

6. Dualitet og følsomhedsanalyse

6.1. Dualitet

6.2. Økonomisk fortolkning

6.3. Primal-Dual-relationer

6.4. Primal på ikke-standard form

6.5-7. Følsomhedsanalyse

Henrik Juel

OR, DTU Management

6. Dualitet og følsomhedsanalyse – p.1/15

6.1. Dualitet

Det **primale** problem (Wyndor)

$$\begin{array}{ll}\text{max.} & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{uht.} & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Det dertil svarende **duale** problem

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ \text{uht.} & y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0\end{array}$$

6. Dualitet og følsomhedsanalyse – p.2/15

Svag dualitetssætning

Primal:

$$\text{max. } cx$$

$$\text{uht. } Ax \leq b, x \geq 0$$

Dual:

$$\text{min. } yb$$

$$\text{uht. } yA \geq c, y \geq 0$$

Hvis x er primal-mulig og y dual-mulig, så gælder

$$cx \leq yAx \leq yb$$

Normalt haves $cx^* = y^*b$ fra fundamentalindsigten

6. Dualitet og følsomhedsanalyse – p.3/15

Stærk dualitetssætning

Primal (dual)

Dual (primal)

Optimal løsning

$\iff$

Optimal løsning

Ubegrænset gode løsn.

$\Rightarrow$

Ingen mulig løsning

Ingen mulig løsning

$\Rightarrow$

Ingen mulig løsning eller
Ubegrænset gode løsn.

$$\text{max. } x_1 \text{ uht. } -x_1 \leq 2, x_1 \geq 0 \quad \text{ubegrænset}$$

$$\text{min. } 2y_1 \text{ uht. } -y_1 \geq 1, y_1 \geq 0 \quad \text{ingen}$$

$$\text{max. } x_1 + x_2 \quad \text{ingen}$$

$$\text{uht. } x_1 - x_2 \leq -1, -x_1 + x_2 \leq -1, x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{min. } -y_1 - y_2 \quad \text{ingen}$$

$$\text{uht. } y_1 - y_2 \geq 1, -y_1 + y_2 \geq 1, y_1, y_2 \geq 0$$

6. Dualitet og følsomhedsanalyse – p.4/15

6.2. Økonomisk fortolkning

Dualvariablerne fortolkes som implicitte ressourcepriser

min. ressourcernes implicitte værdi
uht. ressourceanv.s bidrag til $Z \geq$ bidraget fra akt.
og hver resources bidrag ≥ 0

Anvendelser af dualitet

Hvis et problem har $m > n$
kan det duale problem være hurtigere at løse

Gættede mulige løsninger x og y

Hvis $cx = yb$, så er x faktisk optimal

Hvis $yb - cx$ er lille, kan x måske accepteres

Transportmetoden

6.3. Primal-Dual-relationer

Beslutningsvar. x_j svarer til dual surplusvar. y_{m+j}

Slackvariabel x_{n+i} svarer til dualvariabel y_i

$(x_{n+i} = b_i - \sum_j a_{ij}x_j \text{ og } y_{m+j} = \sum_i y_i a_{ij} - c_j)$

Komplementær slackness

En x -variabel og den dertil svarende y -variabel er ikke begge positive

Komplementære og mulige løsninger er optimale

$0 = y_s x = (yA - c)x$ og $0 = yx_s = y(b - Ax)$

$\Rightarrow cx = yb$

6.4. Ikke-standard form

Man kan altid først bringe primal-problemet på standardform og derefter dualisere

Men det er lettere at benytte SOB reglen

- Naturlig begrænsning svarer til ikkenegativ variabel
- Lighedsbegrænsning svarer til fri variabel
- Unaturlig begrænsning svarer til ikkepositiv variabel

I max-problem er $\leq$ begrænsning naturlig

I min-problem er $\geq$ begrænsning naturlig

Strålebehandlingseksemplet

min. $.4x_1 + .5x_2$

uht. $.3x_1 + .1x_2 \leq 2.7$

$.5x_1 + .5x_2 = 6$

$.6x_1 + .4x_2 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

max. $2.7y_1 + 6y_2 + 6y_3$

uht. $.3y_1 + .5y_2 + .6y_3 \leq .4$

$.1y_1 + .5y_2 + .4y_3 \leq .5$

$y_1 \leq 0, y_2 \text{ fri, } y_3 \geq 0$

6.7. Følsomhedsanalyse

$$\begin{aligned} \max. \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{uht.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$b_2 = 12 + \Delta \text{ eller } c_1 = 3 + \Delta$$

Ekstra beslutningsvariabel eller begrænsning

1 - Ændring af en højreside

$$b_2 = 12 + \Delta$$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Δ
1	-3	-5				0	
	1	0	1			4	
	0	2		1		12	1
	3	2			1	18	
1				3/2	1	36	3/2
			1	1/3	-1/3	2	1/3
		1		1/2	0	6	1/2
	1			-1/3	1/3	2	-1/3

1 fortsat

Optimalitet kræver at højresiderne er ikke-negative

$$2 + \Delta/3 \geq 0$$

$$6 + \Delta/2 \geq 0$$

$$2 - \Delta/3 \geq 0$$

$$-6 \leq \Delta \leq 6$$

$$6 \leq b_2 \leq 18$$

Allowable range to stay feasible = Følsomhedsinterval

Skyggeprisen gælder i følsomhedsintervallet

3 - Basisvariabel: $c_1 = 3 + \Delta$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Δ
1				3/2	1	36	
	-1						
			1	1/3	-1/3	2	
		1		1/2	0	6	
	→ 1			-1/3	1/3	2	
1				3/2	1	36	
				-1/3	1/3	2	Δ
			1	1/3	-1/3	2	
		1		1/2	0	6	
	1			-1/3	1/3	2	

3 fortsat

Optimalitet kræver at række (0) koefficienterne er ikke-negative

$$3/2 - \Delta/3 \geq 0$$

$$1 + \Delta/3 \geq 0$$

$$-3 \leq \Delta \leq 9/2$$

$$0 \leq c_1 \leq 15/2$$

Allowable range to stay optimal = Følsomhedsinterval

2a - Ændring af en ikkebasisvariabels
målfunktionskoefficient

Samme metode, blot enklere (tableauet er allerede legitimt)

2b - Ekstra beslutningsvariabel

$$\text{max. } 3x_1 + 5x_2 + 4x_e$$

$$\text{uht. } x_1 + 2x_e \leq 4$$

$$2x_2 + 3x_e \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_e \leq 18$$

$$x_1, x_2, x_e \geq 0$$

Koefficienten til x_e i række (0) bliver

$$y^* A_e - c_e = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 = 11/2 - 4 > 0$$

så løsningen forbliver optimal, altså $x_e^* = 0$

4 - Ekstra begrænsning

$$\text{max. } 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{uht. } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Løsningen tilfredsstiller den ekstra begrænsning,
så løsningen forbliver optimal.

Flere ændringer: Hvad gør vi?