

5. Simplexmetodens teori

5.1. Simplexmetodens grundlag

5.2. Matrix form

5.4. Revideret Simplex

5.3. Fundamental indsigt

Henrik Juel

OR, DTU Management

5. Simplexmetodens teori – p.1/15

5.1. Simplexmetodens grundlag

Grafisk løsning

n beslutningsvariabler og m begrænsninger $\rightarrow$
 $m + n$ randligninger, fx. $x_1 = 0$, $3x_1 + 2x_2 = 18$
Løsning af n af randligningerne giver (måske) en mulig hjørneløsning

Simplex med slackvariabler

$n + m$ variabler og m ligninger, fx.
 $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$
 n af variablerne kaldes ikkebasisvariabler, de tildeles alle værdien 0
Løsning af ligningerne mht. de resterende m basisvariabler giver (måske) en mulig basisløsning

5. Simplexmetodens teori – p.2/15

Simplexmetodens konvergens

Antag at alle basisvariabler er positive i alle tableauer
Sammenhængen mellem mulige hjørneløsninger og mulige basisløsninger er entydig
Og målfunktionen vokser fra et tableau til det næste
Før eller senere må det endelige antal mulige basisløsninger være udtømt, så metoden konvergerer
Cyklung kan teoretisk forekomme, når der er degeneration, men ses aldrig i praksis

5. Simplexmetodens teori – p.3/15

5.2. Matrix form

$$\begin{aligned} \max. Z &= \sum_j c_j x_j \\ \text{uht. } \sum_j a_{ij} x_j &\leq b_i \quad \forall i \text{ og } x_j \geq 0 \quad \forall j \\ \max. Z &= cx \text{ uht. } Ax \leq b \text{ og } x \geq 0 \\ Ax + Ix_s &= b \\ Bx_B + Nx_N &= b \\ Z &= c_B x_B + c_N x_N \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ Z &= c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N)x_N \end{aligned}$$

5. Simplexmetodens teori – p.4/15

Wyndor første og sidste tableau

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-3	-5				0
	1	0	1			4
	0	2		1		12
	3	2			1	18
1				3/2	1	36
			1	1/3	-1/3	2
		1		1/2	0	6
	1			-1/3	1/3	2

5. Simplexmetodens teori – p.5/15

Wyndor med søjlepermutering

..	x_3	x_2	x_1	..
	0	-5	-3	
	1	0	1	
	0	2	0	
	0	2	3	
	0	0	0	
	1			
		1		
			1	

5. Simplexmetodens teori – p.6/15

Simplex på matrixform

$$\begin{array}{ccc} \dots & x_B & \dots \\ \hline & -c_B & \\ \hline & B & \\ & 0 & \\ \hline & I & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} Z & & x & & x_s & & \\ \hline 1 & | & -c & & 0 & | & 0 \\ & | & A & & I & | & b \\ \hline 1 & | & c_B B^{-1} A - c & & c_B B^{-1} & | & c_B B^{-1} b \\ & | & B^{-1} A & & B^{-1} & | & B^{-1} b \end{array}$$

5. Simplexmetodens teori – p.7/15

Eksempler fra Wyndor

$$B^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = I$$

$$c_B B^{-1} = [0 \ 5 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \\ = [0 \ 3/2 \ 1]$$

5. Simplexmetodens teori – p.8/15

Flere eksempler fra Wyndor

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36$$

Brug af matrixformulering

$$\begin{array}{c|cc|c} Z & x & x_s & \\ \hline 1 & c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \\ \hline & B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \end{array}$$

Det mest negative element i $c_B B^{-1}A - c$ og $c_B B^{-1}$ bestemmer den indkommende variabel x_k

Den mindste kvotient mellem $B^{-1}b$ og de positive koefficienter i $B^{-1}A_k$ bestemmer pivotrækken r og dermed den udgående variabel

B^{-1} opdateres lettest ved pivotering
 $B^{-1}A_k B^{-1} \rightarrow u_r B_{opd}^{-1}$

5.4. Revideret Simplex

1. $x_B = x_s = b$, $c_B = 0$, $B^{-1} = I$
2. find k (ingen negative: stop)
3. find r
4. opdatér x_B , c_B og B^{-1} , gå til step 2.

Fordele fremfor almindelig Simplex

- færre beregninger
- mindre krav til hukommelsen
- kontrol af afrundingsfejl

5.3. Fundamental indsigt

$$\begin{array}{c|cccc|c} Z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & -3 & -5 & & & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & & & 4 \\ & 0 & 2 & & 1 & & 12 \\ & 3 & 2 & & & 1 & 18 \\ & \vdots & & & & & \\ 1 & & & & 3/2 & 1 & 36 \\ \hline & & & 1 & 1/3 & -1/3 & 2 \\ & & 1 & & 1/2 & 0 & 6 \\ & 1 & & & -1/3 & 1/3 & 2 \end{array}$$

Matrixformulering

Z	x	x_s	
1	$-c$	0	0
	A	I	b
1	$c_B B^{-1} A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1} b$
	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$
1	$y^* A - c$	y^*	$y^* b$
	$S^* A$	S^*	$S^* b$

første tableau

vilkårligt tableau

sidste tableau

I det optimale tableau aflæses under slackvariablerne y^* over stregen og S^* under stregen

Fra første til sidste tableau

y^* og S^* viser nettovirkningen af alle de rækkeoperationer der førte fra første til sidste tableau

$$S^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$y^* = [0 \quad 3/2 \quad 1]$$

y^* er skyggepriserne

$$Z^* = y^* b = \sum y_i^* b_i \rightarrow \partial Z^* / \partial b_i = y_i^*$$

Følsomhedsanalyse

fx. $b_2 = 12$ ændres til $b_2 = 13$: $\Delta b_2 = 1$

$$x_B^* = S^* b \rightarrow$$

$$S^* \Delta b = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3^* \\ x_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 13/2 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

(Hvad med andre Δb_2 ? fx. $\Delta b_2 = 8$)

$$\Delta Z^* = y^* \Delta b = y_2^* \Delta b_2 = 3/2 \cdot 1 = 3/2$$

$$Z^* = 36 + 3/2 = 75/2$$