03930 C      MIN=1.0E10
03940 C
03950 C
03960 C      RN=FLOAT(N)
03970 C      DO 10 J=1,N
03980 C      DO 10 I=1,N
03990 C      IF (MF(I,J).GT.MAX) MAX=MF(I,J)
04000 C      IF (MF(I,J).LT.MIN) MIN=MF(I,J)
04010 10 CONTINUE
04020 C      SCAL=FLOAT(N)/(MAX-MIN)
04030 C      DO 20 I=1,N
04040 C      DO 20 J=1,N
04050 C      MF(I,J)=MF(I,J)&SCAL
04060 20 CONTINUE
04070 C
04080 C
04090 C      CALL HITDEV(13)
04100 C      CALL PAGSHF(16.0,16.0)
04110 C      CALL DEFPAG(1.0,15.0,1)
04120 C      CALL DEFPAG(1.0,15.0,2)
04130 C      CALL BGNPIC(1)
04140 C      CALL PLOMA3(MF,N,N,0.0,RN,0.0,RN,WORK,3000)
04150 C      CALL MA3BOX(16.0,0)
04160 C      CALL AXES3('K1A.','K2A.','M3(K1,K2)&.')
04170 C      CALL LINE(0.5&16.0,16.0,0)
04180 C      CALL HEADNG('THIRD-ORDER MOMENTFUNCTIONA.')
```

CALL HEADNG('DATA: STORM2 - SMOOTH. TUKEY MIN. M=25 &.')  
CALL FRAME  
04210 C CALL ENDPIC(1)  
04220 C CALL RLSDEV(13)  
04230 C  
04240 C  
04250 C RETURN  
04260 C END

```

04570 C
04580 C-----
04590          SUBROUTINE TECHBS(BS,N)
04600 C
04610 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
04620 C
04630 C PLOT BISPECTRUM (REAL- AND IMAGINARY PART)
04640 C =====
04650 C
04660 C BS      = BISPECTRUM (COMPLEX)
04670 C N      = SIZE OF BS - BS(NAN)
04680 C
04690 CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
04700 C
04710          DIMENSION ZR(30,30),ZIH(30,30),IWORK(2000)
04720          COMPLEX BS(N,N)
04730          REAL MAXR,MINR,MAXIH,MINIH,IMAGV
04740          DATA MAXR/0.0/,MINR/0.0/,MAXIH/0.0/,MINIH/0.0/
04750 C
04760 C
04770          DO 10 J=1,N
04780          DO 10 I=1,N
04790             REALV=REAL(BS(I,J))
04800             IMAGV=AIMAG(BS(I,J))
04810             IF (REALV.GT.MAXR) MAXR=REALV
04820             IF (IMAGV.GT.MAXIH) MAXIH=IMAGV
04830             IF (REALV.LT.MINR) MINR=REALV
04840             IF (IMAGV.LT.MINIH) MINIH=IMAGV
04850             ZR(I,J)=REALV
04860             ZIH(I,J)=IMAGV
04870 10      CONTINUE
04880          RANGER=MAXR-MINR
04890          RANGEI=MAXIH-MINIH
04900          RANGE=AMAX1(RANGER,RANGEI)
04910          SKALAR=0.5/RANGER
04920          SKALAI=0.5/RANGEI
04930 C
04940 C
04950          CALL NITDEV(13)
04960          CALL PAGSHF(16.0,16.0)
04970          CALL DEFPAG(1.0,15.0,1)
04980          CALL DEFPAG(1.0,15.0,2)
04990          CALL VUSCA(SKALAR,3)
05000          CALL BGNPIC(1)
05010          CALL PLOHA3(ZR,N,N,0.0,0.5,0.0,0.5,IWORK,2000)
05020          CALL HA3BOX(16,0,0)
05030          CALL AXES3('F1A.', 'F2A.', 'S3(F1,F2)A.')
05040          CALL LINE(0.5A16.0,16.0,0)
05050          CALL HEADNG('BISPECTRUM - REAL PARTA.')
05060          CALL HEADNG('DATA: STORM2 - SMOOTH. TUKEY WIN. M=25 A.')
```

```

05070          CALL FRAMEW(1)
05080          CALL ENDPIC(1)
05090          CALL LINE(20.0,0.0,0)
05100 C
05110 C
05120          CALL PAGSHF(16.0,16.0)
05130          CALL DEFPAG(1.0,15.0,1)
05140          CALL DEFPAG(1.0,15.0,2)
05150          CALL VUSCA(SKALAI,3)
05160          CALL BGNPIC(2)
05170          CALL PLOHA3(ZIH,N,N,0.0,0.5,0.0,0.5,IWORK,2000)
05180          CALL HA3BOX(16,0,0)
05190          CALL AXES3('F1A.', 'F2A.', 'S3(F1,F2)A.')
05200          CALL LINE(0.5A16.0,16.0,0)
05210          CALL HEADNG('BISPECTRUM - IMAGINARY PARTA.')
05220          CALL HEADNG('DATA: STORM2 - SMOOTH. TUKEY WIN. M=25 A.')
```

```

05230          CALL FRAMEW(1)
05240          CALL ENDPIC(2)
05250          CALL RLSDBV(13)
05260 C
05270 C
05280          RETURN
05290          END
05300 C-----
```

```

00110      SUBROUTINE TESTLH(XT,N,IMIN,HLWIN,NF,E,R,DELTA)
00120 C#####
00130 C TESTEN LINEARITET OG NORMALITET FOR TIDSRÆKKE
00140 C#####
00150      DIMENSION XT(1),INW(3000),WK(3000),YST(20),Y(20,20),YV(20),
00160      A      SY(20,20),B(20,20),YH(20,20),BETA(20),SINH(20,20),
00170      A      WA(20),S(20,20),S2(50)
00180      COMPLEX S3(50,50),D(50),DM(20,20),ETA(20),A(20,20),XV(20),
00190      A      AINV(20,20),AETA(20),CT2
00195      REAL H3(50,50)
00200      INTEGER F1,F2,F3,DELTA,N,P,PP,FR11,FR21,FR12,FR22,Q
00210      DATA NP/1/,P/O/,ETA/203(0.0,0.0)/,A/000(0.0,0.0)/,
00220      A      AETA/20(0.0,0.0)/,YST/20(0.0,0.0)/,T22/0.0/,
00230      A      YV/20(0.0,0.0)/,SY/400(0.0,0.0)/,CT2/(0.0,0.0)/
00240 C
00250      CALL HM3PKT(XT,N,H3,IWIN,HLWIN)
00260      CALL BISPK3(H3,HLWIN,NF,S3)
00270      CALL SPEKTR(XT,N,HLWIN,IWIN,NF,S2)
00280 C
00290 C TEST FOR LINEARITET OG NORMALITET
00300 C
00305 C      N=NF
00310      IF (DELTA.EQ.0) DELTA=N/HLWIN
00320      L=2AK/3
00330      NS=NAR+1
00340      NSH=2AR+1
00350      DO 10 I=1,L
00360      P=P+K-I/2-1-I
00370 10      CONTINUE
00380      DO 15 I=1,20
00390      DO 15 J=1,20
00400      AINV(I,J)=(0.0,0.0)
00410      IF (I.EQ.J) AINV(I,J)=(1.0,1.0)
00420 15      CONTINUE
00430 C
00440      DO 20 I=1,L
00450      F1I=FLOAT(I)/FLOAT(2AK)
00460      JST=I+1
00470      JSL=K-I/2-1
00480      IF (JSL.LT.JST) JSL=JST
00490      DO 30 J=JST,JSL
00500      F2J=FLOAT(J)/FLOAT(2AK)
00510      NNS=1
00520      DO 40 II=1,NSH
00530      F1II=F1I+FLOAT((II-R-1)DELTA)/FLOAT(2AN)
00540      NF1II=INT(F1II*2AN)
00550      NF2J=INT(F2J*2AN)
00560      DM(NP,NNS)=S3(NF1II,NF2J)
00570      NNS=NNS+1
00580 40      CONTINUE
00590      DO 50 JJ=1,NSH
00600      F2JJ=F2J+FLOAT((JJ-R-1)DELTA)/FLOAT(2AN)
00610      IF ((JJ-R-1).EQ.0) GOTO 50
00620      NF2JJ=INT(F2JJ*2AN)
00630      NF1I=INT(F1I*2AN)
00640      DM(NP,NNS)=S3(NF1I,NF2JJ)
00650      NNS=NNS+1
00660 50      CONTINUE
00670      NP=NP+1
00680 30      CONTINUE
00690 20      CONTINUE
00700 C
00710      DO 60 I=1,P
00720      DO 60 J=1,P
00730      ETA(I)=ETA(I)+DM(I,J)/NS
00740 60      CONTINUE
00750      DO 70 LL=1,NS
00760      DO 80 PP=1,P
00770      XV(PP)=DM(PP,LL)-ETA(PP)
00780 80      CONTINUE
00790      DO 90 IP=1,P
00800      DO 90 JP=1,P
00810      A(IP,JP)=A(IP,JP)+XV(IP)CONJG(XV(JP))
00820 90      CONTINUE
00830 70      CONTINUE
00840      CALL LEQTIC(A,P,20,AINV,P,20,0,WA,IER)
00850      DO 100 I=1,P
00860      DO 100 J=1,P
00870      AETA(I)=AETA(I)+AINV(I,J)BETA(J)
00880 100      CONTINUE
00890      DO 110 I=1,P
00900      CT2=CT2+CONJG(ETA(I))AETA(I)
00910 110      CONTINUE
00920      T21=NAREAL(CT2)
00930      Z1=(FLOAT(2A(NS-P))/FLOAT(2AP))AT21
00940      FR11=2AP
00950      FR21=2A(NS-P)
00960 C
00970      WRITE(6,6001)
00980      WRITE(6,6002)
00990      WRITE(6,6003)
01000      WRITE(6,6004) Z1
01010      WRITE(6,6005) FR11,FR21

```



```

01020 C
01030 C TEST FOR LINEARITET OG NON-NORMALITET
01040 C
01050 NP=1
01060 DO 200 I=1,1
01070 F1I=FLOAT(I)/FLOAT(2&K)
01080 JST=I+1
01090 JSL=K-I/2-1
01100 DO 300 J=JST,JSL
01110 F2J=FLOAT(J)/FLOAT(2&K)
01120 NNS=1
01130 DO 400 II=1,NSH
01140 F1II=F1I+FLOAT((II-R-1)DELTA)/FLOAT(2&H)
01150 NF1II=INT(F1II&2&H)
01160 NF2J=INT(F2J&2&H)
01170 BSMOD=CABS(S3(NF1II,NF2J))&&2
01180 SF1II=(CABS(D(NF1II))&&2)/H
01190 SF2J=(CABS(D(NF2J))&&2)/H
01200 IF ((NF1II+NF2J).LE.N) NF3IJ=(H+1)-(NF1II+NF2J)
01210 IF ((NF1II+NF2J).GT.N) NF3IJ=(2&H+1)-(NF1II+NF2J)
01220 SF3IJ=(CABS(D(NF3IJ))&&2)/N
01230 Y(NP,NNS)=BSMOD/(SF1II&SF2J&SF3IJ)
01240 WRITE(6,410) BSMOD
01250 WRITE(6,420) SF1II
01260 WRITE(6,430) SF2J
01270 WRITE(6,440) SF3IJ
01280 NNS=NNS+1
01290 400 CONTINUE
01300 DO 500 JJ=1,NSH
01310 F2JJ=F2J+FLOAT((JJ-R-1)DELTA)/FLOAT(2&H)
01320 IF ((JJ-R-1).EQ.0) GOTO 500
01330 NF2JJ=INT(F2JJ&2&H)
01340 NF1J=INT(F1I&2&H)
01350 BSMOD=CABS(S3(NF1J,NF2JJ))&&2
01360 SF1J=(CABS(D(NF1J))&&2)/H
01370 SF2JJ=(CABS(D(NF2JJ))&&2)/H
01380 IF ((NF1J+NF2JJ).LE.N) NF3IJ=(H+1)-(NF1J+NF2JJ)
01390 IF ((NF1J+NF2JJ).GT.N) NF3IJ=(2&H+1)-(NF1J+NF2JJ)
01400 SF3IJ=(CABS(D(NF3IJ))&&2)/H
01410 Y(NP,NNS)=BSMOD/(SF1J&SF2JJ&SF3IJ)
01420 WRITE(6,410) BSMOD
01430 WRITE(6,450) SF1J
01440 WRITE(6,460) SF2JJ
01450 WRITE(6,440) SF3IJ
01460 NNS=NNS+1
01470 500 CONTINUE
01480 NP=NP+1
01490 300 CONTINUE
01500 200 CONTINUE
01510 DO 600 I=1,P
01520 DO 600 J=1,P
01530 YST(I)=YST(I)+Y(I,J)/NS
01540 WRITE(6,490) YST(I)
01550 600 CONTINUE
01560 DO 700 LL=1,NS
01570 DO 800 PP=1,P
01580 YV(PP)=Y(PP,LL)-YST(PP)
01590 WRITE(6,492) YV(PP)
01600 800 CONTINUE
01610 DO 900 IP=1,P
01620 DO 900 JP=1,P
01630 SY(IP,JP)=SY(IP,JP)+YV(IP)&YV(JP)
01640 WRITE(6,493) SY(IP,JP)
01650 900 CONTINUE
01660 410 FORMAT(1H , 'BSMOD',5X,F12.4)
01670 420 FORMAT(1H , 'SF1II',5X,F12.4)
01680 430 FORMAT(1H , 'SF2J',5X,F12.4)
01690 440 FORMAT(1H , 'SF3IJ',5X,F12.4)
01700 450 FORMAT(1H , 'SF1I',5X,F12.4)
01710 460 FORMAT(1H , 'SF2JJ',5X,F12.4)
01720 490 FORMAT(1H , 'YST(I)',4X,F12.4)
01730 492 FORMAT(1H , 'YV(PP)',4X,F12.4)
01740 493 FORMAT(1H , 'SY(IP,JP)',1X,F12.4)
01750 700 CONTINUE
01760 Q=P-1
01770 DO 910 I=1,P
01780 DO 910 J=1,P
01790 B(I,J)=0.0
01800 IF (I.EQ.J) B(I,J)=1.0
01810 IF (J.EQ.I+1) B(I,J)=-1.0
01820 910 CONTINUE
01830 CALL VHULFF(B,SY,Q,P,P,20,20,YH,20,IER)
01840 CALL VHULFF(YH,B,Q,P,Q,20,20,S,20,IER)
01850 CALL VHULFF(B,YST,Q,P,1,20,20,BETA,20,IER)
01860 CALL LINVIF(S,Q,20,SINV,0,WK,IER)
01870 CALL VHULFF(SINV,BETA,Q,Q,1,20,20,YV,20,IER)
01880 DO 920 I=1,Q
01890 T2=T2+BETA(I)&YV(I)
01900 920 CONTINUE
01910 Z2=T2&(NS-Q)/Q
01920 FR12=Q
01930 FR22=NS-Q
01970 WRITE(6,6101)
01980 WRITE(6,6102)
01990 WRITE(6,6103)
02000 WRITE(6,6104) Z2
02010 WRITE(6,6105) FR12,FR22
02020 WRITE(6,6200)

```

```

02030 C
02040 6001 FORMAT('1 TEST FOR LINEARITY A N D',
02050 A ' N O R M A L I T Y'/' ',63('='))
02060 6002 FORMAT(1H-', ' HYPOTHESIS HO:THE SERIES IS LINEAR AND NORMAL')
02070 6003 FORMAT(1H-', ' H1:ALL ALTERNATIVES')
02080 6004 FORMAT(1H-',14X,'TEST Z=',F8.3)
02090 6005 FORMAT(1H0,14X,'UNDER HO: Z = F(' ,I2,' ,',I2,' ) DISTRIBUTION')
02100 6101 FORMAT('2 TEST FOR LINEARITY A N D',
02110 A ' N O N - N O R M A L I T Y'/' ',71('='))
02120 6102 FORMAT(1H-', ' HYPOTHESIS HO:THE SERIES IS LINEAR AND NON-NORMAL')
02130 6103 FORMAT(1H-', ' H1:ALL ALTERNATIVES')
02140 6104 FORMAT(1H-',14X,'TEST Z=',F8.3)
02150 6105 FORMAT(1H0,14X,'UNDER HO: Z = F(' ,I2,' ,',I2,' ) DISTRIBUTION')
02160 6200 FORMAT('1 ')
02170 C
02180 RETURN
02190 END

```

LITTERATURLISTE

- [1] BARTLETT, M.S.: "Periodogram analysis and continuous spectra". Biometrika. 37. 1950.
- [2] BOX, G.E.P. & JENKINS, G.M.: "Time series analysis - forecasting and control". Holden Day. 1976.
- [3] BLACKMAN, R.B. & TUKEY, J.W.: "The measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering". Dover. 1959.
- [4] BRILLINGER, D.R.: "Time series - data analysis and theory". Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1975.
- [5] BRILLINGER, D.R.: "The comparison of least squares and third-order periodogram procedures in the estimation of bifrequency". Journal of Time Series Analysis. Vol. 1, No. 2. 1980.
- [6] BRILLINGER, D.R.: "An introduction to Polyspectra". Ann. Math. Stat. 36.
- [7] BRILLINGER, D.R. & ROSENBLATT, M.: "Asymptotic Theory of Estimates of k'th Order Spectra". Spectral Analysis of Time Series. Ed. B. Harris. Wiley. 1967.
- [8] BRILLINGER, D.R. & ROSENBLATT, M.: "Computation and Interpretation of k'th Order Spectra". Spectral Analysis of Time Series. Ed. B. Harris. Wiley. 1967.
- [9] CONRADSEN, K.C.: "En introduktion til statistik". IMSOR. 1976.
- [10] CONRADSEN, K.C.: "En introduktion til statistik". Bd. 2A og 2B. IMSOR. 1976.
- [11] COX, D.R. & MILLER, D.: "The Theory of Stochastic Processes". Chapman and Hall. 1965.
- [12] DITLEVSEN, O.: "Uncertainty modeling". McGraw-Hill. 1981.
- [13] FELLER, W.: "Introduction to Probability Theory and its Applications". Vol. I. Wiley. 1966.

- [14] GRENANDER, U. & ROSENBLATT, M.: "Statistical Analysis of Stationary Time Series". Wiley.1957.
- [15] HASSELMANN, K., MUNK, W. & MACDONALD, G.: "Bispectrum of ocean waves". Time Series Analysis. Ed. M. Rosenblatt. Wiley.1963.
- [16] HELLAND, K.N., LII, K.S. & ROSENBLATT, M.: "Bispectra of atmospheric and wind tunnel turbulence". Applications of Statistics. Ed. P.R. Krishnaiah. North-Holland.1977.
- [17] JENKINS, G.M. & WATTS, D.G.: "Spectral analysis and its applications". Holden-Day.1968.
- [18] JENSEN, S.M.: "Stokastiske modeller for havstrømme". IMSOR. 1979.
- [19] KENDALL, M.G. & STUART, A.: "The Advanced Theory of Statistics".Vol.I. Griffin.1958.
- [20] KOTULSKI, Z. & SOBCZYK, C.: "Linear Systems and Normality". Jour. Stat. Phys. 24.1981.
- [21] LARSEN, S.R.: "Kvalitetskontrol af afhængige data". IMSOR. 1980.
- [22] LII, K.S., ROSENBLATT, M. & VAN ATTA, C.: "Bispectral measurements in turbulence". Jour. Fluid. Mech. 77.1976.
- [23] MELZER, H.-J.: "Tragwerksschwingungen unter Zufallslast mit nicht-Gauß'scher Wahrscheinlichkeitsverteilung". Lab. für den Konstruktiven Ingenieurbau. Technische Universität München. Heft 54.1981.
- [24] NIELSEN, B.K.: "Model til beskrivelse af vandstande i Esbjerg havn". Kursusrapport.1982.
- [25] PAPOULIS, A.: "Probability, Random Variables and Stochastic Processes". McGraw-Hill.1972.
- [26] PARZEN, E.: "On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series". Ann. Math. Stat. 28.1957.
- [27] PRIESTLEY, M.B.: "On the fitting of general non-linear time series models". Time series analysis. Ed. O. Anderson. North-Holland.1982.

- [28] PRIESTLEY, M.B.: "Spectral analysis and time series".  
Vol. I+II. Academic Press. 1981.
- [29] RASMUSSEN, U.H.: "Filtreringsrutiner". IMSOR. 1981.
- [30] RAY WILEY, C.: "Advanced engineering mathematics". McGraw-Hill. 1975.
- [31] ROSENBLATT, M.: "Remarks on Higher Order Spectra". Time Series Analysis. Ed. O. Anderson. North-Holland. 1980.
- [32] ROSENBLATT, M. & VAN NESS, J.W.: "Estimation of the bispectrum". Ann. Math. Stat. 36. 1965.
- [33] SAUNDERS, R. & PURUSHOTTAM, L.: "The multidimensional Kolmogorov goodness-of-fit test". Biometrika. 67.1. 1980.
- [34] SPLIID, H.: "Kort introduktion til ARIMA-modeller". IMSOR. 1980.
- [35] SPLIID, H.: "Estimation of univariate dynamic models with noise - User guide for a computer program". IMSOR. 1981.
- [36] SPLIID, H.: "Brugervejledning til et program til Box-Jenkins analyse af SÆSON-ARIMA modeller. IMSOR. 1979.
- [37] SPLIID, H.: "Tidsrækkeanalyse". Notat. 1980.
- [38] VAN NESS, J.W.: "Asymptotic normality of bispectral estimates". Ann. Math. Stat. 37. 1966.
- [39] ÅSTRØM, K.J.: "Introduction to Stochastic Control Theory". Academic Press. 1970.



Eksamensprojekter januar 1982 ved IMSOR

1. Philip Wodka  
Ivan Sloth Nielsen Kalmanfiltre til dynamisk positionering af boreplatform
2. Hans-Henrik Kogsbøll Marmorilik betragtet statistisk
3. Henrik Madsen Statistiske metoder for produktionskontrol af fabriksbeton
4. Peter Kjar Varmeforsyning ved kraftværk og reservoir
5. Niels Kjølstad Poulsen Adaptiv regulering af ikkestationære processer
6. Nils Jørgen Andersen  
Helge Berg Rasmussen Planlægning af teaterdrift
7. Jan West-Hansen Small-scale mining
8. Per Garhøj  
Jesper Schultz Postkassetømning i København
9. Per Holm Rasmussen Standardprogrammer til lagerstyring

Eksamensprojekter sommer 1982 ved IMSOR

10. Peter Thorsen Lagerstyring i en stor metalvirksomhed
11. Ingvard Villadsen Statistiske metoder til dimensionering og drift af rensningsanlæg
12. Frank Jensen Nogle analyser af spildevandsdata - Fordelinger og kontrolmuligheder
13. Ole Clausen Optimalt design af naturgasnet
14. Lars Molte Jakobsen EDB støttet rutelægning: Metoder og case
15. Thorkild Nielsen Analyse af bispektre
16. Niels Korsholm Petersen Dimensionering af packet-switching net

