

17. Køteori

17.1. Prototypeeksempel: Skadestue

17.2. Kømodellers struktur

17.3. Systemeksempler

17.4. Eksponentialfordeling

17.5. Fødsels- og dødsproces

17.6. Kømodeller

Henrik Juel

OR, DTU Management

17. Kteori – p.1/13

17.2. Kømodellers struktur

- Kundepopulation
 - størrelse
 - ankomstproces
- Kølængde
- Kødisciplin
- Betjeningsmekanisme
 - antal betjenere
 - betjeningstid

17. Kteori – p.2/13

17.4. Eksponentialfordeling

$$T \sim \exp(\alpha)$$

$$\text{Tæthedsfunktion } f(t) = \alpha e^{-\alpha t}, t \geq 0$$

$$\text{Fordelingsfunktion } F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\alpha t}$$

$$\text{Forventet værdi } E(T) = \int_0^\infty t \alpha e^{-\alpha t} dt = 1/\alpha$$

$$\text{Varians } V(T) = E(T - ET)^2 = 1/\alpha^2$$

$$\text{Markov: } P\{T > t + s \mid T > s\} = P\{T > t\}$$

17. Kteori – p.3/13

Skadestue

Antal betjenere $s = 1$

Ankomstintensitet $\lambda = 2$ patienter/time $= 2$ /h

Gennemsnitlig betjeningstid

$$1/\mu = 20 \text{ min./patient} \rightarrow \mu = 3 \text{ /h}$$

Poissonankomster: ssh. for ankomst i $\Delta t \sim \lambda \Delta t$

Eksponentialfordelte betjeningstider:

$$\text{ssh. for betjeningsafslutning i } \Delta t \sim \mu \Delta t$$

Poissonproces:

Antal ankomster i et bestemt tidsrum er Poissonfordelt
= Mellemankomsttiden er eksponentialfordelt

17. Kteori – p.4/13

Tilstandssandsynligheder

$P_n(t)$ = ssh. for n kunder i systemet på tidspunkt t

$$P_0(t + \Delta t) \simeq P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t$$

$$P'_0(t) = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

$$P_1(t + \Delta t) \simeq$$

$$P_0(t)\lambda\Delta t + P_1(t)(1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t) + P_2(t)\mu\Delta t$$

$$P'_1(t) = \lambda P_0(t) + \mu P_2(t) - (\lambda + \mu)P_1(t) \text{ osv.}$$

Stationaritet

$P'_n(t) = 0$ giver et ligningssystem for tilstandssandsynlighederne

$$\mu P_1 = \lambda P_0,$$

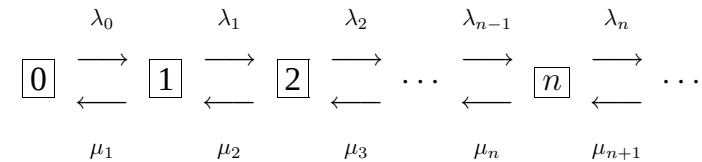
$$\lambda P_0 + \mu P_2 = (\lambda + \mu)P_1 \text{ osv.}$$

17.5. Fødsels- og dødsproces

Tilstandsafhængige parametre

$$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0, \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1)P_1 \text{ osv.}$$

Springdiagram



$$P_1 = P_0 \cdot \lambda_0 / \mu_1, P_2 = P_1 \cdot \lambda_1 / \mu_2 = P_0 \cdot \lambda_1 \lambda_0 / (\mu_2 \mu_1)$$

Definér

$$C_n = \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_1 \lambda_0 / (\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_2 \mu_1), C_0 = 1$$

$$P_n = C_n P_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \rightarrow P_0 = 1 / \sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

Karakteristika

antal i system, n	0	1	$\cdots$	$s-1$	s	$s+1$	$\cdots$
sandsynlighed	P_0	P_1		P_{s-1}	P_s	P_{s+1}	
antal i kø	0	0		0	0	1	

Forventet antal kunder i systemet: $L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$

Forventet antal kunder i køen: $L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$

Hvis $\lambda_n = \lambda \forall n$:

Forventet systemtid: $W = L/\lambda$

Forventet køtid: $W_q = L_q/\lambda$

Ellers benyttes $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ i stedet for λ

Skadestue

$$s = 1, \lambda = 2/h, \mu = 3/h$$

$$\text{Udnyttelsesgrad } \rho = \lambda/(s\mu) = 2/3$$

$$C_n = \rho^n, P_n = (1 - \rho)\rho^n$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n = \rho/(1 - \rho) = 2$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = L - (1 - P_0) = \rho^2/(1 - \rho) = 4/3$$

$$W = 1 \text{ h}$$

$$W_q = 2/3 \text{ h} = 40 \text{ minutter}$$

$$\text{Systemtiden } \mathcal{W} \sim \exp(\mu - \lambda)$$

17.6. Kømodeller

M/M/s

Ankomstintensitet λ
gennemsnitlig betjeningstid $1/\mu$

Stationaritet kræver at udnyttelsesgraden

$$\rho = \lambda/(s\mu) < 1$$

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{for } n < s \\ s\mu & \text{ellers} \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{for } n < s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} & \text{ellers} \end{cases}$$

Skadestue

Antal betjenere $s = 2$ ($\lambda = 2/h$, $\mu = 3/h$)

$$\rho = 2/(2 \cdot 3) = 1/3 < 1$$

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{(2/3)^2}{2 \cdot 2/3} = 2$$

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} = \frac{1/2 \cdot (2/3)^2 \cdot 1/3}{2(2/3)^2} = 1/12$$

$$W_q = L_q/\lambda = 1/24 \text{ h} = 2.5 \text{ minutter}$$

$$W = W_q + 1/\mu = 3/8 \text{ h} = 22.5 \text{ minutter}$$

$$L = \lambda W = 3/4$$

Fig. 17.6 giver L meget tilnærmet

Side 779-781 giver formler for $s = 1$ betjener

M/M/s med begrænset kø

Der er højst plads til K kunder i systemet
dvs. højst $K - s$ kunder i køen

Stationaritet kan altid nås

Vi kan antage $K \geq s$
($K = s$ kaldes et afvisningssystem)

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{for } n < K \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{for } n < s \\ s\mu & \text{ellers} \end{cases}$$

M/M/s med begrænset kø fortsat

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{n=0}^s \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s+1}^K \rho^{n-s}$$

$$P_K = \frac{(\lambda/\mu)^K}{s!s^{K-s}} P_0$$

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{K-s} - (K-s)\rho^{K-s}(1-\rho)]$$

(for $\rho = 1$: L'Hôpital)

$$L = \sum_{n=0}^{s-1} nP_n + L_q + s(1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n)$$

Side 785-787 giver formler for $s = 1$ betjener

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_K)$$

M/M/s med endelig kundepop.

Maskinpasning

Kundepopulationens størrelse er N
(en maskines gennemsnitlige opetid: $1/\lambda$)

Stationaritet kan altid nås

$$\lambda_n = \begin{cases} (N - n)\lambda & \text{for } n < N \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{for } n < s \\ s\mu & \text{ellers} \end{cases}$$

Side 788-790 giver formler

$$\bar{\lambda} = \lambda(N - L)$$