

26. Anvendelse af køteori

Eksempel 1. Hvor mange reparatører?

Eksempel 2. Hvilken computer?

Eksempel 3. Værktøjsmagasiner

Henrik Juel

OR, DTU Management

26. Anvendelse af køteori – p.1/8

1. Hvor mange reparatører?

10 maskiner, hvoraf kun 8 kan køre samtidigt
En maskines opetid er exp.fordelt med gn.snit 20 d.
Reparationstiden er exp.fordelt med gn.snit 2 dage

Reparatørløn 280 \$/dag pr. reparatør

Tabt fortjeneste 400 \$/dag pr. ekstra maskine nede

Næsten M/M/s med endelig kundepopulation, $N = 10$

Kundeankomst = maskinnedbrud

n = antal nedbrudte maskiner

$$C_0 = 1, C_n = C_{n-1} \lambda_{n-1} / \mu_n$$

$$P_0 = 1 / \sum C_n, P_n = C_n P_0$$

Reparatøromkostning: $280s$ (\$/dag)

Tabt fortjeneste: $g_n = 400(n - 2)$ (\$/dag) for $n > 2$

26. Anvendelse af køteori – p.2/8

Eksempel 1. Regneskema

n	g_n	λ_n	μ_n	C_n	P_n	$g_n P_n$	μ_n	C_n	P_n	$g_n P_n$
0	0	.4		1	.271	0		1	.433	0
1	0	.4	.5	.8	.217	0	.5	.8	.346	0
2	0	.4	.5	.64	.173	0	1	.32	.139	0
3	400	.35	.5	.512	.139	56	1	.128	.055	24
4	800	.3	.5	.358	.097	78	1	.045	.019	16
5	1200	.25	.5	.215	.058	70	1	.013	.006	8
6	1600	.2	.5	.108	.029	46	1	.003	.001	0
7	2000	.15	.5	.043	.012	24	1	.001	.000	0
8	2400	.1	.5	.013	.003	7	1	.000	.000	0
9	2800	.05	.5	.003	.001	0	1	.000	.000	0
10	3200	0	.5	.000	.000	0	1	.000	.000	0
Σ				3.69		281		2.31		48

$$281 + 280 = 561, 48 + 280 \cdot 2 = 608, 0 + 280 \cdot 3 = 840 \text{ $/dag}$$

$s^* = 1$ reparatør

26. Anvendelse af køteori – p.3/8

Eksempel 2. Hvilken computer?

Jobbenes ml.ank.tid er exp.fordelt, i snit 20 jobs/dag

Betjeningstiden er exp.fordelt, intensitet μ

Computer A er dyrere og hurtigere end computer B

A: 5000 \$/dag $\mu = 30$ /dag. B: 3750 \$/dag $\mu = 25$ /dag

Et job med systemtid $\mathcal{W}$ (dage) tilregnes omk.

$$h(\mathcal{W}) = 500\mathcal{W} + 400\mathcal{W}^2 \text{ ($)}$$

pga. forskningsforsinkelse + afbrydelsesgener

M/M/1, $\lambda = 20$ /dag, $\mu = 30$ /dag hhv. 25/dag

$\mathcal{W}$ følger en exp.fordeling med parameter $\mu - \lambda$

$$E(\mathcal{W}) = 1/(\mu - \lambda)$$

$$E(\mathcal{W}^2) = V(\mathcal{W}) + (E\mathcal{W})^2 = 2/(\mu - \lambda)^2$$

26. Anvendelse af køteori – p.4/8

Eksempel 2. Beregninger

forv. omk. pr. job: $500/(\mu - \lambda) + 400 \cdot 2/(\mu - \lambda)^2$ (\$)
i snit 20 jobs/dag

forv. omk.: $10000/(\mu - \lambda) + 16000/(\mu - \lambda)^2$ (\$/dag)

Forventede totalomkostninger:

A: $5000 + 10000/10 + 16000/10^2 = 6160$ \$/dag

B: $3750 + 10000/5 + 16000/5^2 = 6390$ \$/dag

Computer A er altså at foretrække

Hvis omkostningsfunktionerne $g(\mathcal{N})$ og $h(\mathcal{W})$
begge er proportionale, er de ækvivalente:

$$g(\mathcal{N}) = c\mathcal{N} \rightarrow E(g) = cE(\mathcal{N}) = cL$$

$$h(\mathcal{W}) = c\mathcal{W} \rightarrow \lambda E(h) = \lambda cE(\mathcal{W}) = c\lambda W = cL$$

Eks. 3. Værktøjsmagasiner

Smedene i en fabrikshal benytter værktøj fra
nærmeste magasin

Gennemsnitligt antal besøg: 120 /h

Værdien af smed-tid: 48 \$/h

Hver ekspedient ekspederer i snit med hastigheden

$\mu = 120$ /h og koster 20 \$/h

Hvert magasin koster 16 \$/h udover lønomkostningen

Alternativer: 1, 2 eller 3 magasiner, hver med 1, 2
eller 3 ekspedienter

1 magasin

$s = 3$ ekspedienter

Gennemsnitlig vandretid pr. besøg: 0.04 h

M/M/3 med $\lambda = 120/h$, $\mu = 120/h$

$\lambda/\mu = 1$, $\rho = 1/3$

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2/3} = \frac{11}{4}$$

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} = \frac{(4/11) \cdot (1/3)}{6(2/3)^2} = \frac{1}{22}$$

$$L = \lambda W = \lambda(W_q + 1/\mu) = L_q + \lambda/\mu = 23/22$$

Samlede forventede omkostninger:

$$16 + 20 \cdot 3 + 48 \cdot 23/22 + 120 \cdot 48 \cdot 0.04 = 357 \text{ $/h}$$

3 magasiner

$s = 1$ ekspedient i hvert magasin

Gennemsnitlig vandretid pr. besøg: 0.02 h

Hvert magasin:

M/M/1 med $\lambda = 40/h$, $\mu = 120/h$

$\rho = 1/3$, $L = \rho/(1-\rho) = 0.5$

Samlede forventede omkostninger:

$$3(16 + 20 + 48 \cdot 0.5 + 40 \cdot 48 \cdot 0.02) = 295 \text{ $/h}$$

hvilket viser sig optimalt