

3. Introduktion til LP

3.1. Prototypeeksempel: Wyndor

3.2. LP-modellen

3.3. Antagelser for LP

3.4. Flere eksempler

Henrik Juel

OR, DTU Management

3. Introduktion til LP – p.1/19

3.1. Wyndor: problem

2 produkter kræver tid på 3 fabrikker

	1	2	kap.(h/uge)
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
DB	3	5	← k\$/enh.

- Beslutningsvariabler
- Målfunktion
- Begrænsninger
- Betingelser

3. Introduktion til LP – p.2/19

Wyndor: model

x_1 = produktion af produkt 1 (enh./uge)

x_2 = produktion af produkt 2 (enh./uge)

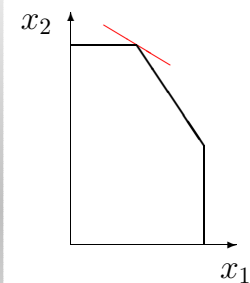
Z = samlet dækningsbidrag (k\$/uge)

$$\max. Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{uht.} \quad \begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Introduktion til LP – p.3/19

Wyndor: løsning



$$x_1^* = 2 \text{ enh./uge}$$

$$x_2^* = 6 \text{ enh./uge}$$

$$Z^* = 36 \text{ k\$/uge}$$

3. Introduktion til LP – p.4/19

3.2. LP-modellen

Allokering af m ressourcer til n aktiviteter

Beslutningsvariabler: x_j = niveau for aktivitet j

Givne parametre:

c_j = nytte pr. enhed af aktivitet j

b_i = til rådighed af ressource i

a_{ij} = forbrug af ressource i pr. enhed af aktivitet j

Målfunktionsvariabel: Z

max. $Z = \sum_j c_j x_j$ målfunktion

uht. $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \forall i$ begrænsninger

samt $x_j \geq 0 \forall j$ ikkenegativitetsbetingelser

Afvigelser fra standardformen

- minimering
- $\geq$ begrænsninger
- $=$ begrænsninger
- frie beslutningsvariabler

Terminologi:

- mulig løsning
- muligt område
- optimal løsning
- mulig hjørneløsning (CPF)

3.3. Antagelser for LP

1. Proportionalitet og additivitet
2. Delelighed
3. Sikkerhed

Hvis antagelserne ikke gælder:

1. Ikke-lineær programmering
2. Heltalsprogrammering
3. Stokastisk programmering

Matematisk programmering

3.4. Flere eksempler

- s. 43 Strålebehandling
- s. 45 Kibbutzplanlægning
- s. 49 Luftforurening
- s. 51 Genbrugsvirksomhed
- s. 55 Personaleplanlægning
- s. 58 Distributionsnetværk
- s. 86 Case studier

s. 43 Strålebehandling

En svulst bestråles med 2 strålekilder

	1	2	krav (kR)
Sundt væv	.4	.5	
Følsomt væv	.3	.1	≤ 2.7
Svulst	.5	.5	$= 6$
Svulst-centrum	.6	.4	≥ 6

Beslutningsvariabler

Målfunktion

Begrænsninger

3. Introduktion til LP – p.9/19

Strålebehandling: model

x_j = intensitet af stråle j (kR), $j = 1, 2$

Z = bestråling af sundt væv (kR)

$$\min. Z = .4x_1 + .5x_2$$

$$\text{uht. } .3x_1 + .1x_2 \leq 2.7$$

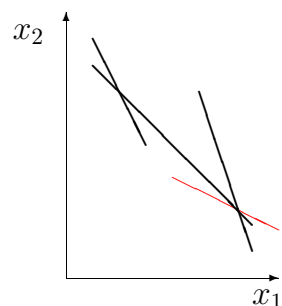
$$.5x_1 + .5x_2 = 6$$

$$.6x_1 + .4x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3. Introduktion til LP – p.10/19

Strålebehandling: løsning



$$x_1^* = 7.5 \text{ kR}$$

$$x_2^* = 4.5 \text{ kR}$$

$$Z^* = 5.25 \text{ kR}$$

3. Introduktion til LP – p.11/19

s. 45 Kibbutzplanlægning

Kibbutz	1	2	3
Areal (A)	400	600	300
Vandtildeling (A·ft)	600	800	375

	Arealtild.(A)	Vandforbrug(ft)	DB(\$/A)
Roer	600	3	1000
Bomuld	500	2	750
Durra	325	1	250

Arealudnyttelsen skal være ens for de tre kibbutzer

3. Introduktion til LP – p.12/19

Kibbutzplanlægning: model

x_{ij} = areal med afgrøde i på kibbutz j , (A)

$i = R, B, D \quad j = 1, 2, 3$

max. $1000 \sum_j x_{Rj} + 750 \sum_j x_{Bj} + 250 \sum_j x_{Dj}$

uht.

$\sum_i x_{i1} \leq 400, \sum_i x_{i2} \leq 600$ osv. kibbutzareal

$3x_{R1} + 2x_{B1} + 1x_{D1} \leq 600$ osv. vand

$\sum_j x_{Rj} \leq 600, \sum_j x_{Bj} \leq 500$ osv. afgrødeareal

$\sum_i x_{i1}/400 = \sum_i x_{i2}/600 = \sum_i x_{i3}/300$ arealudn.

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$

Kibbutzplanlægning: løsning

$Z^* = 633$ k\$

x^*	1	2	3
R	133	100	25
B	100	250	150
D	0	0	0

Arealudnyttelsen er 7/12

Vandbegrænsningerne er bindende

Bomuldsbegrænsningen er bindende

s. 51 Genbrugsvirksomhed

Fire typer affald behandles,
og forarbejdes til tre produkter

	1	2	3	4	omk.	pris
A	$\leq .3$	$\geq .4$	$\leq .5$	$= .2$	3	8.5
B	$\leq .5$	$\geq .1$		$= .1$	2.5	7
C	$\leq .7$				2	5.5
tilførsel	3000	2000	4000	1000		
beh.omk.	3	6	4	5	\$/lb	

Mindst halvdelen af hver type skal behandles

De samlede beh.omk. skal være 30000 \$/uge

Genbrugsvirksomhed: model

x_{ij} = mængde af type j i produkt i , lb/uge

$i = A, B, C \quad j = 1, 2, 3, 4$

max. $5.5 \sum_j x_{Aj} + 4.5 \sum_j x_{Bj} + 3.5 \sum_j x_{Cj}$

uht.

$x_{A1} \leq .3 \sum_j x_{Aj}, x_{A2} \geq .4 \sum_j x_{Aj}$ osv. indhold

$1500 \leq \sum_i x_{i1} \leq 3000$ osv. behandling

$3 \sum_i x_{i1} + 6 \sum_i x_{i2} + 4 \sum_i x_{i3} + 5 \sum_i x_{i4} = 30000$

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$

Genbrugsvirksomhed: løsning

$$Z^* = 35109 \text{ \$/uge}$$

x^*	1	2	3	4	sum
A	412	860	447	430	2149
B	2588	517	1553	517	5175
C	0	0	0	0	0
sum	3000	1377	2000	947	

Tilførsel af 1 og behandling af 3 er bindende
Indhold af 1 og 2 i B og 2 i A er bindende

s. 55 Personaleplanlægning

interval	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
min. bem.	48	79	65	87	64

interval	16-18	18-20	20-22	22-24	0-6
min. bem.	73	82	43	53	15

skift	1	2	3	4	5
arbejdstid	6-14	8-16	12-20	16-24	22-6
dagløn, \\$/mand	170	160	175	180	195

Personaleplanl.: model og løsn.

x_j = antal mand på skift j , $j = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\text{min. } 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5$$

uht.

$$x_1 \geq 48, x_1 + x_2 \geq 79, x_1 + x_2 \geq 65,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 87, x_2 + x_3 \geq 64, x_3 + x_4 \geq 73,$$

$$x_3 + x_4 \geq 82, x_4 \geq 43, x_4 + x_5 \geq 52, x_5 \geq 15$$

$$x_j \geq 0 \text{ (og heltallig)} \forall j$$

$$Z^* = 30610 \text{ \$/dag}$$

$$x_1^* = 48, x_2^* = 31, x_3^* = 39, x_4^* = 43, x_5^* = 15$$

Intervall. 10-12, 16-18 er redundante og ikkebindende

Intervallerne 12-14, 14-16, 22-24 er ikkebindende