

8. Transportproblemet og assignmentproblemet

8.1. Transportproblemet: Formulering

8.2. Transportproblemet: Løsning

8.3. Assignmentproblemet

8.4. Løsning

Henrik Juel

OR, DTU Management

8. Transportproblemet og assignmentproblemet – p.1/16

8.1. Formulering

s. 305. Transport af dåsetomater fra fabrikker til lagre

	L1	L2	L3	L4	udb.
F1	464	513	654	867	75
F2	352	416	690	791	125
F3	995	682	388	685	100
eft.sp.	80	65	70	85	300

8. Transportproblemet og assignmentproblemet – p.2/16

Dåsetomater: Model

x_{ij} = antal enheder der transporteres fra F_i til L_j
 $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$

$$\text{min. } 464x_{11} + 513x_{12} + \dots + 685x_{34}$$

$$\text{uht. } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 75$$

$\vdots$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85$$

$$x_{ij} \geq 0 \forall ij$$

8. Transportproblemet og assignmentproblemet – p.3/16

Generel transportmodel

m kilder og n destinationer

$$\text{min. } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{uht. } \sum_j x_{ij} = s_i \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} = d_j \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0 \forall ij$$

Balanceret problem: $\sum_i s_i = \sum_j d_j$

Hvis alle udbud og efterspørgsler er heltallige, så er variabelværdierne i alle de mulige basisløsninger også heltallige

8. Transportproblemet og assignmentproblemet – p.4/16

s. 316. Transport af vand

	B1	B2	B3	B4	s_i
F1	16	13	22	17	50
F2	14	13	19	15	60
F3	19	20	23	M	50
min.krav	30	70	0	10	
max.ønske	50	70	30	∞	

B4's max. mulige tilførsel = $160 - 100 = 60$

B1a: opfyldelse af B1's minimale krav

B1b: eventuel ekstra tilførsel til B1

Fupflod F4: slackvariabler

Vand: Model

	B1a	B1b	B2	B3	B4	s_i
F1	16	16	13	22	17	50
F2	14	14	13	19	15	60
F3	19	19	20	23	M	50
F4	M	0	M	0	0	50
d_j	30	20	70	30	60	210

(her viser det sig unødvendigt at opsplitte B4, idet B4 vil få tilført mindst 10. Hvorfor?)

Løsningsmetodens teori

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\ \text{uht.} \quad & \sum_j x_{ij} = s_i \quad \forall i \\ & \sum_i x_{ij} = d_j \quad \forall j \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

En af begrænsningerne er redundant, så der er kun $m + n - 1$ basisvariabler

Dual

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_i s_i u_i + \sum_j d_j v_j \\ \text{uht.} \quad & u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \forall i, j \\ & u_i \text{ fri } \forall i, \quad v_j \text{ fri } \forall j \end{aligned}$$

Dualvariableerne er ikke helt veldefinerede

Koefficienten i række (0) for x_{ij} kaldes den reducerede omkostning

Den kan fås som værdien af den tilsvarende duale slackvariabel: $c_{ij} - u_i - v_j$

8.2. Transportmetode

Fase 1. Find en mulig basisløsning

Fyld så mange enheder som muligt i 'næste' basiscelle

Tre metoder til bestemmelse af hvilken celle der skal være den 'næste' (VAM er bedst):

NW: nordvestligste celle

VAM: billigste celle i linjen med størst straf
straf = forskellen mellem de to mindste omkostninger

RAM: cellen med mest negativ $c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j$
 $\bar{u}_i, \bar{v}_j$ = linjernes største omkostninger

Transportmetode fortsat

en dualvariabelværdi vælges vilkårligt, fx $u_1 = 0$
resten bestemmes af $u_i + v_j = c_{ij}$ for basisceller
reducerede omkostninger $c_{ij} - u_i - v_j$

Fase 2. Find den optimale løsning

Optimalitet: alle red. omk. er ikke-negative

Indkommende celle: mest negativ red. omk.

Udgående celle fås ved at betragte $\pm$ kredsen

Opdatering: flyt enheder i kredscellerne

Vand: Udgangspunkt

16	16	13	22	17	50
14	14	13	19	15	
19	19	20	23	M	60
M	0	M	0	0	50
					50
30	20	70	30	60	

Vand: Efter VAM

16	16	13	22	17	0
		50			
14	14	13	19	15	0
		20		40	
19	19	20	23	M	7
30		20	0		
M	0	M	0	0	-15
			30	20	
12	12	13	15	15	

Løsningen er faktisk optimal, omkostning 2460

8.3. Assignmentproblemet

s. 334. Placering af nye maskiner

	L1	L2	L3	L4
M1	13	16	12	11
M2	15	-	13	20
M3	5	7	10	6

	L1	L2	L3	L4
M1	13	16	12	11
M2	15	M	13	20
M3	5	7	10	6
M4	0	0	0	0

Maskiner: Model

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } M_i \text{ placeres på } L_j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\min. \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{uht. } \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \rightarrow x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

Assignmentproblemet er et transportproblem med $m = n$ og alle $s_i = d_j = 1$

Løsning med transportmetoden er besværlig, så metoden i afsnit 8.4 bør anvendes

8.4 Løsningsmetode

Minimeringsproblem med n rækker og søjler

1. For alle tal i hver række:
Fratræk rækkens mindste tal.
2. Derefter, for alle tal i hver søjle:
Fratræk søjlens mindste tal.

Løsningsmetode fortsat

3. Søg efter et 0-assignment.
Hvis det findes, svarer det til en optimal løsning.
Hvis ikke, gå videre til punkt 4.
4. Dæk alle 0'er ved at overstrege nogle rækker og søjler med vandrette og lodrette streger.
Brug færre end n streger i alt.
5. Find det mindste ikke-overstregede tal, a .
Træk a fra alle ikke-overstregede tal.
Læg a til alle dobbelt-overstregede tal.
(Alle enkelt-overstregede tal kopieres uændret).
Gå til punkt 3.