

10. Dynamisk programmering

10.1. Prototype eksempel

10.2. Karakteristika

10.3. Deterministisk DP

Henrik Juel

OR, DTU Management

10. Dynamisk programmering – p.1/12

10.1. Prototype eksempel

Figur 10.1 s. 425

En guldgraver ønsker at rejse billigst muligt fra stat A til stat J med diligencer (= stage coaches)

stage = trin

state = tilstand

10. Dynamisk programmering – p.2/12

10.3. Deterministisk DP

s. 432. Fordeling af lægehold på lande

5 hold skal fordeles på 3 lande,
så den samlede levetidsforøgelse maksimeres

hold\land	1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

10. Dynamisk programmering – p.3/12

Land 3

Hvis vi allerede har besluttet for de første to lande og har s_3 hold tilbage, hvad er da den optimale beslutning for land 3?

x_3 = antal hold til land 3

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

10. Dynamisk programmering – p.4/12

Land 2 (og 3)

Hvis vi allerede har besluttet for det første land og har s_2 hold tilbage, hvad er da den optimale beslutning for land 2?

$s_2 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0						0	0
1	50	20					50	0
2	70	70	45				70	0, 1
3	80	90	95	75			95	2
4	100	100	115	125	110		125	3
5	130	120	125	145	160	150	160	4

Land 1 (og 2, 3)

$s_1 \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
5	160	170	165	160	155	120	170	1

$$x_1^* = 1, x_2^* = 3, x_3^* = 1$$

maksimal samlet levetidsforøgelse: 170

Terminologi

trin $\sim$ land

På trin n betragtes land n og de følgende lande

Tilstand s_n = antal hold til rådighed på trin n

Beslutning x_n = antal hold til land n

$$f_n(s_n, x_n) =$$

samlet levetidsforøgelse for land n og de følgende lande, når vi har s_n hold til rådighed, giver x_n hold til land n , og handler optimalt for de følgende lande

$$f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)$$

$$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*)$$

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n} \{p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)\}$$

s. 442. Bemandingsplanlægning

kvartal, n	1	2	3	4
minimal bemanding, r_n	220	240	200	255

x_n = bemanding i kvartal n

$$\text{ændringsomkostning} = .2(x_n - x_{n-1})^2$$

$$\text{overbemandingsomkostning} = 2(x_n - r_n)$$

uendelig horisont, deltidsansættelse tilladt

Find bemandingerne, så de samlede årlige omkostninger minimeres

Hvad bliver x_4^* ?

Rekursionsformel, trin 4, trin 3

trin $\sim$ kvartal

tilstand $s_n =$ foregående kvartals bemanding ($= x_{n-1}$)

$$f_n(s_n, x_n) = .2(x_n - s_n)^2 + 2(x_n - r_n) + f_{n+1}^*(x_n)$$

$$f_n^*(s_n) = \min f_n(s_n, x_n) \text{ uht. } x_n \geq r_n$$

$$f_4^*(s_4) = .2(255 - s_4)^2$$

$$f_3(s_3, x_3) = .2(x_3 - s_3)^2 + 2(x_3 - 200) + .2(255 - x_3)^2$$

skal minimeres uht. $x_3 \geq 200$

$$x_3^* = .5s_3 + 125$$

$$f_3^*(s_3) = .1s_3^2 - 50s_3 + 6355$$

Trin 2 og trin 1

$$f_2(s_2, x_2) =$$

$$.2(x_2 - s_2)^2 + 2(x_2 - 240) + .1x_2^2 - 50x_2 + 6355$$

$$s_2 \leq 240 : x_2^* = 240, f_2^*(s_2) = .2s_2^2 - 96s_2 + 11635$$

$$s_2 \geq 240 : x_2^* = .\bar{6}s_2 + 80,$$

$$f_2^*(s_2) = .0\bar{6}s_2^2 - 32s_2 + 3955$$

$$f_1(255, x_1) = .2(x_1 - 255)^2 + 2(x_1 - 220) + f_2^*(x_1)$$

$$x_1 \leq 240 : f_1(255, x_1) = .4x_1^2 - 196x_1 + 24200$$

$$x_1 \geq 240 : f_1(255, x_1) = .2\bar{6}x_1^2 - 132x_1 + 16520$$

$$x_1^* = 247.5, f_1^*(255) = 185$$

$$x_2^* = .\bar{6}(247.5) + 80 = 245$$

$$x_3^* = .5(245) + 125 = 247.5, x_4^* = 255$$

s. 448. Wyndor løst med DP

$$\text{max. } 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{uht. } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

tilstand $\sim$ resterende ressourcemængder

$$f_2(R_1, R_2, R_3, x_2) = 5x_2$$

$$f_2^*(R_1, R_2, R_3) = \max 5x_2$$

$$\text{uht. } 2x_2 \leq R_2, 2x_2 \leq R_3, x_2 \geq 0$$

$$x_2^* = .5 \min\{R_2, R_3\}$$

$$f_2^*(R_1, R_2, R_3) = 2.5 \min\{R_2, R_3\}$$

Trin 1

$$f_1(4, 12, 18, x_1) = 3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)$$

$$= 3x_1 + 2.5 \min\{12, 18 - 3x_1\}$$

$$x_1 \leq 2 : f_1(4, 12, 18, x_1) = 3x_1 + 30$$

$$x_1 \geq 2 : f_1(4, 12, 18, x_1) = 45 - 4.5x_1$$

$$f_1^*(4, 12, 18) = \max f_1(4, 12, 18, x_1)$$

$$\text{uht. } x_1 \leq 4, 3x_1 \leq 18, x_1 \geq 0$$

$$x_1^* = 2, f_1^*(4, 12, 18) = 36$$

Herefter bliver de rest. ressourcemængder før trin 2

$$R_1 = 4 - 2 = 2, R_2 = 12, R_3 = 18 - 6 = 12$$

$$x_2^* = .5 \min\{12, 12\} = 6$$