Stokastisk Regulering i L-strukturen

Genreg

Niels Kjølstad Poulsen
Morten Lauritsen
Uffe Thygesen
Morten Rostgaard

Institut for Matematisk Modellering, bygning 321
Danmarks Tekniske Universitet
DK-2800 Lyngby

1997-04-09 11.32

Abstract

Nærværende rapport er resultatet af et arbejde med stokastisk kontrolteori i forbindelse med systemer, der ikke naturligt er beskrevet på ARMAX-formen. I visse systemer er dynamikken for støj og styreindgreb særegen, hvorfor en systembeskrivelse der er transformeret til ARMAX strukturen vil indeholde fælles faktorer. Dette er f.eks. tilfældet for vindmøller, hvor dynamikken i de stokastiske forstyrrelser, dvs. vinden, er særegen. De fælles faktorer er ofte uhensigtsmæssige og kan i visse implemteringer af design værktøjer skabe numeriske problemer.

Stokastiske systemer, Minimalvarians regulering, Prædiktiv regulering, Toolbox

mål: Overføre tre af de klassiske design til L-strukturen.

1 Introduktion

Denne rapport vedrører stokastiske styrings strategier for et skalært LTI (Lineært, Tidsinvariant) system, der er givet på den såkaldte L-struktur:

$$A(q^{-1})y_t = q^{-k}\frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u_t + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e_t \tag{1}$$

hvor y_t er udgangssignalet og hvor u_t er styresignalet. De indgående polynomier er polynomier i skifteoperatoren, q^{-1}, der er defineret ved at for et vilkårligt (tidsdiskret) signal gælder der at $q^{-1}s_t = s_{t-1}$. Forstyrrelses sekvensen, $\{e_t\}$ er en sekvens af ukorellerede $\mathbb{F}(0,\sigma^2)$-fordelte stokastiske variable.

Polynomierne, A, F og D er moniske, dvs. at f.eks. $A(0) = 1$. Desuden gælder at $B(0) \neq 0$. Det antages, at F og D er relative primiske. Det bemærkes, at fælles poler i overføringerne fra styresignal og støjpåvirkning er samlet i $A-$polynomiet. Polynomierne F og D indeholder således poler, der er specifikke for de to overføringsoperatorer.

Hvis dynamikken fra forstyrrelse og styreindgreb er identisk er det naturligt at beskrive systemet med den kendte **ARMAX** eller CARMA strukturer

$$A(q^{-1})y_t = q^{-k}B(q^{-1})u_t + C(q^{-1})e_t \tag{2}$$

Dette vil specielt være tilfældet hvis forstyrrelsen angriber i indgangen af systemet. Man betegner følgelig denne situation som en indgangs forstyrrelse. Det bemærkes, at ARMAX strukturen for $F = 1$, $D = 1$ er et specialtilfælde af L strukturen.

Hvis forstyrrelsen angriber i udgangen vil dynamikken for forstyrrelsen og styreindgrebet være forskelligt og systemet kan da beskrives med **Box-Jenkins** strukturer

$$y_t = q^{-k}\frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u_t + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e_t \tag{3}$$

der for $A = 1$ er et specialtilfælde af L-strukturen. Man kan således opfatte L-strukturen som et mellemtilfælde eller det generelle tilfælde, hvor forstyrrelserne også kan angribe i midten af systemet.

Det er klart muligt at transformere beskrivelserne mellem hinanden, men i så fald må kravet om fælles faktorer opgives.

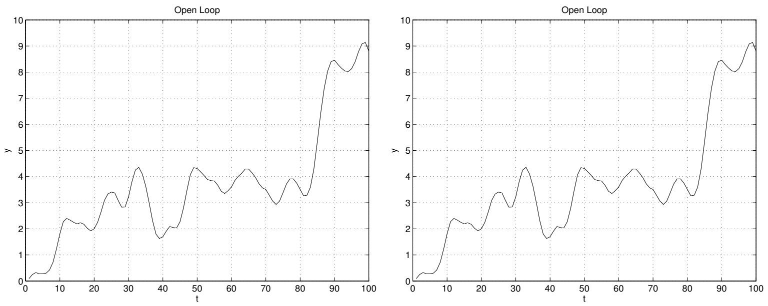

Figure 1: Ureguleret system (venstre) og driftsforstyrrelse (højre).

2 Minimalvarians Regulering

Minimalvarians regulering eksister i flere forskellige versioner se f.eks. [7], [1]. I den prædiktive version af minimalvarians regulatoren er regulering baseret på en bestemmelse af u_t således at kriteriet:

$$J = E\left\{y_{t+k}^2\right\} \tag{4}$$

er minimalt. Bestemmelsen af u_t er underlagt den naturlige restriktion at u_t er en funktion af tilgængelig data, dvs. af $\bar{Y}_t$ hvor:

$$\bar{Y}_t = (y_t, y_{t-1}, ..., u_{t-1}, u_{t-2}, ...)^T \tag{5}$$

For det optimale tab $J^\star$ gælder der under de nævnte restriktioner at:

$$\begin{aligned} J^\star &= \min_{u_t} E\left\{y_{t+k}^2\right\} \\ &= E\left\{\min_{u_t} E\left\{y_{t+k}^2|\bar{Y}_t\right\}\right\} \\ &= E\left\{\min_{u_t} V(\bar{Y}_t)\right\} \end{aligned}$$

Videre er:

$$V(\bar{Y}_t) = E\left\{y_{t+k}^2|\bar{Y}_t\right\} = \hat{y}_{t+k|t}^2 + Var\left\{\tilde{y}_{t+k|t}\right\} \tag{6}$$

hvor $\hat{y}_{t+k|t}$ er prædiktionen og $\tilde{y}_{t+k|t}$ dennes fejl. Det bemærkes at prædiktionsfejlen, $\tilde{y}_{t+k|t}$, ikke påvirkes at u_t. Minimalvarians regulatoren er derfor givet ved følgende sætning.

Sætning 2.1 Antag, at et system er givet ved (1). Løsningen til det basale minimalvarians problem er da givet ved strategien:

$$\boxed{u_t = -\frac{F}{D}\frac{S}{BE}y_t} \tag{7}$$

hvor E og S er polynomier med orden:

$$ord(E) = k - 1 \qquad ord(S) = Max\,(n_a + n_d - 1, n_c - k) \tag{8}$$

og er givet ved diophantine ligningen:

$$\boxed{C = ADE + q^{-k}S} \tag{9}$$

For den lukkede sløjfe gælder at:

$$y_t = Ee_t \qquad u_t = -\frac{F}{D}\frac{S}{B}e_t \tag{10}$$

i stationaritet. □

Bevis: Minimalvarians regulering er i den prædiktive variant baseret på en nulstilling af $k-$trinsprediktionen. For beskrivelsen (1) tager $k-$trinsprædiktionen udgangspunkt i en ($k-$trin) trunkering af impulsresponsen:

$$\frac{C}{AD} = E + q^{-k}\frac{S}{AD} \tag{11}$$

eller (7). Følgende mellemregninger giver nu at:

$$\begin{aligned} Cy_{t+k} &= ADEy_{t+k} + Sy_t \\ &= E\{B\frac{D}{F}u_t + Ce_{t+k}\} + Sy_t \\ &= \{BE\frac{D}{F}u_t + Sy_t\} + CEe_{t+k} \end{aligned}$$

eller at:

$$y_{t+k} = \frac{1}{C}\left\{Sy_t + \frac{D}{F}BEu_t\right\} + Ee_{t+k} \tag{12}$$

Følgelig er

$$\hat{y}_{t+k|t} = \frac{1}{C}\left\{Sy_t + \frac{D}{F}BEu_t\right\} \qquad \tilde{y}_{t+k|t} = Ee_{t+k} \tag{13}$$

og minimalvarians regulatoren givet ved (7). Den lukkede sløjfe er i stationaritet givet ved:

$$y_t = \tilde{y}_{t+k|t} \tag{14}$$

der indsat i (7) giver (10). □

Det bemærkes, som i forbindelse med ARMAX beskrivelsen, at lukket sløjfe beskrivelsens stabilitet er givet ved rødderne til B og C polynomiet.

2.1 Belastnings forstyrrelse

I visse tilfælde vil beskrivelsen (1) ikke være hensigtsmæssig fordi der eksisterer en konstant belastnings forstyrrelse. I så fald kan systemet beskrives af:

$$A(q^{-1})y_t = q^{-k}\frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u_t + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e_t + \mu \tag{15}$$

En relativ enkel udvidelse af beviset for sætning 2.1 [side 4] viser at minimalvarians regulatoren skal ændres til:

$$u_t = -\frac{F}{D}\frac{S}{BE}y_t - \frac{F}{B}\mu \tag{16}$$

I lukket sløjfe gælder at:

$$y_t = Ee_t \qquad u_t = -\frac{FS}{DB}e_t - \frac{F}{B}\mu \tag{17}$$

under forudsætning af fuldstændig system kendskab. I en adaptiv sammenhæng er ovenstående fremgangsmåde mulig, men i en traditionel regulering, hvor belastningen ikke estimeres, vil denne metode ikke altid i praksis være mulig, fordi den fordrer et kendskab til belastningen.

2.2 Ren Drift Belastning

Hvis forstyrrelsen har karakter af en ren drift forstyrrelse, dvs. at systemet er beskrevet ved:

$$A(q^{-1})y_t = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u_t + \frac{1}{1-q^{-1}}e_t \tag{18}$$

vil dimensioneringen involvere en løsning af en simplificeret diophantine ligning

$$1 = A(q^{-1})(1-q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-k}S(q^{-1}) \tag{19}$$

og regulatoren være givet ved:

$$u_t = -\frac{F(q^{-1})}{(1-q^{-1})}\frac{S(q^{-1})}{B(q^{-1})E(q^{-1})}y_t \tag{20}$$

Det ses heraf tydeligt (forudsat af F og $(1-q^{-1})$ ikke har fælles faktorer) at reguleringen indeholder en integration til udkompensering af driften.

2.3 Integralaktion

Lad nu systemet været givet ved:

$$A(q^{-1})y_t = q^{-k}\frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u_t + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e_t + \mu \tag{21}$$

Det er i visse situationer muligt at modellere en belastning med:

$$\mu = \frac{1}{(1-q^{-1})}\eta_t \qquad \eta_t \in \mathbb{F}(0,\eta^2) \tag{22}$$

hvor η_t er en sekvens af ukorellerede stokastiske variable. Hvis μ er konstant er $\eta = 0$. I modsat fald er der tale om en driftsforstyrrelse. Der er desuden muligt at bringe den totale beskrivelse på formen (1), hvor

$$\frac{\tilde{C}(q^{-1})}{\tilde{D}(q^{-1})}\tilde{e}_t \tag{23}$$

er en model (jvf. repræsentations sætningen) for

$$\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e_t + \frac{1}{(1-q^{-1})}\eta_t \tag{24}$$

Selve modellering af (23) kan numerisk let udføres med procedure ssysadd.

Eksempel 2.1 Lad os betragte en forstyrrelse bestående af hvid støj overlejret af drift, dvs.

$$v_t = \xi_t + \frac{1}{1-q^{-1}}\zeta_t \tag{25}$$

Denne forstyrrelse kan modelleres med processen:

$$v_t = \frac{1-cq^{-1}}{1-q^{-1}}e_t \tag{26}$$

Det bemærkes at nulpunktet går mod 1, og dermed udkompenserer $(1-q^{-1})$, når driftvariancen går mod nul, jvf. figur 2.

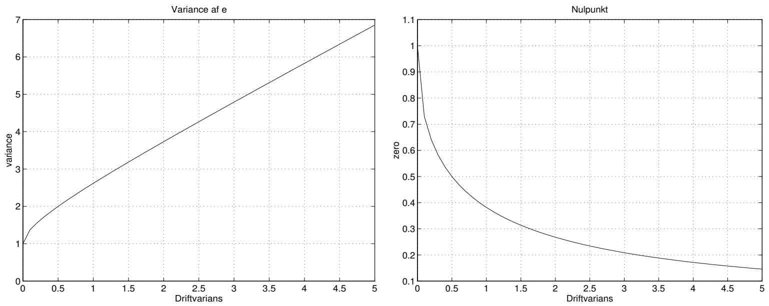

Figure 2: Varians af e_t (σ^2) og nulpunkt som funktion af drift variansen.

□

Omvendt kan man design mæssigt indføre en eventuelt ønsket integralvirkning ved at arbejde med en design model hvortil er tillagt en kunstig drift belastning, jvf. ovenstående fremgangsmåde. Her vil η være design parameter. Den numeriske fremgangsmåde er implementeret i dsitg.

3 Referencestyring (MV_0)

Lad os nu betragte problemstillingen omkring styring af systemudgangen i (1) efter en reference, w_t. Dette problem betegnes hyppigt som servoproblemet eller som en setpunktsstyring.

Den traditionelle minimalvarians referencestyring er baseret på en styring der i stationaritet minimerer kriteriet:

$$J = E\left\{(y_{t+k} - w_t)^2\right\} \tag{27}$$

under den sædvanlige restriktion at styresignalet, u_t, er funktion af tilgængelig information, Y_t. Kriteriet (27) er et udtryk for at den fremtidige udvikling af referencesignalet er ukendt, hvorfor w_{t+k} ikke indgår i kriteriet, men derimod w_t. Man kan alternativt opfatte (27) som værende baseret på en random walk model af reference signalet.

Sætning 3.1 Antag, at et system er givet ved (1). Den strategi, der i stationaritet minimerer (27) er givet ved:

$$\boxed{u_t = \frac{F}{D}\frac{1}{BE}\left[Cw_t - Sy_t\right]} \tag{28}$$

hvor E og S er polynomier med orden:

$$ord(E) = k-1 \qquad ord(S) = Max\,(n_a + n_d - 1, n_c - k) \tag{29}$$

og er givet ved diophantineligningen:

$$\boxed{C = ADE + q^{-k}S} \tag{30}$$

For den lukkede sløjfe gælder at:

$$y_t = w_{t-k} + Ee_t \qquad u_t = \frac{F}{B}\left[Aw_t - \frac{S}{D}e_t\right] \tag{31}$$

i stationaritet. □

Bevis: Fra (12) har vi simpelt at:

$$y_{t+k} - w_t = \frac{1}{C}\left\{Sy_t + \frac{D}{F}BEu_t - Cw_t\right\} + Ee_{t+k} \tag{32}$$

hvorved sætningen er bevist. □

Igen er lukket sløjfe beskrivelsens stabilitet givet ved rødderne til B og C polynomiet.

Eksempel 3.1 Betragt et system givet ved:

$$(1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2})y_t = q^{-2}\frac{1 + 0.5q^{-1}}{1 - 0.2q^{-1}}u_t + \frac{1 + 0.3q^{-1}}{1 - q^{-1}}e_t \tag{33}$$

En åben sløjfe situation er angivet i figur 1. MV_0-regulatoren er givet ved:

$$\begin{aligned}(1 + 2.3q^{-1} - 1.9q^{-2} - 1.4q^{-3})u_t = \\ (1 + 0.1q^{-1} - 0.06q^{-2})w_t \\ -(4.8 - 6.42q^{-1} + 3.052q^{-2} - 0.392q^{-3})y_t\end{aligned}$$

og simulations resultaterne er angivet i figur 3. □

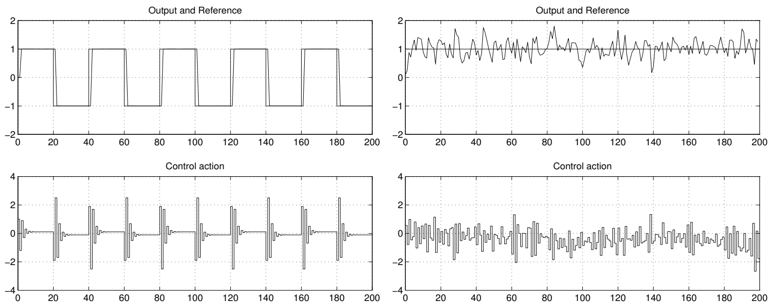

Figure 3: System styret af MV_0 regulator

4 Stokastisk Polplacering

Reguleringstrategier, der er baseret direkte på minimalvarians strategien, vil som oftest kræve en uforholdsmæssig stor styreeffekt. Der er derfor udvikler forskellige metoder til at reducere denne. En af disse er polplaceringstrategierne (se f.eks. [2]), hvor kravet til sammenhængen mellem referce og (model)udgang (i en deterministisk sammenhæng) er givet ved:

$$y_t^m = q^{-k}\frac{B_m}{A_m}w_t \tag{34}$$

Man kan således også opfatte disse strategier som modelfølgere. Ovenstående krav kan også formuleres som en regulering der i stationaritet minimerer kriteriet:

$$J = E\{(A_m y_{t+k} - B_m w_t)^2\} \tag{35}$$

Hvis fuld nulpunktsplombering er mulig, hvilket er tilfældet for minimumfase systemer, betegner man i visse fremstillinger den regulator som en PZ-regulator eller som en MV_2 regulator. En PZ-regulator plomberer systemets nulpunkter samtidig med at den placerer lukket sløjfe poler og nulpunkter efter anvisningen. Hvis fuld nulpunktsplombering ikke er mulig, kan man vælge en suboptimal løsning til (35) som angivet nedenfor.

Fra appendix B ses at MV_0 regulatoren plomberer hele $B-$polynomiet, dvs. alle systemet nulpunkter plomberes. Hvis systemet har ikke invertible nulpunkter, er det nødvendigt at bibeholde dem i overføringsfunktionen fra reference til udgang. Det vil sige at:

$$B_m = B_1^m B_- \tag{36}$$

hvor B_- er den del af B-polynomiet, der indeholder de ikke inverterbare nulpunkter, dvs.

$$B = B_+ B_- \tag{37}$$

Der tages udgangspunkt i at det stokastiske bidrag til $A_m y_t$, der skal prædikteres frem (k trin). Der indføres derfor følgende diophantine ligning:

$$A_m C = ADE + q^{-k}B_- S \tag{38}$$

Følgende mellemregninger giver:

$$\begin{aligned} A_m C y_{t+k} &= ADE y_{t+k} + B_- S y_t \\ &= E\{B\frac{D}{F}u_t + Ce_{t+k}\} + B_- S y_t \\ &= B_-\{B_+ E\frac{D}{F}u_t + Sy_t\} + CEe_{t+k} \end{aligned}$$

eller at:

$$A_m y_{t+k} - B_m w_t = \frac{B_-}{C}\{Sy_t + \frac{D}{F}B_+ E u_t - B_1^m C w_t\} + Ee_{t+k} \tag{39}$$

Polplaceringsregulatoren er givet ved nedenstående sætning.

Sætning 4.1 Antag, at systemet er givet (1) og målet for styringen en polplacering specificeret ved (34). Polynomiet, B_-, indeholder de systemnulpunkter, der ikke ønskes plomberet. Da er polplaceringsregulatoren givet ved:

$$u_t = \frac{F}{D}\frac{1}{B_+ E}\left[B_1^m C w_t - S y_t\right] \tag{40}$$

hvor polynomierne, E og S er bestemt som løsninger til:

$$A_m C = ADE + q^{-k} B_- S \tag{41}$$

Regulatoren er $B_- = 1$ en optimal løsning til (35). Den lukkede sløjfe er givet ved:

$$y_t = q^{-k}\frac{B^m}{A^m}w_t + \frac{E}{A^m}e_t \tag{42}$$

og:

$$u_t = F\frac{AB_1^m}{A^m B^+}w_t - \frac{F}{D}\frac{S}{A^m B^+}e_t \tag{43}$$

i stationaritet. □

Denne regulator har som tunigparametre polynomierne, A_m, B_1^m samt ikke mindst B_-. I Matlab implementeringen i dspol er der anvendt en klassificering af systemets nulpunkter efter spektral radius. Polynomiet B_1^m skaleres således DC-forstærkningen gennem det lukkede system er 1.

Eksempel 4.1 Betragt igen systemet fra eksempel 3.1. System har (i overføringen fra styresignalet) kun nulpunkter indenfor enhedscirklen, hvorfor en $PZ-$regulator kan anvendes. Der kan anvendes en referencemodel af typen:

$$H^m(q) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha q^{-1}} \tag{44}$$

I figur 4 er resultatet vist for $\alpha = 0.36$. □

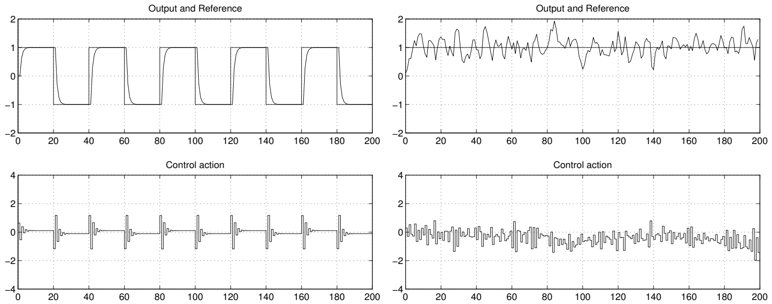

Figure 4: System styret af PZ-regulator

5 Indgrebsvægtning (MV_1)

En metode til at reducere styreffekten er som i tilfældet med polplaceringsregulatoren at neddrosle kravet til styringen. En anden metode er at introducere en vægt på styreeffekten i kriteriet. Vi vil derfor dimensionere en regulering der i stationaritet minimerer kriteriet:

$$J = E\left\{(y_{t+k} - w_t)^2 + \rho u_t^2\right\} \tag{45}$$

under den sædvanlige restriktion at styringen skal være en funktion af tilgængelig information, $\bar{Y}_t$. Med den samme teknik som i afsnit 2 har vi at:

$$\begin{aligned} V(\bar{Y}_t) &= E\left\{(y_{t+k} - w_t)^2 + \rho u_t^2\right\} &(46)\\ &= (\hat{y}_{t+k|t} - w_t)^2 + \rho u_t^2 + Var\left\{\tilde{y}_{t+k|t}\right\} &(47) \end{aligned}$$

Til bestemmelse af u_t har vi at:

$$(\hat{y}_{t+k} - w_t)b_0 + \rho u_t = 0 \tag{48}$$

eller at:

$$\hat{y}_{t+k} - w_t + \alpha u_t = 0 \qquad \alpha = \frac{\rho}{b_0} \tag{49}$$

Vi har fra (13) et udtryk for prædiktionen, hvorfor styringen er givet ved:

$$\frac{1}{C}\left\{ S y_t + \frac{D}{F} B E u_t - C w_t + \alpha C u_t \right\} = 0 \tag{50}$$

hvor polynomierne E og S er løsninger til (9). Vi er nu i stand til at formulere følgende sætning.

Sætning 5.1 Lad systemet være givet ved (1). Kriteriet er i stationaritet minimalt ved en styring med:

$$(DBE + \alpha FC)u_t = FCw_t - SFy_t \tag{51}$$

hvor E og S er løsninger til

$$\boxed{C = ADE + q^{-k}S \qquad (52)}$$

og $ord(E) = k-1$ og $ord(S) = Max\,(n_a + n_d - 1, n_c - k)$. For den lukkede sløjfe gælder at:

$$(B + \alpha AF)\, y_t = q^{-k}Bw_t + \left(BE + \alpha \frac{F}{D} C \right) e_t \tag{53}$$

$$(B + \alpha AF)\, u_t = AFw_t + S\frac{F}{D}e_t \tag{54}$$

□

Indledningsvis ses at for $\alpha \to 0$ er reguleringen en MV_0−regulering. Det bemærkes, at for $\alpha \neq 0$ og $AF(1) \neq 0$ (dvs. uden integralvirkning) vil den stationære fejl i servosløjfen være forskellig fra nul. Den beskrevne regulator vil derfor ikke være specielt velegnet i forbindelse med et servoproblem. Man er følgelig interesseret at finde reguleringer, hvor vægten af styreindgrebet frekvensmæssigt ikke er konstant.

Eksempel 5.1 Betragt igen systemet fra eksempel 3.1 og lad os styre systemet således at:

$$J = E\left\{ (y_{t+2} - w_t)^2 + \rho u_t^2 \right\} \tag{55}$$

i stationaritet er minimalt. I figur 5 er forholdene vist for $\rho = 0.5$. □

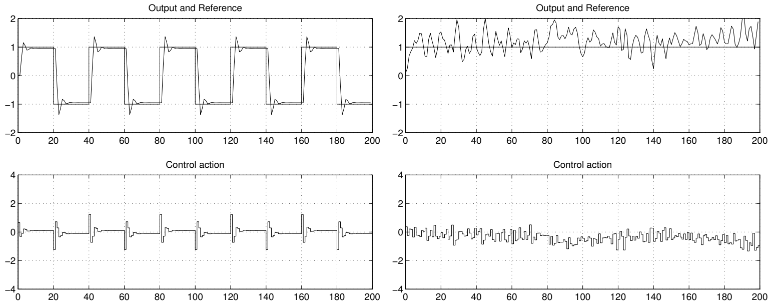

Figure 5: System styret af MV_1-regulator

6 Frekvensvægtning (GMV)

I dette afsnit vil vi beskæftige os med regulerings strategier, hvis mål er at minimere et kriterium af formen:

$$J = E\left\{ (\boldsymbol{y}_{t+k} - \boldsymbol{w}_t)^2 + \boldsymbol{u}_t^2 \right\} 9 \tag{56}$$

hvor de indgående signaler er filtrerede:

$$\boldsymbol{y}_t = \frac{B_y}{A_y} y_t \qquad \boldsymbol{w}_t = \frac{B_w}{A_w} w_t \qquad \boldsymbol{u}_t = \frac{B_u}{A_u} u_t \tag{57}$$

Der er med andre ord indført en frekvensvægtning. Denne regulerings form er oprindeligt for ARMAX strukturen beskrevet i bl.a. [4], [5] og i [3]. Regulerings formen er også kendt som GMV-regulering, fordi den som specialtilfælde indeholder MV_0, PZ og MV_1 regulering, og derfor kan opfattes som en generalisering af (den prædiktive) minimalvarians reguleringen.

Minimeringen sker under de sædvanlige restriktioner om at styringen (dvs. den optimale beslutning) er baseret på tilgængelig information, hvilket i dette tilfælde er $\bar{Y}_t$.

Sætning 6.1 Antag, at systemet er givet ved (1). Den styring der i stationaritet minier (9) er givet ved:

$$\boxed{[DA_uBE + \alpha CB_uF]\, u_t = \frac{FCA_uB_w}{A_w} w_t - \frac{SFA_u}{A_y} y_t \qquad (58)}$$

hvor: polynomierne er bestemt af:

$$CB_y = ADA_yE + q^{-k}S \tag{59}$$

med $ord(E) = k - 1$ og $ord(S) = max(n_a + n_d + n_{a_y} - 1, n_c + n_{b_y} - k)$. I den lukkede sløjfe gælder at:

$$[BA_u + \alpha AB_uFA_y]\, y_t = q^{-k}\frac{BA_uB_wA_y}{A_w} w_t + \frac{\mathcal{R}A_y}{D} e_t \tag{60}$$

$$[BA_u + \alpha AB_uFA_y]\, u_t = \frac{AFA_uB_w}{A_w} w_t - \frac{SA_uF}{D} e_t \tag{61}$$

i stationaritet. □

Bevis: Vi har som i afsnit 5 at:

$$V(\bar{Y}_t) = E\left\{(\boldsymbol{y}_{t+k} - \boldsymbol{w}_t)^2 + \rho \boldsymbol{u}_t^2\right\} \tag{62}$$

$$= (\hat{\boldsymbol{y}}_{t+k|t} - \boldsymbol{w}_t)^2 + \rho \boldsymbol{u}_t^2 + Var\left\{\tilde{\boldsymbol{y}}_{t+k|t}\right\} \tag{63}$$

eller at styreindgrebet kan bestemmes af:

$$b_0(\hat{\boldsymbol{y}}_{t+k|t} - \boldsymbol{w}_t) + \rho \boldsymbol{u}_t = 0 \tag{64}$$

Til bestemmelse af $\hat{\boldsymbol{y}}_{t+k|t}$ har vi (59) og følgende mellemregninger giver simpelt at:

$$CB_y\boldsymbol{y}_{t+k} = S\boldsymbol{y}_t + E\left[\frac{D}{F}BB_yu_t + CB_ye_{t+k}\right] \tag{65}$$

eller at:

$$\boldsymbol{y}_{t+k} = \frac{1}{C}\left[\frac{D}{F}BEu_t + \frac{S}{B_y}\boldsymbol{y}_t\right] + Ee_{t+k} \tag{66}$$

Dermed skal styreindgrebet bestemmes således at:

$$\left[\frac{D}{F}BEu_t + \frac{S}{B_y}\boldsymbol{y}_t - C\boldsymbol{w}_t + \alpha C\boldsymbol{u}_t\right] = 0 \tag{67}$$

eller som givet i (58). Den lukkede sløjfes egenskaber kan bestemmes ved indsættelse i udtrykkene fra appendix B. □

Eksempel 6.1 Betragt igen systemet fra eksempel 3.1 og lad os styre systemet således at:

$$J = E\left\{(y_{t+2} - w_t)^2 + \rho(u_t - u_{t-1})^2\right\} \tag{68}$$

i stationaritet er minimalt. I figur 6 er forholdene vist for $\rho = 0.1$. □

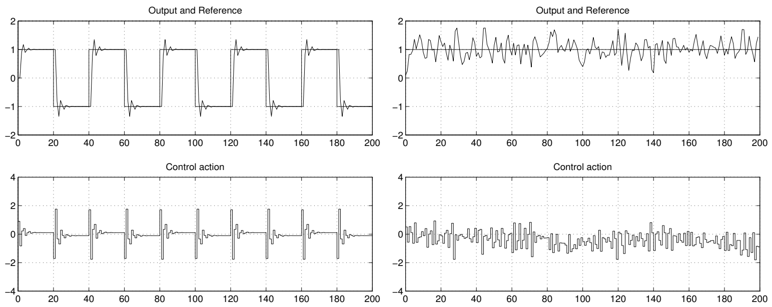

Figure 6: System styret af GMV-regulator

7 Konklusion

Der er i denne rapport udført en udvidelse af den prædiktive minimalvarians regulator til at håndterer systemer der er beskrevet i L-strukturen.

Denne struktur indeholder som special tilfælde ARMAX og Box-Jenkins strukturerne, der hver især udgør et yderpunkt. Ud over at minimalvarians reguleringen og dennes udvidelse mht. indgrebsvægtning, referencestyring og frekvensvægtning er udvidet til L-strukturen, er polplaceringsdesignet også ændres til at håndtere systemer på den ovennævnte form. Endelig er der udviklet en mindre Matlab toolbox til design og analyse af de gennemgående reguleringsstrategier.

References

[1] K. J. Åström. *Introduction To Stochastic Control Theory.* Academic Press, 1970.

[2] K. J. Åström and B. Wittenmark. Self-tuning controllers based on pole-placement. *IEE Procedings*, 127(3):120–130, May 1980.

[3] D. W. Clarke and P. J. Gawthrop. Implementation and application of microprocessor-based self-tuners. *Automatica*, 17(1):233–244, 1981.

[4] D.W Clarke and P.J. Gawthrop. Self-tuning controller. *IEE Proceedings D, Control Theory and Application*, 122(122):929–934, 1975.

[5] P.J. Gawthrop. Some interpretations of the self-tuning controller. *IEE Proceedings D, Control Theory and Application*, 1(124):889–894, 1977.

[6] Niels kjølstad Poulsen. Sctrl - en toolbox til analyse og design at stokastiske reguleringssystemer. Technical Report 1/97, Department of Mathematical Modelling, 1997.

[7] V. Kučera. *Linear Control Systems.* Wiley-Interscience, 1979.

[8] L. Ljung. *System Identification Toolbox.* Math Works Inc., 1991. For Use with MATLAB.

[9] Niels Kjølstad Poulsen. *Stokastisk adaptiv regulering: Stokastiske Systemer, filtrering og regulering*, volume 2. IMM, 1995.

A Prædiktion

Antag, der der foreligger en beskrivelse af udviklingen for en stokastisk proces, f.eks. af en fejl, dvs. at polynomierne C og A i:

$$\mathbf{y}_t = \frac{\mathcal{C}(q^{-1})}{\mathcal{A}(q^{-1})}\eta_t \qquad \eta_t \in N_{iid}(0, \sigma^2) \tag{69}$$

er kendte. Da er minimalvariansprædiktionen af $\mathbf{y}_{t+k}$ givet ved:

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+k|t} = \frac{S}{\mathcal{C}}\mathbf{y}_t \tag{70}$$

og har fejlen:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{t+k|t} = E\eta_{t+k} \tag{71}$$

hvor polynomierne E og S opfylder diophantine ligningen:

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}E + q^{-k}S \tag{72}$$

og at:

$$ord(E) = k - 1 \qquad ord(S) = Max\,(n_a - 1, n_c - k) \tag{73}$$

B Lukketsløjfe egenskaber

Antag, at det forelagte system er givet ved (1), dvs.

$$Ay_t = q^{-k}\frac{B}{F}u_t + \frac{C}{D}e_t \tag{74}$$

og at regulatoren er givet ved:

$$\mathcal{R}u_t = \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{P}}w_t - \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{L}}y_t \tag{75}$$

Da kan man relativt let bestemme den lukkede sløjfe til at være givet ved:

$$\boxed{\begin{aligned}\left[AF\mathcal{R}\mathcal{L} + q^{-k}B\mathcal{S}\right]y_t &= q^{-k}\frac{B\mathcal{Q}\mathcal{L}}{\mathcal{P}}w_t + \frac{CF\mathcal{R}\mathcal{L}}{D}e_t \\ \left[AF\mathcal{R}\mathcal{L} + q^{-k}B\mathcal{S}\right]u_t &= \frac{AF\mathcal{Q}\mathcal{L}}{\mathcal{P}}w_t - \frac{\mathcal{S}CF}{D}e_t\end{aligned}}$$

C Matlab toolboxen genreg

Til design og analyse af regulatorer overfor L-strukturen er der implementeret en række algoritmer i Matlab. Disse er samlet i en lille toolbox som udgør en overbygning på Matlab toolboxen Sctrl (se [6]).

I Matlab toolboxen Sctrl er polynomier repræsenteret som række vektorer. F.eks. er polynomiet:

$$B(q^{-1}) = 0.5q^{-2} + 0.34q^{-3} \tag{76}$$

repræsenteret som:

$$\boldsymbol{B} = [0 \;\; 0 \;\; 0.5 \;\; 0.34] \tag{77}$$

På tilsvarende vis repræsenteres polynomiet:

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2} \tag{78}$$

som

$$\boldsymbol{A} = [1 \;\; -1.5 \;\; 0.7] \tag{79}$$

For at undgå store argument/resultatliste arbejdes der i toolboxen med et gammaformat (svarende til theta format i system identifikation toolbox, se [8]). Er systemet givet ved (1) kan det beskrives ved polynomierne A, B, C, D og F samt k og σ^2. Denne beskrivelse kan samles i et enkelt objekt. Til at håndtere disse objekter eksister der et lille antal kommandoer. Kernen i denne toolbox består af et sæt design kommandoer samt en del procedure til simulation og analyse.

Håndteringsroutiner	
genc	Gamma encoding
gdec	Gamma decoding
g2sc	Udskrivning af system på screen
g2f	Udskrivning af system til fil

Transformationer mm.	
l2ss	L-struktur til tilstands beskrivelse.
ss2l	tilstands beskrivelse til L-struktur
l2trf	Overførings funktioner i L-strukturen
ssysadd	Addition af to stokastiske processer

Design	
dsmv	Design af minimalvarians regulator
dsmv1	Design af regulator med indgrebs vægtnings (MV1)
dspol	Design af Modelfølger
dsgmv	Design af minimalvarians regulator med frekvens vægtning (GMV)
dsitg	Indfører integral virkning i design

Analyse	
l2ivar	Angiver input variansen
l2ovar	Bestemmer output variansen
l2clss	Angiver lukket sløjfe state space
l2cll	Lukket sløjfe bestemmelse
l2cllss	Lukket sløjfe bestemmelse via state space metoder
l2clsim	Lukket sløjfe simulation
lsim	Simulation

C.1 Håndteringsroutiner

Til at generere et objekt, der indeholder en samlet beskrivelse, eksister kommandoen `genc`. Tilsvarende, for at ekstrahere de enkelte polynomier, eksisterer kommandoen `gdec`. Kommandoen `g2sc` forårsager at systemets samlede beskrivelse bliver udskrevet på skærmen.

C.1.1 genc

Formålet med procedure er at samle en beskrivelse af et dynamisk (stokastisk) system til et samlet objekt, hvis format er identisk for de model typer. Syntaksen for L-strukturen er:

```
sys=genc('l',a,b,k,c,d,f,var);
sys=genc('l',a,b,k,c,d,f);
```

mens den for Box-Jenkins strukturen er:

```
sys=genc('bj',b,k,c,d,f,var);
sys=genc('bj',b,k,c,d,f);
```

For ARMAX-strukturen er syntaksen:

```
sys=genc('armax',a,b,k,c,var);
sys=genc('armax',a,b,k,c);
```

I de to sidste tilfælde bliver beskrivelsen udført i L-strukturen. For regulatorer er situationen lidt speciel selv om de opretholder en L-struktur. De har fået deres eget format, mens syntaksen (næsten) ikke er ændret.

```
contrl=genc('ctr',r,q,s,l,p)
contrl=genc('ctr',r,q,s)
```

I sidste tilfælde antages $L = P = 1$, dvs. regulatoren bliver beskrevet i L-strukturen.

Også ARMA processen eller en stokastisk overførings funktion opfattes her lidt speciel. Dennes syntaks er:

```
sys=genc('arma',a,c,var)
sys=genc('arma',a,c)
```

Tilsvarende for en deterministisk overføring

```
sys=genc('trf',a,b,k)
sys=genc('trf',a,b)
```

I det sidste kald antages implicit at $k = 0$. Syntaksen for encoding tilstands beskrivelser er:

```
sys=gen('ss',a,b,c,d);
sys=gen('ss',a,b,c);
```


C.1.2 gdec

Denne kommando har til formål at reetablere en systembeskrivelse på udpakket form. Syntaksen er enkel.

```
[a,b,k,c,d,f,var]=gdec(g_Lsystem);
[r,q,s,l,p]=gdec(g_controller);
[a,b,k]=gdec(g_det_trf);
[a,c,var]=gdec(g_stoch_trf);
[a,b,c,d]=gdec(g_ss)
```

C.1.3 g2sc

Denne kommando udskriver på forståelig form en systembeskrivelse på skærmen og har syntaksen:

```
gsc(gammaformat)
```

C.2 Design procedurer

C.2.1 dsmv

Design af minimalvarians regulering som angivet i afsnit 2 kan udføres med kommandoen dsmv, der har en ret simpel syntaks

```
ctrl=dsmv(sys);
```

C.2.2 dsmv0

Også design af regulatorer der inkluderer minimalvarians reference styring (jvf. 3) er simpel

```
ctrl=dsmv(sys);
```

C.2.3 dspol

Polplacering i følge afsnit 4 kræver lidt mere end system beskrivelsen. Designet kræver en reference model (refm i nedenstående) og et kriterium til at klassificere systemet nulpunkter i B_- og i B_+. I nærværende implementering indeholder B_- de nulpunkter, hvis modus er større end rho. Syntaksen er:

```
ctrl=dspol(sys,refm,rho);
ctrl=dspol(sys,refm);
ctrl=dspol(sys);
```

I de to sidste tilfælde antages implicit rho=1, mens sidste tilfælde giver en MV_0 regulering.

C.2.4 dsmv1

Ved en simpel indgrebsvægtning (dvs. ved en MV_1-regulering) som angivet i afsnit 5 skal designet have angivet indgrebsvægten rho.

```
ctrl=dsmv1(sys,rho)
ctrl=dsmv1(sys)
```

Angives rho ikke antages den at være nul, hvorved der opnås en MV_0-regulering.

C.2.5 dsgmv

Ved frekvensvægtet minimalvarians regulering (eller generaliseret minimalvarians regulering) skal der tilføres information om de (i kriteriet (9)) indgående filtre. Syntaksen er:

```
ctrl = dsgmv(sys,trf_y,trf_w,trf_u);
ctrl = dsgmv(gamma_system,trf_y,trf_w);
ctrl = dsgmv(gamma_system,trf_u);
ctrl = dsgmv(gamma_system);
```


Udelades et filter i udgangen eller overfor reference signalet, antages det for at være 1. Udelades filteret overfor styreindgrebet, antages filteret at være nul.

C.2.6 dsitg

I forskelle situationer kan det være ønskværdigt at introducere en kunstig driftsforstyrrelse i design modellen, eller at introducere en integralvirkning i reguleringen. Dette sker ved at generere en design model inden det egentlige kald af den aktuelle design procedure.

```
gsd=dsitg(gs,eta);
ctrl=dsmv0(gsd);
```

I ovenstående eksempel anvendes procedure til at introducere en integralvirkning i en MV_0-regulator.

C.3 Transformationer mm.

Til at transformere en beskrive i forskellige domainer er der udarbejdet et par procedurer til dette.

C.3.1 l2ss

Denne procedure har til formål at producere en tilstands beskrivelse (output) af et system (input) beskrevet på i L-strukturen med det mindste antal tilstande. Anvendelse:

```
[A,B,C,D]=l2ss(G_sys);
```

Der eksister tre muligheder for realisering.

Fuld skala L-løsning: Denne løsning er baseret på en realisering på formen:

$$y_t = \frac{1}{A}\left[\frac{q^{-k}B}{F}u_t + \frac{C}{D}e_t\right] \tag{80}$$

Lad $[A_s, B_s, C_s, D_s]$, $[A_f, B_f, C_f, D_f]$ og $[A_d, B_d, C_d, D_d]$ være realisationer (frembragt med trf2ss) for overføringerne

$$\frac{1}{A} \quad \frac{q^{-k}B}{F} \quad \text{og} \ \frac{C}{D} \tag{81}$$

Da kan det totale system beskrives på formen:

$$A = \begin{bmatrix} A_s & B_s C_f^\top & B_s C_d^\top \\ 0 & A_f & 0 \\ 0 & 0 & A_d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_s D_f & B_s D_d \\ B_f & 0 \\ 0 & B_d \end{bmatrix} \tag{82}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_s & D_s C_f & D_s C_d \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_s D_f & D_s D_d \end{bmatrix} \tag{83}$$

Det bemærkes at antallet af tilstande er:

$$n = n_a + max(k + n_b, n_f) + max(n_c, n_d) \tag{84}$$

i denne realisation.

BJ-løsning:

En Box-Jenkins realisation er baseret på

$$y_t = q^{-k}\frac{B}{AF}u_t + \frac{C}{AD}e_t \tag{85}$$

Hvis $[A_u, B_u, C_u, D_u]$ og $[A_e, B_e, C_e, D_e]$ er realisationer af de to angivne overførings funktioner, da kan det totale system beskrives med:

$$A = \begin{bmatrix} A_u & 0 \\ 0 & A_e \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_u & 0 \\ 0 & B_e \end{bmatrix} \tag{86}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_u & C_e \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_u & D_e \end{bmatrix} \tag{87}$$

Antallet af tilstande i dette tilfælde er

$$n = max\left[n_b + k, n_a + n_f\right] + max\left[n_c, n_a + n_d\right] \tag{88}$$

ARMAX-løsning:

Systembeskrivelsen kan endvidere bringes på ARMAX-formen:

$$ADFy_t = q^{-k}BDu_t + CFe_t \tag{89}$$

Hvis $[A, B_u, C, D_u]$ er en observer kanonisk form for overføringen:

$$q^{-k}\frac{BD}{ADF} \tag{90}$$

og hvis $[A, B_e, C, D_e]$ er en observer kanonisk form for overføringen:

$$\frac{CF}{ADF} \tag{91}$$

er det totale system givet ved:

$$A, B = \begin{bmatrix} B_u & B_e \end{bmatrix} C, D = \begin{bmatrix} D_u & D_e \end{bmatrix} \tag{92}$$

Antallet af tilstande i denne realisering er:

$$n = max\left(n_a + n_f + n_d, k + n_b + n_d, n_c + n_f\right) \tag{93}$$

C.3.2 ss2l

Denne procedure anvendes til at bestemme en L-struktur i en tilstands repræsentation. Bemærk, at systemet skal have to indgange (en deterministisk og en stokastisk) og kun en udgang. Hvis $[A, B, C, D]$ er en tilstands beskrivelse anvendes komandoen som følger:

```
g_sys=ss2l(A,B,C,D);
```

C.3.3 l2trf

En L-struktur indeholder to overføringer; en fra det deterministiske påvirknings signal og et fra den stokastiske forstyrrelse. Proceduren kan følgelig anvendes på to måder.

```
[af,b,k]=l2trf(g_sys);
[af,b,k]=l2trf(g_sys,1);

[ad,c,var]=l2trf(g_sys,2);
```

C.3.4 ssysadd

Til addition af stokastiske systemer (ARMA-beskrivelser), dvs. til modellering af:

$$y_t = \frac{C_1}{A_1}\xi t + \frac{C_2}{A_2}\zeta_t \tag{94}$$

som

$$y_t = \frac{C}{A}e_t \tag{95}$$

hvor ξt, ζ_t og e_t er sekvenser af ukorellerede stokastiske variable med varianser s^2, η^2 og σ^2. Polynomiet A er den mindste fælles nævner mellem A_1 og A_2 og er givet ved:

$$L = A_1 R = -A_2 S \tag{96}$$

hvor R og S er relative primiske (og kan findes med polgcd). Opgaven består i at bestemme C og σ^2 således at:

$$C(q^{-1})e_t \tag{97}$$

har samme spektrale egenskaber som:

$$C_1(q^{-1})R(q^{-1})\xi t - C_2(q^{-1})S(q^{-1})\zeta_t \tag{98}$$

Hvilket f.eks. kan udføres med spekfak.

C.4 Analyseroutiner

Et system der styret af en af de omtalte metoder har nogle interessante egenskaber. Disse egenskaber kan bestemmes med nedenstående procedurer.

C.4.1 l2clss

Den lukkede sløjfe har en tilstands repræsentation, der i visse sammenhænge kan være interessant at kende. Denne procedure anvendes med:

```
[A,B,C,D]=l2clss(system,controller);
```


hvor *system* og *controller* er system og regulator i gamma format.

Hvis $[A_s, B_s, C_s, D_s]$ er repræsentationen for systemet og $[A_c, B_s, C_c, D_c]$ tilsvarende for regulatoren, da er det totale system givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} A_s + B_{su}D_{cy}C_s^\top & B_{su}C_c^\top \\ B_{cy}C_s^\top & A_c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{su}D_{cw} & B_{su}D_{cy}D_{se} + B_{se} \\ B_{cw} & B_{cy}D_{se} \end{bmatrix} \tag{99}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_s^\top & 0 \\ D_{cy}C_s^\top & C_c^\top \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & D_{se} \\ D_{c1} & D_{cy}D_{se} \end{bmatrix} \tag{100}$$

C.4.2 l2cll

Til bestemmelse af strukturen i den lukkede sløjfe kan man anvende udtrykkene i appendix B, der er implementeret i proceduren *l2cll*, der anvendes med kaldet:

```
[cly,glu]=l2cll(system,controller)
```

hvor *cly* og *clu* er lukket sløjferne til y_t og u_t, henholdsvis.

C.4.3 l2cllss

Denne procedure har samme semantik og syntaks som *l2cll*, blot er der i algoritmen anvendt en tilstands repræsentation for den lukkede sløjfe.

C.4.4 l2clsim

Til lukket sløjfe simulation er implementeret proceduren *l2clsim*, der på grundlag af en reference sekvens wt, en regulator gr og en system beskrivelse gs med kaldet:

```
[yt,ut]=l2clsim(gs,gr,wt);
```

generer styre- ut og udgangs sekvensen, yt.