

## 4. Simplexmetoden

### 4.1. Geometrisk hovedindhold

#### 4.2. Opstart

#### 4.3. Algebraisk form

#### 4.4. Tableauform

#### 4.5. Løse ender

### 4.6. Kunstige variable og tofasemetoden

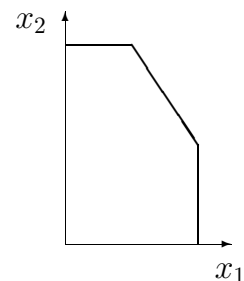
### 4.7. Postoptimale analyser

Henrik Juel

OR, DTU Management

4. Simplexmetoden – p.1/31

## 4.1. Geometrisk hovedindhold



Simplexmetoden starter i (0,0)

$Z$ 's stigningstakt bestemmes for kanterne

Næste løsning ligger for enden af bedste kant

Metoden stopper når alle stigningstakter er negative

4. Simplexmetoden – p.2/31

## 4.2. Opstart

Begrænsningerne ændres til ligninger ved at indføre slackvariable

$$x_1 \leq 4$$

$$x_3 \equiv 4 - x_1$$

$$x_1 \leq 4 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 4 \text{ og } x_3 \geq 0$$

$$\text{max. } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{uht. } \quad x_1 \quad + x_3 \quad = 4$$

$$\quad 2x_2 \quad + x_4 \quad = 12$$

$$\quad 3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 = 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

4. Simplexmetoden – p.3/31

## Basisløsning

Basisløsning, f.eks. (6,0,-2,12,0)

Mulig basisløsning, f.eks. (2,6,2,0,0) med basisvariable  $x_1, x_2, x_3$  og ikkebasisvariable  $x_4, x_5$

Mulige basisløsninger svarer til mulige hjørneløsninger

$$\text{max. } Z$$

$$\text{uht. } Z - 3x_1 - 5x_2 \quad = 0$$

$$\quad x_1 \quad + x_3 \quad = 4$$

$$\quad 2x_2 \quad + x_4 \quad = 12$$

$$\quad 3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 = 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

4. Simplexmetoden – p.4/31

### 4.3. Algebraisk form

Ikkebasisvariabler:  $x_1 = x_2 = 0$

Værdierne af  $Z$  og basisvariablerne kan aflæses

$$\begin{aligned} Z - 3x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 4 \\ \quad \quad \quad 2x_2 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \end{aligned}$$

Indkommende variabel:  $x_2$

Udgående variabel:  $x_4$

### Algebraisk form fortsat

$$\begin{aligned} Z - 3x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 4 \\ \quad \quad \quad 2x_2 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z - 3x_1 + 5/2x_4 &= 30 \\ x_1 + x_3 &= 4 \\ \quad \quad \quad x_2 + 1/2x_4 &= 6 \\ \quad \quad \quad 3x_1 - x_4 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

$x_1$  ind

$x_5$  ud

### Algebraisk form fortsat igenigen

$$\begin{aligned} Z - 3x_1 + 5/2x_4 &= 30 \\ x_1 + x_3 &= 4 \\ \quad \quad \quad x_2 + 1/2x_4 &= 6 \\ \quad \quad \quad 3x_1 - x_4 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + 3/2x_4 + x_5 &= 36 \\ x_3 + 1/3x_4 - 1/3x_5 &= 2 \\ \quad \quad \quad x_2 + 1/2x_4 &= 6 \\ \quad \quad \quad x_1 - 1/3x_4 + 1/3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Optimum:  $Z^* = 36$ ,  $x^* = (2, 6, 2, 0, 0)$

### 4.4. Tableauform

Basisvariabler antydes med et enkelt 1 i søjlen  
Rækkenummer udelades

| $Z$             | $x_1$ | $x_2$           | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |    |
|-----------------|-------|-----------------|-------|-------|-------|----|
| 1               | -3    | -5              |       |       |       | 0  |
|                 | 1     | 0               | 1     |       |       | 4  |
|                 | 0     | $\Rightarrow 2$ |       | 1     |       | 12 |
|                 | 3     | 2               |       |       | 1     | 18 |
| 1               | -3    |                 |       | 5/2   |       | 30 |
|                 | 1     |                 | 1     | 0     |       | 4  |
|                 | 0     | 1               |       | 1/2   |       | 6  |
| $\Rightarrow 3$ |       |                 |       | -1    | 1     | 6  |

## Tableauform fortsat

| $Z$ | $x_1$           | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |    |
|-----|-----------------|-------|-------|-------|-------|----|
| 1   | -3              |       |       | 5/2   |       | 30 |
|     | 1               |       | 1     | 0     |       | 4  |
|     | 0               | 1     |       | 1/2   |       | 6  |
|     | $\Rightarrow 3$ |       |       | -1    | 1     | 6  |
| 1   |                 |       |       | 3/2   | 1     | 36 |
|     |                 |       | 1     | 1/3   | -1/3  | 2  |
|     |                 | 1     |       | 1/2   | 0     | 6  |
|     | 1               |       |       | -1/3  | 1/3   | 2  |

## Simplexmetoden, fase 2

1. Opskriv første tableau
2. Er alle koefficienter i række (0) ikke-negative?  
ja: optimum, stop  
nej: mest negativ  $\rightarrow$  indkommende
3. Udfør kvotienttest (positiv nævner)  
mindste kvotient  $\rightarrow$  udgående
4. Pivotér, gå til step 2

## 4.5. Løse ender

Flere mest negative koefficienter i række (0)

Flere mindste kvotienter

Degeneration: en basisvariabel har værdien 0

Ingen positive koefficienter i pivotsøjlen:

Ubegrænset gode løsninger

Optimalt tableau med 0 i række (0):

Flere optimale løsninger

## Flere optimale løsninger

Wyndor med  $Z = 3x_1 + 2x_2$

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$           | $x_4$             | $x_5$ |    |
|-----|-------|-------|-----------------|-------------------|-------|----|
| 1   |       |       | 0               |                   | 1     | 18 |
|     | 1     |       | 1               |                   | 0     | 4  |
|     |       |       | $\Rightarrow 3$ | 1                 | -1    | 6  |
|     |       | 1     | -3/2            |                   | 1/2   | 3  |
| 1   |       |       |                 | 0                 | 1     | 18 |
|     | 1     |       |                 | -1/3              | 1/3   | 2  |
|     |       |       | 1               | $\Rightarrow 1/3$ | -1/3  | 2  |
|     |       | 1     |                 | 1/2               | 0     | 6  |

## Alle optimale løsninger

Optimale basisløsninger:

$$x^* = (x_1, x_2) = (4, 3)$$

$$x^* = (2, 6)$$

Alle optimale løsninger:

$$x^* = w_1(4, 3) + w_2(2, 6)$$

for alle  $w_1, w_2$  med  $w_1 + w_2 = 1, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$

## 4.6. Kunstige variabler

Strålebehandling (fra s. 44)

$$\text{min. } Z = .4x_1 + .5x_2$$

$$\text{uht. } .3x_1 + .1x_2 \leq 2.7$$

$$.5x_1 + .5x_2 = 6$$

$$.6x_1 + .4x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

slack  $x_3$ , surplus  $x_5$ , kunstige  $\bar{x}_4$  og  $\bar{x}_6$

alle  $x$ -variabler ikke-negative

$$.3x_1 + .1x_2 + x_3 = 2.7$$

$$.5x_1 + .5x_2 + \bar{x}_4 = 6$$

$$.6x_1 + .4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 = 6$$

## Tofasemetoden

I **fase 1** minimeres summen af de kunstige variabler:

$$\text{min. } \bar{Z} = \bar{x}_4 + \bar{x}_6 \text{ eller}$$

$$\text{max. } -\bar{Z} \text{ uht. } -\bar{Z} + \bar{x}_4 + \bar{x}_6 = 0$$

(husk at etablere et legitimt Simplextableau)

Når  $\bar{Z} = 0$  har vi en basis af ikkekunstige variabler

I **fase 2** optimeres den rigtige målfunktion:

$$\text{min. } Z = .4x_1 + .5x_2 \text{ eller}$$

$$\text{max. } -Z \text{ uht. } -Z + .4x_1 + .5x_2 = 0$$

## Fase 1: legitimt tableau

| $\bar{Z}$ | $x_1$  | $x_2$ | $x_3$ | $\bar{x}_4$ | $x_5$ | $\bar{x}_6$ |       |
|-----------|--------|-------|-------|-------------|-------|-------------|-------|
| -1        |        |       |       | 1           |       | 1           |       |
|           | 3/10   | 1/10  | 1     |             |       |             | 27/10 |
|           | 1/2    | 1/2   |       | → 1         |       |             | 6     |
|           | 3/5    | 2/5   |       |             | -1    | → 1         | 6     |
| -1        | -11/10 | -9/10 |       |             | 1     |             | -12   |
|           | ⇒ 3/10 | 1/10  | 1     |             | 0     |             | 27/10 |
|           | 1/2    | 1/2   |       | 1           | 0     |             | 6     |
|           | 3/5    | 2/5   |       |             | -1    | 1           | 6     |

## Fase 1: 1. iteration

| $\bar{Z}$ | $x_1$              | $x_2$             | $x_3$ | $\bar{x}_4$ | $x_5$ | $\bar{x}_6$ |        |
|-----------|--------------------|-------------------|-------|-------------|-------|-------------|--------|
| -1        | -11/10             | -9/10             |       |             | 1     |             | -12    |
|           | $\Rightarrow 3/10$ | 1/10              | 1     |             | 0     |             | 27/10  |
|           | 1/2                | 1/2               |       | 1           | 0     |             | 6      |
|           | 3/5                | 2/5               |       |             | -1    | 1           | 6      |
| -1        |                    | -8/15             | 11/3  |             | 1     |             | -21/10 |
|           | 1                  | 1/3               | 10/3  |             | 0     |             | 9      |
|           |                    | 1/3               | -5/3  | 1           | 0     |             | 3/2    |
|           |                    | $\Rightarrow 1/5$ | -2    |             | -1    | 1           | 3/5    |

4. Simplexmetoden – p.17/31

## Fase 1: 2. iteration

| $\bar{Z}$ | $x_1$ | $x_2$             | $x_3$ | $\bar{x}_4$ | $x_5$             | $\bar{x}_6$ |        |
|-----------|-------|-------------------|-------|-------------|-------------------|-------------|--------|
| -1        |       | -8/15             | 11/3  |             | 1                 |             | -21/10 |
|           | 1     | 1/3               | 10/3  |             | 0                 |             | 9      |
|           |       | 1/3               | -5/3  | 1           | 0                 |             | 3/2    |
|           |       | $\Rightarrow 1/5$ | -2    |             | -1                | 1           | 3/5    |
| -1        |       |                   | -5/3  |             | -5/3              | 8/3         | -1/2   |
|           | 1     |                   | 20/3  |             | 5/3               | -5/3        | 8      |
|           |       |                   | 5/3   | 1           | $\Rightarrow 5/3$ | -5/3        | 1/2    |
|           |       | 1                 | -10   |             | -5                | 5           | 3      |

4. Simplexmetoden – p.18/31

## Fase 1: 3. iteration

| $\bar{Z}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\bar{x}_4$ | $x_5$             | $\bar{x}_6$ |      |
|-----------|-------|-------|-------|-------------|-------------------|-------------|------|
| -1        |       |       | -5/3  |             | -5/3              | 8/3         | -1/2 |
|           | 1     |       | 20/3  |             | 5/3               | -5/3        | 8    |
|           |       |       | 5/3   | 1           | $\Rightarrow 5/3$ | -5/3        | 1/2  |
|           |       | 1     | -10   |             | -5                | 5           | 3    |
| -1        |       |       | 0     | 1           |                   | 1           | 0    |
|           | 1     |       | 5     | -1          |                   | 0           | 15/2 |
|           |       |       | 1     | 3/5         | 1                 | -1          | 3/10 |
|           |       | 1     | -5    | 3           |                   | 0           | 9/2  |

4. Simplexmetoden – p.19/31

## Efter fase 1

1. De kunstige variabler droppes
2. Den rigtige målfunktion indlægges
3. Tableaudelen under strengen kopieres fra fase 1
4. Et legitimt Simplextableau etableres
5. Simplexiterationer til optimum (her 0 iterationer)

4. Simplexmetoden – p.20/31

## Fase 2

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_5$ |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| -1  | 2/5   | 1/2   |       |       | 0     |
|     | → 1   |       | 5     |       | 15/2  |
|     |       |       | 1     | 1     | 3/10  |
|     |       | → 1   | -5    |       | 9/2   |
| -1  |       |       | 1/2   |       | -21/4 |
|     | 1     |       | 5     |       | 15/2  |
|     |       |       | 1     | 1     | 3/10  |
|     |       | 1     | -5    |       | 9/2   |

$$Z^* = 5.25, x_1^* = 7.5, x_2^* = 4.5$$

4. Simplexmetoden – p.21/31

## Fase 1 kan 'mislykkes'

Strålebehandling med 2.7 → 1.8

| $\bar{Z}$ | $x_1$  | $x_2$ | $x_3$ | $\bar{x}_4$ | $x_5$ | $\bar{x}_6$ |       |
|-----------|--------|-------|-------|-------------|-------|-------------|-------|
| -1        | -11/10 | -9/10 |       |             | 1     |             | -12   |
|           | ⇒ 3/10 | 1/10  | 1     |             | 0     |             | 9/5   |
|           | 1/2    | 1/2   |       | 1           | 0     |             | 6     |
|           | 3/5    | 2/5   |       |             | -1    | 1           | 6     |
| -1        |        | -8/15 | 11/3  |             | 1     |             | -27/5 |
|           | 1      | 1/3   | 10/3  |             | 0     |             | 6     |
|           |        | ⇒ 1/3 | -5/3  | 1           | 0     |             | 3     |
|           |        | 1/5   | -2    |             | -1    | 1           | 12/5  |

4. Simplexmetoden – p.22/31

## Ingen mulig løsning

| $\bar{Z}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\bar{x}_4$ | $x_5$ | $\bar{x}_6$ |       |
|-----------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------------|-------|
| -1        |       | -8/15 | 11/3  |             | 1     |             | -27/5 |
|           | 1     | 1/3   | 10/3  |             | 0     |             | 6     |
|           |       | ⇒ 1/3 | -5/3  | 1           | 0     |             | 3     |
|           |       | 1/5   | -2    |             | -1    | 1           | 12/5  |
| -1        |       |       | 1     | 8/5         | 1     |             | -3/5  |
|           | 1     |       | 5     | -1          | 0     |             | 3     |
|           |       | 1     | -5    | 3           | 0     |             | 9     |
|           |       |       | -1    | -3/5        | -1    | 1           | 3/5   |

$$\bar{Z}^* = 3/5 > 0 \Rightarrow \text{ingen mulig løsning}$$

4. Simplexmetoden – p.23/31

## Andre nedre grænser

$$x_1 \geq -9$$

$$x'_1 \equiv x_1 + 9 \geq 0$$

Indsæt  $x_1 = x'_1 - 9$  overalt, løs med  $x'_1 \geq 0$

$x_2 > -\infty$  dvs.  $x_2$  er en fri variabel

Indsæt  $x_2 = x_2^+ - x_2^-$  overalt, løs med  $x_2^+, x_2^- \geq 0$

$x_2^+, x_2^-$  er aldrig begge i basis

4. Simplexmetoden – p.24/31

## Simplexmetoden. Fase 0

- beslutningsvariabler  $\rightarrow$  ikkenegative variabler
- begrænsninger  $\rightarrow$  ligninger  
vha. slack- og surplusvariabler
- kunstige variabler  $\bar{x}_j$

## Simplexmetoden. Fase 1

- $\bar{Z} = \sum \bar{x}_j$  skal minimeres
- et legitimt simplextableau etableres
- simplexiterationer
  1. indkommende variabel
  2. udgående variabel
  3. pivotering
- hvis  $\bar{Z}^* > 0$ : ingen mulig løsning, stop

## Simplexmetoden. Fase 2

- $Z$  skal optimeres
- et legitimt simplextableau etableres
- simplexiterationer
  1. indkommende variabel
  2. udgående variabel
  3. pivotering
- hvis den indkommende variabel kun har ikkepositive koefficienter, har modellen ubegrænset gode løsninger, stop
- ellers: optimal løsning bestemmes, stop

## Ressourceallokeringsmodel

- Fase 0: tilføj slackvariabler
- Fase 1: overspringes
- Fase 2: simplexiterationer

## 4.7. Postoptimale analyser

- Reoptimering
- Skyggepriser
- Følsomhedsanalyse
- Parametrisk programmering

## Skyggepriser

I et ressourceallokeringsproblem er skyggeprisen for ressource  $i$ :  $\Delta Z^* / \Delta b_i$  forudsat ændringen er lille nok

Skyggeprisen fås fra det optimale tableau som koefficienten i række (0) til slackvariablen for ressource  $i$

Ikkebindende ressourcer har en skyggepris på 0

## Skyggepriser fortsat

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$  | $x_5$  |            |
|-----|-------|-------|-------|--------|--------|------------|
| 1   | -3    | -5    |       |        |        | 0          |
|     | 1     | 0     | 1     |        |        | $4 = b_1$  |
|     | 0     | 2     |       | 1      |        | $12 = b_2$ |
|     | 3     | 2     |       |        | 1      | $18 = b_3$ |
| 1   |       |       | $3/2$ |        | 1      | $36 = Z^*$ |
|     |       |       | 1     | $1/3$  | $-1/3$ | 2          |
|     |       | 1     |       | $1/2$  | 0      | 6          |
|     | 1     |       |       | $-1/3$ | $1/3$  | 2          |

$$\Delta Z^* / \Delta b_1 = 0, \Delta Z^* / \Delta b_2 = 3/2, \Delta Z^* / \Delta b_3 = 1$$