

18. Lagermodeller

18.1. Eksempler

18.3. Deterministiske lagermodeller

18.7. Stokastiske lagermodeller

Henrik Juel

OR, DTU-Management

18.1. Højttalerproduktion

Givne parametre:

Efterspørgsel $d = 8000$ stk/måned

Serieomkostning $K = 12000$ \$

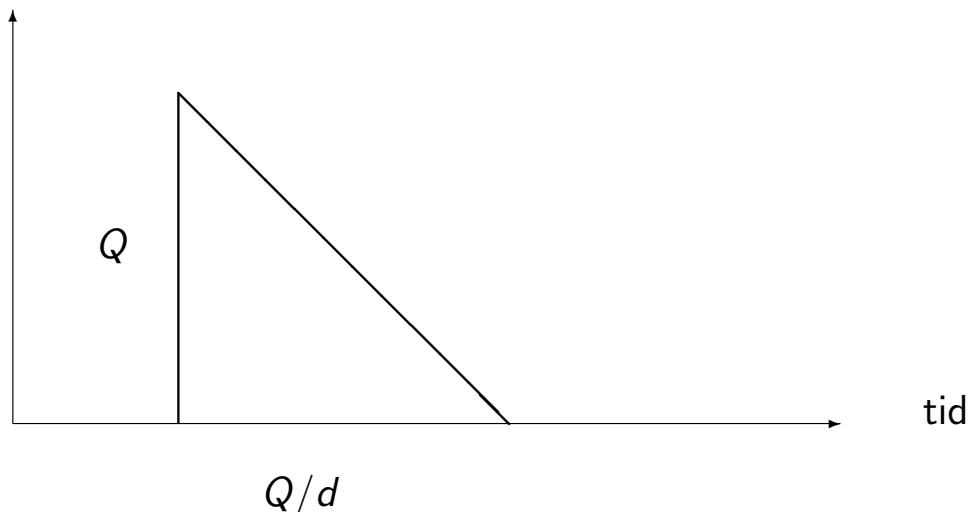
Enhedsomkostning $c = 10$ \$/stk

Lageromkostning $h = 0.3$ \$/stk/måned

Beslutningsvariabel:

Seriestørrelse Q (stk)

18.3. Determ. lagermodeller



Omkostninger pr. cyklus: $K + cQ + h \cdot Q/2 \cdot Q/d$

Grundmodel

Omkostninger pr. cyklus: $K + cQ + h \cdot Q/2 \cdot Q/d$

Omk. pr. måned: $T(Q) = dK/Q + dc + hQ/2$

$$dT/dQ = -dK/Q^2 + h/2 \rightarrow Q^* = \sqrt{2dK/h}$$

Optimal seriestørrelse:

$$Q^* = \sqrt{2 \cdot 8000 \cdot 12000 / 0.3} = 25298 \text{ stk}$$

Opt. cykluslængde $Q^*/d = 25298/8000 = 3.2$ måned

Minimale omkostninger $T(25298) = 87589$ \$/måned

Mere praktisk: $Q = 24000$ stk, $Q/d = 3$ måneder

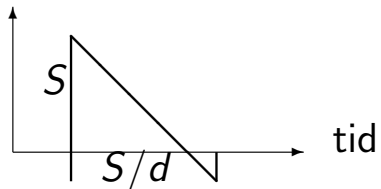
$T(24000) = 87600$ \$/måned (fladt minimum)

Forsinkelse tilladt

Ekstra parameter:

forsinkelsesomkostning $p = 1.1$ \$/stk/måned

Ekstra beslutningsvariabel: maksimalt lager S (stk)



$$K + cQ + h \cdot S/2 \cdot S/d + p \cdot (Q - S)/2 \cdot (Q/d - S/d)$$

Forsinkelse tilladt, fortsat

$$K + cQ + h \cdot S/2 \cdot S/d + p \cdot (Q - S)/2 \cdot (Q/d - S/d)$$
$$T(S, Q) = dK/Q + dc + \frac{1}{2}hS^2/Q + \frac{1}{2}p(Q - S)^2/Q$$

$$\partial T / \partial S = hS/Q - p(Q - S)/Q \rightarrow$$

$$S^*(Q) = pQ/(p + h) = fQ$$

$$T(S^*(Q), Q) = dK/Q + dc + (hf^2 + p(1 - f)^2)Q/2$$

dvs. grundmodellen med h erstattet af

$$hf^2 + p(1 - f)^2 = hp/(p + h)$$

$$Q^* = \sqrt{2dK/h} \sqrt{(p + h)/p}, S^* = fQ^*$$

$$Q^* = 28540 \text{ stk}, S^* = 22424 \text{ stk}$$

Minimale omk. $T(22424, 28540) = 86727$ \$/måned
(mindre end i grundmodellen, hvorfor?)

Kvantumsrabat

Enhedsomkostningen falder springvist med
seriestørrelsen:

$$c_1 = 11 \text{ $/stk for } Q < 10000$$

$$c_2 = 10 \text{ $/stk for } 10000 \leq Q < 80000$$

$$c_3 = 9.5 \text{ $/stk for } Q \geq 80000$$

$$c(Q) = c_j \text{ for } Q \in I_j$$

$$T(Q) = dK/Q + dc(Q) + hQ/2$$

$$T(Q) = T_j(Q) = dK/Q + dc_j + hQ/2 \text{ for } Q \in I_j$$

Hver $T_j(Q)$ minimeres for $Q = 25298$ stk,

så $T_2(25298) = 87589$ \$/måned er en mulighed;

men måske kan det betale sig at vælge $Q = 80000$ stk

Kvantumsrabat, fortsat

$$T_3(80000) = 8000 \cdot 12000/80000 + 8000 \cdot 9.5 + 0.3 \cdot 80000/2$$
$$= 89200 \text{ $/måned}$$

$$Q^* = 25298 \text{ stk}$$

Bedre rabatmodeller eksisterer, eksempelvis

11 \$/stk for de første 10000 stk,

10 \$/stk for de næste 70000 stk, derpå 9.5 \$/stk.

Lageromkostningen h kan modelleres som en funktion af
enhedsomkostningen c

Endelig produktionshastighed kan modelleres

Højttalergrossist

Serie $\rightarrow$ Ordre

Kendt leveringstid

18.7. Stokastiske lagermodeller

Enkeltperiodemodel: Avisdrengsproblemet

Eksempel 2. Cykelhandler:

Købspris $c = 200$ \$/cykel

Salgspris $r = 450$ \$/cykel

Scrapværdi $r' = 100$ \$/cykel

Periodens efterspørgsel D (cykler),
stokastisk variabel med kendt fordeling

Beslutningsvariabel: Ordrestørrelse S (cykler)

Cykelhandler

$$\text{Afsætning} = \begin{cases} D & \text{hvis } D < S \\ S & \text{ellers} \end{cases} = D - \max\{0, D - S\}$$

$$\max\{0, D - S\} = \text{utilfredsstillet efterspørgsel}$$

$$\text{Slutlager} = \begin{cases} S - D & \text{hvis } D < S \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} = \max\{0, S - D\}$$

Fortjeneste

Fortjeneste =

$$-cS + r(D - \max\{0, D - S\}) + r' \max\{0, S - D\}$$

Forventet fortjeneste = $rE(D) -$

$$[cS + rE(\max\{0, D - S\}) - r'E(\max\{0, S - D\})]$$

$$= rE(D) - C(S)$$

shortage cost $p = r$

holding cost $h = -r'$

$$C(S) = cS + pE(\max\{0, D - S\}) + hE(\max\{0, S - D\})$$

Forventet 'omkostning'

Diskret fordelt efterspørgsel:

$$C(S) = cS + p \sum_{d=S}^{\infty} (d - S)P\{D = d\} \\ + h \sum_{d=0}^S (S - d)P\{D = d\}$$

Kontinuert fordelt efterspørgsel:

$$C(S) = cS + p \int_S^{\infty} (x - S)f(x)dx + h \int_0^S (S - x)f(x)dx$$

Generaliseringer:

$$p = r + \text{badwillomkostning} = 450 + 0 = 450 \text{ $/cykel} \\ (\text{eller } p = \text{hasteordreomkostning})$$

$$h = \text{lageromkostning} - r' = 10 - 100 = -90 \text{ $/cykel}$$

Ligefordelt efterspørgsel

$$cS + p \sum_{d=S}^{\infty} (d-S)P\{D=d\} + h \sum_{d=0}^S (S-d)P\{D=d\}$$

$D \sim \text{lige}(1, 20000)$

$$\begin{aligned} C(S) &= \\ 200S + 450 \sum_{d=S}^{20000} (d-S) \frac{1}{20000} - 90 \sum_{d=1}^S (S-d) \frac{1}{20000} &= \\ 200S + \frac{450}{40000} (20000-S)(20001-S) - \frac{90}{40000} (S-1)S &= \\ 0.009S^2 - 250.009S + 4500225 \end{aligned}$$

$$rE(D) = 450 \cdot 10000.5 = 4500225$$

$$\text{Forventet fortjeneste} = 250.009S - 0.009S^2$$

Rektangulær efterspørgsel

$$C(S) = cS + p \int_S^{\infty} (x-S)f(x)dx + h \int_0^S (S-x)f(x)dx$$

$D \sim \text{rekt}(0, 20000)$

$$\begin{aligned} C(S) &= \\ 200S + 450 \int_S^{20000} (x-S) \frac{1}{20000} dx - 90 \int_0^S (S-x) \frac{1}{20000} dx &= \\ 200S + \frac{450}{20000} \left[\frac{1}{2}x^2 - Sx \right]_{x=S}^{20000} - \frac{90}{20000} \left[Sx - \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=0}^S &= \\ 0.009S^2 - 250S + 4500000 \end{aligned}$$

$$rE(D) = 450 \cdot 10000 = 4500000$$

$$\text{Forventet fortjeneste} = 250S - 0.009S^2$$

Kontinuert efterspørgsel

$$C(S) = cS + p \int_S^{\infty} (x-S)f(x)dx + h \int_0^S (S-x)f(x)dx$$

$$C'(S) = c - p \int_S^{\infty} f(x)dx + h \int_0^S f(x)dx$$

$$C'(S) = c - p + (p+h)F(S)$$

$$C'(0) = c - p < 0 \quad C'(\infty) = c + h > 0$$

$$C''(S) = (p+h)f(S) > 0$$

$$C'(S^*) = 0 \rightarrow F(S^*) = \frac{p-c}{p+h}$$

Cykelhandler igen

Købspris $c = 200$ \$/cykel

Salgspris $r = 450$ \$/cykel

Scrapværdi $r' = 100$ \$/cykel

Lageromkostning 10 \$/cykel

shortage cost $p = r = 450$

holding cost $h = 10 - 100 = -90$

$$(p-c)/(p+h) = (450-200)/(450-90) = 0.69\bar{4}$$

Den optimale ordrestørrelse er her

69.4-percentilen i efterspørgselsfordelingen

Rektangulær efterspørgsel

$$D \sim \text{rekt}(a, b)$$

$$f(x) = 1/(b - a)$$

$$F(d) = (d - a)/(b - a)$$

$$E(D) = (a + b)/2$$

$$S^* = a + \frac{p - c}{p + h}(b - a)$$

$$a = 0, b = 20000$$

$$S^* = 0.694 \cdot 20000 = 13889 \text{ cykler}$$

Udvidet model: Startlager

Startlager I cykler

Vi får S cykler på lager ved at beordre op til S
dvs. ved at beordre $S - I$ cykler

I er givet, og S bestemmes ved at løse problemet

min. $C(S) - cI$ uht. $S \geq I$

min. $C(S)$ uht. $S \geq I$

Optimal politik:

Beordr op til S^* hvis $I < S^*$, og ellers ingenting

Eksponentialfordelt eftersp.

$$D \sim \exp(\alpha)$$

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

$$F(d) = 1 - e^{-\alpha d}$$

$$E(D) = 1/\alpha$$

$$S^* = E(D) \ln \frac{p + h}{c + h}$$

$$E(D) = 10000$$

$$S^* = 10000 \ln(36/11) = 11856 \text{ cykler}$$

Startlager og ordreomkostning

Startlager I cykler og ordreomkostning K \$

Optimal politik:

Beordr op til S^* hvis $I < s^*$, og ellers ingenting

Optimal (s, S) politik:

S^* fås af

$$F(S^*) = \frac{p - c}{p + h}$$

Derefter fås s^* som den mindste rod i

$$C(s^*) = K + C(S^*)$$

Cykelhandler igen igen

$$c = 200, \quad p = 450, \quad h = -90 \text{ \$/cykel} \\ K = 8000 \text{ \$}$$

$$D \sim \text{rekt}(0, b) \quad b = 20000$$

$$S^* = \frac{p-c}{p+h}b = 13889$$

$$C(S) = (p+h)S^2/(2b) - (p-c)S + pb/2$$

$$s^* = S^* - \sqrt{2bK/(p+h)} = 13889 - 943 = 12946$$

Cykelhandler, eksp.ford.

$$D \sim \exp(\alpha) \quad E(D) = 1/\alpha = 10000$$

$$C(S) = (c+h)S + (h+p)E(D)e^{-\alpha S} - hE(D)$$

$$S^* = E(D) \ln \frac{p+h}{c+h} = 11856$$

$$s^* = S^* - \Delta, \text{ hvor } \Delta \text{ tilfredsstiller ligningen}$$

$$f(\Delta) = e^{\alpha\Delta} - \alpha\Delta - \alpha K/(c+h) - 1 = 0$$

Start med gættet $\Delta = \sqrt{2KE(D)/(c+h)} = 1206$
og løs evt. ligningen ved interpolation:

Δ	1206	1200	1180	1182
$f(\Delta)$	.0003	.0002	-.00003	0

$$s^* = 11856 - 1182 = 10674$$

Diskret efterspørgselsfordeling

S^* fås som det mindste S der tilfredsstiller

$$P\{D \leq S\} \geq \frac{p-c}{p+h}$$

mens bestemmelsen af s^* er besværlig