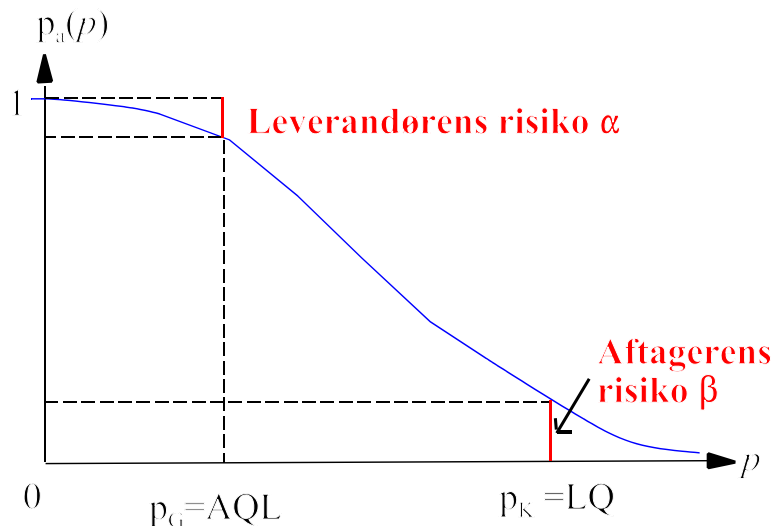


# VIDEREGÅENDE STATISTIK III

## Ikke parametriske test Statistisk Kvalitetsstyring (Statgraphics)



DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET  
6. udgave 2004

## FORORD

Dette notat kan læses på baggrund af en statistisk viden svarende til lærebogen “M. Oddershede Larsen : Statistiske grundbegreber”.

Notatet er bygget op således, at de væsentligste begreber søges forklaret anskueligt og ved hjælp af et stort antal eksempler.

Det forudsættes, at man har en lommeregner med de statistiske fordelinger indlagt. Der vil derfor i ringe omfang blive benyttet statistiske tabeller.

I “Statistiske grundbegreber” er der i appendix A en “brugsanvisning” på hvorledes dette kan gøres med bl.a lommeregnerne TI-83 og HP48G.

Sidst i hvert kapitel findes en oversigt over de vigtigste formler samt nogle opgaver. En facitliste til opgaverne findes bagerst i notatet.

Fordelen ved direkte at bruge formlerne til løsning af eksemplerne er, at man derved opnår en større forståelse. De mere avancerede programmer bliver let en “sort” kasse, hvor der på mystisk vis dukker et facit op, som man ikke rigtig har noget forhold til.

Imidlertid er det naturligvis også vigtigt, at man kender de muligheder mere avancerede regnemidler tilbyder.

Lommeregneren TI-89 er en god “statistiklommeregner, så i slutningen af hvert kapitel bliver de samme eksempler som i hovedteksten regnet ved benyttelse af dens indbyggede programmer.

Ved behandling af store datamængder og ved mere regneteknisk komplicerede analyser er en lommeregner som TI - 89 ikke nok. Her er det nødvendigt at benytte en PC med et passende statistisk software. I dette notat er anvendt statistikprogrammet “Statgraphics”, således, at alle eksemplerne efter hvert kapitel også er regnet med dette program.

Der findes mange andre udmærkede statistikprogrammer. I et ganske tilsvarende notat (som kan findes på nedenstående adresse) er Statgraphics eksemplerne således udskiftet med SAS-JUMP. Udskrifterne fra sådanne statistikprogrammer afviger ikke væsentligt fra hinanden, så skulle man i undervisningen benytte et tredje statistikprogram, kan de studerende uden vanskelighed på basis af disse udskrifter tolke egne udskrifter.

Data foreligger ofte som en fil i et regneark som eksempelvis Excel. Disse regneark har indbygget en del statistik bl.a. de almindeligste testfunktioner.

I notatet “Videregående statistik regnet med Excel” er en række af disse statistiske muligheder gennemgået.

Andre notater i samme “serie” er noterne

Videregående Statistik I: Sammenligning af to eller flere kvalitative variable

Videregående Statistik II: Regressionsanalyse

Noterne (som både findes i en Statgraphics og en SAS-JUMP version) et søgt udarbejdet, så de kan læses uafhængigt af hinanden.

Alle de nævnte noter kan i pdf-format findes på adressen [www.larsen-net.dk](http://www.larsen-net.dk)

August 2006

Mogens Oddershede Larsen.

# INDHOLD

## 14 ANTALSTABELLER

|                     |   |
|---------------------|---|
| 14.1 Indledning     | 1 |
| 14.2 En -vejs tabel | 2 |
| 14.3 To -vejs tabel | 4 |

### Oversigter

|                                                                   |   |
|-------------------------------------------------------------------|---|
| 14.1. $\chi^2$ - test af hypotese om multinomiale sandsynligheder | 6 |
| 14.2. $\chi^2$ - test af hypotese i 2 - vejs tabel                | 7 |

### Statistikprogrammer

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 14A Eksempler regnet med TI-89        | 8  |
| 14B Eksempler regnet med Statgraphics | 10 |

|         |    |
|---------|----|
| Opgaver | 12 |
|---------|----|

## 15 RANGTEST

|                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 15.1 Indledning                                                                    | 15 |
| 15.2 Wilcoxon's rangtest for 1 og 2 variable                                       | 16 |
| 15.2.1 Wilcoxon's rangtest for 1 variabel (lille stikprøve $n \leq 20$ )           | 16 |
| 15.2.2 Wilcoxon's rangtest for 1 variabel (stor stikprøve $n > 20$ )               | 17 |
| 15.2.3 Wilcoxon's rangtest for parvise observationer                               | 18 |
| 15.2.4 Wilcoxon's rangtest for 2 uafhængige stikprøver (små stikprøver $\leq 10$ ) | 19 |
| 15.2.5 Wilcoxon's rangtest for 2 uafhængige stikprøver (store stikprøver $> 10$ )  | 20 |
| 15.3 Kruskal - Wallis test for flere uafhængige variable                           | 21 |
| 15.4 Friedmann's test for et randomiseret blokforsøg                               | 22 |
| 15.5 Spearman's korrelationskoefficient                                            | 23 |

### Oversigter

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| 15.1. Kruskal - Wallis test for to eller flere statistiske variable | 25 |
| 15.2. Friedmann's test for randomiserede forsøg                     | 26 |

### Statistikprogrammer

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 15A Eksempler regnet med Statgraphics | 27 |
|---------------------------------------|----|

|         |    |
|---------|----|
| Opgaver | 31 |
|---------|----|

## 16 STATISTISK KVALITETSSTYRING

|                         |                                             |    |
|-------------------------|---------------------------------------------|----|
| 16.1                    | Indledning                                  | 36 |
| 16.2                    | Statistisk proceskontrol                    | 37 |
| 16.2.1                  | Indledning                                  | 37 |
| 16.2.2                  | Opbygning og alarmkriterier for kontrolkort | 38 |
| 16.2.3                  | Kontrolkortanalyse                          | 41 |
| 16.2.3.1                | Procesvariablen $X$ er kontinuert           | 42 |
| 16.2.3.2                | Procesvariablen $X$ er diskret              | 46 |
| 16.2.3.2                | $X$ er binomialfordelt                      | 46 |
| 16.2.3.3                | $X$ er Poissonfordelt                       | 48 |
| 16.2.4                  | Tolerancegrænser og kapabilitet             | 49 |
| 16.3                    | Statistisk godkendelseskontrol              | 50 |
| 16.3.1                  | Indledning                                  | 50 |
| 16.3.2                  | Enkelt stikprøveplan                        | 51 |
| 16.3.3                  | Rektificerende kontrol                      | 54 |
| 16.3.4                  | Dobbelt stikprøveplan                       | 55 |
| 16.3.4.1                | Bestemmelse af en dobbelt stikprøveplan     | 56 |
| <b>Oversigt</b>         |                                             |    |
| 16.1.                   | Kontrolkort.                                | 59 |
| <b>Statistikprogram</b> |                                             |    |
| 16A.                    | Eksempler regnet med Statgraphics           | 61 |
| Opgaver                 |                                             | 68 |
| <b>TABELLER</b>         |                                             | 73 |
| <b>FACITLISTE</b>       |                                             | 79 |
| <b>STIKORD</b>          |                                             | 81 |

# 14 ANTALSTABELLER

## 14.1. Indledning

Vi vil i dette kapitel betragte observationer, som bliver katalogiseret i klasser (categorical data). Et eksempel herpå er følgende:

### Eksempel 14.1.(antalstabel)

*Et ministerium planlægger en oplysningskampagne om de fysiske og psykiske virkninger af at ryge hash. Før kampagnen viste en undersøgelse at 7% af indbyggerne ønskede at hash blev legaliseret, 65% at man beholde det nuværende forholdsvis liberale straffepolitik, 18% ønskede strengere straffe og 10% havde ingen mening. Efter kampagnen spurgte man 500 personer (repræsentativt udvalgt), og svarene fremgik af følgende tabel.*

|                 | Legalisering | Efter eksisterende lov | Strengere straf | Ingen mening |
|-----------------|--------------|------------------------|-----------------|--------------|
| Efter kampagnen | 39           | 336                    | 99              | 26           |

Kan man på dette grundlag vise på et signifikansniveau på  $\alpha = 0.01$ , at kampagnen har betydet en ændring af folks mening? ◆

Af central betydning for testning af sådanne spørgsmål er begrebet “multinomial eksperiment”.

#### Definition af et multinomialt eksperiment.

- 1) Lad et eksperiment have  $k$  mulige udfald. Disse udfald kaldes “klasser”, “kategorier” eller “celler”
- 2) Eksperimentet gentages  $n$  gange uafhængigt af hinanden.
- 3) Sandsynligheden for de  $k$  udfald er  $p_1, p_2, \dots, p_k$  (hvor  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ ) er de samme ved de  $n$  gentagelser.
- 4) De statistiske variable der er af interesse er antallet  $n_1, n_2, \dots, n_k$  i hver af de  $k$  klasser.

Betragter vi eksempel 14.1 ses, at betingelserne er opfyldt:

Eksperimentet består i tilfældigt at udtage  $n = 500$  personer af en stor population og spørge dem om strafferammen for besiddelse af hash

- 1) Udfaldene er svar på spørgsmålet, og der er  $k = 4$  (og kun 4) svarmuligheder (4 klasser).
- 2) Resultatet af hvad en person svarer vil være uafhængigt af hvad de øvrige svarer.
- 3) Sandsynligheden for udfaldene i de 4 klasser vil være  $p_1, p_2, p_3$  og  $p_4$ , hvor disse sandsynligheder er ukendte.
- 4) De statistiske variable  $X_i$  er antal personer blandt 500 som har en af de  $i$  meninger om straffen for hash.

Den test der anvendes kaldes en  $\chi^2$  – test, og er beskrevet i oversigt 14.1 og 14.2. Kort beskrevet bygger testen på, at man under forudsætning om at nulhypotesen er sand for hver klasse beregner en forventet værdi. En forudsætning for denne test er, ingen af klasserne har en forventet værdi under 1, og at mindst 80% af klasserne har en forventet værdi over 5.

Metoden belyses i de følgende eksempler.

## 14.2. En-vejs tabel

Den anvendte  $\chi^2$  - test beskrives i oversigt 14.1.

**Eksempel 14.1.**(fortsat)

Kan man på det i eksempel 14.1 angivne grundlag vise på et signifikansniveau på  $\alpha = 0.01$ , at kampagnen har betydet en ændring af folks mening?

**Løsning:**

Lad

$X_1$ = antal personer blandt 500 , der går ind for legalisering.  $P(X_1) = p_1$ .

$X_2$ = antal personer blandt 500 , der går ind for den nuværende straffepolitik.  $P(X_2) = p_2$ .

$X_3$ = antal personer blandt 500 , der går ind for en strengere straf.  $P(X_3) = p_3$ .

$X_4$ = antal personer blandt 500 , der ingen mening har.  $P(X_4) = p_4$ .

Vi ønsker at teste nulhypotesen

$$H_0: p_1 = 0.07, p_2 = 0.65, p_3 = 0.18, p_4 = 0.10$$

mod den alternative

$H$ : "Mindst én af sandsynlighederne afviger fra den angivne værdi i nulhypotesen."

Vi beregner nu de forventede værdier, forudsat nulhypotesen er sand.

Resultatet opstilles i det følgende skema:

| nr    | 1                           | 2                            | 3                           | 4                          |
|-------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| $O_i$ | 39                          | 336                          | 99                          | 26                         |
| $E_i$ | $E_1 = 500 \cdot 0.07 = 35$ | $E_2 = 500 \cdot 0.65 = 325$ | $E_3 = 500 \cdot 0.18 = 90$ | $E_4 = 500 \cdot 0.1 = 50$ |

Da alle de forventede værdier er større end 5 er forudsætningerne for at kunne foretage en  $\chi^2$  - test opfyldt.

**Formel**

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(39 - 35)^2}{35} + \frac{(336 - 325)^2}{325} + \frac{(99 - 90)^2}{90} + \frac{(26 - 50)^2}{50} = 13.249.$$

$\chi^2$  er  $\chi^2$  - fordelt med frihedsgradstallet  $f = k - 1 = 4 - 1 = 3$

$$P\text{-værdi} = P(\chi^2 > 13.249) = \text{chi2Cdf}(13.249, \infty, 3) = 0.0041$$

Da  $P$  - værdi = 0.0041 < 0.01 forkastes nulhypotesen (tostjernet), dvs. kampagnen har haft en betydning for meningen om legalisering af hash.



I appendix 13A er vist, hvordan eksemplet kan regnes med anvendelse af TI - 89 Statgraphics kan derimod ikke direkte beregne en  $P$  - værdi ud fra data.

### Testning af fordelingstype.

Er der data nok, er der ved ovennævnte metode muligt at teste om en statistisk variabel har en forventet fordeling (som eksempelvis normal- binomial- eller Poisson-fordeling).

Det følgende eksempel viser fremgangsmåden.

**Eksempel 14.2. (Testning af om data er normalfordelt).**

I Statistiske Grundbegreber eksempel 1.3 havde man for 75 patienter med dårligt knæ målt pH i ledvæsken. Man fandt, at  $\bar{x} = 7.287$  og  $s = 0.134$ .

Lad  $X = \text{pH}$  for en patient. Vi antog dengang, at  $X$  var normalfordelt  $n(\bar{x}, s)$ .

Foretag en  $\chi^2$  - test af denne påstand.

LØSNING:

Vi ønsker at teste nulhypotesen  $H_0$ :  $X$  er normalfordelt  $n(7.287, 0.134)$

I eksempel 1.3 blev intervallet fra den største pH-værdi til den mindste pH-værdi delt op i en passende mængde intervaller, og man talte op hvor mange resultater der faldt i hvert interval. Resultatet ses i nedenstående skema som de observerede værdier.

Under forudsætning af, at nulhypotesen er sand, kan man nu beregne det forventede antal i hvert interval. Som et eksempel på beregnes den forventede værdi i intervallet  $]7.10 ; 7.18]$ :

$$E_i = 75 \cdot (P(7.10 < X < 7.18)) = 75 \cdot \text{normCdf}(7.10, 7.18, 7.287, 0.134) = 75 \cdot 0.1309 = 9.81 \approx 9.8$$

Da ingen forventede værdier må være under 1 slås de yderste klasser sammen. Da endvidere højst p20% må være under 5, slås yderligere sammen som vist på skemaet.

| Klasser       | Observerede værdi-<br>er | Forventede værdi-<br>er | Klasser sammenlægges |      |
|---------------|--------------------------|-------------------------|----------------------|------|
| ]- ∞ - 6.94]  | 0                        | 0.36                    | 1.73                 | 6.10 |
| ]6.94 - 7.02] | 2                        | 1.37                    |                      |      |
| ]7.02 - 7.10] | 5                        | 4.37                    |                      |      |
| ]7.10 - 7.18] | 8                        | 9.8                     | 9.8                  | 9.8  |
| ]7.18 - 7.26] | 17                       | 15.6                    | 15.6                 | 15.6 |
| ]7.26 - 7.34] | 18                       | 17.5                    | 17.5                 | 17.5 |
| ]7.34 - 7.42] | 16                       | 13.9                    | 13.9                 | 13.9 |
| ]7.42 - 7.50] | 4                        | 7.84                    | 7.84                 | 7.84 |
| ]7.50 - 7.58] | 3                        | 3.12                    | 3.12                 | 4.21 |
| ]7.58 - 7.66] | 1                        | 0,88                    | 1.09                 |      |
| ]7.66 - 7.74] | 1                        | 0.18                    |                      |      |
| ]7.74 - ∞ [   | 0                        | 0.03                    |                      |      |

**Formel:**  $\chi^2 = \frac{(7 - 6.10)^2}{6.10} + \frac{(8 - 9.8)^2}{9.8} + \dots + \frac{(5 - 4.21)^2}{4.21} = 2.95$

Da vi har brugt to værdier (gennemsnit og spredning) til at udregne de forventede værdier, er  $f = k - 1 - 2 = 7 - 3 = 4$ .

$P$  - værdi  $= P(\chi^2 > 2.95) = \text{chi2Cdf}(2.95, \infty, 4) = 0.566$ . Da  $P$  - værdi  $= 0.566 > 0.05$  accepteres nulhypotesen, dvs. vi kan ikke på det grundlag afvise, at  $X$  er normalfordelt. ◆

Ti - 89 kan beregne  $P$  - værdien ud fra de observerede og forventede data, I appendix 14B har Statgraphics løst eksemplet ud fra de oprindelige data.

### 14.3. To-vejs tabel

I dette afsnit betragter vi multinominale eksperimenter hvor data er karakteriseret ved to kriterier. Et eksempel herpå er følgende:

#### Eksempel 14.3. (E87) (testning af uafhængighed)

Ved et universitet indstillede et år 500 studerende sig til en årsprøve, der bl.a. omfattede matematik og fysik.

De opnåede karakterer i de to fag inddeltes i 4 grupper:

| Observerede værdier  |            | Fysikkarakterer |      |      |            | Total |
|----------------------|------------|-----------------|------|------|------------|-------|
|                      |            | 0, 3, 5         | 6, 7 | 8, 9 | 10, 11, 13 |       |
| Matematik-karakterer | 0, 3, 5    | 18              | 46   | 13   | 0          | 77    |
|                      | 6, 7       | 22              | 60   | 42   | 5          | 129   |
|                      | 8, 9       | 7               | 123  | 42   | 16         | 188   |
|                      | 10, 11, 13 | 2               | 28   | 68   | 8          | 106   |
| Total                |            | 49              | 257  | 165  | 29         | 500   |

Undersøg om der er en sammenhæng mellem de opnåede fysikkarakterer og de opnåede matematikkarakterer.

#### Løsning:

$X_1$  = antal studerende med opnået matematikkarakter

$X_2$  = antal studerende med opnået fysikkarakter

$H_0$ :  $X_1$  og  $X_2$  er statistisk uafhængige.

Udfaldene antages at være uafhængige, og da de studerende antages at være repræsentative for en årgang med samme sandsynlighed fra årgang til årgang.

Dette kan derfor opfattes som et multinomialt eksperiment.

#### Formler:

Vi får følgende tabel over de forventede værdier:

| Forventede værdier   |            | Fysikkarakterer                     |                                      |                                     |                                     |
|----------------------|------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
|                      |            | 0, 3, 5                             | 6, 7                                 | 8, 9                                | 10, 11, 13                          |
| Matematik-karakterer | 0, 3, 5    | $\frac{77 \cdot 49}{500} = 7.546$   | $\frac{77 \cdot 257}{500} = 39.578$  | $\frac{77 \cdot 165}{500} = 25.41$  | $\frac{77 \cdot 29}{500} = 4.466$   |
|                      | 6, 7       | $\frac{129 \cdot 49}{500} = 12.642$ | $\frac{129 \cdot 257}{500} = 66.306$ | $\frac{129 \cdot 165}{500} = 42.57$ | $\frac{129 \cdot 29}{500} = 7.482$  |
|                      | 8, 9       | $\frac{188 \cdot 49}{500} = 18.424$ | $\frac{188 \cdot 257}{500} = 96.632$ | $\frac{188 \cdot 165}{500} = 62.04$ | $\frac{188 \cdot 29}{500} = 10.904$ |
|                      | 10, 11, 13 | $\frac{106 \cdot 49}{500} = 10.388$ | $\frac{106 \cdot 257}{500} = 54.484$ | $\frac{106 \cdot 165}{500} = 34.98$ | $\frac{106 \cdot 29}{500} = 6.148$  |

Da alle de forventede værdier er over 1, og kun 1 klasse af 16 ligger under 5 er betingelserne for en  $\chi^2$  - test opfyldt.

Vi beregner nu teststørrelsen

$$\chi^2 = \frac{(18 - 7.546)^2}{7.546} + \frac{(46 - 39.578)^2}{39.578} + \dots + \frac{(8 - 6.148)^2}{6.148} = 108.917$$

Frihedsgradstallet er  $f = (r - 1) \cdot (q - 1) = (4 - 1) \cdot (4 - 1) = 9$

$$P\text{-værdi} = P(\chi^2 > 108.9) = \text{chiCdf}(108.92, \infty, 9) = 2.4 \cdot 10^{-19}$$

Da  $P\text{-værdi} = 2.4 \cdot 10^{-19} < 0.001$  forkastes nulhypotesen (stærkt) dvs.

der er ikke uafhængighed mellem fysikkaraktererne og matematikkaraktererne.

Når vi ser på tallene er det tydeligt at gode karakterer i det ene fag også har en tendens til at bevirke gode karakterer i det andet fag.

I appendix 14A og 14B er eksemplet regnet med anvendelse af henholdsvis TI - 89 og Statgraphics.



## OVERSIGT 14.1. $\chi^2$ - test af hypotese om multinominale sandsynligheder (1 variabel).

$$H_0: p_1 = c_1, p_2 = c_2, \dots, p_k = c_k$$

mod den alternative

$H$ : Mindst én af sandsynlighederne afviger fra den angivne værdi i nulhypotesen.

Lad  $O_i = n_i$  være den **observerede værdi** i den  $i$ 'te klasse,

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  den totale stikprøvestørrelse og

Forudsat  $H_0$  er sand beregnes **de forventede værdier**  $E_i = n \cdot c_i$  ( $E = \text{expected values}$ ) i den  $i$ 'te klasse

Resultatet opstilles i det følgende skema:

| Klasse nr                 | 1                   | 2                   | .... | $k$                 |
|---------------------------|---------------------|---------------------|------|---------------------|
| Observerede værdier $O_i$ | $n_1$               | $n_2$               |      | $n_k$               |
| Forventede værdier $E_i$  | $E_1 = n \cdot c_1$ | $E_2 = n \cdot c_2$ |      | $E_k = n \cdot c_k$ |

$$\text{Teststørrelse: } \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

**Forudsætning:**  $\chi^2$  er approksimativt  $\chi^2$  - fordelt med et frihedsgradstal på  $k - 1$ ,  
hvis ingen af klasserne har en forventet værdi under 1,  
og mindst 80% af klasserne har en forventet værdi over 5.

Lad  $Q$  være  $\chi^2$  - fordelt med et frihedsgradstal på  $f = k - 1$ ,

$H_0$  **forkastes** hvis  $P$  - værdi  $= P(Q > \chi^2) < \alpha$

Hvis man for at kunne beregne de forventede værdier først må benytte de observerede værdier til at beregne  $m$  parametre, så bliver  $f = k - 1 - m$ .  
jævnfør eksempel 14.2.

**OVERSIGT 14.2.  $\chi^2$  - test af hypotese i 2-vejs tabel.**

Som illustration af metoden benyttes en generalisation af det i eksempel 14.3 omtalte forsøg med at undersøge om der er uafhængighed mellem opnåede matematik- og fysik-karakterer.

$X_1$  = antal studerende med opnået matematikkarakter

$X_2$  = antal studerende med opnået fysikkarakterer

Vi ønsker at teste nulhypotesen:  $H_0$ :  $X_1$  og  $X_2$  er statistisk uafhængige.

Lad  $n_{ij}$  angive antal studerende, der har opnået den til klassen  $k_{ij}$  svarende karakter.

| Observerede værdier                  | Opdeling | Søjlefaktor C (Fysikkarakterer) |          |     |          | Marginalt antal |
|--------------------------------------|----------|---------------------------------|----------|-----|----------|-----------------|
|                                      |          | 1                               | 2        | ... | $q$      |                 |
| Rækkefaktor R (Matematik-karakterer) | 1        | $n_{11}$                        | $n_{12}$ | ... | $n_{1q}$ | $d_1$           |
|                                      | 2        | $n_{21}$                        | $n_{22}$ | ... | $n_{2q}$ | $d_2$           |
|                                      | ...      | ...                             | ...      | ... | ...      | ...             |
|                                      | $r$      | $n_{r1}$                        | $n_{r2}$ | ... | $n_{rq}$ | $d_r$           |
| Marginalt antal                      |          | $c_1$                           | $c_2$    | ... | $c_q$    | $n$             |

Tilsvarende angiver  $p_{ij}$  den tilsvarende sandsynlighed for at få den til cellen  $k_{ij}$  svarende karakter.

| Observerede værdier                  | Opdeling | Søjlefaktor C (Fysikkarakterer) |          |     |          | Marginal sandsynlighed |
|--------------------------------------|----------|---------------------------------|----------|-----|----------|------------------------|
|                                      |          | 1                               | 2        | ... | $q$      |                        |
| Rækkefaktor R (Matematik-karakterer) | 1        | $p_{11}$                        | $p_{12}$ | ... | $p_{1q}$ | $p_{1d}$               |
|                                      | 2        | $p_{21}$                        | $p_{22}$ | ... | $p_{2q}$ | $p_{2d}$               |
|                                      | ...      | ...                             | ...      | ... | ...      | ...                    |
|                                      | $r$      | $p_{r1}$                        | $p_{r2}$ | ... | $p_{rq}$ | $p_{rd}$               |
| Marginal sandsynlighed               |          | $p_{c1}$                        | $p_{c2}$ | ... | $p_{cq}$ | 1                      |

Vi ser således, at de marginale sandsynligheder er  $p_{id} = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iq}$  og  $p_{cj} = p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{rj}$ .

Det antages, at udfaldene er uafhængige. At dette så er et multinomialt eksperiment ses af, at der er  $n$  udfald,  $r \cdot q$  klasser og sandsynligheden for hver klasse er vist i ovenstående tabel.

Forudsat nulhypotesen er sand, vil der ifølge sandsynlighedsregningens produktsætning gælde, at  $p_{id} \cdot p_{cj} = p_{ij}$ . Det forventede antal i klasse  $k_{ij}$  er derfor  $E_{ij} = n \cdot p_{id} \cdot p_{cj}$ .

Nu kendes de sande marginale sandsynligheder ikke, men vi kan estimere dem med  $\hat{p}_{id} = \frac{d_i}{n}$  og  $\hat{p}_{cj} = \frac{c_j}{n}$ .

Vi har derfor  $E_{ij} = n \cdot \frac{d_i}{n} \cdot \frac{c_j}{n} = \frac{d_i \cdot c_j}{n} = \frac{(\text{række } i \text{ total}) \cdot (\text{søjle } j \text{ total})}{\text{total antal i stikprøven}}$ .

$$\text{Teststørrelse: } \chi^2 = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^r \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Da antallet af klasser er  $r \cdot q$  og vi primært har estimeret  $q - 1$  marginale rækkesandsynligheder og  $r - 1$  marginale søjlesandsynligheder (da summen af rækkesandsynlighederne = summen af søjlesandsynlighederne = 1) er frihedsgradstallet  $f = r \cdot q - 1 - (r - 1) - (q - 1) = r \cdot q - r - q + 1 = (r - 1)(q - 1)$ .

**Forudsætning:**  $\chi^2$  er approksimativt  $\chi^2$  - fordelt med et frihedsgradstal på  $f = (r - 1) \cdot (q - 1)$ , hvis ingen klasser har en forventet værdi under 1, og mindst 80% af klasserne har en forventet værdi over 5.

Lad  $Q$  være  $\chi^2$  - fordelt med et frihedsgradstal på  $f = k - 1$ ,

$H_0$  forkastes hvis  $P$  - værdi  $= P(Q > \chi^2) < \alpha$ , hvor  $f = (r - 1) \cdot (q - 1)$

## 14A Eksempler regnet på TI - 89.

### 1. Indledning.

Det forudsættes, at man kender de grundlæggende operationer på lommeregneren.

I Appendix "Grundlæggende operationer på TI - 89" er beskrevet, hvorledes man beregner sandsynligheden for forskellige fordelinger, beregner gennemsnit og spredning, samt hvorledes man tester og beregner konfidensintervaller for funktion af 1 variabel. Dette forudsættes ligeledes bekendt.

### 2. Antalstabeller

#### 2.1. En-vejs tabel

##### Eksempel 14.1

Før kampagnen viste en undersøgelse at 7% af indbyggerne ønskede at hash blev legaliseret, 65% at man beholde det nuværende forholdsvis liberale straffepolitik, 18 % ønskede strengere straffe og 10 % havde ingen mening. Efter kampagnen spurgte man 500 personer (repræsentativt udvalgt), og svarene fremgik af følgende tabel.

|                 | Legalisering | Efter eksisterende lov | Strengere straf | Ingen mening |
|-----------------|--------------|------------------------|-----------------|--------------|
| Efter kampagnen | 39           | 336                    | 99              | 26           |

Kan man på dette grundlag vise på et signifikansniveau på  $\alpha = 0.01$ , at kampagnen har betydet en ændring af folks mening?

##### Løsning:

$$H_0: p_1 = 0.07, p_2 = 0.65, p_3 = 0.18, p_4 = 0.10$$

mod den alternative

$H$ : "Mindst én af sandsynlighederne afviger fra den angivne værdi i nulhypotesen."

| nr               | 1                     | 2                      | 3                     | 4                    |
|------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|----------------------|
| Før kampagnen    | 7%                    | 65%                    | 18%                   | 10%                  |
| Forventet antal  | $500 \cdot 0.07 = 35$ | $500 \cdot 0.65 = 325$ | $500 \cdot 0.18 = 90$ | $500 \cdot 0.1 = 50$ |
| Observeret antal | 39                    | 336                    | 99                    | 26                   |

APPS, STAT/LIST, Indtast observeret antal i list1 og observeret antal i list2

F6:Test, 7: Chi2 GOF, ENTER, Udfyld menuen, ENTER

P - value = 0.0041

Da  $P$  - værdi = 0.0041 < 0.01 forkastes nulhypotesen (tostjernet), dvs. kampagnen har haft en betydning for meningen om legalisering af hash.



#### 2.2. Test af fordelingstype

Kan som i forrige eksempel udregne  $\chi^2$  - værdien ud fra de observerede og de forventede værdier.

## 2.3. Test af uafhængighed i en to-vejs tabel.

### Eksempel 14.3

Ved et universitet indstillede et år 500 studerende sig til en årsprøve, der bl.a. omfattede matematik og fysik. De opnåede karakterer i de to fag inddeltes i 4 grupper:

| Observerede værdier |            | Fysikkarakterer |      |      |            | Total |
|---------------------|------------|-----------------|------|------|------------|-------|
|                     |            | 0, 3, 5         | 6, 7 | 8, 9 | 10, 11, 13 |       |
| Matematikkarakterer | 0, 3, 5    | 18              | 46   | 13   | 0          | 77    |
|                     | 6, 7       | 22              | 60   | 42   | 5          | 129   |
|                     | 8, 9       | 7               | 123  | 42   | 16         | 188   |
|                     | 10, 11, 13 | 2               | 28   | 68   | 8          | 106   |
| Total               |            | 49              | 257  | 165  | 29         | 500   |

Undersøg om der er en sammenhæng mellem de opnåede fysikkarakterer og de opnåede matematikkarakterer.

#### Løsning:

APPS, DATA/MATRIX, 3:New, Data = Matrix, Variable = ex7, Row Dimension=4, Col dimension = 4, ENTER,

Indtast tallene i matricen. APPS, STAT/LIST, F6, 8:Chi2 2way, ENTER, Observed Mat = ex7., ENTER

$P$  - værdi =  $2.44 \cdot 10^{-19}$

Da  $P$  - værdi =  $2.4 \cdot 10^{-19} < 0.001$  forkastes nulhypotesen (stærkt ) dvs.

der er ikke uafhængighed mellem fysikkaraktererne og matematikkaraktererne.



## 14B Eksempler regnet på Statgraphics.

### 1. Indledning

I “Grundlæggende statistik: appendix A” er beskrevet nogle grundlæggende operationer, hvorledes man beregner sandsynligheden for forskellige fordelinger og beregner gennemsnit og spredning. Dette forudsættes bekendt

### 2. Test i antalstabeller.

#### 2.1. En-vejs tabel

Kan ikke direkte beregne  $P$  - værdi ud fra data i en “en-vejs tabel”.

#### 2.2. Test af fordelingstype

##### “Statistiske grundbegreber” eksempel 1.3 (jævnfør dog også eksempel 14.2)

I menneskers led udskiller den inderste hinde en "ledvæske" som "smører" leddet. For visse ledsygdomme kan brintion koncentrationen (pH) i denne væske tænkes at have betydning. Som led i en nordisk medicinsk undersøgelse af en bestemt ledsygdom udtog man blandt samtlige patienter der led af denne sygdom tilfældigt 75 patienter og målte pH i ledvæsken i knæet. Resultaterne var følgende:

7.02 7.26 7.31 7.16 7.45 7.32 7.21 7.35 7.25 7.24 7.20 7.21 7.27 7.28 7.19  
7.39 7.40 7.33 7.32 7.35 7.34 7.41 7.28 7.27 7.28 7.33 7.20 7.15 7.42 7.35  
7.38 7.32 7.71 7.34 7.10 7.35 7.15 7.19 7.44 7.12 7.22 7.12 7.37 7.51 7.19  
7.30 7.24 7.36 7.09 7.32 6.95 7.35 7.36 7.52 7.29 7.31 7.35 7.40 7.23 7.16  
7.26 7.47 7.61 7.23 7.26 7.37 7.16 7.43 7.08 7.56 7.07 7.08 7.17 7.29 7.20

Tallene indtastes:

pH  
7,02  
7,26  
7,31  
7,16  
7,45  
osv.

Vælg(Describe\Distributions\Distribution fitting(Uncensored data)\pH\tryk på ► \OK).

Der fremkommer følgende udskrift:

Analysis Summary  
Data variable: pH  
75 values ranging from 6,95 to 7,71  
Fitted normal distribution:  
mean = 7,28693  
standard deviation = 0,134355

Heraf ses, at vi finder  $\bar{x} = 7.286$  og  $s = 0.134$

Vælg(blå ikon = “Graphical options”\Frquency Histogram\OK)

Der fremkommer et histogram, som nok har for få grupper.

Idet der var 75 tal, vil et valg på ca.  $\sqrt{75} \approx 9$  = være rimeligt.

Vælg(Cursor på figur og tryk på højre musetast\Pane Options\Number of Classes=9\OK)

Der fremkommer så det histogram, der er afbildet i “Statistiske Grundbegreber” side 8.

Tegningen synes umiddelbart at illustrere en rimelig normalfordeling.

$\chi^2$  - test: Vælg(Gul Ikon = “Tabular Options”\Goodness-of-Fit-Tests\OK)

Resultatet bliver:

Goodness-of-Fit Tests for pH

Chi-Square Test

|             | Lower Limit | Upper Limit | Observed Frequency | Expected Frequency | Chi-Square |
|-------------|-------------|-------------|--------------------|--------------------|------------|
| at or below |             | 7,10755     | 7                  | 6,82               | 0,00       |
|             | 7,10755     | 7,16488     | 7                  | 6,82               | 0,00       |
|             | 7,16488     | 7,2057      | 7                  | 6,82               | 0,00       |
|             | 7,2057      | 7,24008     | 7                  | 6,82               | 0,00       |
|             | 7,24008     | 7,27159     | 6                  | 6,82               | 0,10       |
|             | 7,27159     | 7,30227     | 6                  | 6,82               | 0,10       |
|             | 7,30227     | 7,33379     | 8                  | 6,82               | 0,20       |
|             | 7,33379     | 7,36816     | 10                 | 6,82               | 1,48       |
|             | 7,36816     | 7,40899     | 6                  | 6,82               | 0,10       |
|             | 7,40899     | 7,46632     | 5                  | 6,82               | 0,48       |
| above       | 7,46632     |             | 6                  | 6,82               | 0,10       |

Chi-Square = 2,58679 with 8 d.f. P-Value = 0,957561

Vi ser, at Chi-Square = 2.58 med 8 frihedsgrader, og P-value = 0.958 > 0.05.

Vi har altså en accept af nulhypotesen  $H_0$ : pH er normalfordelt.

Programmet vælger selv intervallængderne, så vi får samme “forventede værdier” hvilket giver en lidt anden  $\chi^2$  - værdi.

## 8.2. Test af uafhængighed i en to-vejs tabel.

### Eksempel 14.3. (E87) (testning af uafhængighed)

Ved et universitet indstillede et år 500 studerende sig til en årsprøve, der bl.a. omfattede matematik og fysik.

De opnåede karakterer i de to fag inddeltes i 4 grupper:

| Observerede værdier  |            | Fysikkarakterer |      |      |            | Total |
|----------------------|------------|-----------------|------|------|------------|-------|
|                      |            | 0, 3, 5         | 6, 7 | 8, 9 | 10, 11, 13 |       |
| Matematik-karakterer | 0, 3, 5    | 18              | 46   | 13   | 0          | 77    |
|                      | 6, 7       | 22              | 60   | 42   | 5          | 129   |
|                      | 8, 9       | 7               | 123  | 42   | 16         | 188   |
|                      | 10, 11, 13 | 2               | 28   | 68   | 8          | 106   |
| Total                |            | 49              | 257  | 165  | 29         | 500   |

Undersøg om der er en sammenhæng mellem de opnåede fysikkarakterer og de opnåede matematikkarakterer.

**Løsning:**

Data indtastes

| fysik_0_3_5 | fysik_6_7 | fysik_8_9 | fysik_10_11_13 |
|-------------|-----------|-----------|----------------|
| 18          | 46        | 13        | 0              |
| 22          | 60        | 42        | 5              |
| 7           | 123       | 42        | 16             |
| 2           | 28        | 68        | 8              |

Vælg(Describe\Categorical data\Contingency Tables\indsæt i tabel "fysik\_0\_3\_5", "fysik\_6\_7" , "fysik\_8\_9","fysik\_10\_11\_13"\OK)

Vælg(Gul ikon = "Tabular Options"\Frequency Table\OK)

Der fremkommer så følgende tabel

|                 | fysik_0_3_5 | fysik_6_7     | fysik_8_9     | fysik_10_11_ | Row<br>Total   |
|-----------------|-------------|---------------|---------------|--------------|----------------|
| Row_1           | 18<br>3,60% | 46<br>9,20%   | 13<br>2,60%   | 0<br>0,00%   | 77<br>15,40%   |
| Row_2           | 22<br>4,40% | 60<br>12,00%  | 42<br>8,40%   | 5<br>1,00%   | 129<br>25,80%  |
| Row_3           | 7<br>1,40%  | 123<br>24,60% | 42<br>8,40%   | 16<br>3,20%  | 188<br>37,60%  |
| Row_4           | 2<br>0,40%  | 28<br>5,60%   | 68<br>13,60%  | 8<br>1,60%   | 106<br>21,20%  |
| Column<br>Total | 49<br>9,80% | 257<br>51,40% | 165<br>33,00% | 29<br>5,80%  | 500<br>100,00% |

Cell contents:

Observed frequency

Percentage of table

Tabellen er selvforklarende.

Vælg(Gul ikon = "Tabular Options"\Chi-Square Test\OK)

Der fremkommer så følgende udskrift:

| Chi-Square Test |    |         |
|-----------------|----|---------|
| Chi-Square      | Df | P-Value |
| 108,92          | 9  | 0,0000  |

Warning: some cell counts < 5.

Da  $P$  - værdi = 0.0000 < 0.05 forkastes nulhypotesen nulhypotesen (stærkt), dvs.

Fysik- og matematik-karaktererne er afhængige.

## OPGAVER

### Opgave 14.1(E79)

For en støvfylt gasart ønskede man at bestemme antallet af støvpartikler pr. volumenenhed. Til brug herfor sendte man 500 gange en lysstråle gennem et volumen, der var så lille ( $10^{-6} \text{ cm}^3$ ), at det kun indeholdt få støvpartikler. Man iagttog hver gang volumenet gennem et ultramikroskop og optalte antallet af støvpartikler. Forsøgsresultaterne var:

| Antal partikler | 0  | 1   | 2   | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 | 8 | I alt |
|-----------------|----|-----|-----|----|----|----|---|---|---|-------|
| Antal gange     | 95 | 163 | 134 | 67 | 24 | 12 | 4 | 0 | 1 | 500   |

- 1) Angiv hvilken fordelingstype du vil benytte for antallet  $X$  af støvpartikler pr.  $10^{-6} \text{ cm}^3$ .
- 2) Estimer parameteren/parametrene i den formodede fordeling.
- 3) Foretag en testning af den opstillede model.
- 4) Estimer middeltallet af støvpartikler pr.  $\text{cm}^3$ .

### Opgave 14.2(F93)

Ved måling af 100 akslers diametre fandtes følgende grupperede empiriske fordeling:

| Intervalinddeling |             | Antal observationer |
|-------------------|-------------|---------------------|
| Nedre grænse      | Øvre grænse |                     |
| 1.155             | 1.165       | 1                   |
| 1.165             | 1.175       | 7                   |
| 1.175             | 1.185       | 10                  |
| 1.185             | 1.195       | 22                  |
| 1.195             | 1.205       | 27                  |
| 1.205             | 1.215       | 18                  |
| 1.215             | 1.225       | 8                   |
| 1.225             | 1.235       | 7                   |
| I alt             |             | 100                 |

Udfør en  $\chi^2$ -testning af, om akseldiameteren kan antages at være normalfordelt.

(Vink: Ved beregningen af estimater for middelværdi og spredning tænkes alle observationer i et interval samlet i midtpunktet af intervallet)

### Opgave 14.3(E74)

En terning kastedes 120 gange, hvorved følgende resultater fandtes:

|             | Antal Øjne |    |    |    |    |    |
|-------------|------------|----|----|----|----|----|
|             | 1          | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Antal gange | 25         | 17 | 15 | 23 | 24 | 16 |

Test nulhypotesen: Terningen er en ærlig terning.

#### Opgave 14.4

5 typer vaccine mod en bestemt sygdom blev undersøgt ved, at 6 grupper på hver 200 forsøgsdyr (mus) blev udsat for smitte. De 5 af grupperne fik hver sin type vaccination, mens den sidste gruppe ikke blev vaccineret. Efter en passende tid undersøgte man hvor mange af de 200 dyr, der havde fået sygdommen. Følgende resultater fandtes:

| Gruppe nr      | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|----------------|----|----|----|----|----|----|
| Antal syge dyr | 12 | 13 | 18 | 10 | 16 | 27 |

Vi ønsker at foretage en statistisk analyse af, om procenten af smittede dyr i de 6 grupper kan antages at være den samme.

#### Opgave 14.5(E81)

En kemikaliefabrik har påbegyndt en fabrikation af kunstgødning. Ved fabrikationen hældes gødningen i sække af 5 "ens" maskiner, idet det tilstræbes, at nettoindholdet i sækkene er 25 kg i hver .

Ved indkørselen af produktionen fandt man, at der var mange overvægtige og undervægtige sække. Følgende antalstabel indeholder produktionsresultatet ved første prøvekørsel:

|           |                    | Maskiner |    |    |    |    |
|-----------|--------------------|----------|----|----|----|----|
|           |                    | 1        | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Nettovægt | Under 24 kg        | 5        | 3  | 7  | 3  | 12 |
|           | Mellem 24 og 26 kg | 14       | 17 | 16 | 15 | 13 |
|           | Over 26 kg         | 11       | 10 | 7  | 12 | 5  |

Foretag en testning af, om det kan antages, at vægtfordelingen er den samme for de 5 maskiner.

#### Opgave 14.6(E81) (test i antalstabel)

Ved start af en stor amerikansk industrivirksomhed underkastedes alle 173 ansøgere til et bestemt job på fabrikken en psykoteknisk prøve. Idet ansøgerne grupperedes efter, om de var medlemmer af en fagforening eller ikke, er nedenstående anført resultaterne af den pågældende prøve.

|                               | Resultat af prøven |        |         |
|-------------------------------|--------------------|--------|---------|
|                               | godt               | middel | dårligt |
| Medlem af en fagforening      | 37                 | 42     | 23      |
| Ikke medlem af en fagforening | 17                 | 26     | 28      |

Hvad kan der slutes om sammenhæng mellem præstation ved prøven og medlemskab af en fagforening?

**Opgave 14.7(E81)**

En fabrik, der arbejdede i 3 - holdskift, fremstillede bl.a. en bestemt maskindel i massefabrikation.

For at undersøge, om kvaliteten af denne maskindel påvirkedes af omstændigheder, der afhang af, inden for hvilket tidsrum af døgnet fabrikationen fandt sted (træthed, belysningsforhold m.v.), lod man et bestemt arbejdshold arbejde på hvert af de 3 skift en uge ad gangen. Man regnede med, at produktionsbetingelserne fra uge til uge var i det væsentlige uændrede.

Arbejdsholdets ugentlige produktion var:

| Skift                                   | Antal ikke - defekte emner | Antal defekte emner |
|-----------------------------------------|----------------------------|---------------------|
| kl. 8 <sup>00</sup> - 16 <sup>00</sup>  | 1602                       | 88                  |
| kl. 16 <sup>00</sup> - 24 <sup>00</sup> | 1590                       | 122                 |
| kl. 0 <sup>00</sup> - 8 <sup>00</sup>   | 1507                       | 103                 |

Foretag en statistisk analyse af, om produktionens kvalitet må antages at afhænge af produktionsperioden.

**Opgave 14.8(E81)**

Et forsikringsselskab har i løbet af et kalenderår undersøgt bilkaskoskaderne og registreret antallet af skadesanmeldelser og forsikringstagerens (førerens) alder.

Resultatet blev:

|              |     | Forsikringstagerens alder |         |         |         |      |
|--------------|-----|---------------------------|---------|---------|---------|------|
|              |     | 18 - 27                   | 28 - 37 | 38 - 47 | 48 - 57 | ≥ 58 |
| Antal skader | 1   | 74                        | 60      | 51      | 66      | 50   |
|              | 2   | 31                        | 25      | 22      | 16      | 15   |
|              | ≥ 3 | 29                        | 10      | 6       | 5       | 7    |

- 1) Man havde en forhåndsformodning om, at aldersgruppen 18-27 år skadesmæssigt adskiller sig fra de øvrige grupper. Bekræftes denne forhåndsformodning?
- 2) Tillader det ovennævnte materiale en antagelse om, at der er uafhængighed mellem antallet af skader og forsikringstagerens alder for de sidste 4 aldersgrupper?

# 15 Rangtest

## 15.1. Indledning

De testprocedurer vi har benyttet i kapitlerne 10 - 13 har alle været baseret på, at i det mindste approksimativt kendte fordelingen (normal-, binomial- eller Poisson-fordelt) og testen vedrørte parametre i fordelingen såsom  $\mu$ ,  $\sigma$  eller  $p$ . Denne form for statistik kunne kaldes "parametrisk statistik". Kendes fordelingen ikke, og kan man heller ikke approksimere den til en kendt fordeling, så må man benytte de såkaldte "ikke-parametriske test". Disse forudsætter ikke, at fordelingen er kendt, og kunne derfor også kaldes "fordelingsfri test".

Blandt disse er specielt de såkaldte rangtest meget anvendte. Disse test har som forudsætning at observationerne afspejler mindst en ordning, samt at de foreliggende observationer er baseret på (eventuelt underliggende) kontinuerte statistiske variable, jævnfør det følgende eksempel 15.1

### Eksempel 15.1. Smagsprøveeksperiment.

*En levnedsmiddelforproducent overvejede at introducere et nyt konserverprodukt i stedet for et hidtil produceret. I disse overvejelser indgik resultatet af en smagsprøvning foretaget af et panel bestående af 15 smagsdommere. De smagte hver på det nye produkt og gav dette en "karakter" ved afsættelse af et kryds på et standardliniestykke, hvis ene endepunkt svarer til værst mulig smag, det andet endepunkt til bedst mulig smag.*

*Med henblik på den statistiske analyse af resultaterne transformerades disse til tal, idet hvert af de 15 standardliniestykker inddeltes lineært efter en skala fra 0 (værst mulig smag) til 100 (bedst mulig smag), og krydsenes placering aflæstes.*

*De transformerede forsøgsresultater var: 75, 90, 66, 82, 75, 88, 55, 80, 83, 75, 70, 80, 68, 86, 84. Ved et stort antal tilsvarende smagsprøvninger af det hidtil producerede konserverprodukt var medianen 70. Producenten ønsker at få at vide, om forsøgsresultaterne giver et eksperimentelt bevis for, at det nye produkt smager bedre end det hidtidige.*



Tallene i eksempel 15.1 er ikke sædvanlige måletal. Betragtes eksempelvis de 3 første observationer 75, 90 og 66, så kan vi kun slutte, at smagsdommer 2 synes produktet smager bedre end nr 1 som igen synes det smager bedre end nr 3. Differensen mellem de to første er 15, mellem nr 1 og 3 er 9. Vi kan derfor muligvis også slutte, at der vil være større smagsforskel i det første tilfælde end i det sidste. Derimod kan vi næppe slutte, at smagsforskellen i det første tilfælde er  $\frac{15-9}{15} \cdot 100 = 40\%$  større end i det sidste. Det har ingen fysisk realitet at foretage procentiske

sammenligninger mellem smagsforskelle. Sådanne sammenligninger ville derimod have mening, hvis der forelå sædvanlige måletal, jævnfør udbyttmålingerne ved en kemiske proces, hvor procentiske forskelle mellem udbyttedifferenser umiddelbart kan fortolkes.

En forsigtig fortolkning af de transformerede resultater af smagsprøvningen er derfor, at de kun afspejler en ordning med hensyn til smag.

Da man afsatte punkter på en standardliniestykke hvorved i princippet ethvert tal mellem 0 og 100 kunne tænkes, er kravet om kontinuitet opfyldt.

Forudsætningerne for at kunne udføre en rangtest er dermed opfyldt.

En "diskret" skala må altså i princippet ikke anvendes. Man kunne dog godt have anvendt en skala fra 0 til 100 da den ville være tilstrækkelig "finmasket" i forhold til antallet af smagsdommere. En skala fra 0 til 3 ville derimod ikke kunne bruges (der ville blive alt for mange ens "målinger").

Man ser undertiden nogle som “for en sikkerheds skyld” anvender en Rangtest, selv om de faktisk med rimelighed kunne have udført en parametrisk test. Hvis man derved får en forkastelse af nulhypotesen er konklusionen korrekt. Hvis derimod man får en accept, kunne det være at en parametrisk test ville give en forkastelse, (da de parametriske test har størst styrke). Derfor skal parametriske test naturligvis foretrækkes, hvis man som tidligere beskrevet har en rimelig formodning om fordelingen.

I de følgende afsnit vil de forskellige typer rangtest forklaret i forbindelse med passende eksempler. I den forbindelse får vi brug for følgende oplysninger:

**Definition af rangtal:** Lad os antage vi har givet  $n$  forskellige tal.  
Det mindste af disse tal gives rangtallet 1, det næstmindste tal gives rangtallet 2 osv.

Eksempel:

|                    |   |    |   |    |   |   |
|--------------------|---|----|---|----|---|---|
| Observationer      | 6 | 17 | 7 | 13 | 5 | 2 |
| Tilhørende Rangtal | 3 | 6  | 4 | 5  | 2 | 1 |

**Sum af Rangtal:** Sum af tal fra 1 til  $n$  kan vises at være  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ .

Bevis:  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$\text{Heraf fås } 2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n \cdot (n+1)$$

Eksempel  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 6 = \frac{6 \cdot (6+1)}{2} = 15$

**Median :** Observationerne ordnes i rækkefølge:  
Ulige antal observationer: median = midterste tal,  
Lige antal observationer: median = gennemsnit af de to midterste tal

Eksempel: Observationer 6, 17, 7, 13, 5, 2.

Ordnet i rækkefølge: 2, 5, 6, 7, 13, 17. Median 6,5

## 15.2. Wilcoxons rangtest for 1 og 2 statistiske variable

For store stikprøvestørrelser kan man approksimere med normalfordelingen, mens dette bliver for unøjagtigt for små stikprøvestørrelser.

### 15.2.1 Wilcoxons rangtest for 1 variabel (lille stikprøvestørrelse $n \leq 20$ )

#### Eksempel 15.2 (fortsættelse af eksempel 15.1) . Wilcoxons rangtest for 1 variabel

Det hidtidige produkt havde en median på 70. Producenten ønsker at undersøge på et signifikansniveau på 5% om det nye produkt smager bedre end det gamle.

#### Løsning:

Lad  $m$  betegne fordelings median.

Nulhypotese:  $H_0: m = 70$  Alternativ hypotese  $H: m > 70$

Differenserne i forhold til medianen på 70 beregnes.

|            |    |    |    |    |    |    |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$      | 75 | 90 | 66 | 82 | 75 | 88 | 55  | 80 | 83 | 75 | 70 | 80 | 68 | 86 | 84 |
| $x_i - 70$ | 5  | 20 | -4 | 12 | 5  | 18 | -15 | 10 | 13 | 5  | 0  | 10 | -2 | 16 | 14 |

### 15.2. Wilcoxon's rangtest for 1 og 2 statistiske variable.

Den numeriske værdi af differenserne tilordnes rangtal, således at den mindste værdi får rangtallet 1, den næstmindste rangtallet 2, osv. Hvis flere værdier er ens tilordnes de alle gennemsnittet af de rangtal de skulle have haft. Er en differens 0 tilordnes intet rangtal.

Rangtallene forsynes derefter med fortegnet for de tilsvarende differenser.

Dette giver følgende tabel

|                      |    |    |    |    |    |    |     |     |    |    |    |     |    |    |    |
|----------------------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|----|----|----|-----|----|----|----|
| $x_i$                | 75 | 90 | 66 | 82 | 75 | 88 | 55  | 80  | 83 | 75 | 70 | 80  | 68 | 86 | 84 |
| $x_i - 70$           | 5  | 20 | -4 | 12 | 5  | 18 | -15 | 10  | 13 | 5  | 0  | 10  | -2 | 16 | 14 |
| Rang af $ x_i - 70 $ | 4  | 14 | 2  | 8  | 4  | 13 | 11  | 6,5 | 9  | 4  | -  | 6,5 | 1  | 12 | 10 |
| Fortegn              |    |    | -2 |    |    |    | -11 |     |    |    |    |     | -1 |    |    |

Lad  $w_+$  være summen af rangtallene med positivt fortegn og  $w_-$  summen af rangtallene med negativt fortegn.

Da vi udskød en værdi, her vi, at summen af rangtallene er  $S = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ .

Da  $w_- = 2+11+1=14$  følger heraf, at  $w_+ = 105 - 14 = 91$ .

Hvis nulhypotesen er sand ville vi forvente at der lå nogenlunde lige mange tal over og under medianen på 70, og at summen af rangtallene for de med positivt fortegn ville være nogenlunde lig

med summen af dem med negativt fortegn dvs. omkring  $\frac{105}{2} \approx 52,5$ .

Hvis der er stor forskel må man forkaste nulhypotesen.

I tabel 1 er angivet kritiske værdier for værdier for Wilcoxon's teststørrelse  $w_\alpha$ .

Idet testen er ensidet, fås  $w_{0,05} = 25$  og  $w_{0,01} = 15$

Idet  $w = \min\{w_-, w_+\} = \min\{14, 91\} = 14$  ses, at  $w < w_{0,01}$ .

$H_0$  forkastes (2 stjernet), dvs. vi har vist, at det nye produkt smager bedre end det gamle. ♦

### 15.2.2 Wilcoxon's rangtest for 1 variabel (stor stikprøvestørrelse $n > 20$ )

Er stikprøvestørrelsen mindst 20, er  $w_+$  (eller  $w_-$ ) som det fremgår af tabel 1 med tilnærmelse

normalfordelt med middelværdi  $\mu = \frac{n \cdot (n+1)}{4}$  og spredning  $\sigma = \sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24}}$ .

#### Eksempel 15.3 . Wilcoxon's rangtest for 1 variabel. (stor stikprøve)

Samme problem som i eksempel 15.1, men nu benytter man 30 smagsdommere, og man finder denne gang at ingen rangtal er 0, og at  $w_+ = 321$ .

LØSNING:

Da  $w_+ = 321$  følger heraf, at  $w_- = \frac{30 \cdot 31}{2} - 321 = 144$ . Da  $n = 30 > 20$  approksimeres med

normalfordelingen med  $\mu = \frac{30 \cdot 31}{4} = 232,5$  og  $\sigma = \sqrt{\frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{24}} = 48,618$

Vi har  $P$ -værdi  $= P(w_- \leq 144) = \text{normCdf}(-\infty, 144, 232.5, 48, 618) = 0.0344$ , eller

$P$ -værdi  $= P(w_- \geq 321) = \text{normCdf}(321, \infty, 232.5, 48, 618) = 0.0344$

Da  $P$ -værdi  $= 0.0344 < 0.05$  forkastes  $H_0$  (svagt), dvs. vi har på et signifikansniveau på 5%, at det nye produkt smager bedre end det gamle.



Ti-89 har ikke indbygget rangtest.

En Statgraphics løsning findes i afsnit 15A

### 15.2.3 Wilcoxon's rangtest for parvise observationer.

På samme måde som ved de parametriske test, kan vi også bruge Wilcoxon's test ved parvise observationer.

#### Eksempel 15.5 . Wilcoxon's rangtest for parvise observationer.

*Det kan være vigtigt for visse typer varer, om den emballage de pakkes ind i føles "blød". En producent af emballage ønsker at undersøge om der er forskel i "blødhed" for to typer emballage.*

*10 tilfældigt udvalgte forbrugere bliver hver bedt om at føle på de to typer emballage, og angive "blødheden" på en skala fra 1 til 10 .*

*Resultaterne var:*

| "dommer"  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Produkt A | 6 | 8 | 4 | 9 | 4 | 7 | 6 | 5 | 6 | 8  |
| Produkt B | 4 | 5 | 5 | 8 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 | 2  |

#### Løsning:

Vi har her at gøre med 10 parvise observationer, svarende til hver af de 10 forbrugere.

Vi anvender derfor Wilcoxon's rang test på differenserne (idet vi antager betingelserne er opfyldte).

Nulhypotese:  $H_0: m = 0$ . Alternativ hypotese  $H: m \neq 0$

| "dommer"          | 1 | 2   | 3  | 4 | 5   | 6  | 7 | 8 | 9  | 10 |
|-------------------|---|-----|----|---|-----|----|---|---|----|----|
| Produkt A         | 6 | 8   | 4  | 9 | 4   | 7  | 6 | 5 | 6  | 8  |
| Produkt B         | 4 | 5   | 5  | 8 | 1   | 9  | 2 | 3 | 7  | 2  |
| Differens A - B   | 2 | 3   | -1 | 1 | 3   | -2 | 4 | 2 | -1 | 6  |
| Rang af $ A - B $ | 5 | 7,5 | 2  | 2 | 7,5 | 5  | 9 | 5 | 2  | 10 |
| Fortegn           |   |     | -2 |   |     | -5 |   |   | -2 |    |

Summen af rangtallene er  $S = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ .

Da  $w_- = 2+5+2=9$  følger heraf, at  $w_+ = 55 - 9 = 46$ . Idet testen er tosidet, fås  $w_{0.05} = 8$

Idet  $w = \min\{w_-, w_+\} = \min\{9, 46\} = 9$  ses, at  $w > w_{0.05}$ .

$H_0$  acceptere (tæt på forkastelse), dvs.

vi kan ikke på det foreliggende grundlag vise, at der er forskel på de to produkters "blødhed".



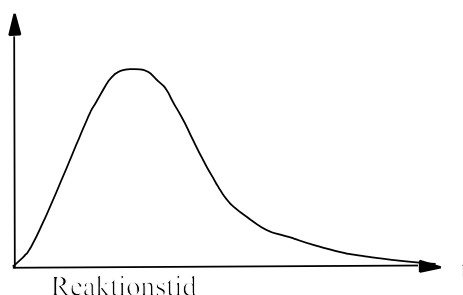
### 15.2.4 Wilcoxon's rang sum test for 2 uafhængige stikprøver (lille stikprøvestørrelse $\leq 10$ )

Hvis de i kapitel 10 angivne metoder (t - test m.m.) ikke kan anvendes, fordi forudsætningerne ikke er opfyldte, så kan man sædvanligvis anvende denne metode.

Nulhypotesen er, at de to stikprøver er taget fra den samme population med samme medianer. Hvis vi nu danner en rækkefølge for de samlede observationer under et, så burde rangtallene fra de to stikprøver fordele sig tilfældigt i forhold til hinanden. Summen for hver stikprøve burde derfor være nogenlunde den samme. Hvis de afviger meget fra hinanden må nulhypotesen kunne forkastes. Metoden demonstreres i følgende eksempel 15.6.

#### Eksempel 15.6 . Wilcoxon's rangtest for 2 uafhængige stikprøver (små stikprøvestørrelser).

Man ønsker at sammenligne reaktionstiden for mænd, som har taget én type medicin "A", med reaktionstiden for de mænd, der har taget en anden type medicin "B". Forsøg har imidlertid vist, at disse reaktionstider ikke er normalfordelte, men fordelingen er skæv mod højre. (se figuren) Man kan derfor ikke benytte en t-test, men måtte benytte en rangtest.



Blandt 14 mænd udvalgte man tilfældigt 7 som indtog medicin A mens de øvrige 7 indtog medicin B. Efter en passende tid måltes reaktionstiden for de 14 personer. En person måtte desværre udgå på grund af specielle omstændigheder.

Resultaterne var:

|              |           |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------|-----------|------|------|------|------|------|------|------|
|              | Medicin A | 1.96 | 2.24 | 1.71 | 2.41 | 1.62 | 1.93 |      |
| Reaktionstid | Medicin B | 2.11 | 2.43 | 2.07 | 2.71 | 2.50 | 2.84 | 2.88 |

Undersøg om der er signifikant forskel på reaktionstiden.

#### Løsning::

Lad  $m_A$  og  $m_B$  betegne de to fordelingers medianer.

Nulhypotese:  $H_0: m_A = m_B$  Alternativ hypotese  $H: m_A \neq m_B$

Vi tildeler de samlede observationer rangtal.

|                   |           |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|-----------|------|------|------|------|------|------|------|
|                   | Medicin A | 1.96 | 2.24 | 1.71 | 2.41 | 1.62 | 1.93 |      |
| Reaktions-<br>tid | Medicin B | 2.11 | 2.43 | 2.07 | 2.71 | 2.50 | 2.84 | 2.88 |
|                   | A         | 4    | 7    | 2    | 8    | 1    | 3    |      |
| Rangtal           | B         | 6    | 9    | 5    | 11   | 10   | 12   | 13   |

Vi beregner nu summen  $w_A$  og  $w_B$  af rangtallene.

$$w_A = 4 + 7 + 2 + 8 + 1 + 3 = 25$$

$$\text{Idet } w_A + w_B = \frac{(n_A + n_B)(n_A + n_B + 1)}{2} = \frac{(7 + 6)(7 + 6 + 1)}{2} = 91 \text{ er } w_B = 91 - 25 = 66$$

Da summen af  $w_A$  og  $w_B$  er et fast tal, vil en lille værdi af den ene delsum betyde en stor værdi af den anden, og dermed en stor forskel på de to summer. Der gælder derfor, at jo mindre en af delsummerne er, jo større er muligheden for at stikprøverne er udtaget af forskellige fordelinger. I tabel 2 er for forskellige værdier af antal observationer  $n_1$  og  $n_2$  angivet et interval.

I vort tilfælde er  $n_A = 6 < n_B = 7$ , og teststørrelsen altså  $w_A = 25$ .

Ved opslag i tabel 2 under den tosidet test for signifikansniveau 5% fås, at intervalgrænserne er 28 og 56. Da  $w_A \leq 28$  forkastes nulhypotesen, dvs. der er signifikant forskel på reaktionstiden.



En Statgraphics løsning findes i afsnit 15A

### 15.2.5 Wilcoxons rang sum test for 2 uafhængige stikprøver (stor stikprøvestørrelse over 10)

Er begge stikprøvestørrelser større end eller lig 10, er  $w_A$  (eller  $w_B$ ) som det fremgår af tabel

2 med tilnærmelse normalfordelt med middelværdi  $\mu = \frac{n_1 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{2}$  og spredning

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

#### Eksempel 15.7 . Wilcoxons rangtest for 2 variable. (stor stikprøve)

Samme problem som i eksempel 15.6 men nu vælger man 22 mænd hvoraf 11 fik medicin A mens de øvrige 11 indtog medicin B. Efter en passende tid målt reaktionstiden for de 22 personer.

Man fandt, at  $w_A = 100$ .

LØSNING:

Da  $w_A = 100$  følger heraf, at  $w_B = \frac{22 \cdot 23}{2} - 100 = 153$ . Da  $n_A = n_B = 11 \geq 10$  approksimeres

med normalfordelingen med  $\mu = \frac{11 \cdot 23}{2} = 126.5$  og  $\sigma = \sqrt{\frac{11 \cdot 11 \cdot 23}{12}} = 15.229$

Vi har  $P$ -værdi =  $P(w_- \leq 100) = \text{normCdf}(0, 100, 126.5, 15.223) = 0.041$ .

Da  $0.041 > 0.025$  kan  $H_0$  ikke forkastes,

dvs. vi kan ikke på et signifikansniveau på 5%, vise, at der er forskel på reaktionstiderne.



## 15.3. Kruskal-Wallis test for flere statistiske variable.

I kapitel 12 anvendte vi en ensidet variansanalyse og en F-test for at sammenligne middelværdierne af mere end 2 normalfordelte variable. Er forudsætningerne ikke opfyldte, så kan vi benytte nedenstående rangtest (kaldet Kruskal-Wallis test), der som tidligere nævnt kun kræver at observationerne mindst afspejler en ordning, og at den bagved liggende fordeling er kontinuert.

### Eksempel 15.8 . Kruskal-Wallis test for mere end 2 variable.

*Et levnedsmiddels smag kan tænkes at afhænge af hvilken af 3 produktionsmetoder der anvendes. For at undersøge om det er tilfældet planlægges følgende forsøg:*

*Med hver af de 3 metoder fremstilles i en forsøgsproduktion 6 prøver.*

*En ekspertrnager vurderer de i alt 18 smagsprøver enkeltvis og i tilfældig rækkefølge uden kendskab til, hvilken metode der er anvendt i det enkelte tilfælde. Efter hver smagning markeres resultatet ved afsætning af et kryds på et standardliniestykke, hvis ene endepunkt svarer til værst mulig smag, det andet endepunkt til bedst mulig smag.*

*Ved den statistiske analyse af resultaterne transformeres disse til tal, idet hvert af de 18 standardliniestykker inddeles lineært efter en skala fra 0 (værst mulig smag) til 100 (bedst mulig smag). De transformerede resultater er de tal, som angiver krydsernes placering, og kan betragtes som stikprøveværdier af  $q (=3)$  kontinuerte statistisk uafhængige variable med ukendte fordelingstyper.*

*De transformerede forsøgsresultater blev:*

|              |                   |
|--------------|-------------------|
| Metode $M_1$ | 61 69 79 61 59    |
| Metode $M_2$ | 62 58 47 59 63 48 |
| Metode $M_3$ | 57 45 60 54 57    |

*Det bemærkes, at der ved forsøget kun fremkom 5 observationer for metoderne  $M_1$  og  $M_3$  på grund af tekniske fejl ved fremstillingen af 2 prøver.*

*Idet  $m_1$ ,  $m_2$  og  $m_3$  betegner de 3 fordelingers medianer, ønsker vi på grundlag af stikprøveværdierne at teste nulhypotesen*

*$H_0$ : De 3 fordelinger er ens (hvilket indebærer, at  $m_1 = m_2 = m_3$ ) imod den alternative hypotese*

*$H$ : De 3 fordelinger er ikke ens.*

#### Løsning:

Observationerne tilordnes rangtal som om de kom fra samme population (som ved Wilcoxon's test), således som det fremgår af følgende skema:

|              |      |    |    |      |     |    |                      |
|--------------|------|----|----|------|-----|----|----------------------|
| Metode $M_1$ | 61   | 69 | 79 | 61   | 59  |    | Sum af rangtal $R_i$ |
| Rangtal      | 11.5 | 15 | 16 | 11.5 | 8.5 |    | 62.50                |
| Metode $M_2$ | 62   | 58 | 47 | 59   | 63  | 48 |                      |
|              | 13   | 7  | 2  | 8.5  | 14  | 3  | 47.5                 |
| Metode $M_3$ | 57   | 45 | 60 | 54   | 57  |    |                      |
|              | 5.5  | 1  | 10 | 4    | 5.5 |    | 26.0                 |

Da alle stikprøvestørrelser er større end eller lig 5 gælder det (jævnfør oversigt 15.1), at

$$\text{teststørrelsen } \chi^2 = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^3 n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2}{n(n+1)} \text{ er } \chi^2\text{-fordelt med frihedsgradstal } f = 3 - 1 = 2$$

Som det ses af formelen vil  $\chi^2$  være tæt ved nul hvis nulhypotesen er sand, mens den får en stor værdi hvis de gennemsnitlige rangtal afviger meget fra hinanden, så testen er ensidet.

Beregningsteknisk er det lettere at anvende den i oversigt 15.1 angivne omskrivning:

$$\chi^2 = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i}}{n \cdot (n+1)} - 3 \cdot (n+1) = \frac{12 \cdot \left( \frac{62.5^2}{5} + \frac{47.5^2}{6} + \frac{26.0^2}{5} \right)}{16 \cdot (16+1)} - 3 \cdot (16+1) = 6.02$$

Da  $P$ -værdi  $= P(\chi^2 > 6.02) = 0.049$  forkastes nulhypotesen (tæt ved accept), og vi må derfor konkludere, at de 3 fordelinger ikke er identiske.

Ud fra de fundne summer må man kunne slutte, at metode 1 giver en bedre smag end metode 3. ♦

## 15.4. Friedmanns test for et randomiseret blokforsøg.

I kapitel 12 analyserede vi et randomiseret blokforsøg, ved en sædvanlig tosidet variansanalyse uden vekselvirkning, idet vi antog at de sædvanlige variansanalyseforudsætninger gjaldt. Svigter en eller flere af disse forudsætninger, kan man i stedet anvende Friedmanns rangtest. Som alle andre rangtest kræves her kun, at observationerne mindst afspejler en ordning, og at den bagvedliggende fordeling er kontinuert. Testen er beskrevet i appendix 15.2

### Eksempel 15.9 . Friedmanns test for et randomiseret blokforsøg.

Man ønsker at sammenligne reaktionstiden for personer, som har taget henholdsvis medicin A, medicin B og medicin C. Da reaktionstiden varierer meget afhængig af hvilken person der har taget medicinen, udføres forsøget som et randomiseret blokforsøg. Hver af 6 forsøgspersoner får i tilfældig rækkefølge de 3 mediciner. Dette sker med så store mellemrum, at den første medicins virkning forlængst er væk inden den næste medicin bliver taget.

Erfaringer fra andre tilsvarende forsøg har vist, at disse reaktionstider ikke er normalfordelte.

Man benytter derfor en rangtest.

Resultaterne var:

|              | Person    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|--------------|-----------|------|------|------|------|------|------|
| Reaktionstid | Medicin A | 1.21 | 1.63 | 1.42 | 2.43 | 1.16 | 1.94 |
|              | Medicin B | 1.56 | 2.01 | 1.70 | 2.64 | 1.48 | 2.81 |
|              | Medicin C | 1.48 | 1.85 | 2.06 | 1.98 | 1.27 | 2.44 |

Undersøg om der er signifikant forskel på reaktionstiden.

#### Løsning:

Idet  $m_1, m_2$  og  $m_3$  betegner de 3 fordelingers medianer, ønsker vi på grundlag af stikprøveværdierne at teste nulhypotesen

$H_0$ : De 3 fordelinger er ens (hvilket indebærer, at  $m_1 = m_2 = m_3$ )

mod den alternative hypotese  $H$ : De 3 fordelinger er ikke ens.

Som beskrevet i appendix 15.2 rangordnes indenfor hver person (blok).

|              | Person    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Sum      |
|--------------|-----------|---|---|---|---|---|---|----------|
| Reaktionstid | Medicin A | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | $R_1=7$  |
|              | Medicin B | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | $R_3=17$ |
|              | Medicin C | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | $R_2=12$ |

Af oversigt 15.2 fås:  $\chi^2 = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^k R_i^2}{b \cdot k(k+1)} - 3 \cdot b \cdot (k+1) = \frac{12 \cdot (7^2 + 17^2 + 12^2)}{6 \cdot 3(3+1)} - 3 \cdot 6 \cdot (3+1) = 8.333$

med frihedsgradstallet  $f = 3 - 1 = 2$

Da  $P$ -værdi  $= 0.0155 < 0.05$  forkastes nulhypotesen, og vi må derfor konkludere, at de 3 fordelinger ikke er identiske. ♦

Statgraphics har ikke Friedmann's test.

## 15.5. Spearmann's korrelationskoefficient.

I kapitel 9 definerede vi korrelationskoefficient  $\rho$ , og beregnede ved hjælp af en lommeregner et estimat  $r$  for den. Eksempelvis målte vi sammenhørende værdier af en række personers højde og vægt, og benyttede korrelationskoefficienten til at vurdere om der var en positiv korrelation (sammenhæng) mellem højde og vægt. Var de variable normalfordelte, var det dog mere hensigtsmæssigt at teste dette ved en regressionsanalyse ( $H_0: \beta = 0$ ).

I dette afsnit vil vi erstatte de fundne værdier med deres rangtal. Dette har som sædvanlig den fordel, at man ikke behøver at gøre nogle specielle forudsætninger om fordelingsstype.

Man beregner så korrelationskoefficienten  $r$  mellem rangtallene, og er antallet af sammenhørende

værdier  $n \geq 10$  kan benyttes, at  $t = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$  er  $t$ -fordelt  $t(n-2)$

Vi kan derfor teste nulhypotesen.

$H_0: \rho = 0$  (ingen korrelation mellem rangtallene) mod eksempelvis den alternative hypotese

$H_0: \rho < 0$  (negativ korrelation mellem rangtal)

Hvis  $n < 10$  kan man i tabel 3 finde en tabel over signifikansgrænserne.

Vi vil illustrere metoden med følgende eksempel:

### Eksempel 15.10. Spearmans korrelation

*I en biologisk produktion (ølbrygning) volder en væskes evne til at blive "klar" ved en filtrering vanskeligheder. Sommetider løber væsken let, sommetider vanskeligt gennem filtret, og antallet af filtreringer, som er nødvendige for opnåelse af en klar væske, synes at være uafhængigt af gennemløbet. Man ønsker at undersøge, om der er en (monoton) sammenhæng mellem væskens tørstofindhold og væskens filtrerbarhed. I en forsøgsperiode søger man derfor at klassificere hver væske med hensyn til filtrerbarhed efter en skala fra 1 til 10, hvor 1 betegner den "umulige" væske (langsomst mulige gennemløb, størst mulige antal filtreringer) og 10 den "ideale" væske (hurtigst mulige gennemløb, mindst mulige antal filtreringer).*

Følgende resultater fandtes:

|                    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Tørstofindhold $x$ | 21.3 | 20.7 | 22.0 | 21.5 | 20.9 | 22.1 | 21.4 | 21.9 | 21.7 | 20.8 | 21.6 | 21.0 | 21.2 | 20.4 |
| Filtrerbarhed $y$  | 6    | 4    | 8    | 7    | 5    | 9    | 6    | 7    | 7    | 5    | 9    | 5    | 7    | 3    |

Test, om der er en (monoton) sammenhæng mellem tørstofindhold og filtrerbarhed.

**Løsning:**

Vi ønsker at teste

nulhypotesen  $H_0: \rho = 0$  (ingen korrelation mellem tørstofindhold og filtrerbarhed)

mod  $H: \rho > 0$  (positiv korrelation mellem tørstofindhold og filtrerbarhed)

Der tilordnes rangtal til hver af de to variable  $X$  og  $Y$ .

|                 |     |   |    |     |   |      |     |     |     |   |      |   |     |   |
|-----------------|-----|---|----|-----|---|------|-----|-----|-----|---|------|---|-----|---|
| Rangtal for $x$ | 7   | 2 | 13 | 9   | 4 | 14   | 8   | 12  | 11  | 3 | 10   | 5 | 6   | 1 |
| Rangtal for $y$ | 6.5 | 2 | 12 | 9.5 | 4 | 13.5 | 6.5 | 9.5 | 9.5 | 4 | 13.5 | 4 | 9.5 | 1 |

Korrelationskoefficienten  $r$  beregnes (eksempelvis ved at indtaste rangtallene i en lommeregners regressionsprogram).

Vi får  $r = 0.9129$ .

$$\text{Da } n \geq 10 \text{ haves } t = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.9129 \cdot \sqrt{14-2}}{\sqrt{1-0.9129^2}} = 7.75$$

Da  $P(t \geq 7.75) = 0.00000268$  forkastes nulhypotesen, dvs. der er en positiv (monoton voksende) sammenhæng mellem filtrerbarhed og tørstofindhold.

Benyttes i stedet tabel 3, findes for  $n = 14$  ligeledes, at nulhypotesen forkastes, da  $r > 0.622$ ,



## Oversigt 15.1.

### Kruskal-Wallis test for to eller flere statistiske variable

Lad der være givet  $k$  stikprøver, og lad den samlede population være rangordnet (se eventuelt nedenstående skema hentet fra eksempel 15.7)

|              |      |    |    |      |     |    | Antal     | Gennemsnit $\bar{R}_i$ | Sum af rangtal |
|--------------|------|----|----|------|-----|----|-----------|------------------------|----------------|
| Metode $M_1$ | 61   | 69 | 79 | 61   | 59  |    |           |                        |                |
| Rangtal      | 11.5 | 15 | 16 | 11.5 | 8.5 |    | $n_1 = 5$ | $\bar{R}_1 = 12.50$    | $R_1 = 62.5$   |
| Metode $M_2$ | 62   | 58 | 47 | 59   | 63  | 48 |           |                        |                |
| Rangtal      | 13   | 7  | 2  | 8.5  | 14  | 3  | $n_2 = 6$ | $\bar{R}_2 = 7.91666$  | $R_2 = 47.5$   |
| Metode $M_3$ | 57   | 45 | 60 | 54   | 57  |    |           |                        |                |
| Rangtal      | 5.5  | 1  | 10 | 4    | 5.5 |    | $n_3 = 5$ | $\bar{R}_3 = 5.20$     | $R_3 = 26.0$   |
| ...          |      |    |    |      |     |    |           | ...                    |                |
| ...          |      |    |    |      |     |    |           | ...                    |                |
| Metode $M_k$ |      |    |    |      |     |    |           |                        |                |
| Rangtal      |      |    |    |      |     |    | $n_k$     | $\bar{R}_k$            | $R_k$          |
| Total        |      |    |    |      |     |    | $n$       | $\bar{R}$              |                |

$$\text{Teststørrelse: } \chi^2 = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^k n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2}{n(n+1)} = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i}}{n \cdot (n+1)} - 3 \cdot (n+1)$$

Hvis stikprøvestørrelserne alle er større eller lig med 5 gælder, at teststørrelsen er  $\chi^2$ -fordelt med  $k - 1$  frihedsgrader.

Hypotesen  $H_0$ : De  $k$  fordelinger er ens.

$H_0$  forkastes, hvis  $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2(k-1)$

eller  $P$ -værdi =  $P(Y > \chi^2) < \alpha$ , hvor  $Y$  er  $\chi^2$ -fordelt med  $k - 1$  frihedsgrader.

## Oversigt 15.2. Friedmanns test for randomiseret blokforsøg.

Lad der være givet randomiseret blokforsøg med  $b$  blokke og  $k$  behandlinger.

|                | blok 1 | blok 2 | blok 3 | ... | blok $b$ |  |
|----------------|--------|--------|--------|-----|----------|--|
| Behandling 1   | 1.21   | 1.63   | 1.42   | ... | 1.16     |  |
| Behandling 2   | 1.48   | 1.85   | 2.06   | ... | 1.27     |  |
| ...            |        |        |        |     |          |  |
| Behandling $k$ | 1.56   | 2.01   | 1.70   | ... | 1.48     |  |

Behandlingerne rangordnes indenfor hver blok, og summen af rangtal beregnes

|                | blok 1 | blok 2 | blok 3 | ... | blok $b$ | Sum af rangtal | Gennemsnit af rangtal |
|----------------|--------|--------|--------|-----|----------|----------------|-----------------------|
| Behandling 1   | 1      | 1      | 2      | ... | 4        | $R_1$          | $\bar{R}_1$           |
| Behandling 2   | 2      | 2      | 3      | ... | 2        | $R_2$          | $\bar{R}_2$           |
| ...            | ...    | ...    | ...    | ... | ...      | ...            | ...                   |
| Behandling $k$ | 5      | 4      | 1      | ... | 3        | $R_k$          | $\bar{R}_k$           |

$$\text{Teststørrelsen er } \chi^2 = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^k b \cdot (\bar{R}_i - \bar{R})^2}{b \cdot k(k+1)} = \frac{12 \cdot \sum_{i=1}^k R_i^2}{b \cdot k(k+1)} - 3 \cdot b \cdot (k+1)$$

Hvis enten antallet af behandlinger  $k$  eller antallet af blokke  $b$  er større end eller lig 5 gælder, at teststørrelsen er  $\chi^2$ -fordelt med  $k - 1$  frihedsgrader.

Hypotesen  $H_0$ : De  $k$  fordelinger for behandlingerne er ens.

$H_0$  forkastes, hvis  $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$

eller  $P$ -værdi =  $P(Y > \chi^2) < \alpha$ , hvor  $Y$  er  $\chi^2$ -fordelt med  $k - 1$  frihedsgrader.

## 15A Eksempler regnet på Statgraphics.

### 1. Indledning

I "Grundlæggende statistik: appendix A" er beskrevet nogle grundlæggende operationer, hvorledes man beregner sandsynligheden for forskellige fordelinger og beregner gennemsnit og spredning. Dette forudsættes bekendt

### 2. Rangtest

#### 2.1. Wilcoxon's test for 1 statistisk variabel

Statgraphics har kun medtaget "Large Sample test", hvilket kræver mindst 20 værdier.

Er det ikke tilfældet, kan vi kun af udskriften benytte, at der beregnes antal rangtal under (eller over) medianen, og gennemsnittet af dem. Man kan så på det grundlag beregne størrelserne  $w_-$  (eller  $w_+$ ) og derefter som i eksempel 15.2 slå op i tabel 1.

#### Eksempel 15.1. Smagsprøveeksperiment.

Et panel bestående af 15 smagsdommere smager hver på et nyt produkt og giver det en "karakter" ved afsættelse af et kryds på et standardliniestykke.

Med henblik på den statistiske analyse af resultaterne transformerades disse til tal ved måling af krydsenes placering.

De transformerede resultater var: 75, 90, 66, 82, 75, 88, 55, 80, 83, 75, 70, 80, 68, 86, 84.

Ved et stort antal tilsvarende smagsprøvninger af det hidtil producerede konservesprodukt var medianen 70. Producenten ønsker at få at vide, om forsøgsresultaterne giver et eksperimentelt bevis for, at det nye produkt smager bedre end det hidtidige.

Data indtastes som sædvanlig, idet vi **udskyder de værdier, der er lig medianen på 70.**

```
x
75
90
66
82
75
88
55
80
83
75
80
68
86
84
```

Vælg (Describe\Numeric data \One Variable Analysis\OK)

Vælg (Tabular Options\Hypothesis Tests\OK\Cursor på udskrift, tryk højre musetast\Pane Options\sæt Mean til 70\Vælg Greater than\OK)

Vi får udover en  $t$ -test også følgende "rang" test:

```
Hypothesis Tests for x
sign test
-----
```

```
Null hypothesis: median = 70,0
```

```
Alternative: greater than
```

```
Number of values below hypothesized median: 3
```

```
Number of values above hypothesized median: 11
```

```
Large sample test statistic = 1,87083 (continuity correction applied)
```

```
P-Value = 0,0306843
```

```
Reject the null hypothesis for alpha = 0,05.
```

## 15 Rangtest

signed rank test

-----

Null hypothesis: median = 70,0

Alternative: greater than

Average rank of values below hypothesized median: 4,66667

Average rank of values above hypothesized median: 8,27273

Large sample test statistic = 2,38845 (continuity correction applied)

P-Value = 0,00845978

Reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

Havde vi haft tilstrækkeligt med observationer, ville vi af "signed rank test" have kunnet aflæse en  $P$ -værdi på 0.00845.

Nu kan vi i stedet se, at der er 3 værdier under median og at gennemsnittet er 4.66667, dvs.  $w_- = 4.6667 \cdot 3 = 14$ .

I tabel 1 findes, idet testen er ensidet,  $w_{0.05} = 25$  og  $w_{0.01} = 15$

Idet  $w = \min\{w_-, w_+\} = \min\{14, 91\} = 14$  ses, at  $w < w_{0.01}$ .

$H_0$  forkastes (2 stjernet), dvs. vi har vist, at det nye produkt smager bedre end det gamle. ◆

## 2.2. Wilcoxon's test for 2 statistiske variable

Statgraphics har kun medtaget "Large Sample test", hvilket kræver mindst 10 værdier af hver variabel. Er det ikke tilfældet, kan vi kun af udskriften benytte, at der beregnes gennemsnittet af rangtallene for hver af variabel. Man kan så på det grundlag beregne størrelserne  $w_-$  (eller  $w_+$ ) og derefter som i eksempel 15.6 slå op i tabel 2.

Data indtastes:

| A    | B    |
|------|------|
| 1,96 | 2,11 |
| 2,24 | 2,43 |
| 1,71 | 2,07 |
| 2,41 | 2,71 |
| 1,62 | 2,50 |
| 1,93 | 2,84 |
|      | 2,88 |

Vælg (Compare\Two Samples\Two Sample Comparison\A og B indsættes\OK)

Vælg (Tabular Options\Comparison of Medians\OK)

Der fås følgende udskrift:

Comparison of Medians

-----

Median of sample 1: 1,945

Median of sample 2: 2,5

Mann-Whitney (Wilcoxon) W test to compare medians

Null hypothesis: median1 = median2

Alt. hypothesis: median1 NE median2

Average rank of sample 1: 4,16667

Average rank of sample 2: 9,42857

W = 38,0    P-value = 0,0184161

Heraf fås, at  $w_A = 6 \cdot 4.1667 = 25$ , og  $w_B = 7 \cdot 9.42857 = 66$

Ved opslag i tabel 2 under den tosidet test for signifikansniveau 5% fås, at intervalgrænserne er 28 og 56. Da  $w_A \leq 28$  forkastes nulhypotesen, dvs. der er signifikant forskel på reaktionstiden. ◆

### 2.3 Kruskal Wallis' test

#### Eksempel 15.8 . Kruskal-Wallis test for mere end 2 variable.

Med hver af de 3 metoder fremstilles i en forsøgsproduktion 6 prøver.

En ekspertrnager vurderer de i alt 18 smagsprøver, ved at sætte krydser på en tallinie.

Resultaterne transformeres. De transformerede forsøgsresultater blev:

|              |                   |
|--------------|-------------------|
| Metode $M_1$ | 61 69 79 61 59    |
| Metode $M_2$ | 62 58 47 59 63 48 |
| Metode $M_3$ | 57 45 60 54 57    |

Det bemærkes, at der ved forsøget kun fremkom 5 observationer for metoderne  $M_1$  og  $M_3$  på grund af tekniske fejl ved fremstillingen af 2 prøver.

Idet  $m_1$ ,  $m_2$  og  $m_3$  betegner de 3 fordelingers medianer, ønsker vi på grundlag af stikprøveværdierne at teste nulhypotesen

$H_0$ : De 3 fordelinger er ens (hvilket indebærer, at  $m_1 = m_2 = m_3$ ) imod den alternative hypotese

$H$ : De 3 fordelinger er ikke ens.

#### Løsning:

Data indtastes som sædvanlig.

```
metoder    smag
1          61
1          69
1          79
1          61
1          59
2          62
2          58
2          47
2          59
2          63
2          48
3          57
3          45
3          60
3          54
3          57
```

Vælg (Compare\Analysis of Variance \One Way Anova\Indsæt i "Dependent variables" Smag og i "Factor" Metoder\OK)

Vælg (Tabular Options\Kruskal-Wallis test\OK)

Vi får følgende udskrift:

Kruskal-Wallis Test for SMAG by METODER

| METODER | Sample Size | Average Rank |
|---------|-------------|--------------|
| 1       | 5           | 12,5         |
| 2       | 6           | 7,91667      |
| 3       | 5           | 5,2          |

Test statistic = 6,04838    P-Value = 0,0485973

Da  $P$ -værdi = 0.049 < 0.05 forkastes nulhypotesen (tæt ved accept), og vi må derfor konkludere, at de 3 fordelinger ikke er identiske.



### 9.3. Spearmans korelationskoefficient.

#### Eksempel 15.10. Spearmans korrelation

I en biologisk produktion (ølbrygning) volder en væskes evne til at blive "klar" ved en filtrering vanskeligheder. Man ønsker at undersøge, om der er en (monoton) sammenhæng mellem væskens tørstofindhold og væskens filtrerbarhed. I en forsøgsperiode søger man derfor at klassificere hver væske med hensyn til filtrerbarhed efter en skala fra 1 til 10, hvor 1 betegner den "umulige" væske (langsomst mulige gennemløb, størst mulige antal filtreringer) og 10 den "ideale" væske (hurtigst mulige gennemløb, mindst mulige antal filtreringer).

Følgende resultater fandtes:

|                    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Tørstofindhold $x$ | 21.3 | 20.7 | 22.0 | 21.5 | 20.9 | 22.1 | 21.4 | 21.9 | 21.7 | 20.8 | 21.6 | 21.0 | 21.2 | 20.4 |
| Filtrerbarhed $y$  | 6    | 4    | 8    | 7    | 5    | 9    | 6    | 7    | 7    | 5    | 9    | 5    | 7    | 3    |

Test, om der er en (monoton) sammenhæng mellem tørstofindhold og filtrerbarhed.

#### Løsning:

Vi ønsker at teste

nulhypotesen  $H_0: \rho = 0$  (ingen korrelation mellem tørstofindhold og filtrerbarhed)

mod  $H: \rho > 0$  (positiv korrelation mellem tørstofindhold og filtrerbarhed)

Data indtastes som sædvanlig.

| Toerstof | Filtrerbarhed |
|----------|---------------|
| 21,3     | 6             |
| 20,7     | 4             |
| 22       | 8             |
| 21,5     | 7             |
| 20,9     | 5             |
| 22,1     | 9             |
| 21,4     | 6             |
| 21,9     | 7             |
| 21,7     | 7             |
| 20,8     | 5             |
| 21,6     | 9             |
| 21       | 5             |
| 21,2     | 7             |
| 20,4     | 3             |

Vælg (Describe\Multiple-Variable Analysis\Indsæt i "Data" Toerstof og Filtrerbarhed\OK)

Vælg (Tabular Options\Rank Correlations\OK)

Vi får udskriften:

Spearman Rank Correlations

|               | Filtrerbarhed             | Toerstof                  |
|---------------|---------------------------|---------------------------|
| Filtrerbarhed |                           | 0,9129<br>( 14)<br>0,0010 |
| Toerstof      | 0,9129<br>( 14)<br>0,0010 |                           |

Correlation  
(Sample Size)  
P-Value

Vi får her en  $P$  - value på 0.0010.

Da  $P$  - value = 0.0010 < 0.05 forkastes nulhypotesen, dvs. der er en positiv (monoton voksende) sammenhæng mellem filtrerbarhed og tørstofindhold. ♦

## OPGAVER

### Opgave 15.1

Et mellemprodukt ved en kemisk proces bliver med mellemrum undersøgt for urenheder. Urenhedsniveauet (i ppm) blev ved sidste måling målt til

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2.4 | 2.5 | 1.7 | 2.1 | 2.2 | 2.6 | 1.3 | 1.9 | 2.0 | 2.5 | 2.6 | 2.3 | 2.0 | 1.8 | 1.3 | 1.7 | 2.0 | 1.9 | 2.3 | 1.9 | 2.4 | 1.6 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

Kan du ved en rangtest vise, at urenhedsniveauet er mindre end 2.5 ppm på et signifikansniveau på  $\alpha = 0.05$ .

### Opgave 15.2

I et laboratorium ønsker man at undersøge om gnidningskoefficienten mellem læder og kobber overstiger en værdi på 0.55.

Man udførte 15 målinger, og fandt følgende tal:

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.54 | 0.68 | 0.49 | 0.63 | 0.65 | 0.55 | 0.51 | 0.60 | 0.62 | 0.44 | 0.58 | 0.56 | 0.46 | 0.67 | 0.53 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|

Da man tvivler på at målingerne er normalfordelte ønskes udført en rangtest for at afgøre dette.

### Opgave 15.3

Ved elektrolyse forsøves nogle elektroniske komponenter. Den opløsning de sænkes ned i skal helst have et pH på 7. For at kontrollere dette måles pH 10 gange med passende mellemrum.

Resultaterne var

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 7.91 | 7.85 | 6.82 | 8.01 | 7.46 | 6.95 | 7.05 | 5.35 | 7.25 | 7.42 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|

Anvend en rangtest med et signifikansniveau på  $\alpha = 0.05$  til at kontrollere om dette er tilfældet.

### Opgave 15.4

Ved en psykologisk undersøgelse ønskede man at undersøge om den førstefødte af to tvillinger har en tendens til at blive mere aggressiv end den sidstfødte. Man gav 12 tvillingpar den samme psykologiske test. Resultaterne af testen ses nedenfor, hvor et større pointtal viser tegn på en større aggressivitet.

| Tvillingepar nr | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| førstfødte      | 86 | 71 | 77 | 68 | 91 | 72 | 77 | 91 | 70 | 71 | 88 | 87 |
| sidstfødte      | 88 | 77 | 76 | 64 | 96 | 72 | 65 | 90 | 65 | 80 | 81 | 72 |

- 1) Hvorfor er en rangtest rimelig at anvende i dette tilfælde.
- 2) Foretag en testning af om man på grundlag heraf konkludere at den førstfødte er mere aggressiv end den sidstfødte.

**Opgave 15.5**

Ved en udgravning på Cypern fandt man bl.a. Byzantinske mønter fra to perioder af Manuel I's regering (1143-1180). Der var 9 mønter fra den 1. udmøntning og 7 mønter fra den 4. udmøntning. Mønterne blev analyserede for indholdet af sølv, og man fandt følgende resultater (i %):

|               |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1. udmøntning | 59 | 68 | 64 | 70 | 66 | 77 | 72 | 69 | 62 |
| 2. udmøntning | 53 | 56 | 55 | 51 | 62 | 58 | 58 |    |    |

Test, om der er forskel på sølvindholdet for de to udmøntninger

- 1) ved en rangtest, idet man er usikker på om forudsætningerne for en parametrisk test er opfyldt.
- 2) ved et parametrisk test.

**Opgave 15.6**

Et støberifirma har købt 2 nye maskiner som producerer stempler af en anden type end de hidtidige maskiner. Efter nogen tids produktion begyndte der at komme klager over, at de nye stempler ikke har samme holdbarhed som de hidtidige. For at teste dette udtager man tilfældigt stempler fra såvel den nye som den gamle type og måler på en testmaskine, hvor længe det varer inden de går i stykker.

Man fandt (i timer):

|                |     |      |     |      |      |     |
|----------------|-----|------|-----|------|------|-----|
| Gamle stempler | 947 | 1358 | 821 | 1032 |      |     |
| Nye stempler   | 765 | 834  | 699 | 957  | 1021 | 756 |

Undersøg ved en ikke-parametrisk test på et signifikansniveau på 5% om de gamle stempler holder længere end de nye stempler.

**Opgave 15.7**

Ved 2 forskellige metoder til syntetisering af et stof fandtes følgende udbytter (%)

|          |     |     |     |     |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Metode 1 | 578 | 562 | 619 | 544 | 536 | 564 | 532 |
| Metode 2 | 642 | 587 | 631 | 625 | 598 | 592 | 571 |

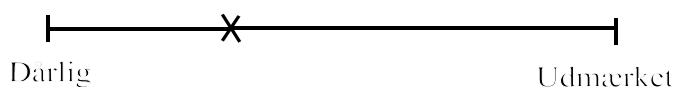
Test, om middeludbyttet er forskelligt ved de 2 metoder.

Da man ikke er sikker på, at forudsætningerne for en parametrisk test er opfyldt, så vælges at udføre en rangtest

**Opgave 15.8**

Med henblik på markedsføring af dansk Feta-ost i et mellemøstligt land gennemførtes en prøvesmagningsundersøgelse i det pågældende land. Som et led i undersøgelsen medvirkede 32 smagsdommere ved en bedømmelse af 4 ostetyper, hvoraf 2 var bestemte ostefabrikater fra det pågældende land (Feta-typerne 1 og 2), medens de 2 andre var danske, henholdsvis UF-Feta-ost og traditionel dansk Feta-ost. De 32 dommere inddeltes tilfældigt i 4 grupper a 8. Hver af dommerne i samme gruppe fik en prøve af samme ostetype, jfr. nedenstående skema, idet osteprøverne præsenteredes, så smagerne ikke havde mulighed for at identificere de enkelte fabrikater og heller ikke fik oplyst deres oprindelsesland.

Ved hver prøvesmagning markeredes vurderingen af osteprøven ved afsætning af et kryds på et standardliniestykke



hvorefter krydset på sædvanlig måde "oversattes" til en 0 - 100 - skala. Herved fremkom følgende forsøgsresultater:

|                                   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Udenlandsk Feta-type 1 (gruppe 1) | 45 | 68 | 33 | 61 | 48 | 22 | 60 | 48 |
| Udenlandsk Feta-type 2 (gruppe 2) | 86 | 95 | 59 | 75 | 69 | 80 | 86 | 59 |
| Dansk UF-Feta (gruppe 3)          | 81 | 54 | 69 | 63 | 65 | 88 | 61 | 87 |
| Traditionel dansk Feta (gruppe 4) | 35 | 52 | 70 | 45 | 42 | 60 | 43 | 48 |

Foretag en statistisk analyse af forsøgsresultaterne.

**Opgave 15.9**

En å er blevet kraftigt forurenset. For at få et indtryk af, om forureningen påvirker de tre vigtigste fiskearter i samme grad, fangedes nogle fisk, som anbragtes i passende bassiner. En ekspert iagttog fiskene og gav en vurdering af deres helbredstilstand ved for hver fisk at afsætte et kryds på et standardliniestykke, hvis ene endepunkt svarer til meget sygeligt udseende og unormal opførsel, og hvis andet endepunkt svarer til rask udseende og normal opførsel. Derefter opdeltes hvert standardliniestykke efter en skala fra 0 til 25. Idet de tre arter kaldes A, B og C fremkom følgende tabel:

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | 13 | 11 | 16 | 13 | 2  | 7  | 11 | 13 |    |    |
| B | 24 | 15 | 11 | 19 | 14 | 16 | 18 | 19 | 15 | 7  |
| C | 22 | 14 | 20 | 11 | 17 | 10 | 15 | 11 | 16 | 21 |

Test på grundlag af ovenstående, om det kan antages, at de tre fiskearter lider lige meget under forureningen.

**Opgave 15.10**

Hver af 5 personer testes ved 5 forskellige typer intelligensprøve. De opnåede pointantal var følgende:

|          |   | Testtyper |    |    |    |    |
|----------|---|-----------|----|----|----|----|
|          |   | 1         | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Personer | 1 | 79        | 75 | 82 | 85 | 77 |
|          | 2 | 68        | 74 | 68 | 72 | 65 |
|          | 3 | 72        | 72 | 61 | 70 | 68 |
|          | 4 | 67        | 70 | 65 | 72 | 62 |
|          | 5 | 54        | 66 | 51 | 61 | 54 |

Idet vi opfatter personerne som blokke, skal man teste, om de 5 forskellige testtyper er lige vanskelige.

- 1) ved et parametrisk test,
- 2) ved et ikke-parametrisk test.

**Opgave 15.11**

Ved en international konkurrence deltog 8 kunstskejtøbere, hvis præstationer blev bedømt af 6 dommere, som hver gav hver enkelt deltager en samlet karakter for løbets tekniske gennemførelse. Denne karakter er fremkommet ved optælling af antallet af "figurer" i løbet, vægtet med disses sværhedsgrad. 6.0 var højeste karakter.

Resultaterne var:

| Skøjteløber nr.   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Engelsk dommer    | 5.5 | 5.7 | 5.3 | 5.8 | 5.9 | 6.0 | 5.8 | 5.2 |
| Svensk dommer     | 5.5 | 5.8 | 5.4 | 5.8 | 5.8 | 6.0 | 5.8 | 5.3 |
| Norsk dommer      | 5.3 | 5.6 | 5.5 | 5.6 | 5.7 | 5.9 | 5.6 | 5.4 |
| Amerikansk dommer | 5.7 | 5.7 | 5.6 | 6.0 | 5.8 | 6.0 | 5.9 | 5.6 |
| Bulgarsk dommer   | 4.9 | 5.0 | 5.1 | 5.0 | 5.2 | 5.5 | 5.8 | 5.4 |
| Russisk dommer    | 5.4 | 5.7 | 5.5 | 5.7 | 5.7 | 5.3 | 5.9 | 5.4 |

Ved konkurrencen var den opnåede pointsum afgørende for løbernes placering, dvs. nr. 6 vandt 1. præmie, løber nr. 7 2. præmie osv.

Der var tvivl om dommerne i middel dømte ens.

- 1) Undersøg ved en ikke parametrisk variansanalyse (Friedmanns test) om dette er korrekt.
- 2) Kommenter forudsætningerne for den anvendte analysemetode.

**Opgave 15.12**

Ved besættelsen af 10 ens laborantstillinger i en virksomhed foretog ledelsen en rangordning af alle ansøgernes formodede egnethed til jobbet baseret på en personlig samtale og gennemsyn af eksamenspapirer m.v. Derefter ansatte man de 10, som rangerede øverst på listen.

Et år senere foretager man nu igen en rangordning af de 10, som blev ansat, men denne gang baseret på, hvordan de selv og andre medarbejdere vurderer, at de klarer jobbet:

| Ansatte   | Rangtal før ansættelsen | Rangtal efter ansættelsen |
|-----------|-------------------------|---------------------------|
| Andresen  | 3                       | 3                         |
| Carlsen   | 7                       | 4                         |
| Davidsen  | 2                       | 6                         |
| Hansen    | 10                      | 8                         |
| Jørgensen | 6                       | 9                         |
| Madsen    | 4                       | 2                         |
| Petersen  | 5                       | 7                         |
| Rasmussen | 1                       | 1                         |
| Sørensen  | 9                       | 10                        |
| Verner    | 8                       | 5                         |

Foretag en analyse af, om der må antages at være en (monoton) sammenhæng mellem forudsigelser af egnethed og faktisk egnethed.

**Opgave 15.13**

Kontrollen med en bestemt vintypes modning kan enten foretages ved en kompliceret kemisk analysemetode eller ved hjælp af en eksperismagerbedømmelse.

Ved den første metode fremtræder resultatet af analysen som en "modningsprocent", medens der ved den anden metode gives en heltalskarakter efter en skala fra 0 (dårligst mulig bedømmelse) til 10 (bedst mulig bedømmelse).

Nedenstående er anført resultatet af 12 vinprodukters bedømmelse efter de to metoder.

| Prøve          | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Kemisk analyse | 73.8 | 62.0 | 89.5 | 52.2 | 76.3 | 43.3 | 92.0 | 88.8 | 81.0 | 76.2 | 65.9 | 74.4 |
| Smagsvurdering | 9    | 5    | 10   | 3    | 7    | 5    | 9    | 10   | 8    | 8    | 6    | 6    |

Foretag en statistisk analyse af, om der er en sammenhæng mellem de to bedømmelsesmetoder.

## 16 Statistisk Kvalitetsstyring

### 16.1. Indledning.

Formålet med en kvalitetsstyring (også kaldet kvalitetskontrol<sup>1</sup>) er at kontrollere, styre og forbedre kvaliteten af et produkt. Endvidere at nedsætte virksomhedens samlede styrings- og fejlmkostninger. Forskellige undersøgelser antyder, at mange virksomheder ved overgang til kvalitetsstyring kan nedsætte deres samlede kvalitetsomkostninger fra størrelsesordenen 10-15% af omsætningen til 3-5% af denne.

Der er på international basis opstillet krav, som skal opfyldes for opnåelse af en "kvalitetscertificering" af virksomheders kvalitetsstyring, bl.a. anført i serien af "ISO 9000-standarder". Virksomheder, som opfylder de pågældende krav, kan opnå et såkaldt "ISO 9000 - certifikat".

Overordnet kan man ved et produkt (eller en serviceydelses) kvalitet forstå den grad, i hvilken produktet opfylder forbrugernes forventninger eller krav (fitness for use) .

Mere præcist skelner man mellem tre typer kvalitet:

- 1) Et produkts "**konstruktionskvalitet**" (Quality of Design): Hermed forstås den kvalitet, som man beslutter produktet skal have.
- 2) Et produkts "**produktionskvalitet**" (Quality of Conformance): Hermed forstås den grad, i hvilken det færdige produkt efter produktions- og indkøbsfasen har opnået de i konstruktionskvaliteten fastsatte produkttegenskaber.
- 3) Et produkts "**markedsførings-/servicekvalitet**" (Quality of Marketing/Service): Hermed forstås den grad, i hvilken det færdige produkts markedsføring og service stemmer overens med de i konstruktionskvaliteten fastsatte principper for produktets markedsføring og service.

Eksempelvis er en dyr bil (Mercedes!) og en billig bil (Lada) produkter med forskellig konstruktionskvalitet, hvorimod produktionskvaliteten udmærket kan være den samme eller endog bedst for den billige bil.

Vi begrænser os i nærværende kapitel til omtale af kvalitetsstyring i egentligt materialeproducerende virksomheder.

I afsnit 16.2 gennemgås de grundlæggende metoder og begreber i **statistisk proceskontrol** ( SPC = Statistical Process Control) . Formålet med denne er at styre produktionsprocesserne således, at fejlproduktion forebygges.

I afsnit 16.3 gennemgås de grundlæggende metoder og begreber i **statistisk godkendelseskontrol** . Formålet med denne er at kontrollere, om modtagne råvarer, bearbejdede emner og færdige produkter opfylder de stillede krav.

---

<sup>1</sup> På engelsk kaldet "Quality Control" eller "Quality Management" .

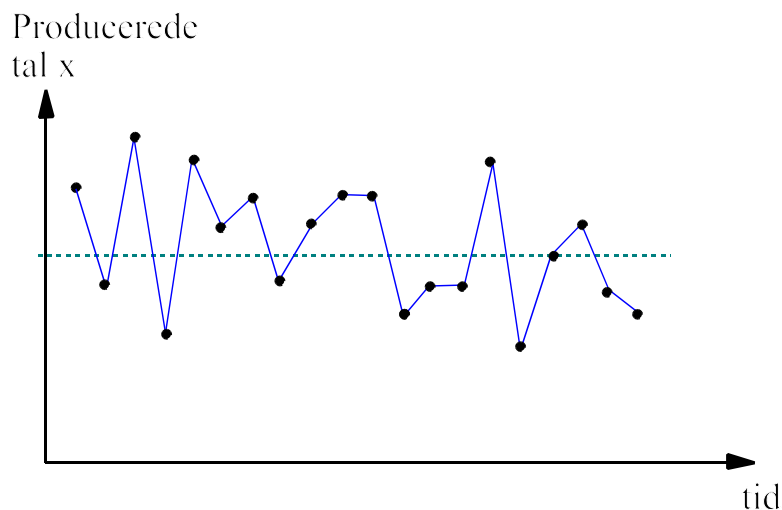
## 16.2. Statistisk Proceskontrol

### 16.2.1 Indledning.

Statistisk proceskontrol (SPC) kaldes også ofte for “statistisk processtyring”, fordi hovedformålet er en styring af produktionsprocesserne med henblik på en løbende kvalitetsforbedring af disse. En industriel produktionsproces kan formelt betragtes som en talfrembringende proces. Eksempler herpå er angivet i det følgende skema:

| nr | Produktion af | Frembragte tal                                                           |
|----|---------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1  | Kunstgødning  | Kvælstofindhold                                                          |
| 2  | Jernbjælker   | Trykstyrke , Siliciumindhold                                             |
| 3  | TV-apparater  | Antal loddefejl pr. apparat                                              |
| 4  | Patroner      | Antal defekte patroner i en stikprøve                                    |
| 5  | Leverpostej   | 0: Dårlig smag , 1: Mindre god smag , 2: God smag , 3: Særdeles god smag |
| 6  | Vin           | Alkoholprocent                                                           |
| 7  | Flasker       | Rumindhold                                                               |
| 8  | Film          | 0: defekt, 1: ikke defekt                                                |
| 9  | Tekstil       | Antal fejl pr. m <sup>2</sup>                                            |
| 10 | Aksler        | Diameter                                                                 |

**Proces i statistisk kontrol.** Ved enhver proces vil de frembragte tal udvise en "naturlig" variation, uanset hvor godt processen er planlagt og hvor omhyggeligt den bringes til udførelse og vedligeholdes. Denne "naturlige" variation der i praksis ikke kan kontrolleres, er et resultat af talrige små påvirkninger/variationsårsager ("common causes"). Hvis en proces **kun** er påvirket af tilfældige variationsårsager, siges den at være i **statistisk kontrol**.



De producerede tal er uafhængige observationer fra en population med en bestemt sandsynlighedsfordeling. Den dertil svarende statistiske variabel kaldes procesvariabeln. Er en proces i statistisk kontrol kan man derfor på basis af en stikprøve estimere dens parametre, og kan eksempelvis beregne størrelsen af en kommende fejlproduktion.

**Proces ude af statistisk kontrol.** Udover den tilfældige variation kan der forekomme en variation, som kan tilskrives bestemte årsager, f.eks. maskiner, operatører eller råvarer; maskiner kan være indstillet forkert, en operatør kan være træt eller uopmærksom, et råvareparti kan være af dårlig kvalitet. Man taler i disse situationer om væsentlige, specielle eller påviselige variationsårsager ("assignable causes")

Hvis en proces i løbet af et givet tidsrum går fra at være i statistisk kontrol i en procestilstand til at være i statistisk kontrol i en anden procestilstand, har processen været **ude af statistisk kontrol** indenfor det pågældende tidsrum.

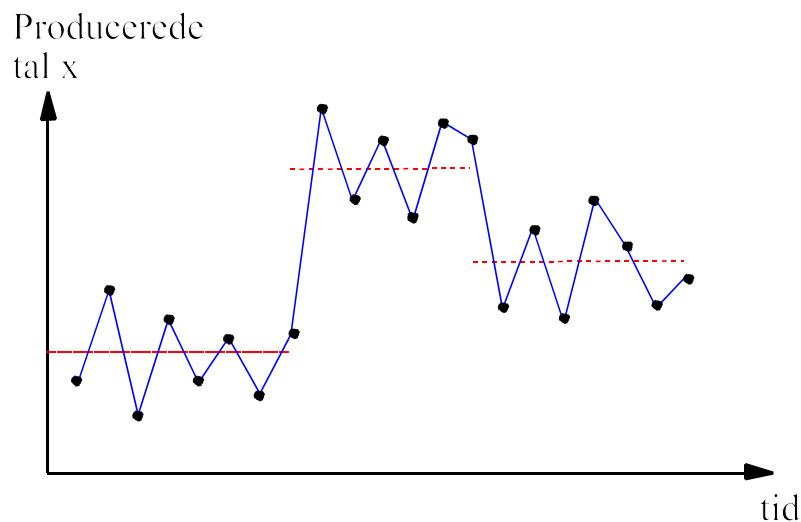


**Fig.16.2.** *Proces ude af statistisk kontrol*

### 16.2.2 Opbygning og alarmkriterier for kontrolkort .

Kontrolkort (også kaldet Shewhart kontrolkort efter opfinderen) er baseret på, at man af den løbende produktion med regelmæssige mellemrum udtager stikprøver af størrelsen  $n$ . Figur 16.3 viser en normalfordeling sammen med et enkelt kontrolkort.

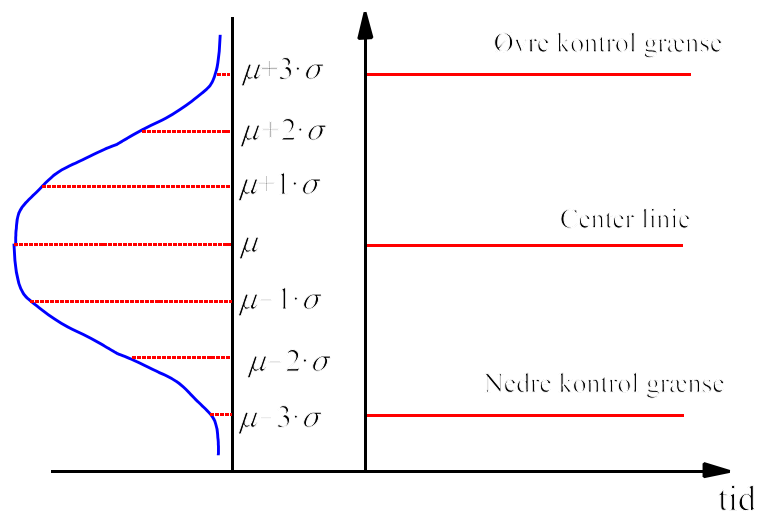


**Fig 16.3.** *Kontrolkort med øvre og nedre kontrolgrænser*

Hvis en på basis af stikprøven beregnet parameter eksempelvis gennemsnittet  $\bar{x}$  holder sig indenfor nogle kontrolgrænser, antager man at processen er i kontrol med hensyn til denne parameter. Hvis den beregnede størrelse ligger udenfor kontrolgrænserne vil man "slå alarm" fordi så kan det tænkes at processen er kommet ud af kontrol.

Da sandsynligheden for, at et punkt falder udenfor kontrolgrænser på  $\mu \pm 3 \cdot \sigma$  er ca. 0.0027 er processen muligvis ude af statistisk kontrol, hvis dette faktisk sker. Man må så undersøge tilfældet nærmere, og muligvis justere på processen. Det kan naturligvis være en "falsk alarm", men erfaringen viser, at ved valg af  $3 \sigma$  grænser er dette sjældent.

### Stikprøvernes størrelse $n$ .

Generelt gælder det, at det er bedre at tage små stikprøver på 4-5 emner ud med korte mellemrum end at tage store stikprøver på 20-25 emner ud med lange mellemrum. Formålet er jo, at man ønsker hurtigt at opdage, hvis processen er ved at komme ud af kontrol (fordi eksempelvis en maskine er ved at gå i stykker). Bruger man store stikprøver vil man kunne opdage selv forholdsvis små forskydninger i niveauet, men på grund af at der går temmelig lang tid mellem man tager stikprøverne, kan en stor katastrofal forskydning blive opdaget for sent.

### "Alarmkriterier".

Man finder der er grund til at tro at processen er ude af kontrol (at slå alarm), hvis der sker et af følgende (se også de følgende figurer).

- 1) 1 punkt (mindst) udenfor  $3 \cdot \sigma$  - kontrolgrænserne
- 2) 9 på hinanden følgende punkter alle over /under centerlinien
- 3) 6 på hinanden følgende punkter stiger i værdi eller falder i værdi.
- 4) 2 af 3 på hinanden følgende punkter falder udenfor en  $2 \cdot \sigma$  - grænse
- 5) 4 ud af 5 på hinanden følgende punkter falder udenfor en  $1 \cdot \sigma$  - grænse.

1)

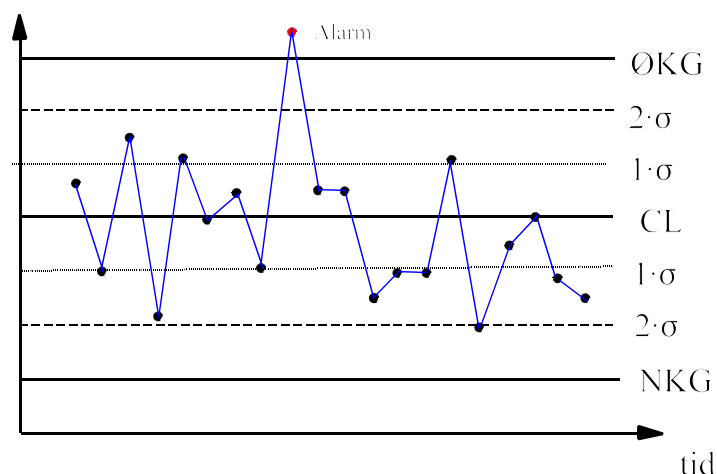
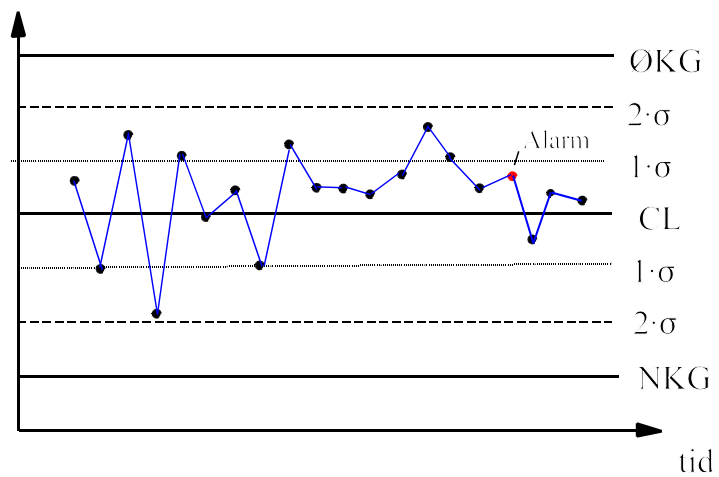


**Fig 16.4.** Mindst 1 punkt udenfor  $3 \cdot \sigma$  - kontrolgrænser

2)

**Fig 16.5.**

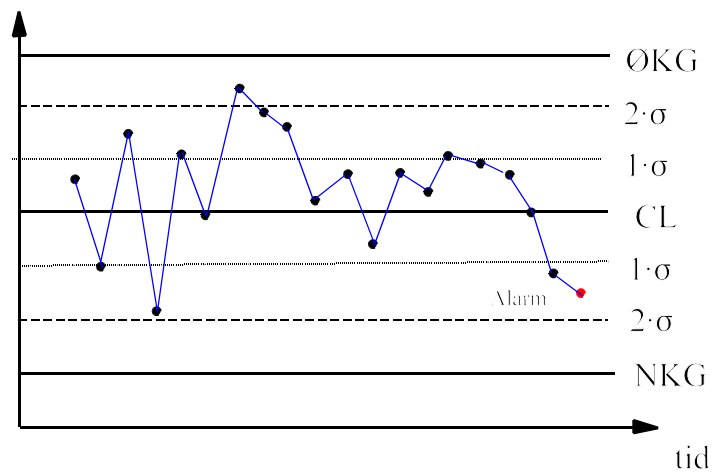
9 på hinanden følgende punkter over centerlinien eller 9 på hinanden følgende punkter under centerlinien



3)

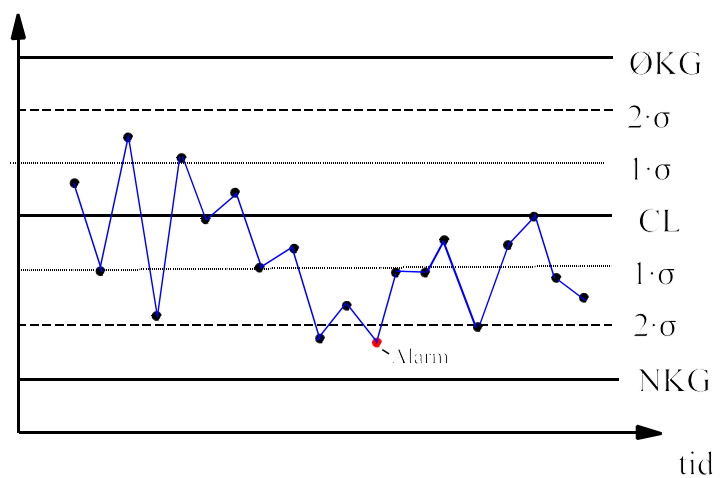
**Figur 16.6**

6 på hinanden følgende punkter stiger i værdi eller falder i værdi.



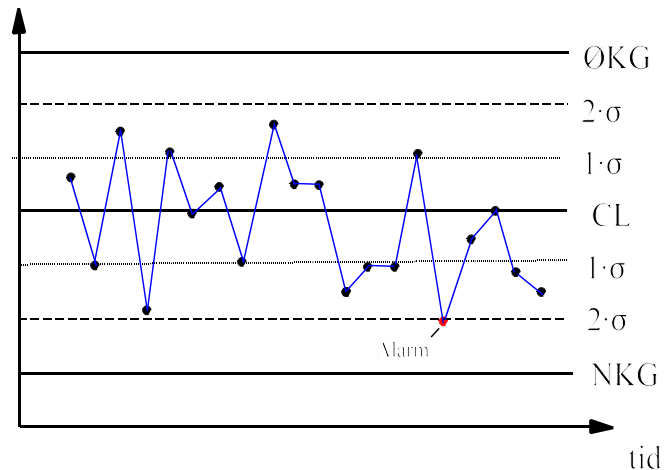
4)

**Fig 16.7.** Mindst 2 punkter ud af 3 på hinanden følgende punkter udenfor en 2·σ - grænse



5)

**Fig 16.8.** Mindst 4 punkter ud af 5 på hinanden følgende punkter falder udenfor en  $1 \cdot \sigma$  - grænse.



### 16.2.3. Kontrollkortsanalyse.

Anvendelsen af kontrollkort kræver, at processen fra starten er i statistisk kontrol. Indførelsen af proceskontrol i en “ny” produktion kræver derfor, at man ved en såkaldt kontrollkortanalyse får undersøgt og om nødvendigt justeret processen således, at den kommer i statistisk kontrol. Først når dette er tilfældet, kan man estimere de ukendte parametrene og konstruere kontrollkortet.

Ved en kontrollkortanalyse foretages en række målinger af procesvariablen. Samtidig med en måling registreres en række oplysninger, f.eks. observationstidspunkt, temperatur, råmaterialeparti, arbejdsbold m.v., samt hvilke personer der har foretaget målingerne. På grundlag heraf inddeles måltallene i “rationelle undergrupper”, inden for hvilke de formodes at være produceret under samme væsentlige betingelser. Endvidere tilstræber man, at antal målinger er det samme i hver undergruppe.

Indsamling og opdeling af et observationsmateriale i rationelle undergrupper kræver ofte en betydelig teknisk indsigt i den betragtede produktionsproces. Alle de i praksis uundgåelige variationsårsager skal bidrage til den faktiske variation indenfor undergrupper, hvorimod alle de variationsårsager, som man mener kan være væsentlige variationsårsager, ikke må bidrage til variationen indenfor undergrupper. De variationsårsager, som måske er væsentlige, må altså kun indvirke fra undergruppe til undergruppe. Mener man således, at tal produceret af forskellige maskiner kan være en væsentlig variationsårsag, så må disse tal ikke være placeret i samme undergruppe.

På basis af undergrupperne konstrueres så kontrollkort som beskrevet i eksempel 16.1. Falder en undergruppe udenfor de beregnede kontrolgrænser, så må man undersøge nærmere hvad årsagen kan være. Er det eksempelvis en gruppe hvis tal er produceret af en bestemt maskine, så må man ofre en hovedreparation på maskinen eller kassere den. På den måde får man ikke alene processen i kontrol, men man øger også kvaliteten af den igangværende proces.

Der udarbejdes forskellige typer kontrollkort afhængig af sandsynlighedsfordelingen for procesvariablen  $X$ . I afsnit 16.2.3.1 behandles tilfældet hvor  $X$  approksimativt er en kontinuert normalfordelt variabel (jævnfør tilfældene 1, 2, 6, 7 og 10 i skemaet på side 125), mens afsnit 16.2.3.2 ser på de tilfælde, hvor  $X$  approksimativt er binomialfordelt (tilfældene 4 og 8) eller Poissonfordelt (tilfældene 3 og 9). Det er i alle tilfælde væsentligt, at observationerne er uafhængig, men mindre afvigelser fra den forventede sandsynlighedsfordeling ikke vil give nogen væsentlig forøgelse i falske alarmer.

**16.2.3.1 Procesvariablen  $X$  er kontinuert.**

Lad os antage at processen er i kontrol med en middelværdi på  $\mu$  og en spredning på  $\sigma$ . Vi kender ikke de eksakte værdier, men ønsker at beregne estimater herfor.

For at kunne beregne kontrolgrænserne for  $\bar{x}$ -kortet:  $\bar{x} \pm 3 \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}$  må man kende et estimat for

spredningen  $\sigma$ . Man starter derfor altid med at lave et kontrolkort for spredningen. Man udtager i produktionen løbende ("af folk på gulvet") stikprøver. Da det tidligere var besværligt at beregne estimatet  $s$ , foretrak man ofte, at benytte variationsbredderne  $R_i$  som et mål for spredningen. Derfor vil man stadig møde mange "R-kontrolkort" selv om "s-kontrolkort" er blevet mere almindelige.

I oversigt 16.1 er angivet de formler der skal anvendes ved beregningerne, og de dertil hørende konstanter findes i tabel 4. En nærmere forklaring på formlerne kan også findes i oversigt 16.1.

**Eksempel 16.1. Kontrol af stof i levnedsmiddelprodukt.**

En levnedsmiddelvirkksomhed har problemer med at holde koncentrationen af et skadeligt stof A i et konservesprodukt nede under en øvre tolerancegrænse på 12 enheder pr. gram. Man vælger derfor at få foretaget en kontrolkortanalyse. På basis af tidligere erfaringer inddeles målingerne i 30 undergrupper, som hver har deres karakteristika: (råvarecharge, apparatur, tidspunkt på dagen osv.). For hver undergruppe (som er på 5 målinger) er der af hensyn til de følgende beregninger også beregnet gennemsnit  $\bar{x}_i$ , variationsbredde  $R_i$  og spredning  $s_i$ .

| Gruppe | Målinger    | $\bar{x}_i$ | $R_i$ | $s_i$  | Gruppe | Målinger      | $\bar{x}_i$ | $R_i$ | $s_i$  |
|--------|-------------|-------------|-------|--------|--------|---------------|-------------|-------|--------|
| 1      | 13 8 2 5 8  | 7.2         | 11    | 4.0866 | 16     | 16 11 14 8 17 | 13.2        | 9     | 3.7014 |
| 2      | 0 6 1 9 15  | 6.2         | 15    | 6.1400 | 17     | 9 4 4 8 9     | 6.8         | 5     | 2.5884 |
| 3      | 4 2 4 3 4   | 3.4         | 2     | 8.944  | 18     | 6 1 1 3 13    | 4.8         | 12    | 5.0200 |
| 4      | 3 15 8 3 5  | 6.8         | 12    | 5.0200 | 19     | 7 0 5 7 2     | 4.2         | 7     | 3.1145 |
| 5      | 5 10 5 4 0  | 4.8         | 10    | 3.5637 | 20     | 10 0 10 12 7  | 7.8         | 12    | 4.7117 |
| 6      | 9 5 13 7 7  | 8.2         | 8     | 3.0332 | 21     | 3 7 5 10 12   | 7.4         | 9     | 3.6469 |
| 7      | 0 4 4 3 9   | 4.0         | 9     | 3.2404 | 22     | 3 0 10 5 4    | 4.4         | 10    | 3.6469 |
| 8      | 9 3 0 6 0   | 3.6         | 9     | 3.9115 | 23     | 3 3 0 6 9     | 4.2         | 9     | 3.4205 |
| 9      | 14 0 0 5 3  | 4.4         | 14    | 5.7706 | 24     | 0 2 3 6 7     | 3.6         | 7     | 2.8810 |
| 10     | 3 9 5 0 2   | 3.8         | 9     | 3.4205 | 25     | 2 3 5 4 10    | 4.8         | 8     | 3.1145 |
| 11     | 5 8 0 7 8   | 5.6         | 8     | 3.3616 | 26     | 3 1 4 2 4     | 2.8         | 3     | 1.3038 |
| 12     | 3 2 2 7 4   | 3.6         | 5     | 2.0736 | 27     | 2 4 5 13 4    | 5.6         | 11    | 4.2778 |
| 13     | 5 11 14 8 3 | 8.2         | 11    | 4.4385 | 28     | 0 22 7 2 11   | 8.4         | 22    | 8.7350 |
| 14     | 13 5 5 12 7 | 8.4         | 8     | 3.8471 | 29     | 3 5 9 8 6     | 6.2         | 6     | 2.3875 |
| 15     | 7 0 1 0 6   | 2.8         | 7     | 3.4205 | 30     | 9 7 10 13 0   | 7.8         | 13    | 4.8683 |
| SUM    |             |             |       |        |        |               | 173.0       | 281   | 113.64 |

- 1) Foretag ved hjælp af  $\bar{x}$  – og R - kort en kontrolkortanalyse og opstil kontrolkort, der kan benyttes til en løbende kontrol af indholdet af det skadelige stof.
- 2) Idet der er fastsat en øvre tolerancegrænse på 12, skal man finde sandsynligheden for at én måling falder udenfor, når processen antages i kontrol med de i punkt 1 fastsatte kontrolgrænser

**Løsning.**

1) Først foretages en  $R$  - kort analyse.

Idet  $\bar{R} = \frac{281}{30} = 9.366$  er grænserne for  $R$  - kortet ifølge oversigt 16.1 (og tabel 4):

$$NKG_R = D_3 \cdot \bar{R} = 0 \cdot 9.366 = 0 \text{ og } \text{Ø}KG_R = D_4 \cdot \bar{R} = 2.115 \cdot 9.366 = 19.809.$$

Det ses, at alle grupper på nær gruppe 28 falder indenfor grænserne. Man foretager nu en nærmere undersøgelse af hvilke forhold i gruppe 28 der kan tænkes at bevirke dette. Hvis det eksempelvis skyldes et bestemt apparat, kan man kassere dette eller reparere det. Vi vil i det følgende udskyde gruppen, revidere grænserne og se om de resterende grupper nu falder indenfor de nye grænser.

Vi får  $\bar{R}^* = \frac{281 - 22}{29} = 8.931$  og dermed

$$NKG_R = D_3 \cdot \bar{R}^* = 0 \cdot 8.931 = 0 \text{ og } \text{Ø}KG_R = D_4 \cdot \bar{R}^* = 2.115 \cdot 8.931 = 18.889.$$

Nu falder alle grupper indenfor kontrolgrænserne, og vi konkluderer derfor at processen er i

kontrol med hensyn til spredningen, og at denne estimeres ved  $\tilde{\sigma} = \frac{\bar{R}^*}{d_2} = \frac{8.931}{2.326} = 3.840$

Dernæst foretages en  $\bar{x}$  - kort analyse.

$\bar{x}^* = \frac{173 - 8.4}{29} = 5.676$ , og dermed

$$NKG_{\bar{x}} = \bar{x}^* - A_2 \cdot \bar{R}^* = 5.676 - 0.577 \cdot 8.931 = 0.5228$$

$$\text{Ø}KG_{\bar{x}} = \bar{x}^* + A_2 \cdot \bar{R}^* = 5.676 + 0.577 \cdot 8.931 = 10.829$$

Det ses, at alle grupper på nær gruppe 16 falder indenfor grænserne. Man foretager nu en nærmere undersøgelse af hvilke forhold i gruppe 16 der kan tænkes at bevirke dette. Vi vil i det følgende udskyde gruppen, revidere grænserne og se om de resterende grupper nu falder indenfor de nye grænser.

$\bar{x}^{**} = \frac{173 - 8.4 - 13.2}{28} = 5.407$ .

Strengt taget burde vi også revidere  $R$  - kortet, men da en udskydelse af punkt 16 kun vil give en ubetydelig ændring af  $R$  - grænserne beholdes disse.

$$NKG_{\bar{x}} = \bar{x}^{**} - A_2 \cdot \bar{R}^* = 5.407 - 0.577 \cdot 8.931 = 0.2538$$

$$\text{Ø}KG_{\bar{x}} = \bar{x}^{**} + A_2 \cdot \bar{R}^* = 5.407 + 0.577 \cdot 8.931 = 10.560$$

Vi antager herefter at processen også er i kontrol med hensyn til middelværdien.

De to kort med de reviderede grænser kan nu benyttes til den løbende proceskontrol.

2)  $X$  = koncentrationen af stoffet A ved en enkelt måling.

$X$  antages normalfordelt  $n(5.407, 3.840)$ .

$$P(X > 12.0) = \text{normCdf}(12, \infty, 5.407, 3.84) = \underline{\underline{0.043}}$$



**Eksempel 16.2. Kontrol af stof i levnedsmiddelproduktion.** Samme spørgsmål som i eksempel 16.1, men udarbejd i stedet for  $R$  - kortet et  $s$  - kort.

**Løsning:** Først foretages en  $s$  - kort analyse.

Idet  $\bar{s} = \frac{113.64}{30} = 3.7880$  er grænserne for  $s$  - kortet:

$$NKG_s = B_3 \cdot \bar{s} = 0 \cdot 3.7880 = 0 \text{ og } \text{ØKG}_s = B_4 \cdot \bar{s} = 2.089 \cdot 3.7880 = 7.9132.$$

Det ses, at alle grupper på nær gruppe 28 falder indenfor grænserne. Denne gruppe udskydes og grænserne revideres.

Vi får  $\bar{s}^* = \frac{113.64 - 8.735}{29} = 3.6174$  og dermed

$$NKG_s = B_3 \cdot \bar{s}^* = 0 \cdot 3.6174 = 0 \text{ og } \text{ØKG}_s = B_4 \cdot \bar{s}^* = 2.089 \cdot 3.6174 = 7.5568.$$

Nu falder alle grupper indenfor kontrolgrænserne, og vi konkluderer derfor at processen er i

kontrol med hensyn til spredningen, og at denne estimeres ved  $\tilde{\sigma} = \frac{\bar{s}^*}{c_4} = \frac{3.6174}{0.940} = 3.8483$ .

Dernæst foretages en  $\bar{x}$  - kort analyse.

$\bar{x}^* = \frac{173 - 8.4}{29} = 5.676$ , og dermed

$$NKG_{\bar{x}} = \bar{x}^* - A_3 \cdot \bar{s}^* = 5.676 - 1.427 \cdot 3.6174 = 0.5140$$

$$\text{ØKG}_{\bar{x}} = \bar{x}^* + A_3 \cdot \bar{s}^* = 5.676 + 1.427 \cdot 3.6174 = 10.838.$$

Det ses, at alle grupper på nær gruppe 16 falder indenfor grænserne. Man foretager nu en nærmere undersøgelse af hvilke forhold i gruppe 16 der kan tænkes at bevirke dette. Vi vil i det følgende udskyde gruppen, revidere grænserne og se om de resterende grupper nu falder indenfor de nye grænser.

$\bar{x}^{**} = \frac{173 - 8.4 - 13.2}{28} = 5.407$ .

Strengt taget burde vi også revidere  $R$  - kortet, men da en udskydelse af punkt 16 kun vil give en ubetydelig ændring af  $R$  - grænserne beholdes disse.

$$NKG_{\bar{x}} = \bar{x}^{**} - A_3 \cdot \bar{s}^* = 5.407 - 1.427 \cdot 3.674 = 0.2450$$

$$\text{ØKG}_{\bar{x}} = \bar{x}^{**} + A_3 \cdot \bar{s}^* = 5.407 + 1.427 \cdot 3.674 = 10.569$$

Vi antager herefter at processen også er i kontrol med hensyn til middelværdien.

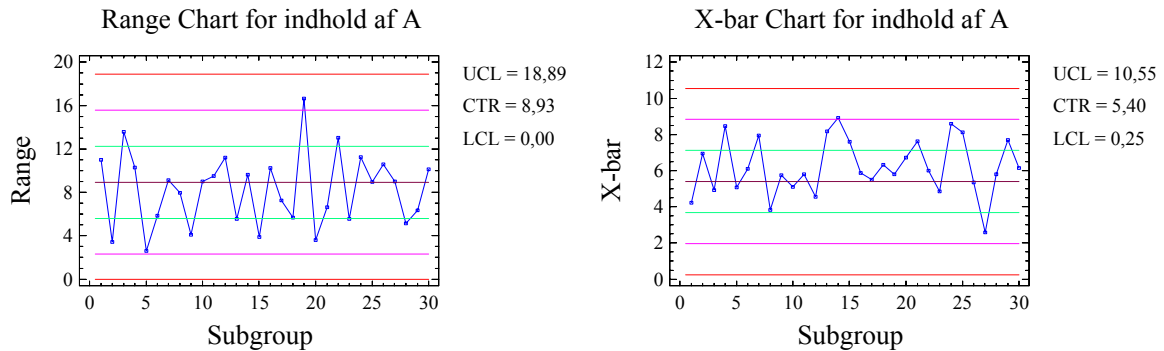
De to kort med de reviderede grænser kan nu benyttes til den løbende proceskontrol.



**Eksempel 16.3. Løbende kontrol.**

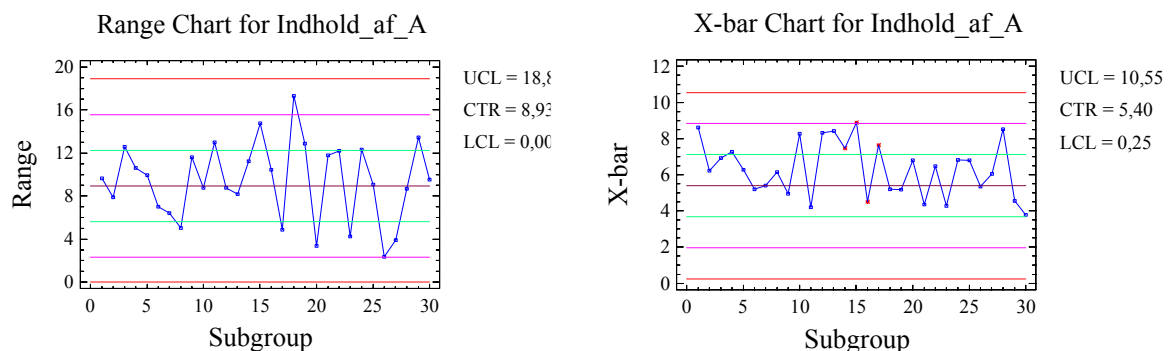
De i eksempel 16.1 fundne kontrollkort er i de følgende dage blevet benyttet til løbende kontrol af processen.

1) I de første 30 dage gav det følgende resultat:



Er processen stadig i kontrol?

2) Man har nu en mistanke om, at koncentrationerne af A har ændret sig. Kan dette bekræftes af kontrollkortene for de følgende 30 dage?

**Løsning:**

1) Det ses, at processen er i kontrol med hensyn til  $R$  - kortet, da punkterne fordeler sig tilfældigt omkring centerlinien, og ingen af "alarmkriterierne" er overtrådt.

For  $\bar{x}$  - kortets vedkommende er alarmregel 2 (9 punkter i træk over centerlinie) tæt ved at være opfyldt, men da dag 17 lige er placeret på centerlinien, så anses processen også her at være i kontrol

2) Det ses, at for  $R$  - kortets vedkommende er alarmregel 3 opfyldt (6 på hinanden følgende punkter nemlig dagene 3,4,5,6,7,8 falder i værdi

For  $\bar{x}$  - kortets vedkommende er alarmregel 5 (mindst 4 punkter ud af 5 falder udenfor en  $1\sigma$  grænse nemlig dagene 12,13,14,15,16,17).

Vi må derfor konkludere, at der er grund til at formode, at en nøjere undersøgelse er påkrævet.



**16.2.3.2 Procesvariablen  $X$  er diskret.**

Vi vil her behandle den situation, hvor  $X$  enten er binomialfordelt eller Poissonfordelt.

**16.2.3.2.1:  $X$  er binomialfordelt**

Procesvariablen  $X$  er bestemt ved :

$X = 0$  Produktion af en enhed uden fejl.

$X = 1$ . Produktion af en enhed med fejl.

Lad der være udtaget en stikprøve på  $n$  enheder.

$X$  er da binomialfordelt  $b(n, p)$  med middelværdien  $\mu = n \cdot p$  og spredningen  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ .

Sædvanligvis benyttes ved kontrol af fejlprocent ikke  $p$ , men  $\mu = n \cdot p$  som parameter, og man siger man laver et  $np$  - kontrolkort.

Som beskrevet i forrige afsnit foretages en kontrolkortanalyse, ved at man opdeler i  $k$  undergrupper, som hver er karakteriseret ved en bestemt egenskab.

For hver undergruppe  $i$  på  $n$  enheder findes antallet af fejlenheder  $y_i$ .

Beregnes nu gennemsnittet  $\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i$ , fås hermed et estimat for  $\mu = n \cdot p$ .

Et estimat for  $p$  er derfor  $\hat{p} = \frac{\bar{y}}{n}$ . Dette forklarer de i oversigt 16.1 angivne formler.

**Eksempel 16.4 ( $np$  - kort)**

En fabrikant af nogle specielle typer keramikfliser som er beregnet til at kunne klare høje temperaturer ønsker udarbejdet et kontrolkort. Ved en løbende produktion af fliser udtoges 40 gange en stikprøve på 100 fliser. De blev undersøgt om de levede op til de forventede kvalitetsmål. Fliser der ikke opfyldte disse krav blev klassificeret som defekte

Resultatet var følgende:

| Gruppe        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Antal defekte | 8 | 6 | 4 | 4 | 3 | 7 | 3 | 6 | 9 | 5  | 7  | 2  | 6  | 11 | 4  | 6  | 7  | 4  | 9  | 6  |

| Gruppe        | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Antal defekte | 6  | 2  | 5  | 7  | 6  | 4  | 6  | 10 | 5  | 5  | 7  | 9  | 3  | 8  | 5  | 3  | 14 | 6  | 4  | 5  |

**Løsning:**

Procesvariablen  $X$  er bestemt ved :

$X = 0$  Produktion af en enhed uden fejl.

$X = 1$ . Produktion af en enhed med fejl.

$X$  er binomialfordelt  $b(40, p)$ , da der er udtaget 40 stikprøver hver på 100 enheder.

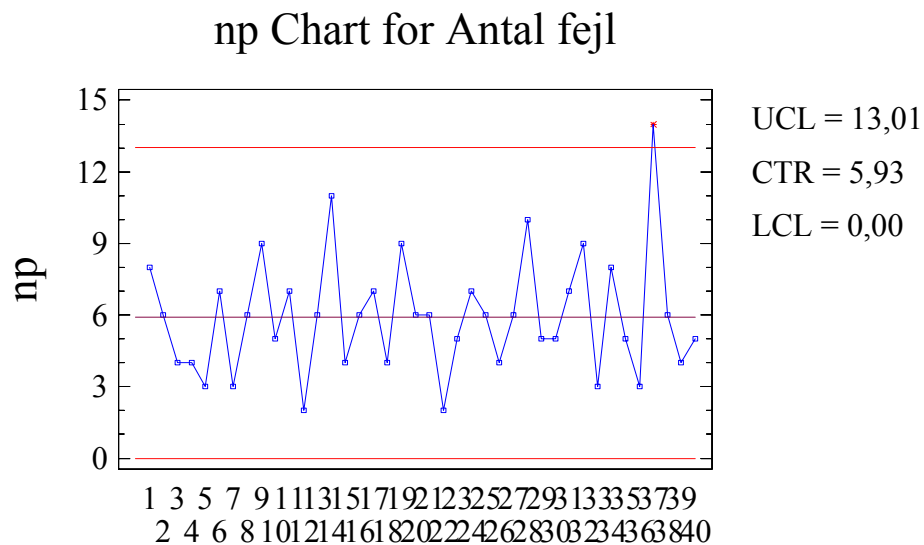
Der er i alt 237 defekte fliser fordelt på 40 stikprøver, dvs. i gennemsnit  $\bar{y} = \frac{237}{40} = 5.925$ .

Af oversigt 16.1 fås derfor kontrolgrænserne

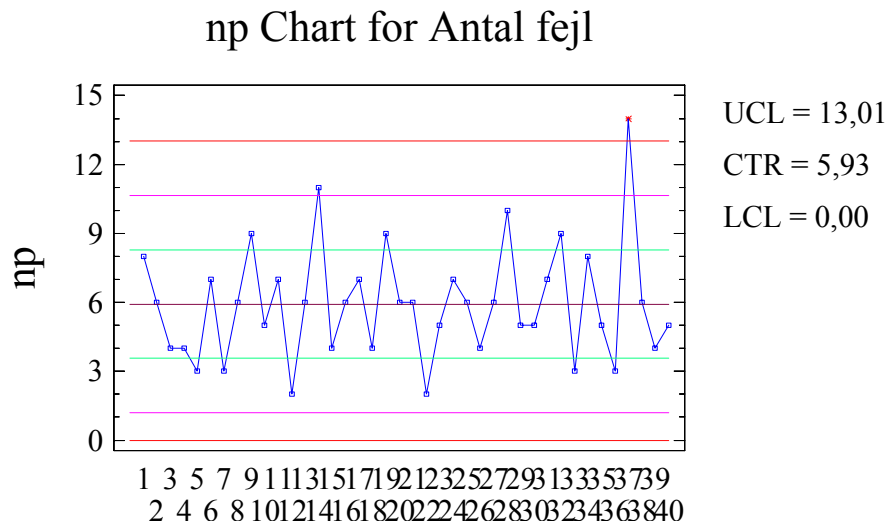
$$OKG = \bar{y} + 3 \cdot \sqrt{\bar{y} \cdot \left(1 - \frac{\bar{y}}{n}\right)} = 5.925 + 3 \cdot \sqrt{5.925 \cdot \left(1 - \frac{5.925}{100}\right)} = 5.925 + 7.0828 = 13.008$$

$$NKG = 5.925 - 3 \cdot \sqrt{5.925 \cdot \left(1 - \frac{5.925}{100}\right)} = 5.925 - 7.0828 = -1.1578 \text{ dvs. } NKG = 0$$

Det foreløbige  $np$  - kort får med de observerede punkter følgende udseende:



Da punkt 37, som det ses, falder udenfor kontrolgrænserne, foretoges en nærmere undersøgelse af produktionsforholdene på det pågældende tidspunkt, men der blev herved ikke afsløret nogen tegn på væsentlige variationsårsager, jævnfør også, at punkt 37 ikke ligger meget over ØKG. Ved indførelse på kortet af  $2\sigma$  - grænser og  $1\sigma$  - grænser ses, at ingen af de alarmgrænser vi omtalte tidligere bliver overtrådt, jævnfør den nedenfor anførte graf:



Man sluttede nu, at processen indtil videre kunne betragtes som værende i kontrol med en procestilstand på  $\hat{p} = \frac{\bar{y}}{100} = 0,0593$ .



**16.2.3.2.2:  $X$  er Poissonfordelt**

Procesvariablen  $X$  er bestemt ved :

$X$  = antal fejl i en stikprøve på  $n$  enheder.

$X$  antages Poissonfordelt  $p(n \cdot \mu)$  med middelværdien  $E(X) = n \cdot \mu$  og spredningen

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot \mu}.$$

Som beskrevet i forrige afsnit foretages en kontrolkortanalyse, ved at man opdeler i  $k$  undergrupper, som hver er karakteriseret ved en bestemt egenskab.

For hver undergruppe  $i$  på  $n$  enheder findes antallet af fejlenheder  $c_i$ .

Beregnes nu gennemsnittet  $\bar{c} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k c_i$ , fås hermed et estimat for  $E(X) = n \cdot \mu$ .

Vi har derfor at et estimat for  $\mu$  er  $\tilde{\mu} = \frac{\bar{c}}{n}$ . Dette forklarer de i oversigt 16.1 angivne formler for kontrolkort.

**Eksempel 16.5.(c - kort)**

Ved en tekstilproduktion taltes antal fejl pr. 100  $m^2$  klæde. Følgende resultater fandtes (tidsmæssig rækkefølge for produktionen) :

| nr         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| antal fejl | 3 | 3 | 6 | 3 | 0 | 1 | 3 | 5 | 8 | 7  | 4  | 10 | 5  | 5  | 5  | 4  | 2  | 4  | 5  | 1  | 2  | 0  | 1  | 1  | 4  |

Med henblik på en kontrolkortanalyse beregnes:  $\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k} = \frac{92}{25} = 3.68$

$$NKG = 3.68 - 3 \cdot \sqrt{3.68} < 0, \text{ dvs. } NKG = 0$$

$$ØKG = 3.68 + 3 \cdot \sqrt{3.68} = 9.435$$

Punktet (12,10) falder uden for kontrolgrænserne, dvs. processen formodes at have været ude af statistisk kontrol på det pågældende tidspunkt. Fjernes den pågældende undergruppe, fås følgende reviderede kontrolgrænser ud fra den reviderede estimerede procestilstand:

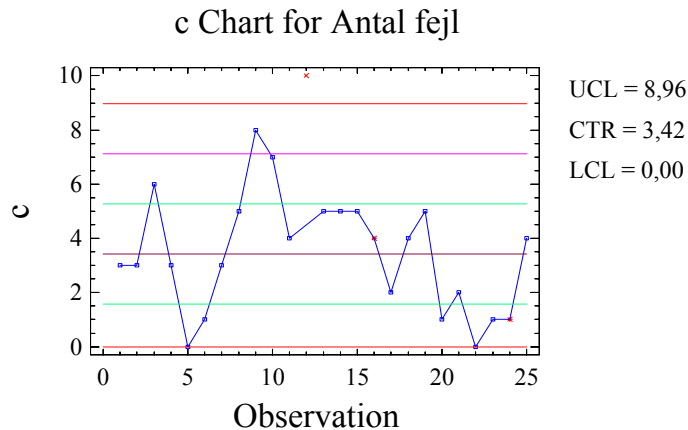
$$\bar{c}_1 = \frac{92 - 10}{24} = 3.42.$$

$$NKG = 0 \text{ (som før),}$$

$$ØKG = 3.42 + 3 \cdot \sqrt{3.42} = 8.96.$$

Ingen af de resterende punkter falder uden for de reviderede kontrolgrænser.

Ved indførelse på kortet af 2  $\sigma$  - grænser og 1  $\sigma$  - grænser ses, at ingen af de alarmgrænser vi omtalte tidligere bliver overtrådt, jævnfør nedenstående graf:



Det antages derfor, at det reviderede c-kort kan benyttes til løbende kontrol.



#### 16.2.4 Tolerancegrænser og kapabilitet

I forbindelse med en fabrikation er der ofte fastsat “tolerancegrænser” eller “specifikationsgrænser (jævnfør eksempel 16.1).

Det kan enten være en nedre tolerancegrænse  $NTG_x$  og/eller en øvre tolerancegrænse  $ØTG_x$ , idet man ved fabrikationen ønsker/forlanger, for procesvariablen  $X$ , at  $X \geq NTG_x$  henholdsvis  $X \leq ØTG_x$ .

Produktion, for hvilken  $X$  falder udenfor tolerancegrænsen/tolerancegrænserne, betragtes altså som fejlproduktion.

I det følgende forudsætter vi, at der er fastsat såvel en nedre som en øvre tolerancegrænse.

Ved “**kapabiliteten**” af en proces (proceskapabiliteten) forstås processens evne til at producere inden for et specificeret toleranceinterval.

Som omtalt, er “det naturlige variationsområde” for en proces en variation på  $6\sigma$ , nemlig fra  $-3\sigma$  til  $+3\sigma$ .

Når der ved en given fabrikation er fastsat et toleranceinterval  $[NTG_x; ØTG_x]$  er det derfor nærliggende at sammenligne dette med intervallet for den naturlige variation  $[-3\sigma; 3\sigma]$ .

Der foreligger herved i en kontrolsituation en af flere muligheder:

- 1)  $ØTG_x - NTG_x \approx 6\sigma$

I dette tilfælde udøves sædvanlig processtyring, f.eks. med anvendelse af  $\bar{x}$ -kort og  $R$ -kort.

En (for stor) fejlproduktion kan ikke undgås, men den kan søges minimeret ved stram styring af processen, hvorved procesniveauet søges fastholdt på midterværdien  $\frac{ØTG_x - NTG_x}{2}$ .

- 2)  $ØTG_x - NTG_x \ll 6\sigma$

I dette tilfælde er en væsentlig fejlproduktion uundgåelig, men søges minimeret ved stram styring af processen, hvorved procesniveauet søges fastholdt på midterværdien  $\frac{ØTG_x - NTG_x}{2}$ .

Eventuelt foretages en totalinspektion; eventuelt gennemføres en produktionsforbedring, hvorved processens spredning formindskes; eventuelt aftales nye tolerancegrænser og/eller en ny pris for det fremstillede produkt osv.

3)  $\overline{OTG}_x - \overline{NTG}_x \gg 6\sigma$

I dette tilfælde kan fejlproduktion (næsten) helt undgås; en processtyring er fortsat anbefalelsesværdig, men kontrollen kan foretages mere afslappet end i tilfældene 1) og 2).

For at skelne mellem på den ene side tilfældene 1) og 2) og på den anden side tilfælde 3), indføres et "kapabilitetsindeks"  $C_p$  defineret ved  $C_p = \frac{\overline{OTG}_x - \overline{NTG}_x}{6\sigma}$

$C_p$  er et mål for processens evne til produktion indenfor toleranceintervallet. Hyppigt antages, at man er i tilfælde 1) eller 2), såfremt  $C_p < 1.33$  (undertiden vælges alternativt 1.66), og i det ønskelige tilfælde 3), når  $C_p > 1.33$  (alternativt 1.66).

## 16.3. Statistisk godkendelseskontrol

### 16.3.1 Indledning.

Vi vil i dette kapitel betragte problemer af følgende type:

#### Eksempel 16.6. Problemstilling

Fra en **leverandør** til en **aftager** kommer varer i partier bestående af  $N$  emner. Hvert parti kan karakteriseres ved en ukendt procent af fejlemner, som kan variere fra parti til parti. Hvis denne fejlprocent er stor, vil aftageren ikke godkende partiet. Hvorledes afgøres, om et parti skal godkendes eller forkastes? ◆

I visse tilfælde er fejlene ved produktionen så uvæsentlige (måske kun skønhedsfejl) at aftagerne ud fra økonomiske overvejelser i en periode har foretrukket helt (eller næsten helt) at undlade en godkendelseskontrol, dvs. leverancerne accepteres uden inspektion.

Omvendt kan der være situationer, hvor konsekvenserne af godkendelse af fejlproduktion er så alvorlige, f.eks. helbredsmæssige konsekvenser for forbrugere af medicin (kritiske fejl), at 100%-kontrol principielt er nødvendig. Produktionen må tilrettelægges, så kritiske fejl ikke forekommer.

Sædvanligvis vil det imidlertid hverken være økonomisk rentabelt ikke at have nogen godkendelseskontrol (mange fejl giver mange klager og store erstatningsomkostninger) eller have en 100% - inspektion af hvert parti (inspektionsomkostningerne bliver for store).

Inspektion af alle emner i et parti stammende fra en massefabrikation af "ens" artikler vil erfaringsmæssigt alligevel sjældent give 100% sikkerhed. Der hævdes at være erfaringer om, at en 100% inspektion af et meget stort antal emner kan være ned til kun 80% effektiv, dvs. at op til 20% af de defekte emner kan slippe igennem kontrollen ved en sådan 100% inspektion (på grund af kedsommeligt rutinearbejde). Hvis kontrollen er destruktiv (bevirker at emnet ødelægges), er en total inspektion naturligvis umulig.

Det mest økonomiske er sædvanligvis at foretage en stikprøvekontrol, udtage nogle emner fra partiet og på grundlag af en vurdering af disse at afgøre, om partiet skal godkendes eller forkastes.

Dette medfører naturligvis, at uanset at kontrollen i gennemsnit fungerer godt, løber aftageren en vis risiko for, at et parti af dårlig kvalitet bliver accepteret, og leverandøren tilsvarende en risiko for, at et parti af god kvalitet bliver forkastet.

Indirekte kan godkendelseskontrollen i høj grad påvirke kvaliteten af en produktion gennem det pres, der lægges på producenten, om at forbedre kvaliteten af det fremstillede produkt, såfremt mange leverancer bliver forkastet ved kontrollen.

Hvis vurderingen af de udtagne emner baseres på en bedømmelse af hvert emne som fejlfrit eller defekt, taler man om "partikontrol ved alternativ variation".

Hvis vurderingen baseres på en måling af en kvantitativ egenskab ved hvert emne såsom diameteren af en aksel, taler man om "partikontrol ved kontinuert variation".

Vi vil i det følgende kun gennemgå "partikontrol ved alternativ variation".

Med hensyn til kontrol med andre egenskaber, f.eks. middelværdi og spredning, henvises til egentlige bøger om kvalitetskontrol.

### 16.3.2. Enkelt-stikprøveplan

Denne stikprøveplan er den mest benyttede i praksis på grund af, at den er så let at administrere.

#### Definition af enkelt stikprøveplan.

Lad  $n$  være et positivt helt tal, og lad  $c$  være et ikke-negativt helt tal, hvor  $c < n$ .

Ved en enkelt - stikprøveplan  $(n, c)$  udtages tilfældigt en stikprøve af størrelsen  $n$ , og antallet  $x$  af defekte i stikprøven optælles.

Partiet godkendes, såfremt  $x \leq c$ ; partiet forkastes, såfremt  $x > c$ .

$n$  kaldes **stikprøvestørrelsen**.  $c$  kaldes **godkendelsestallet**.

#### Eksempel 16.7. Enkelt stikprøveplan

Et legetøjsfirma modtager leverancer bestående af 10.000 billige dukker, og ønsker at kontrollere disses kvalitet ved stikprøveplanen  $(n, c) = (100, 3)$ .

Angiv hvorledes kontrollen skal foregå.

#### Løsning:

Af hver leverance (på 10.000 dukker) udtages en stikprøve på 100.

Hvis 3 eller færre af disse er defekte godkendes hele leverancen, ellers forkastes det.



#### OC-kurve for en stikprøveplan

For en given stikprøveplan kan man beregne sandsynligheden for at et parti bliver godkendt (acceptsandsynligheden  $p_a$ ) som funktion af partiets fejlprocent.

Grafen for denne funktion kaldes funktionens OC-kurve.

**Beregning af acceptsandsynlighed.**

Der udtages en stikprøve på  $n$  emner uden tilbagelægning ud af en leverance på  $N$  emner.

Lad  $c$  være godkendelsestallet.

$X$  = antal fejlemner blandt  $n$  emner. Lad sandsynligheden for fejl i leverancen være  $p$ .

Acceptsandsynligheden er  $\underline{p_a(p) = P(X \leq c)}$ .

Der er  $M = N \cdot p$  fejlemner i partiet, dvs.  $X$  er hypergeometrisk fordelt  $h(N, M, n)$ .

Sædvanligvis vil det gælde, at  $\frac{n}{N} \leq \frac{1}{10}$ , og derfor kan approksimeres med binomialfordelingen

$b(n, p)$ .

Har man ikke en lommeregner, der kan beregne sandsynligheder i binomialfordelingen kan man (da det sædvanligvis gælder, at  $p < 0.1$ ) approksimere med Poissonfordelingen  $P(n \cdot p)$ , og så ved beregningen benytte tabellen over Poissonfordelingen i "Statistiske Grundbegreber".

**Eksempel 16.8. Beregning af OC - kurve.**

Et legetøjsfirma modtager leverancer bestående af  $N = 10.000$  dukker, og ønsker at kontrollere disses kvalitet ved stikprøveplanen  $(n, c) = (100, 3)$ .

Beregn acceptsandsynligheden  $p_a$  for fejlprocenterne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 10, og tegn på grundlag heraf stikprøveplanens OC - kurve.

**Løsning:**

$X$  = antal fejlemner blandt  $n = 100$  emner.

Er sandsynligheden for fejl  $p$  i leverancen er der  $M = N \cdot p = 10000 \cdot p$  fejlemner i partiet.

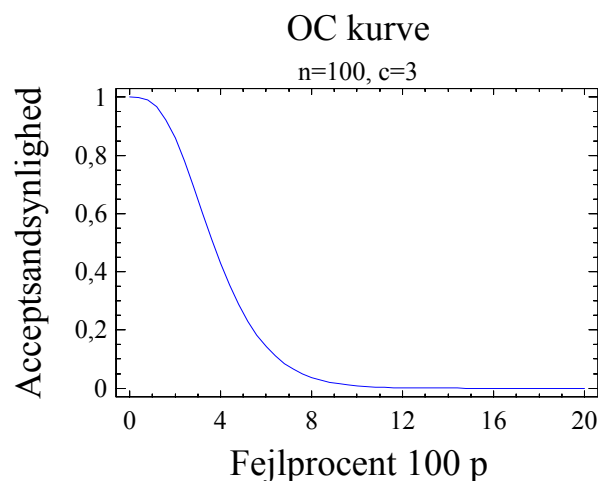
$X$  er derfor hypergeometrisk fordelt  $h(10000, 10000 \cdot p, n)$

Da  $\frac{n}{N} = \frac{100}{10000} \leq \frac{1}{10}$  kan fordelingen for  $X$  approksimeres med binomialfordelingen  $b(100, p)$ .

Vi finder da eksempelvis, at  $P_a(0.02) = P(X \leq 3) = \text{binomCdf}(100, 0.02, 0, 3) = 0.859$ .

På tilsvarende måde findes de øvrige værdier.

| 100p%          | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7   | 8   | 9   | 10  |
|----------------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|
| 100 $P_a(p)$ % | 98.2 | 85.9 | 64.7 | 42.9 | 25.8 | 14.3 | 7.4 | 3.6 | 1.7 | 0.8 |



**Valg af parametre i enkelt-stikprøveplan.**

Til bestemmelse af stikprøvestørrelsen  $n$  og godkendelsestal  $c$  vælger de to parter, leverandør (producer) og aftager (consumer) to “risikopunkter” som på OC - kurven skal gå igennem.

- 1) den tilfredsstillende kvalitet  $AQL$  (Acceptable Quality Level), og den tilsvarende acceptsandsynlighed  $P_a(AQL) = 1 - \alpha$ , hvor  $\alpha$  kaldes “leverandørens risiko”.

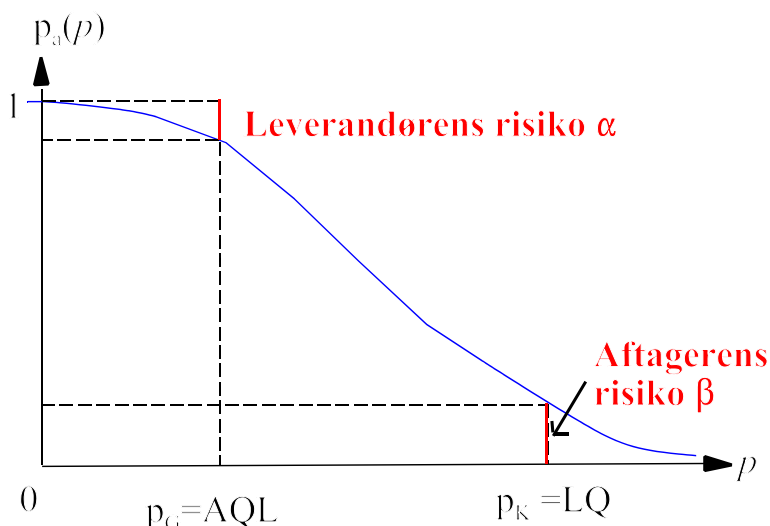
( $AQL, 1 - \alpha$ ) kaldes leverandørens risikopunkt.

- 2) den utilfredsstillende kvalitet  $LQ$  (Limiting Quality), og den tilsvarende acceptsandsynlighed  $P_a(LQ) = \beta$ , hvor  $\beta$  kaldes “aftagerens risiko”.

( $LQ, \beta$ ) kaldes aftagerens risikopunkt.

De to risikopunkter må altid vælges ud fra de konkret foreliggende forhold (tekniske, økonomiske m.v.), idet  $AQL$  sættes lig en “lille” fejlandel  $p_G$ , og  $LQ$  sættes lig en noget større fejlandel  $p_K$ . (jævnfør nedenstående figur)

Traditionelt vælges næsten altid  $\alpha = 5\%$  og  $\beta = 10\%$ . Undertiden vælges dog  $\beta = 5\%$ .



En enkelt stikprøveplan er i princippet fastlagt ved disse specifikationer og kan approksimativt bestemmes ved hjælp af tabel 5. Også her kan et statistikprogram som Statgraphics være til stor hjælp som det fremgår af oversigt 16B..

**Eksempel 16.9. Bestemmelse af stikprøveplan.**

Ved levering af et parti på 10.000 dukker træffer en leverandør og en aftager aftale om at vælge en enkelt - stikprøveplan bestemt ved, at acceptsandsynligheden i tilfælde af 0.6% defekte dukker i partiet skal være 95%, og i tilfælde af 3,1% defekte skal være ca. 10%.

Bestem stikprøvestørrelsen  $n$  og godkendelsestallet  $c$ .

**Løsning:**

Idet  $AQL = 0,6\%$  og  $LQ = 3,1\%$  er  $\frac{LO}{AQL} = \frac{p_k}{p_G} = \frac{3,1}{0,6} = 5,1667$ .

I tabel 5 i kolonnen for  $\alpha = 5\%$  og  $\beta = 10\%$  fås, at det største tal mindre end 5.17 er 4.89.

Dette svarer til, at godkendelsestallet  $c = 3$ . I kolonnen for  $n \cdot p_g$  og  $\alpha = 5\%$  findes

$$n \cdot p_G = 137 \Leftrightarrow n = \frac{137}{0,6} = 228,33 \approx 229$$

Vi finder derfor  $c = 3$  og  $n = 229$

**16.3.3. Rektificerende kontrol.**

Undertiden aftales, at stikprøvekontrollen skal udføres på den måde, at leverandøren underkaster alle kasserede partier 100% - inspektion og "renser" disse partier, dvs. erstatter fejlemner med fejlfrie emner. En sådan kontrol kaldes for "rektificerende kontrol" (rensende kontrol).

En sådan aftale kan eksempelvis ske ved leverancer inden for samme virksomhed (intern kontrol) eller hvis en (dominerende) storkøber ikke er sikker på, at en leverandør kan overholde aftagerens krav til  $AQL$  - værdi.

I forbindelse med fastlæggelse af en enkelt stikprøveplan med rektificerende kontrol spiller følgende begreber en stor rolle.

**AOQ (Average Outgoing Quality):** Fejlandelen af de udgående partier når de indkommende partier produceres af en proces, der med en sandsynlighed på  $p$  frembringer fejlemner.

Der gælder formelen  $AOQ = p \cdot P_a(p)$ .

Bevis: Det modtagne parti har en "fejlsandsynlighed" på  $p$ , og sandsynligheden for at dette parti bliver godkendt er  $P_a(p)$ .

Det udgående parti (efter den rektificerende kontrol), vil derfor have en "fejlsandsynlighed"  $p_u$  på enten  $p$  eller på 0 afhængig af om det blev godkendt eller ej.

Vi får derfor:  $AOQ = E(p_u) = p \cdot P_a(p) + 0 \cdot (1 - P_a(p)) = p \cdot P_a(p)$



**AOQL (Average Outgoing Quality Limit):** Den maksimale værdi af  $AOQ$ .

**ATI (Average Total Inspection):** Den gennemsnitlige totale inspektionsstørrelse når de indkomne partier produceres af en proces, der med en sandsynlighed på  $p$  frembringer fejlemner.

Der gælder formelen  $ATI = n + (N - n) \cdot (1 - P_a(p))$

Bevis:

Lader vi  $n_T$  betegne det totale antal inspicerede emner ved en rektificerende kontrol, må det

$$\text{gælde, at } n_T = \begin{cases} n & \text{med sandsynligheden } P_a(p) \\ N & \text{med sandsynligheden } 1 - P_a(p) \end{cases}$$

Middelværdien bliver  $E(n_T) = n \cdot P_a(p) + N \cdot (1 - P_a(p)) = n + (N - n) \cdot (1 - P_a(p))$



Statgraphics udregner både  $AOQL$  og  $ATI$ .

Det følgende eksempel illustrerer beregningerne.

### Eksempel 16.10 Rektificerende kontrol.

Vi betragter atter den i eksempel 16.9 omtalte situation, med kontrol af dukker, idet man har valgt enkelt-stikprøveplanen  $(n, c) = (229, 3)$ .

Vi antager nu, at der yderligere er aftalt, at kontrollen udføres som rektificerende kontrol.

Beregn acceptsandsynligheden AQL og ATI for  $p = 2\%$ .

I oversigt 13B vises, hvordan Statgraphics kan beregne AOQL og tegne AOQ-kurven og ATI-kurven.

#### Løsning:

Da vi har et stort parti kan approksimeres med binomialfordelingen  $b(229, 0.02)$

$$P_a(0.02) = P(X \leq 3) = \text{binomCdf}(229, 0.02, 0, 3) = 0.326.$$

og dermed  $AOQ(0.02) = 0.02 \cdot 0.326 = 0.0065$

$$\text{og } ATI = 229 + (10000 - 229) \cdot (1 - 0.326) = 6811.2$$



### 16.3.4. Dobbelt-stikprøveplan

Anvendelsen af dobbelt-stikprøveplaner er administrativt noget besværligere end benyttelsen af enkelt-stikprøveplaner. Er det imidlertid meget dyrt (besværligt) at kontrollere emnerne, er det væsentligt at stikprøvestørrelsen bliver så lille som muligt og man kan i sådanne situationer se en fordel i at gå over til en dobbelt-stikprøveplan. Den gennemsnitlige stikprøvestørrelse vil derved ofte kunne formindskes i forhold til stikprøvestørrelsen  $n$  for en enkelt stikprøveplan  $(n, c)$ , som går igennem de samme risikopunkter.

#### Definition af dobbelt stikprøveplan.

Lad  $n_1$  og  $n_2$  være positive hele tal, og lad  $c_1, c_2$  og  $c_3$  være ikke-negative hele tal, hvor  $c_1 < c_2 < n_1$  og  $c_2 \leq c_3 < n_1 + n_2$ .

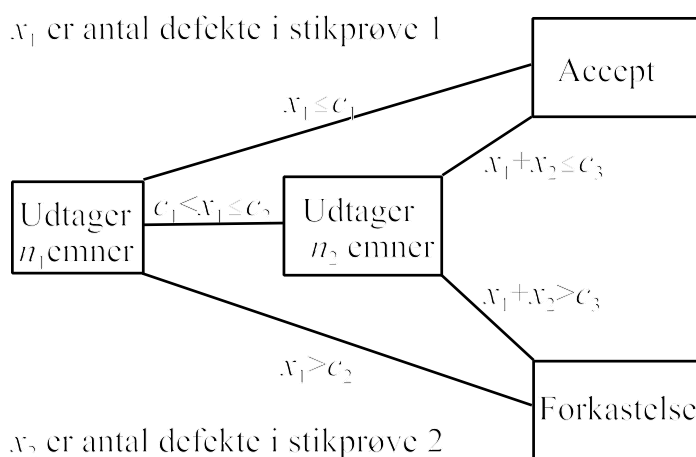
Ved en dobbelt-stikprøveplan  $(n_1, n_2, c_1, c_2, c_3)$  udtages tilfældigt en stikprøve af størrelsen  $n_1$  og antallet  $x_1$  af defekte i stikprøven optælles.

Partiet godkendes, såfremt  $x_1 \leq c_1$ ; partiet forkastes, såfremt  $x_1 > c_2$ .

Såfremt  $c_1 < x_1 \leq c_2$  udtages en ny stikprøve af størrelsen  $n_2$  og antallet  $x_2$  af defekte i den anden stikprøve optælles.

Partiet godkendes, såfremt  $x_1 + x_2 \leq c_3$ ; partiet forkastes, såfremt  $x_1 + x_2 > c_3$

Skematisk kan en dobbelt stikprøveplan fremstilles på følgende måde:



Som det fremgår, forudsætter fastlæggelsen af en bestemt dobbelt-stikprøveplan valg af stikprøvestørrelserne  $n_1$  og  $n_2$  og de tre tal  $c_1, c_2$  og  $c_3$ .

Hvorledes dette valg påvirker beslutningen om accept eller forkastelse af modtagne varepartier, som underkastes kontrol i henhold til en dobbelt-stikprøveplan, illustreres som ved enkelt-stikprøveplaner af den til planen hørende OC-kurve.

#### 16.3.4.1 Bestemmelse af en dobbelt-stikprøveplan

OC-kurven for den valgte plan skal på samme måde som ved enkelt-stikprøveplan så vidt muligt gå gennem de 2 risikopunkter  $(p_G, 1 - \alpha)$  og  $(p_k, \beta)$ .

Dette er imidlertid ikke tilstrækkeligt til en entydig bestemmelse af en dobbelt-stikprøveplan. En sådan bliver derimod mulig ved valg af ekstra bånd mellem parametrene. Sædvanligvis forlanger man, at  $n_2 = n_1$  eller  $n_2 = 2 \cdot n_1$ . Endvidere vælges ofte  $c_3 = c_2$ , hvilket har vist sig ikke at hindre, at man i praksis altid kan bestemme en velegnet dobbelt-stikprøveplan.

På samme måde som for enkelte stikprøveplaner er der for dobbelte stikprøveplaner udarbejdet tabeller. Tabel 6 er en sådan tabel, hvor,  $n_2 = n_1$  eller  $n_2 = 2 \cdot n_1$ ,  $c_3 = c_2$ ,  $\alpha = 5\%$  og  $\beta = 10\%$ .

**ASN (Average Sample Number):** Værdien af den gennemsnitlige stikprøvestørrelse for en given værdi af "produktionskvaliteten  $p$ ."

Der gælder formelen  $ASN = n_1 + n_2 \cdot P(c_1 < X_1 \leq c_2)$

Formlen fremgår af, at der altid udtages en stikprøve på  $n_1$  og der så yderligere udtages  $n_2$  med en sandsynlighed på  $P(c_1 < X_1 \leq c_2)$ .

**Ækvivalente stikprøveplaner** er stikprøveplaner, der går gennem de samme risikopunkter.

Som nævnt er fordelene ved de dobbelte stikprøveplaner i forhold til de enkelte stikprøveplaner, at for ækvivalente stikprøveplaner, vil den gennemsnitlige stikprøvestørrelse være mindre for de fleste (alle) værdier af  $p$ .

#### Eksempel 16.11 Bestemmelse af en dobbelt-stikprøveplan.

Ved levering af et parti på 10.000 dukker træffer en leverandør og en aftager aftale om at vælge en dobbelt-stikprøveplan  $(n_1, n_2, c_1, c_2, c_3)$  som er ækvivalent med den i eksempel 16.9 angivne enkelte stikprøveplan, dvs. at acceptsandsynligheden i tilfælde af 0.6% defekte dukker i partiet skal være 95%, og i tilfælde af 3.1% defekte skal være ca. 10%.

- 1) Bestem stikprøveplanens parametre, idet vi ønsker, at  $n_2 = 2 \cdot n_1$ , og  $c_3 = c_2$ .
- 2) Skitser OC-kurven på basis af de 4 støttepunkter man kan beregne ud fra tabellen
- 3) Find acceptsandsynligheden for  $p = 2\%$  ved aflæsning på kurven.
- 4) Find acceptsandsynligheden for  $p = 2\%$  ved direkte beregning.
- 5) Find ASN for de to risikopunkter, samt for  $p = 4\%$ .

LØSNING:

1) Idet  $AQL = 0,6\%$  og  $LQ = 3,1\%$  er  $\frac{LO}{AQL} = \frac{p_k}{p_G} = \frac{3,1}{0,6} = 5,1667$ .

I tabel 6 ud for række 9 fås, at det største tal mindre end 5.17 er 5.09.

Dette svarer til, at  $c_1 = 1$  og  $c_2 = 4$ . Endvidere fås  $n_1 \cdot p_G = 77 \Leftrightarrow n_1 = \frac{77}{0,6} = 128,33$ .

Vi finder derfor  $(n_1, n_2, c_1, c_2, c_3) = (129, 258, 1, 4, 4)$ .

2)  $\underline{P_a(0) = 100\%}$

$\underline{P_a(0,006) = 95\%}$ : Leverandørens risiko må være ca 5%, da vi her beregnede  $n_1$  ud fra  $p_G = 0,006$ .

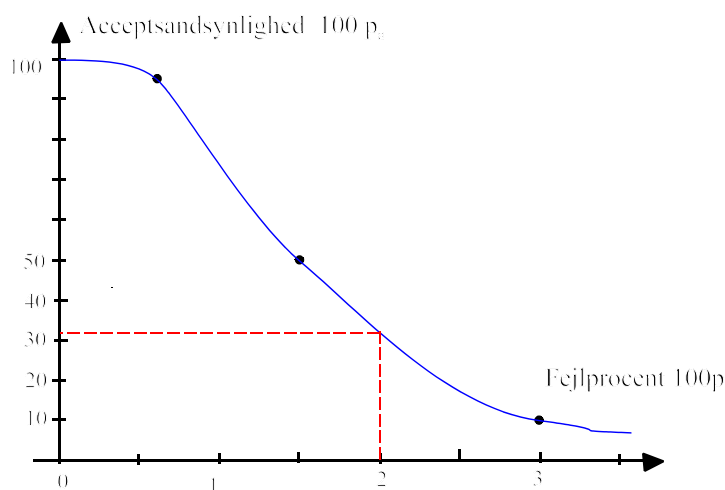
Af række 9, fås, at  $p_a(p_K) = 10\%$  for  $n_1 \cdot p_K = 392 \Leftrightarrow p_K = \frac{392}{129} = 3,04\%$ , dvs.

$\underline{P_a(0,0304) = 10\%}$ . Aftagerens risiko på 10% opnås for  $p = 3,0\%$ , altså lidt mindre end den aftalte på 5%. Dette skyldes, at tabellen ikke indeholder forholdet 5.17.

Af række 9, fås, at  $p_a(p) = 50\%$  for  $n_1 \cdot p = 197 \Leftrightarrow p = \frac{197}{129} = 1,53\%$ , dvs.

$\underline{P_a(0,015) = 50\%}$ . Vi har altså fundet følgende tabel:

|                       |     |    |     |    |
|-----------------------|-----|----|-----|----|
| $100 \cdot p \%$      | 0   | 1  | 1,5 | 3  |
| $100 \cdot P_a(p) \%$ | 100 | 95 | 50  | 10 |



3) Af kurven fås, at  $\underline{P_a(0,02) \approx 31\%}$

4) Man får en accept på 2 måder.

a) Ved 1. stikprøve på 129, at få højst 1 defekt.

$X_1$  = antal fejlemner blandt  $n_1 = 129$  emner.  $P_{a1}(0.02) = P(X_1 \leq 1)$

$X_1$  er hypergeometrisk fordelt, men da  $\frac{n}{N} = \frac{129}{10000} \leq \frac{1}{10}$  kan approksimeres med

binomialfordelingen  $b(n,p)$  hvor  $n = 129$  og  $p = 0.02$

$$P_{a1}(0.02) = P(X_1 \leq 1) = \text{binomCdf}(129, 0.02, 0, 1) = 0.2682$$

b) Ved 1. stikprøve på 129 at få over 1 og mindre end eller lig 4, og i alt på 1. og 2. stikprøve højst at have fået 4.

$X_2$  = antal fejlemner blandt  $n_2 = 258$  emner.

$X_1$  er hypergeometrisk fordelt, men da  $\frac{n}{N} = \frac{258}{10000} \leq \frac{1}{10}$  kan approksimeres med

binomialfordelingen  $b(n,p)$  hvor  $n = 258$  og  $p = 0.02$

$$P_{a2}(0.02) = P(X_1 = 2) \cdot P(X_2 \leq 2) + P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 \leq 1) + P(X_1 = 4) \cdot P(X_2 = 0)$$

$$= \text{binomPdf}(129, 0.02, 2) \cdot \text{binomCdf}(258, 0.02, 0, 2)$$

$$+ \text{binomPdf}(129, 0.02, 3) \cdot \text{binomCdf}(258, 0.02, 0, 1)$$

$$+ \text{binomPdf}(129, 0.02, 4) \cdot \text{binomCdf}(258, 0.02, 0, 0) = 0.03602$$

$$P_a(0.02) = P_{a1}(0.02) + P_{a2}(0.02) \approx 0.2682 + 0.0360 = 0.3042 \approx \underline{\underline{30,4\%}}$$

5)  $ASN = 129 + 258 \cdot P(1 < X_1 \leq 4)$

Specielt for leverandørens risiko kan man finde ASN af den højre kolonne.

$$\frac{ASN}{n_1} \approx 1.36 \Leftrightarrow ASN \approx 1.36 \cdot 129 = 175.4$$

|                     |     |       |                                                  |                                                |
|---------------------|-----|-------|--------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $100 \cdot p \%$    | 0   | 0.6   | 3.04                                             | 4                                              |
| $P(1 < X_1 \leq 4)$ | 0   |       | $\text{binomCdf}(129, 0.00304, 2, 4)$<br>= 0.550 | $\text{binomCdf}(129, 0.04, 2, 4)$<br>= 0.3759 |
| ASN                 | 129 | 175.4 | 270.6                                            | 226.0                                          |

Det ses som forventet, at for meget gode partier og for meget dårlige partier, vil den gennemsnitlige stikprøvestørrelse blive mindre end de 229 vi fandt ved den ækvivalente enkelte-stikprøveplan. 

**Oversigt 16.1: Kontrollkort.**

| $\bar{x} - R$ - kontrolkort. Procesvariablen $X$ er normalfordelt $n(\mu, \sigma)$ . |                               |                              |                                                            |                                                            |                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Pro-<br>cestilstand                                                                  |                               | Centerlinie                  | Nedre<br>kontrolgrænse                                     | Øvre<br>kontrolgrænse                                      | Estimerer                                  |
| Kendt:                                                                               | $\bar{x}$ -kort<br>$R$ - kort | $\mu$<br>$d_2 \cdot \sigma$  | $\mu - A_1 \cdot \sigma$<br>$D_1 \cdot \sigma$             | $\mu + A_1 \cdot \sigma$<br>$D_2 \cdot \sigma$             |                                            |
| Ukendt:                                                                              | $\bar{x}$ -kort<br>$R$ - kort | $\bar{\bar{x}}$<br>$\bar{R}$ | $\bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{R}$<br>$D_3 \cdot \bar{R}$ | $\bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{R}$<br>$D_4 \cdot \bar{R}$ | $\hat{\sigma} \approx \frac{\bar{R}}{d_2}$ |
| $\bar{x} - s$ - kontrolkort. Procesvariablen $X$ er normalfordelt $n(\mu, \sigma)$ . |                               |                              |                                                            |                                                            |                                            |
| Kendt                                                                                | $\bar{x}$ -kort<br>$s$ - kort | $\mu$<br>$c_4 \cdot \sigma$  | $\mu - A_1 \cdot \sigma$<br>$B_5 \cdot \sigma$             | $\mu + A_1 \cdot \sigma$<br>$B_6 \cdot \sigma$             |                                            |
| Ukendt                                                                               | $\bar{x}$ -kort<br>$s$ - kort | $\bar{\bar{x}}$<br>$\bar{s}$ | $\bar{\bar{x}} - A_3 \cdot \bar{s}$<br>$B_3 \cdot \bar{s}$ | $\bar{\bar{x}} + A_3 \cdot \bar{s}$<br>$B_4 \cdot \bar{s}$ | $\hat{\sigma} \approx \frac{\bar{s}}{c_4}$ |

| $np$ - kontrolkort. Procesvariablen $X$ er binomialfordelt $b(n, p)$                                                 |                                        |                                                                                                     |                                                                             |                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Forudsætning                                                                                                         | Centerlinie                            | Nedre<br>kontrolgrænse                                                                              | Øvre<br>kontrolgrænse                                                       | Estimerer                           |
| Der udtages $k$ undergrupper hver på $n$ enheder.<br>For hver undergruppe $i$ findes antallet af fejlenheder $y_i$ . | $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{k}$ | $\bar{y} - 3 \cdot \sqrt{\bar{y} \cdot \left(1 - \frac{\bar{y}}{n}\right)}$<br>(dog altid mindst 0) | $\bar{y} + 3 \cdot \sqrt{\bar{y} \cdot \left(1 - \frac{\bar{y}}{n}\right)}$ | $\hat{p} \approx \frac{\bar{y}}{n}$ |
| $c$ - kontrolkort. Procesvariablen $X$ er Poissonfordelt $P(\mu)$                                                    |                                        |                                                                                                     |                                                                             |                                     |
| Der udtages $k$ undergrupper hver på $n$ enheder.<br>For hver undergruppe $i$ findes samlet antal fejl $c_i$ .       | $\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k}$ | $\bar{c} - 3 \cdot \sqrt{\bar{c}}$<br>(dog altid mindst 0)                                          | $\bar{c} + 3 \cdot \sqrt{\bar{c}}$                                          | $\hat{\mu} = \frac{\bar{c}}{n}$     |

**Begrundelse for grænserne for kontrollkort**

Vi danner  $k$  undergrupper hver med  $n$  observationer.

| Gruppe | Observationer                   | Gennemsnit      | Variationsbredde | Spredning |
|--------|---------------------------------|-----------------|------------------|-----------|
| 1      | $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$ | $\bar{x}_1$     | $R_1$            | $s_1$     |
| 2      | $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}$ | $\bar{x}_2$     | $R_2$            | $s_2$     |
| .      | .                               | .               | .                | .         |
| .      | .                               | .               | .                | .         |
| k      | $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}$ | $\bar{x}_k$     | $R_k$            | $s_k$     |
| Total  |                                 | $\bar{\bar{x}}$ | $\bar{R}$        | $\bar{s}$ |

**Grænser for R - kort.** Det kan bevises, at  $E(R) = d_2 \sigma$  og  $\sigma(R) = d_3 \cdot \sigma$ , hvor  $d_2$  og  $d_3$  kun afhænger af stikprøvestørrelsen  $n$ . Disse konstanter samt alle de i det følgende nævnte konstanter kan aflæses i tabel 4.

Et  $R$  - kort med  $3\sigma$  - grænser er derfor bestemt ved :

$$NKG_R = (d_2 - 3 \cdot d_3) \cdot \sigma \text{ og } \text{ØKG}_R = (d_2 + 3 \cdot d_3) \cdot \sigma.$$

Idet et estimat for  $E(R) \approx \bar{R}$ , fås  $\sigma \approx \frac{\bar{R}}{d_2}$ .

Indsættes dette, fås  $NKG_R = (d_2 - 3 \cdot d_3) \cdot \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3 \cdot \bar{R}$  og  $\text{ØKG}_R = (d_2 + 3 \cdot d_3) \cdot \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4 \bar{R}$ .

**Grænser for s - kort.** Selv om der gælder, at  $E(s^2) = \sigma^2$ , gælder det ikke, at  $E(s) = \sigma$ .

Man kan imidlertid vise, at  $E(s) = c_4 \cdot \sigma$  og  $\sigma(s) = \sqrt{1 - c_4^2} \cdot \sigma$ .

Følgelig er et s - kort med  $3\sigma$  - grænser bestemt ved :

$$NKG_s = (c_4 - 3 \cdot \sqrt{1 - c_4^2}) \cdot \sigma = B_5 \cdot \sigma \text{ og } \text{ØKG}_s = (c_4 + 3 \cdot \sqrt{1 - c_4^2}) \cdot \sigma = B_6 \cdot \sigma.$$

Idet et estimat for  $E(s) \approx \bar{s}$ , fås  $\sigma \approx \frac{\bar{s}}{c_4}$ .

Indsættes dette, fås  $NKG_s = \left(1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}\right) \cdot \bar{s} = B_3 \cdot \bar{s}$  og  $\text{ØKG}_s = \left(1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}\right) \cdot \bar{s} = B_5 \cdot \bar{s}$ .

**Grænser for  $\bar{x}$  - kort.** Idet  $E(\bar{x}) = \mu$  og  $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , er et  $\bar{x}$  - kort med  $3\sigma$  - grænser:

$$NKG_{\bar{x}} = \mu - 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A_1 \cdot \sigma \text{ og } \text{ØKG}_{\bar{x}} = \mu + 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A_1 \cdot \sigma$$

Benyttes et  $R$  - kort er  $\sigma \approx \frac{\bar{R}}{d_2}$ , og dermed

$$NKG_{\bar{x}} = \bar{x} - 3 \cdot \frac{\bar{R}}{d_2 \cdot \sqrt{n}} = \mu - A_2 \cdot \bar{R} \text{ og } \text{ØKG}_{\bar{x}} = \bar{x} + 3 \cdot \frac{\bar{R}}{d_2 \cdot \sqrt{n}} = \mu + A_2 \cdot \bar{R}$$

Benyttes et s kort er  $\sigma \approx \frac{\bar{s}}{c_4}$ , og dermed

$$NKG_{\bar{x}} = \bar{x} - 3 \cdot \frac{\bar{s}}{c_4 \cdot \sqrt{n}} = \mu - A_3 \cdot \bar{s} \text{ og } \text{ØKG}_{\bar{x}} = \bar{x} + 3 \cdot \frac{\bar{s}}{c_4 \cdot \sqrt{n}} = \mu + A_3 \cdot \bar{s}.$$

## 16A Eksempler regnet på Statgraphics.

### 1. Indledning

I "Grundlæggende statistik: appendix A" er beskrevet nogle grundlæggende operationer, hvorledes man beregner sandsynligheden for forskellige fordelinger og beregner gennemsnit og spredning. Dette forudsættes bekendt

## 10. Quality Control (Kvalitetskontrol)

### 10.1: Proceskontrol

#### Eksempel 16.1. Kontrol af stof i levnedsmiddelprodukt.

En levnedsmiddeldrivelses virksomhed har problemer med at holde koncentrationen af et skadeligt stof A i et konservesprodukt nede under en øvre tolerancegrænse på 12 enheder pr. gram. Man vælger derfor at få foretaget en kontrolkortanalyse. På basis af tidligere erfaringer inddeles målingerne i 30 undergrupper, som hver har deres karakteristika: (råvarecharge, apparatur, tidspunkt på dagen osv.). For hver undergruppe (som er på 5 målinger) er der af hensyn til de følgende beregninger også beregnet gennemsnit  $\bar{x}_i$ , variationsbredde  $R_i$  og spredning  $s_i$ .

| Gruppe | Målinger    | $\bar{x}_i$ | $R_i$ | $s_i$  | Gruppe | Målinger      | $\bar{x}_i$ | $R_i$ | $s_i$  |
|--------|-------------|-------------|-------|--------|--------|---------------|-------------|-------|--------|
| 1      | 13 8 2 5 8  | 7.2         | 11    | 4.0866 | 16     | 16 11 14 8 17 | 13.2        | 9     | 3.7014 |
| 2      | 0 6 1 9 15  | 6.2         | 15    | 6.1400 | 17     | 9 4 4 8 9     | 6.8         | 5     | 2.5884 |
| 3      | 4 2 4 3 4   | 3.4         | 2     | 8.944  | 18     | 6 1 1 3 13    | 4.8         | 12    | 5.0200 |
| 4      | 3 15 8 3 5  | 6.8         | 12    | 5.0200 | 19     | 7 0 5 7 2     | 4.2         | 7     | 3.1145 |
| 5      | 5 10 5 4 0  | 4.8         | 10    | 3.5637 | 20     | 10 0 10 12 7  | 7.8         | 12    | 4.7117 |
| 6      | 9 5 13 7 7  | 8.2         | 8     | 3.0332 | 21     | 3 7 5 10 12   | 7.4         | 9     | 3.6469 |
| 7      | 0 4 4 3 9   | 4.0         | 9     | 3.2404 | 22     | 3 0 10 5 4    | 4.4         | 10    | 3.6469 |
| 8      | 9 3 0 6 0   | 3.6         | 9     | 3.9115 | 23     | 3 3 0 6 9     | 4.2         | 9     | 3.4205 |
| 9      | 14 0 0 5 3  | 4.4         | 14    | 5.7706 | 24     | 0 2 3 6 7     | 3.6         | 7     | 2.8810 |
| 10     | 3 9 5 0 2   | 3.8         | 9     | 3.4205 | 25     | 2 3 5 4 10    | 4.8         | 8     | 3.1145 |
| 11     | 5 8 0 7 8   | 5.6         | 8     | 3.3616 | 26     | 3 1 4 2 4     | 2.8         | 3     | 1.3038 |
| 12     | 3 2 2 7 4   | 3.6         | 5     | 2.0736 | 27     | 2 4 5 13 4    | 5.6         | 11    | 4.2778 |
| 13     | 5 11 14 8 3 | 8.2         | 11    | 4.4385 | 28     | 0 22 7 2 11   | 8.4         | 22    | 8.7350 |
| 14     | 13 5 5 12 7 | 8.4         | 8     | 3.8471 | 29     | 3 5 9 8 6     | 6.2         | 6     | 2.3875 |
| 15     | 7 0 1 0 6   | 2.8         | 7     | 3.4205 | 30     | 9 7 10 13 0   | 7.8         | 13    | 4.8683 |
| SUM    |             |             |       |        |        |               | 173.0       | 281   | 113.64 |

- 1) Foretag ved hjælp af  $\bar{x}$  - og  $R$  - kort en kontrolkortanalyse og opstil kontrolkort, der kan benyttes til en løbende kontrol af indholdet af det skadelige stof.
- 2) Idet der er fastsat en øvre tolerancegrænse på 12, skal man finde sandsynligheden for at én måling falder udenfor, når processen antages i kontrol med de i punkt 1 fastsatte kontrolgrænser

### Løsning.

- 1) Data indtastes på sædvanlig måde:

16A: Eksempler regnet på Statgraphics

| gruppe | indhold af A |
|--------|--------------|
| 1      | 13           |
| 1      | 8            |
| 1      | 2            |
| 1      | 5            |
| 1      | 8            |
| 2      | 0            |
| 2      | 1            |
| 2      | 6            |
| osv.   |              |
| 30     | 9            |
| 30     | 7            |
| 30     | 10           |
| 30     | 13           |
| 30     | 0            |

Vælg (Special\Quality Control\Variables Control Charts\X.bar and R\indsæt "indhold af A" og "gruppe"  
evt. blot subgroup size = 5\OK)

Vi får følgende udskrift

X-bar and Range - Initial Study for indhold af A  
Number of subgroups = 30  
Average subgroup size = 5,0  
0 subgroups excluded

X-bar Chart

-----

UCL: +3,0 sigma = 11,1694  
Centerline = 5,76667  
LCL: -3,0 sigma = 0,363957  
1 beyond limits

Range Chart

-----

UCL: +3,0 sigma = 19,8045  
Centerline = 9,36667  
LCL: -3,0 sigma = 0,0  
1 beyond limits

Estimates

-----

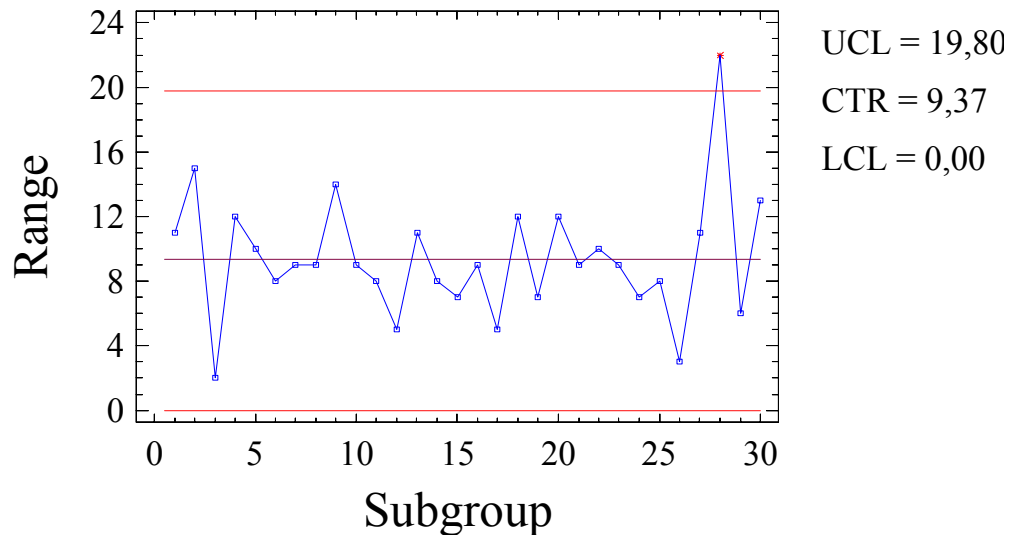
Process mean = 5,76667  
Process sigma = 4,02694  
Mean range = 9,36667

Samtidig fås en tegning af et  $\bar{x}$  -kort.

Vælg (Graphical options\Range Chart\OK)

Derved fremkommer følgende  $R$  - kort:

## Range Chart for indhold af A



Det ses, at gruppe 28 er udenfor kontrolgrænserne.

Denne gruppe udskydes.

Vælg (Cursor på udskrift, højre musetast\Analysis Options\Exclude\Vælg Manual og sæt Exclude subgroup til 28\OK)

Vi får følgende udskrift:

```
X-bar and Range - Initial Study for indhold af A
Number of subgroups = 29
Average subgroup size = 5,0
1 subgroups excluded
```

### X-bar Chart

```
-----
UCL: +3,0 sigma = 10,8273
Centerline = 5,67586
LCL: -3,0 sigma = 0,524426
1 beyond limits
```

### Range Chart

```
-----
UCL: +3,0 sigma = 18,8834
Centerline = 8,93103
LCL: -3,0 sigma = 0,0
0 beyond limits
```

### Estimates

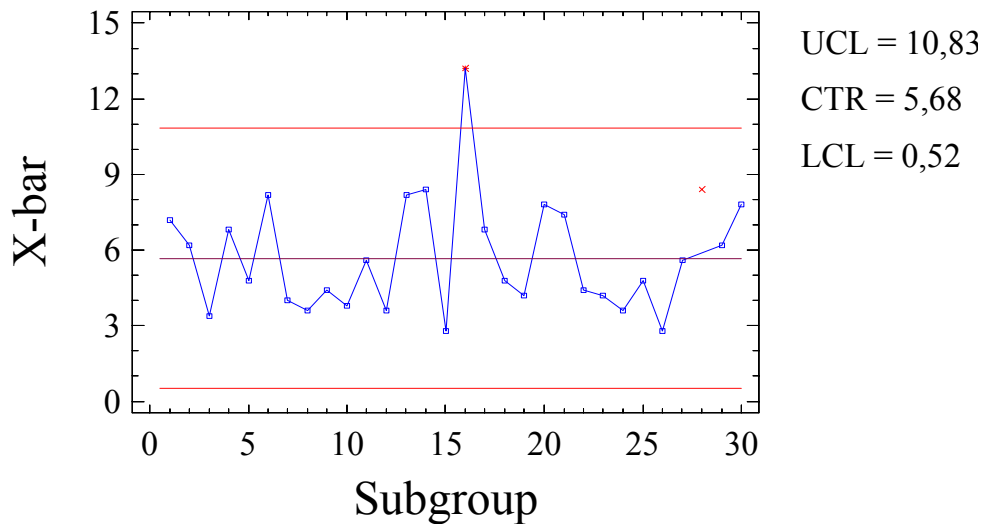
```
-----
Process mean = 5,67586
Process sigma = 3,83965
Mean range = 8,93103
```

Vi ser, at nu er der ingen udenfor R-kortet, men stadig en gruppe udenfor kontrolgrænserne på  $\bar{x}$  - kortet.

Vi tegner dette kort

Vælg (Graphical options\x bar Chart\OK)

## X-bar Chart for indhold af A



Vi ser, at gruppe 16 fælder udenfor. Denne excluderes, og vi får

X-bar and Range - Initial Study for indhold af A

Number of subgroups = 28

Average subgroup size = 5,0

2 subgroups excluded

X-bar Chart

-----  
UCL: +3,0 sigma = 10,5572  
Centerline = 5,40714  
LCL: -3,0 sigma = 0,257128  
0 beyond limits

Range Chart

-----  
UCL: +3,0 sigma = 18,8782  
Centerline = 8,92857  
LCL: -3,0 sigma = 0,0  
0 beyond limits

Estimates

-----  
Process mean = 5,40714  
Process sigma = 3,83859  
Mean range = 8,92857

De to kontrolkort kan nu benyttes til den løbende proceskontrol

2)  $X$  = koncentrationen af stoffet A ved en enkelt måling.

$X$  antages normalfordelt  $n(5.407, 3.840)$ .

$P(X > 12.0) = \text{normCdf}(12, \infty, 5.407, 3.839) = \underline{\underline{0.043}}$



**Løbende kontrol.****Eksempel 16.3. Løbende kontrol.**

De i eksempel 16.1 fundne kontrolkort er i de følgende dage blevet benyttet til løbende kontrol af processen. I de første 30 dage gav et resultat, som indtastes på sædvanlig måde.

Vælg (Special\Quality Control\Variables Control Charts\X.bar and R\indsæt "indhold af A" og "gruppe" evt. blot subgroup size = 5\OK)

Vælg (Cursor på udskrift, højre musetast\Analysis Options\Vælg "Control to Standard" og sæt "Mean" og "Sigma" til de fundne værdier\OK)

Vælg (Cursor på udskrift, højre musetast\Pane Options\Marker "Outer Warning Limits" og "Inner Warning Limits"\OK)

Derved fremkommer et kontrolkort svarende til de nedenfor angivne til løbende kontrol.

***np* - kort og *c* kort.**

Efter indtastning af data, så

Vælg (Special\Quality Control\Attributes Control Chart\og gå så videre på samme måde som ovenfor)

**a6.2. Godkendelseskontrol****Enkelt stikprøveplan****Eksempel 16.9. Bestemmelse af stikprøveplan.**

Ved levering af et parti på 10.000 dukker træffer en leverandør og en aftager aftale om at vælge en enkelt - stikprøveplan bestemt ved, at acceptandsynligheden i tilfælde af 0.6% defekte dukker i partiet skal være 95%, og i tilfælde af 3,1% defekte skal være ca. 10%.

Bestem stikprøvestørrelsen  $n$  og godkendelsestallet  $c$ .

**Løsning:**

Vælg (Special\Quality Control\Acceptance Sampling\Attributes\OK)

I den fremkomne tabel

Vælg ("Lot Size"=10000, "Producers Risk"= 5, Consumer's risk" = 10, "Acceptable Quality Level"= 1.5, Lot tolerance percent defective" = 5 \OK )

Vi får følgende udskrift.

Acceptance Sampling for Attributes

Lot size: 10000

Desired features

-----

Producer's risk (alpha): 5,0%

Consumer's risk (beta): 10,0%

Generated plan

-----

Sample size (n) = 213

Acceptance number (c) = 3

Plan attributes

-----

Acceptable quality level (AQL): 0,6%

Producer's risk (alpha) = 3,86412%

Lot tolerance percent defective (LTPD): 3,1%

Consumer's risk (beta) = 9,88314%

Average Outgoing Quality Limit (AOQL) = 0,892915% at 1,37145% defective

Average Total Inspection (ATI) =

591,181 units per lot at the AQL

3489,25 units per lot at the AOQL

9032,74 units per lot at the LTPD

Vi får en stikprøvestørrelse på 213, hvilket er en mindre stikprøvestørrelse end de 229 ved "tabelmetoden". Dette skyldes fortrinsvis, at tabellen i den benyttede kolonne ikke indeholder

5.17. Ved "tabelmetoden" har man endvidere fastholdt  $\alpha =$  (ca.) 5% (bedst "tilpasning" i leverandørrisiko - punktet), men til gengæld er acceptsandsynligheden  $p_a(LQ)$ , noget mindre (ca 7%) end de tilsigtede ca. 10%. Statgraphics følger en anden strategi, som skulle give en minimal stikprøvestørrelse.

Endvidere fremkommer en OC-kurve.

### Analysere eksisterende enkelt-stikprøveplan

Vælg (Special\Quality Control \Acceptance Sampling\Attributes\OK)

I den fremkomne tabel

Vælg ("Analyze existing plan", og udfyld de resterende rubrikker med de relevante tal)  
se evt. udskrift i eksempel 16.10

### Rektificerende kontrol

#### Eksempel 16.10 Rektificerende kontrol.

Vi betragter atter den i eksempel 16.9 omtalte situation, med kontrol af dukker, idet man har valgt enkelt-stikprøveplanen  $(n, c) = (229, 3)$ .

Vi antager nu, at der yderligere er aftalt, at kontrollen udføres som rektificerende kontrol.

Beregn AOQL og tegn AOQ-kurven og ATI-kurven.

Grafen for AOQ eller ATI fås ved at vælge Vælg(Graphical Options\AOQ curve\OK)

#### 2) Statgraphics giver

Acceptance Sampling for Attributes  
Lot size: 10000

Existing plan

-----

Sample size (n) = 229

Acceptance number (c) = 3

Plan attributes

-----

Acceptable quality level (AQL): 0,6%

Producer's risk (alpha) = 4,82421%

Lot tolerance percent defective (LTPD): 3,1%

Consumer's risk (beta) = 7,13416%

Average Outgoing Quality Limit (AOQL) = 0,829179% at 1,27542% defective

Average Total Inspection (ATI) = 700,373 units per lot at the AQL

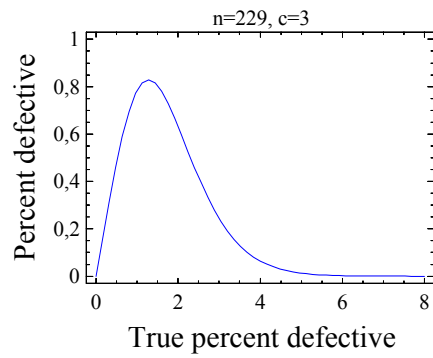
3498,77 units per lot at the AOQL

9302,92 units per lot at the LTPD

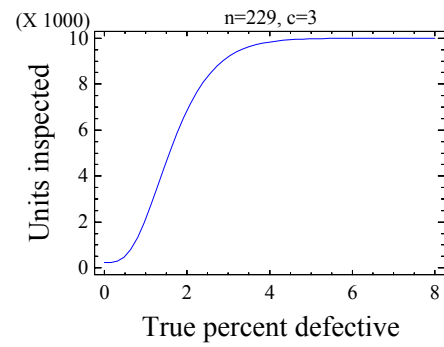
Vi ser, at  $AOQL = 0.83\%$  for  $p = 1.28\%$ .

Kurverne bliver:

Average Outgoing Quality (AOQ) Curve



Average Total Inspection (ATI) Curve



## OPGAVER

### Opgave 16.1

Ved en fabrikation af solbærsyltetøj tilstræbtes et gennemsnitligt nettoindhold af ca. 455 g solbærsyltetøj pr. glas. På glasetiketten anførtes: Nettoindhold 450 g.

Man havde på fabrikken mistanke om, at en af de automatiske fyldemaskiner havde svært ved at fastholde den ønskede nettovægt, og overvejede at foretage et hovedeftersyn af maskinen.

For at afgøre, om et sådant burde foretages, udtog man med 5 minutters mellemrum i alt 18 gange 4 successivt producerede glas fra den omhandlede maskines produktion, og nettoindholdet af solbærsyltetøj bestemtes. Følgende resultater fandtes:

| Stikprøve nr | 1     | 2      | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|--------------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Nettoindhold | 452   | 452    | 458   | 456   | 460   | 457   | 452   | 455   | 454   |
|              | 455   | 457    | 455   | 458   | 456   | 457   | 450   | 456   | 459   |
|              | 454   | 458    | 458   | 456   | 454   | 452   | 454   | 456   | 456   |
|              | 453   | 456    | 455   | 456   | 457   | 456   | 453   | 457   | 459   |
| $\bar{x}$    | 453.5 | 455.75 | 456.5 | 456.5 | 456.8 | 455.5 | 452.3 | 456.0 | 457.0 |
| Stikprøve nr | 10    | 11     | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    | 17    | 18    |
| Nettoindhold | 454   | 453    | 453   | 453   | 455   | 448   | 450   | 452   | 454   |
|              | 456   | 457    | 452   | 453   | 449   | 453   | 455   | 448   | 453   |
|              | 457   | 457    | 455   | 458   | 455   | 456   | 450   | 454   | 454   |
|              | 456   | 457    | 453   | 455   | 455   | 455   | 453   | 453   | 450   |
| $\bar{x}$    | 455.8 | 456.0  | 553.3 | 454.8 | 453.5 | 453.0 | 452.0 | 452.0 | 452.8 |

- 1) Foretag ved hjælp af  $\bar{x} - R$  - kort en kontrollkortanalyse og drag konklusioner med hensyn til, om maskinen synes at trænge til et hovedeftersyn (indsæt punkterne i et kontrollkort med alarmgrænser) .
- 2) Estimer, hvor stor en del af produktionen der ville være fejlproduktion (underfyldte glas), såfremt maskinen i statistisk kontrol med den i 1) konstaterede variation producerede med et middelinhold på 455g .

### Opgave 16.2

Med henblik på indførelse af en proceskontrol for en løbende produktion er observeret følgende data:

| Maskine nr | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Data       | 12.9 | 11.8 | 12.8 | 12.9 | 11.9 | 12.1 | 13.6 | 13.8 | 12.0 | 13.1 |
|            | 11.6 | 12.4 | 12.8 | 14.4 | 12.3 | 12.7 | 12.0 | 11.6 | 11.4 | 12.2 |
|            | 13.0 | 12.7 | 12.5 | 13.4 | 12.5 | 12.0 | 12.4 | 12.4 | 11.3 | 12.2 |

Foretag en kontrollkortanalyse med opstilling af  $\bar{x}$  - kort og  $s$  - kort.  
Udarbejd på basis heraf kontrollkort med alarmgrænser.

**Opgave 16.3**

Ved en fabrikation af gips på basis af kalksten ønskedes indført en løbende proceskontrol med  $\bar{x} - s$  - kort. Produktets kvalitet vurderedes bl.a. ved måling af DOP - absorptionen

(g DOP/100 g pulver). .

Ved den indledende kontrolkortanalyse benyttedes successive råvareleverancer som undergrupper, idet der af hver råvareleverance udtoges en stikprøve af størrelsen 5. Herved opnåedes følgende resultater:

| Gruppe      | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    | 15    |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\bar{x}_i$ | 22.31 | 19.89 | 21.56 | 22.05 | 21.80 | 22.45 | 22.02 | 21.66 | 21.56 | 22.85 | 22.80 | 21.99 | 20.77 | 21.44 | 21.90 |
| $s_i$       | 1.52  | 5.24  | 1.33  | 2.09  | 0.27  | 2.45  | 0.20  | 4.15  | 2.75  | 2.65  | 1.39  | 4.04  | 1.88  | 1.49  | 3.67  |

- 1) Udfør en sædvanlig kontrolkortanalyse og vurder, om processen kan antages at være i kontrol.

I det næste spørgsmål forudsættes, at processen under indkørselen var i statistisk kontrol i den i henhold til 1) estimerede procestilstand, og at de udarbejdede kontrolkort derfor benyttes til den løbende kontrol.

- 2) Nogen tid senere fik virksomheden en ny råvareleverandør. Som følge af ændret råvarekvalitet ændredes processens middelniveau til 19.4. Beregn sandsynligheden for, at et punkt falder uden for kontrolgrænserne, og angiv, hvor mange stikprøver man må forvente, at der i gennemsnit er udtaget på det tidspunkt, hvor ændringen opdages.
- 3) Hvilket middelniveau bør processen ideelt søges indstillet og fastholdt på, hvis der er fastsat følgende tolerancegrænser for produktionen:

$$NTG = 12.0 \quad \quad \quad \text{ØTG} = 25.0$$

Hvilken fejlprocent vil fabrikationen have med dette middelniveau, når spredningen fortsat antages at være den i henhold til 1) estimerede?

**Opgave 16.4**

På en papirfabrik fabrikeredes en bestemt papirtype ved en af virksomhedens maskiner. Under fabrikationen måltes løbende værdien af en bestemt egenskab  $G$  (vægt/arealenhed). Man tilstræbte et gennemsnitligt niveau på 86.0 og havde ved produktionens påbegyndelse fastsat nedre og øvre tolerancegrænser  $NTG = 85.5$  og  $ØTG = 86.5$ . Produktionsniveauet kunne reguleres op eller ned ved manuel betjening af maskinen. En betroet formand havde instruks om at søge at holde det anførte gennemsnitlige niveau og at regulere på maskinindstillingen, hvis han skulle finde tegn på at produktionsniveauet var faldet under  $NTG$  eller over  $ØTG$ .

Virksomheden besluttede sig i forbindelse med en eksportaftale til at indføre statistisk kvalitetskontrol og foretog indledningsvis en kontrolkortanalyse af  $G$ -værdier fra den omtalte maskine. Da man ikke havde nogen tekniske gruppindelingskriterier, lod man tidsmæssig nærhed være kriterium og valgte rationelle undergrupper på to på hinanden følgende observationer. Herved fremkom følgende gruppindelings:

| Gruppe  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| G-værdi | 87.2 | 85.8 | 85.8 | 85.7 | 86.6 | 86.1 | 85.6 | 86.0 | 86.2 | 85.3 | 85.4 | 85.6 | 86.7 |
|         | 86.4 | 85.6 | 85.8 | 86.4 | 86.1 | 86.0 | 86.0 | 85.9 | 86.8 | 85.1 | 85.0 | 85.5 | 85.3 |

| Gruppe  | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   | 25   | 26   |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| G-værdi | 84.7 | 85.8 | 85.6 | 85.5 | 85.3 | 85.3 | 85.8 | 86.3 | 87.0 | 87.0 | 87.3 | 87.0 | 86.9 |
|         | 85.4 | 87.7 | 85.6 | 85.2 | 85.0 | 85.6 | 86.1 | 86.3 | 86.8 | 87.6 | 87.2 | 86.8 | 87.3 |

- 1) Opstil som led i kontrollkortanalysen  $R$  - kort og vurder om processen efter eventuel fjernelse af enkelte punkter på kortet har været i statistisk kontrol med hensyn til spredning.
- 2) Estimer på grundlag af  $R$  - kortanalysen processens spredning  $\sigma$ .
- 3) Opstil som led i kontrollkortanalysen  $\bar{x}$  - kort og vurder, om processen efter eventuel fjernelse af enkelte punkter på kortet har været i statistisk kontrol med hensyn til niveau.
- 4) Beregn, idet processen antages indstillet på et gennemsnitligt niveau på 86.0, og processen på det pågældende tidspunkt antages at være i statistisk kontrol med den under punkt 2 estimerede  $\sigma$  - værdi, sandsynligheden  $p$  for, at den undersøgte procesvariabel antager en værdi uden for det anførte toleranceinterval.

Efter kontrollkortanalysen bestemte driftsledelsen sig til at fortsætte med at føre kontrol med produktionen ved hjælp af  $\bar{x}$  - og  $R$  - kort. I forbindelse hermed fastsatte man nye tolerancegrænser for produktionen (de tidligere grænser var blevet fastsat ret tilfældigt af driftsledelsen).

- 5) Angiv med motivering, hvilke tolerancegrænser du på grundlag af den foretagne kontrollkortanalyse ville fastsætte, såfremt man fortsat ønskede et gennemsnitligt niveau på 86.0 og ikke ønskede at gøre toleranceintervallet bredere, end den pågældende produktion nødvendig gjorde.

### Opgave 16.5

Fra en fyldeproces er udtaget 25 stikprøver af størrelsen 400. En enhed siges at være underfyldt, hvis enheden er påfyldt mindre end 95g. Antallet af underfyldte enheder i hver stikprøve er optalt. Følgende data fandtes:

| Stikprøve nr       | 1 | 2  | 3  | 4 | 5  | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|--------------------|---|----|----|---|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Antal underf. enh. | 6 | 14 | 10 | 4 | 13 | 9 | 7 | 11 | 15 | 13 | 5  | 14 | 11 | 8  | 15 | 11 | 9  | 21 | 6  | 12 | 6  | 12 | 8  | 15 | 14 |

Sum 269

- 1) Foretag en kontrollkortanalyse og opstil kontrollkort, der kan benyttes til løbende kontrol. Antag, at fyldeprocessen i statistisk kontrol påfylder hver enhed en mængde  $X$  (i gram), der er normalfordelt  $n(100, \sigma)$ .
- 2) Angiv på grundlag af besvarelsen i spørgsmål 1) et estimat for  $\sigma$ .
- 3) Bestem på grundlag af besvarelsen i spørgsmål 2)  $\bar{x}$  - og  $s$  - kontrollkort, der for stikprøvestørrelsen  $n=10$  kan benyttes til løbende kontrol af fyldeprocessen.

**Opgave 16.6**

En fabrik fremstiller billige disketter. Disketterne pakkes i kasser, som hver indeholder 100 disketter.

Produktionen er i statistisk kontrol, og det vides, at der i gennemsnit er 1 defekt diskette ud af 125 disketter.

- 1) Angiv øvre og nedre kontrolgrænse for et kontrolkort, baseret på, at man hver time udtager en kasse på 100 disketter, og optæller antallet af defekte disketter.

En forretningskæde med 5 forretninger køber hver måned et stort antal disketter fra fabrikken. Kæden træffer aftale med fabrikanten om at benytte en enkelt-stikprøveplan med følgende specifikationer:

Ved den tilfredsstillende kvalitet: fejlprocent 0.8, skal leverandørens risiko være 10%.

Ved den utilfredsstillende kvalitet: fejlprocent 3, skal aftagerens risiko være 10%.

- 2) Bestem stikprøvestørrelsen  $n$  (afrund til nærmeste med 100 delelige tal) og godkendelsestallet  $c$ .

- 3) Beregn aftagerens risiko ved en fejlprocent på 3.

- 4) Hver af de 5 forretninger foretager ovennævnte stikprøvekontrol.

Hvis produktionen er i statistisk kontrol således, at der som nævnt i gennemsnit forekommer 1 defekt diskette ud af 125 disketter, beregn da sandsynligheden for, at fabrikanten får et parti godkendt,

- a) i 2 forretninger ud af de 5,
- b) i alle 5 forretninger.

**Opgave 16.7**

Ved en statistisk partikontrol ved alternativ variation fastsættes en enkelt-stikprøveplan ved følgende specifikationer:

Ved den tilfredsstillende kvalitet: fejlprocent 3, skal leverandørens risiko være 5%.

Ved den utilfredsstillende kvalitet: fejlprocent 8, skal aftagerens risiko være 5%.

- 1) Bestem stikprøvestørrelsen  $n$  (afrund til nærmeste med 10 delelige tal) og godkendelsestallet  $c$ .

- 2) Beregn for den valgte stikprøveplan acceptsandsynlighederne  $P_a(0.04)$ ,  $P_a(0.05)$ ,  $P_a(0.06)$ ,  $P_a(0.07)$ ,  $P_a(0.10)$ .

- 3) Skitsér stikprøveplanens OC-kurve.

**Opgave 16.8**

En kemisk fabrik bestemte sig for at indføre kontrol med kvaliteten af en produktion, som virksomhedens halvfabrikatafdeling leverede til færdigvareafdelingen.

Kontrollen udførtes som partikontrol ved alternativ variation med en enkelt-stikprøveplan fastlagt ved følgende specifikationer:

Ved den tilfredsstillende kvalitet, fejlprocent 2, skal leverandørens risiko være 1%.

Ved den utilfredsstillende kvalitet, fejlprocent 10, skal aftagerens risiko være 1%.

- 1) Bestem stikprøveplanens parametre. stikprøvestørrelsen  $n$  (der rundes op til et med 10 delcligt tal) og godkendelsestallet  $c$ .

Halvfabrikatafdelingen havde en dagsproduktion på 2500 emner. og stikprøvekontrollen foretoges én gang daglig på den samlede dagsproduktion.

Efter nogen tids forløb bestemte man sig til med bibeholdelse af den valgte enkelt-stikprøveplan at udføre kontrollen som en rektificerende kontrol.

- 2) Idet  $100p'$  angiver de til kontrollen indgående partiers fejlprocent og  $100p_u$  de fra kontrollen udgående partiers fejlprocent, ønskes  $E(p_u)$  bestemt for følgende værdier af  $p'$ :

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $p'$ | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.08 | 0.10 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|

- 3) Angiv grafisk  $E(p_u)$  som funktion af  $p'$ .  
 4) Bestem, idet  $n_T$  betegner det totale antal emner, som inspiceres ved den rektificerende kontrol,  $E(n_T)$  for den værdi af  $p'$ , for hvilken  $E(p_u)$  er størst.

### Opgave 16.9

En dobbelt-stikprøveplan ønskes fastlagt ved følgende specifikationer:

Stikprøvestørrelserne:  $n_2 = 2 \cdot n_1$ , Godkendelsestallene:  $c_3 = c_2$

Tilfredsstillende kvalitet  $AQL$ :  $p_G = 1.0\%$ . Leverandørens risiko:  $\alpha = \text{ca } 5\%$ .

Utilfredsstillende kvalitet  $LQ$ :  $p_k = 7.0\%$ . Aftagerens risiko:  $\beta = \text{ca } 10\%$ .

- Bestem dobbelt-stikprøveplanens parametre.
- Skitsér OC - kurven på basis af de 4 støttepunkter man kan beregne på basis af tabellen.
- Beregn den gennemsnitlige stikprøvestørrelse  $ASE$  for de to risikopunkter, samt for  $p = 4\%$  og afbild resultatet grafisk.

### Opgave 16.10

Ved en kontrol af en bestemt type installerede husholdningsgasmålere udførtes en stikprøvekontrol af disse ved anvendelse af en dobbelt-stikprøveplan.

Man valgte en procedure, hvorved målere fra samme årgang (partistørrelse ca. 2000) med 4 års mellemrum kontrolleredes ved stikprøveudtagning.

En dobbelt-stikprøveplan ønskes fastlagt ved følgende specifikationer:

Stikprøvestørrelserne:  $n_2 = n_1$ , Godkendelsestallene:  $c_3 = c_2$

Tilfredsstillende kvalitet  $AQL$ :  $p_G = 2.4\%$ . Leverandørens risiko:  $\alpha = \text{ca } 5\%$ .

Utilfredsstillende kvalitet  $LQ$ :  $p_k = 9.0\%$ . Aftagerens risiko:  $\beta = \text{ca } 10\%$ .

- Bestem dobbelt-stikprøveplanens parametre.
- Skitsér OC - kurven på basis af de 4 støttepunkter man kan beregne på basis af tabellen.
- Bestem den gennemsnitlige stikprøvestørrelse for de ovenanførte  $p$ -værdier.
- I praksis udførtes kontrollen som rektificerende kontrol, således at alle målere af den undersøgte årgang udskiftedes med nye målere, såfremt "partiet" kasseredes.
- Beregn for hver af de oven anførte  $p$ -værdier den gennemsnitlige fejlprocent efter kontrollen og angiv approksimativt den maksimale gennemsnitlige fejlprocent  $AOQL$ .

# STATISTISKE TABELLER

**TABEL 1. Rang test vedrørende 1 statistisk variabel (Wilcoxons teststørrelse).**

Tabel over kritiske værdier af Wilcoxons teststørrelse  $w_\alpha$

| $\alpha \backslash n$ | 0.10 | 0.05  | 0.02 | 0.01  | to-sidet test |
|-----------------------|------|-------|------|-------|---------------|
|                       | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | én-sidet test |
| 5                     | 0    |       |      |       |               |
| 6                     | 2    | 0     |      |       |               |
| 7                     | 3    | 2     | 0    |       |               |
| 8                     | 5    | 3     | 1    | 0     |               |
| 9                     | 8    | 5     | 3    | 1     |               |
| 10                    | 10   | 8     | 5    | 3     |               |
| 11                    | 13   | 10    | 7    | 5     |               |
| 12                    | 17   | 13    | 9    | 7     |               |
| 13                    | 21   | 17    | 12   | 9     |               |
| 14                    | 25   | 21    | 15   | 12    |               |
| 15                    | 30   | 25    | 19   | 15    |               |
| 16                    | 35   | 29    | 23   | 19    |               |
| 17                    | 41   | 34    | 27   | 23    |               |
| 18                    | 47   | 40    | 32   | 27    |               |
| 19                    | 53   | 46    | 37   | 32    |               |
| 20                    | 60   | 52    | 43   | 37    |               |
| 21                    | 67   | 58    | 49   | 42    |               |
| 22                    | 75   | 65    | 55   | 48    |               |
| 23                    | 83   | 73    | 62   | 54    |               |
| 24                    | 91   | 81    | 69   | 61    |               |
| 25                    | 100  | 89    | 76   | 68    |               |

Idet  $w = \min\{w_+, w_-\}$  forkastes nulhypotesen  $H_0$  hvis  $w < w_\alpha$  (jævnfør eksempel 15.2).

For  $n > 20$  kan fordelingen af  $w_+$  (eller  $w_-$ ) approksimeres med normalfordelingen med middelværdi

$$\mu = \frac{n \cdot (n+1)}{4} \text{ og spredning } \sigma = \sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24}} \text{ (med heltalskorrektion).}$$

**TABEL 2. Rang test vedrørende 2 uafhængige statistiske variable (Wilcoxon's teststørrelse).**

I: Tosidet test:  $\alpha = 0.05$       Ensidet test:  $\alpha = 0.025$

| $n_2 \backslash n_1$ | 3     |       | 4     |       | 5     |       | 6     |       | 7     |       | 8     |       | 9     |       | 10    |       |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                      | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ |
| 3                    | 5     | 16    | 6     | 18    | 6     | 21    | 7     | 23    | 7     | 26    | 8     | 28    | 8     | 31    | 9     | 33    |
| 4                    | 6     | 18    | 11    | 25    | 12    | 28    | 12    | 32    | 13    | 35    | 14    | 38    | 15    | 41    | 16    | 44    |
| 5                    | 6     | 21    | 12    | 28    | 18    | 37    | 19    | 41    | 20    | 45    | 21    | 49    | 22    | 53    | 24    | 56    |
| 6                    | 7     | 23    | 12    | 32    | 19    | 41    | 26    | 52    | 28    | 56    | 29    | 61    | 31    | 65    | 32    | 70    |
| 7                    | 7     | 26    | 13    | 35    | 20    | 45    | 28    | 56    | 37    | 68    | 39    | 73    | 41    | 78    | 43    | 83    |
| 8                    | 8     | 28    | 14    | 38    | 21    | 49    | 29    | 61    | 39    | 73    | 49    | 87    | 51    | 93    | 54    | 98    |
| 9                    | 8     | 31    | 15    | 41    | 22    | 53    | 31    | 65    | 41    | 78    | 51    | 93    | 63    | 108   | 66    | 114   |
| 10                   | 9     | 33    | 16    | 44    | 24    | 56    | 32    | 70    | 43    | 83    | 54    | 98    | 66    | 114   | 79    | 131   |

II: Tosidet test:  $\alpha = 0.10$       Ensidet test:  $\alpha = 0.05$

| $n_2 \backslash n_1$ | 3     |       | 4     |       | 5     |       | 6     |       | 7     |       | 8     |       | 9     |       | 10    |       |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                      | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ | $w_n$ | $w_o$ |
| 3                    | 6     | 15    | 7     | 17    | 7     | 20    | 8     | 22    | 9     | 24    | 9     | 27    | 10    | 29    | 11    | 31    |
| 4                    | 7     | 17    | 12    | 24    | 13    | 27    | 14    | 30    | 15    | 33    | 16    | 36    | 17    | 39    | 18    | 42    |
| 5                    | 7     | 20    | 13    | 27    | 19    | 36    | 20    | 40    | 22    | 43    | 24    | 46    | 25    | 50    | 26    | 54    |
| 6                    | 8     | 22    | 14    | 30    | 20    | 40    | 28    | 50    | 30    | 54    | 32    | 58    | 33    | 63    | 35    | 67    |
| 7                    | 9     | 24    | 15    | 33    | 22    | 43    | 30    | 54    | 39    | 66    | 41    | 71    | 43    | 76    | 46    | 80    |
| 8                    | 9     | 27    | 16    | 36    | 24    | 46    | 32    | 58    | 41    | 71    | 52    | 84    | 54    | 90    | 57    | 95    |
| 9                    | 10    | 29    | 17    | 39    | 25    | 50    | 33    | 63    | 43    | 76    | 54    | 90    | 66    | 105   | 69    | 111   |
| 10                   | 11    | 31    | 18    | 42    | 26    | 54    | 35    | 67    | 46    | 80    | 57    | 95    | 69    | 111   | 83    | 127   |

$n_1 \leq n_2$ :  $H_0$  forkastes hvis  $w_{n_1} < w_n$  eller  $w_{n_1} > w_o$  (ligger udenfor intervallet  $[w_n ; w_o]$ )

Hvis  $n_1 \geq 10$  og  $n_2 \geq 10$  er teststørrelsen approksimativt normalfordelt med middelværdi

$$\mu = \frac{n_1 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{2} \text{ og spredning } \sigma = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

**TABEL 3. Signifikansgrænser for Spearmanns korrelationskoefficient**

| Størrelse $n$<br>af stikprøve<br>på $(X_1, X_2)$ | Signifikantgrænser for $r$ |                |                |                |
|--------------------------------------------------|----------------------------|----------------|----------------|----------------|
|                                                  | Ensidet test               |                | Tosidet test   |                |
|                                                  | $\alpha = 5\%$             | $\alpha = 1\%$ | $\alpha = 5\%$ | $\alpha = 1\%$ |
| 5                                                | 0.800                      | 0.900          | 0.900          | -              |
| 6                                                | 0.771                      | 0.886          | 0.829          | 0.943          |
| 7                                                | 0.679                      | 0.857          | 0.745          | 0.893          |
| 8                                                | 0.619                      | 0.810          | 0.714          | 0.857          |
| 9                                                | 0.583                      | 0.767          | 0.683          | 0.817          |
| 10                                               | 0.552                      | 0.733          | 0.636          | 0.782          |
| 11                                               | 0.527                      | 0.700          | 0.609          | 0.746          |
| 12                                               | 0.497                      | 0.671          | 0.580          | 0.727          |
| 13                                               | 0.478                      | 0.643          | 0.555          | 0.698          |
| 14                                               | 0.459                      | 0.622          | 0.534          | 0.675          |
| 15                                               | 0.443                      | 0.600          | 0.518          | 0.654          |
| 16                                               | 0.426                      | 0.582          | 0.500          | 0.632          |
| 17                                               | 0.412                      | 0.564          | 0.485          | 0.615          |
| 18                                               | 0.399                      | 0.548          | 0.472          | 0.598          |
| 19                                               | 0.390                      | 0.533          | 0.458          | 0.582          |
| 20                                               | 0.379                      | 0.520          | 0.445          | 0.568          |
| 21                                               | 0.369                      | 0.508          | 0.555          | 0.555          |
| 22                                               | 0.360                      | 0.496          | 0.424          | 0.543          |
| 23                                               | 0.352                      | 0.485          | 0.415          | 0.531          |
| 24                                               | 0.344                      | 0.475          | 0.406          | 0.520          |
| 25                                               | 0.336                      | 0.465          | 0.398          | 0.510          |

For  $n \geq 10$  kan benyttes, at  $t = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$  approksimativt er  $t$  - fordelt  $t(n-2)$

**Tabel 4. Konstanter til fastlæggelse af kontrolgrænser  
ved hjælp af  $\bar{x}$  - kort,  $R$  - kort og  $s$ -kort.**

| $n$ | $\bar{x}$ - kort |       |       | $R$ - kort |       |       |       |       |       | $s$ - kort |       |       |       |       |
|-----|------------------|-------|-------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|-------|-------|-------|-------|
|     | $A_1$            | $A_2$ | $A_3$ | $d_2$      | $d_3$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $c_4$      | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ |
| 2   | 2.121            | 1.880 | 2.659 | 1.128      | 0.853 | 0     | 3.686 | 0     | 3.267 | 0.798      | 0     | 3.267 | 0     | 2.606 |
| 3   | 1.732            | 1.023 | 1.954 | 1.693      | 0.888 | 0     | 4.358 | 0     | 2.575 | 0.886      | 0     | 2.568 | 0     | 2.276 |
| 4   | 1.500            | 0.729 | 1.628 | 2.059      | 0.880 | 0     | 4.698 | 0     | 2.282 | 0.921      | 0     | 2.266 | 0     | 2.088 |
| 5   | 1.342            | 0.577 | 1.427 | 2.326      | 0.864 | 0     | 4.918 | 0     | 2.115 | 0.940      | 0     | 2.089 | 0     | 1.964 |
| 6   | 1.225            | 0.483 | 1.287 | 2.534      | 0.848 | 0     | 5.078 | 0     | 2.004 | 0.952      | 0.030 | 1.970 | 0.029 | 1.874 |
| 7   | 1.134            | 0.419 | 1.182 | 2.704      | 0.833 | 0.205 | 5.203 | 0.076 | 1.924 | 0.959      | 0.118 | 1.882 | 0.113 | 1.806 |
| 8   | 1.061            | 0.373 | 1.099 | 2.847      | 0.820 | 0.387 | 5.307 | 0.136 | 1.864 | 0.965      | 0.185 | 1.815 | 0.179 | 1.751 |
| 9   | 1.000            | 0.337 | 1.032 | 2.970      | 0.808 | 0.546 | 5.394 | 0.184 | 1.816 | 0.969      | 0.239 | 1.761 | 0.232 | 1.707 |
| 10  | 0.949            | 0.308 | 0.975 | 3.078      | 0.797 | 0.687 | 5.469 | 0.223 | 1.777 | 0.973      | 0.284 | 1.716 | 0.276 | 1.669 |
| 11  | 0.905            | 0.285 | 0.927 | 3.173      | 0.787 | 0.812 | 5.534 | 0.256 | 1.744 | 0.975      | 0.321 | 1.679 | 0.313 | 1.637 |
| 12  | 0.866            | 0.266 | 0.886 | 3.258      | 0.778 | 0.924 | 5.592 | 0.284 | 1.716 | 0.978      | 0.354 | 1.646 | 0.346 | 1.610 |
| 13  | 0.832            | 0.249 | 0.850 | 3.336      | 0.770 | 1.026 | 5.646 | 0.308 | 1.692 | 0.979      | 0.382 | 1.618 | 0.374 | 1.585 |
| 14  | 0.802            | 0.235 | 0.817 | 3.407      | 0.762 | 1.121 | 5.693 | 0.329 | 1.671 | 0.981      | 0.406 | 1.594 | 0.399 | 1.563 |
| 15  | 0.775            | 0.223 | 0.789 | 3.472      | 0.755 | 1.207 | 5.737 | 0.348 | 1.652 | 0.982      | 0.428 | 1.572 | 0.421 | 1.544 |
| 16  | 0.750            | 0.212 | 0.763 | 3.532      | 0.749 | 1.285 | 5.779 | 0.364 | 1.636 | 0.983      | 0.448 | 1.552 | 0.440 | 1.526 |
| 17  | 0.728            | 0.203 | 0.739 | 3.588      | 0.743 | 1.359 | 5.817 | 0.379 | 1.621 | 0.984      | 0.466 | 1.534 | 0.458 | 1.511 |
| 18  | 0.707            | 0.194 | 0.718 | 3.640      | 0.738 | 1.426 | 5.854 | 0.392 | 1.608 | 0.985      | 0.482 | 1.518 | 0.475 | 1.496 |
| 19  | 0.688            | 0.187 | 0.698 | 3.689      | 0.733 | 1.490 | 5.888 | 0.404 | 1.596 | 0.986      | 0.497 | 1.503 | 0.490 | 1.483 |
| 20  | 0.671            | 0.180 | 0.680 | 3.735      | 0.729 | 1.548 | 5.922 | 0.414 | 1.586 | 0.987      | 0.510 | 1.489 | 0.504 | 1.470 |

**Tabel 5. Bestemmelse af enkelt - stikprøveplaner**

| $\frac{p_k}{p_g}$ $p_G$ og $p_k$ regnes i procenter |         |      |      |         |      |      |         |      |      |               |      |      |
|-----------------------------------------------------|---------|------|------|---------|------|------|---------|------|------|---------------|------|------|
| $\alpha$                                            |         |      |      |         |      |      |         |      |      |               |      |      |
| c                                                   | 1%      |      |      | 5%      |      |      | 10      |      |      | $\alpha$      |      |      |
|                                                     | $\beta$ |      |      | $\beta$ |      |      | $\beta$ |      |      | 1%            | 5%   | 10%  |
|                                                     | 1%      | 5%   | 10%  | 1%      | 5%   | 10%  | 1%      | 5%   | 10%  | $n \cdot p_G$ |      |      |
| 0                                                   | 458     | 298  | 229  | 89.8    | 58.4 | 45.1 | 43.2    | 28.1 | 21.8 | 1.0           | 5.1  | 10.5 |
| 1                                                   | 44.7    | 31.9 | 26.2 | 18.7    | 13.3 | 11.0 | 12.7    | 8.97 | 7.40 | 14.9          | 35.5 | 52.8 |
| 2                                                   | 19.3    | 14.4 | 12.2 | 10.3    | 7.70 | 6.50 | 7.65    | 5.72 | 4.84 | 43.6          | 81.8 | 110  |
| 3                                                   | 12.2    | 9.42 | 8.12 | 7.35    | 5.68 | 4.89 | 5.77    | 4.46 | 3.83 | 82.3          | 137  | 174  |
| 4                                                   | 9.07    | 7.16 | 6.25 | 5.89    | 4.65 | 4.06 | 4.77    | 3.77 | 3.29 | 128           | 197  | 243  |
| 5                                                   | 7.34    | 5.89 | 5.20 | 5.02    | 4.02 | 3.55 | 4.16    | 3.33 | 2.95 | 179           | 261  | 315  |
| 6                                                   | 6.25    | 5.08 | 4.52 | 4.44    | 3.60 | 3.21 | 3.74    | 3.03 | 2.71 | 233           | 329  | 389  |
| 7                                                   | 5.51    | 4.52 | 4.05 | 4.02    | 3.30 | 2.96 | 3.44    | 2.81 | 2.53 | 291           | 398  | 465  |
| 8                                                   | 4.96    | 4.12 | 3.71 | 3.71    | 3.07 | 2.77 | 3.20    | 2.65 | 2.39 | 351           | 470  | 544  |
| 9                                                   | 4.55    | 3.80 | 3.44 | 3.46    | 2.90 | 2.62 | 3.02    | 2.52 | 2.28 | 413           | 543  | 623  |
| 10                                                  | 4.22    | 3.56 | 3.23 | 3.27    | 2.75 | 2.50 | 2.87    | 2.42 | 2.20 | 477           | 617  | 701  |
| 11                                                  | 3.96    | 3.35 | 3.06 | 3.10    | 2.63 | 2.40 | 2.75    | 2.32 | 2.12 | 543           | 692  | 784  |
| 12                                                  | 3.74    | 3.19 | 2.92 | 2.97    | 2.53 | 2.31 | 2.64    | 2.25 | 2.06 | 610           | 769  | 865  |
| 13                                                  | 3.56    | 3.05 | 2.80 | 2.85    | 2.44 | 2.24 | 2.55    | 2.19 | 2.00 | 678           | 846  | 950  |
| 14                                                  | 3.40    | 2.93 | 2.69 | 2.75    | 2.37 | 2.18 | 2.51    | 2.16 | 1.96 | 748           | 925  | 1030 |
| 15                                                  | 3.27    | 2.82 | 2.60 | 2.67    | 2.30 | 2.12 | 2.41    | 2.08 | 1.91 | 818           | 1000 | 1110 |

**Tabel 6: Bestemmelse af dobbelt stikprøveplan.**

$\alpha=5\%$ ,  $\beta=10\%$ ;  $c_3 = c_2$ .  $p$  regnet i %.

| Plan<br>nr | $\frac{p_K}{p_G}$ | $n_2$         | $c_1$ | $c_2$ | $P_a(p)$      |     |               | $P_a(p)=0.95$     |
|------------|-------------------|---------------|-------|-------|---------------|-----|---------------|-------------------|
|            |                   |               |       |       | 95% ( $p_G$ ) | 50% | 10% ( $p_K$ ) | $\frac{ASN}{n_1}$ |
|            |                   |               |       |       | $n_1 \cdot p$ |     |               |                   |
| 1          | 14.50             | $2 \cdot n_1$ | 0     | 1     | 16            | 84  | 232           | 1.27              |
| 2          | 11.90             | $n_1$         | 0     | 1     | 21            | 100 | 250           | 1.17              |
| 3          | 8.07              | $2 \cdot n_1$ | 0     | 2     | 30            | 107 | 242           | 1.51              |
| 4          | 7.54              | $n_1$         | 1     | 2     | 52            | 182 | 392           | 1.08              |
| 5          | 6.79              | $n_1$         | 0     | 2     | 43            | 142 | 296           | 1.34              |
| 6          | 6.48              | $2 \cdot n_1$ | 1     | 3     | 60            | 180 | 389           | 1.24              |
| 7          | 5.39              | $n_1$         | 1     | 3     | 76            | 211 | 411           | 1.17              |
| 8          | 5.39              | $2 \cdot n_1$ | 0     | 3     | 49            | 135 | 264           | 1.77              |
| 9          | 5.09              | $2 \cdot n_1$ | 1     | 4     | 77            | 197 | 392           | 1.36              |
| 10         | 4.65              | $n_1$         | 2     | 4     | 116           | 290 | 539           | 1.11              |
| 11         | 4.31              | $2 \cdot n_1$ | 0     | 4     | 68            | 164 | 293           | 1.99              |
| 12         | 4.25              | $n_1$         | 1     | 4     | 104           | 250 | 442           | 1.27              |
| 13         | 4.19              | $2 \cdot n_1$ | 1     | 5     | 96            | 218 | 402           | 1.50              |
| 14         | 3.88              | $n_1$         | 2     | 5     | 143           | 320 | 555           | 1.17              |
| 15         | 3.63              | $n_1$         | 3     | 6     | 187           | 398 | 678           | 1.12              |
| 16         | 3.60              | $2 \cdot n_1$ | 1     | 6     | 116           | 244 | 417           | 1.65              |
| 17         | 3.38              | $n_1$         | 2     | 6     | 172           | 356 | 582           | 1.25              |
| 18         | 3.26              | $2 \cdot n_1$ | 2     | 8     | 168           | 328 | 547           | 1.48              |
| 19         | 3.21              | $n_1$         | 3     | 7     | 215           | 427 | 691           | 1.17              |
| 20         | 3.09              | $n_1$         | 4     | 8     | 262           | 502 | 810           | 1.12              |
| 21         | 2.96              | $2 \cdot n_1$ | 3     | 10    | 227           | 413 | 672           | 1.39              |
| 22         | 2.85              | $n_1$         | 4     | 9     | 290           | 533 | 826           | 1.17              |
| 23         | 2.77              | $2 \cdot n_1$ | 3     | 11    | 246           | 436 | 682           | 1.47              |
| 24         | 2.62              | $2 \cdot n_1$ | 4     | 13    | 307           | 521 | 805           | 1.39              |
| 25         | 2.60              | $n_1$         | 5     | 11    | 368           | 640 | 956           | 1.17              |
| 26         | 2.46              | $2 \cdot n_1$ | 4     | 14    | 329           | 540 | 811           | 1.47              |
| 27         | 2.44              | $n_1$         | 5     | 12    | 400           | 673 | 977           | 1.22              |
| 28         | 2.32              | $n_1$         | 5     | 13    | 435           | 706 | 1008          | 1.27              |
| 29         | 2.22              | $n_1$         | 5     | 14    | 470           | 752 | 1045          | 1.33              |
| 30         | 2.21              | $2 \cdot n_1$ | 3     | 15    | 341           | 540 | 755           | 1.89              |
| 31         | 2.12              | $n_1$         | 5     | 16    | 539           | 840 | 1141          | 1.45              |
| 32         | 1.97              | $2 \cdot n_1$ | 4     | 20    | 475           | 702 | 935           | 2.03              |

## FACITLISTE

### KAPITEL 14

- 14.1 (1) Poisson (2) 1.64 (3)  $\chi^2 = 2.8$ ,  $P$ -værdi = 0.7308 (4) 1640000  
 14.2  $\chi^2 = 3.24$ ,  $P$ -værdi = 0.6638.  
 14.3  $\chi^2 = 5$ ,  $P$ -værdi = 0.4158  
 14.4  $\chi^2 = 12.64$ ,  $P$ -værdi = 0.027  
 14.5  $\chi^2 = 13.78$ ,  $P$ -værdi = 0.0877  
 14.6  $\chi^2 = 6.31$ ,  $P$ -værdi = 0.0426  
 14.7  $\chi^2 = 5.44$ ,  $P$ -værdi = 0.0658  
 14.8 (1)  $\chi^2 = 16.21$ ,  $P$ -værdi = 0.00030 (2)  $\chi^2 = 4.87$ ,  $P$ -værdi = 0.560

### KAPITEL 15

- 15.1  $w_+ = 5$ , forkastelse  
 15.2  $w_- = 28.5$ , accept  
 15.3  $w_- = 14.5$ , accept  
 15.4  $w_- = 24.5$ , accept  
 15.5 (1)  $w = 29.5$ , forkastelse (2)  $t = 4.73$ , forkastelse  
 15.6  $w = 29$ , accept  
 15.7  $w = 33$ , forkastelse  
 15.8  $\chi^2 = 15.60$ ,  $P$ -værdi = 0.0013  
 15.9  $\chi^2 = 5.67$ ,  $P$ -værdi = 0.0587  
 15.10 (1)  $F = 4.05$ ,  $P$ -værdi = 0.0187 (2)  $\chi^2 = 9.52$   $P$ -værdi = 0.049  
 15.11 (1)  $\chi^2 = 18.70$ ,  $P$ -værdi = 0.00219 (2) -  
 15.12  $P$ -værdi = 0.0475  
 15.13  $r = 0.854$ ,  $t = 5.19$ ,  $P$ -værdi = 0.00020

### KAPITEL 16

- 16.1 (1)  $NKG_R = 0$ ,  $ØKG_R = 10.14$ ,  $NKG_{\bar{x}} = 451.4$ ,  $ØKG_{\bar{x}} = 437.8$ , ja, (2) 1 % .  
 16.2  $NKG_s = 0$ ,  $ØKG_s = 1.466$ ,  $NKG_{\bar{x}} = 11.37$ ,  $ØKG_{\bar{x}} = 13.61$   
 16.3 (1)  $NKG_s = 0$ ,  $ØKG_s = 4.45$ ,  $NKG_{\bar{x}} = 18.90$ ,  $ØKG_{\bar{x}} = 24.98$  (2) 0.312, ca 3  
 (3) 18.5, 0.42%  
 16.4 (1)  $NKG_R = 0$ ,  $ØKG_R = 1.02$ , (2) 0.277 (3)  $NKG_{\bar{x}} = 85.46$ ,  $ØKG_{\bar{x}} = 86.64$   
 (4) 7.1% (5)  $NTG_x = 85.17$ ,  $ØKG_x = 86.83$ ,

*Facitliste*

- 16.5** (1)  $NKG = 0.82$ ,  $\emptyset KG = 19.84$  (2) 2.57  
(3)  $NKG_s = 0.71$ ,  $\emptyset KG_s = 4.27$ ,  $NKG_{\bar{x}} = 97.57$ ,  $\emptyset KG_{\bar{x}} = 102.43$
- 16.6** (1)  $NKG = 0$ ,  $\emptyset KG = 3.47$  (2)  $c = 4$ ,  $n = 300$ , (3) 5.5% (4a) 0.72% (4b) 60.37%
- 16.7** (1)  $n = 230$ ,  $c = 11$ , (2) 78.3%, 51.98%, 26.96%, 11.34%, 0.302% (3) -
- 16.8** (1)  $n = 180$ ,  $c = 8$ , (2) - (3) - (4) ca 668
- 16.9** (1) (1,3,3,60,120) (2) - (3) -
- 16.10** (1) (78,78,3,6,6) (2) - (3) (4) AOQL= ca 2.6%

# STIKORDSREGISTER

## A

acceptsandsynlighed 52  
 Acceptable Quality Level AQL 53  
 aftagerens risiko 53  
 alarmkriterier 38, 39  
 appendix  
   14A: Eksempler med TI -89 8  
   14B: Eksempler med Statgraphics 10  
   15A: Eksempler med Statgraphics 27  
   16A: Eksempler med Statgraphics 61  
 antalstabel 1,  
 Average Outgoing Quality, AOQ 54  
 Average Outgoing Quality Limit, AOQL 54  
 Average Sample Number, ASN 56  
 Average Total Inspection, ATI 54

## B

binomialfordeling  
   kontrolkort 46, 59, 65

## C

chi i anden fordeling  
   test 2, 6  
 c - kontrolkort 46, 59  
 consumers risk 53

## D

dobbelt stikprøveplan 55  
   tabel 78

## E

enkelt stikprøveplan 51  
   med Statgraphics 65  
   tabel 77  
 en-vejs tabel 2

## F

facitliste 79  
 Friedmanns test 22, 26  
 fejlprocent (kontrol af) 48, 59

## G

godkendelseskontrol 36, 50  
 godkendelsestest c 51  
 grænser for kontrolkort 38, 59

## H

## I,J

## K

kapabilitet 49  
 kapabilitetsindeks 50  
 klasser 1  
 konstruktionskvalitet 36  
 kontrolkortanalyse 41  
 kontrol  
   af binomialfordelt variabel 46, 59  
   af fejlintensitet 48, 59  
   af fejlprocent 46, 59  
   af normalfordelt variabel 42, 59  
   af Poissonfordelt variabel 48, 59  
   løbende 45  
   rektificerende 54  
 kontrolkort 59  
 korrelationskoefficient  
   Spearman 23, 75  
 Kruskal-Wallis test 21, 25, 29  
 kvalitetskontrol 36  
 kvalitetsstyring 36  
 kvalitet  
   tilfredsstillende 53  
   utilfredsstillende 53

## L

leverandørens risiko 53  
 Limiting Quality LQ 53

## M

markedsføringskvalitet 36  
 median 16  
 multinominalt eksperiment 1, 6

## N

np - kontrolkort 46, 59

## O

OC - kurve 51, 52  
 opgaver  
   kapitel 14 12  
   kapitel 15 31  
   kapitel 16 68

oversigt

- 14.1 antalstabel 1.vejs tabel 6
- 14.2 antalstabel 2vejs tabel 7
- 15.1 Kruskal- Wallis 25
- 15.2 Friedman 26
- 16.1 Kontrolkort 59

**P**

- partikontrol 51
- Poissonfordeling
  - kontrolkort 48, 59
- proces i kontrol 37
- processtyring 37
- proces ude af kontrol 38
- procesvariablen 37
- producers risk 53
- produktionskvalitet 36

**Q**

- Quality Control 36, 61
- Quality management 36

**R**

- rangtal 16
- rangtest 15
- rektificerende kontrol 54, 66
- risikopunkter 53
- R - kontrolkort 43

**S**

- s - kontrolkort 44
- specifikationsgrænser 49
- Spearmanns korrelationskoefficient 23, 75
- SPC 37
- Statgraphics
  - løsning
    - antalstabel 10
    - enkelt stikprøveplan 65
    - kontrolkort 61
    - Kruskal Wallis 29
    - Spearmanns rangtest 30
    - Wilcoxon rangtest (1 variabel) 27
    - Wilcoxon rangtest (2 variabel) 28
- stikprøveplan
  - enkelt 51
  - dobbelt 55
  - ækvivalente 50

stikprøvestørrelse  $n$  51

**T**

- tabeller 736
- tilfredsstillende kvalitet 53
- tolerancegrænser 49
- to - vejs tabel 4, 7

**U**

- uafhængighed , to - vejs tabel 4, 9, 11
- utilfredsstillende kvalitet 53

**V**

**W**

- Wilcoxon rangsum for 2 uafhængig variable (lille stikprøvestørrelse) 19
- Wilcoxon rangsum for 2 uafhængig variable (stor stikprøvestørrelse) 20
- Wilcoxon rangtal for 1 variabel (lille stikprøvestørrelse) 16
- Wilcoxon rangtal for 1 variabel (stor stikprøvestørrelse) 17
- Wilcoxon rangtal for parvise observationer 18

**X**

- x - streg kontrolkort 43

**Æ**

- ækvivalente stikprøveplaner 50