Løsning til opgave 45

Spørgsmål 1
Det vil være rimeligt at beskrive variationen ved en almindelig to-sidet ANOVA-model:

$$Y_{ijk} = \mu + t_i + m_j + tm_{ij} + E_{k(ij)}$$

hvor begge faktorerne t og m er deterministiske, og hvor vi har de sædvanlige antagelser.

Vi finder følgende variansopspaltning:

$$\begin{aligned}
\text{SAK}_t &= \sum_i T_{i\cdot\cdot}^2/12 - T_{\cdots}^2/36 \\
&= 105149/12 - 288369/36 = 752.1667 \\
\text{SAK}_m &= \sum_j T_{\cdot j\cdot}^2/12 - T_{\cdots}^2/36 \\
&= 105689/12 - 288369/36 = 797.1667 \\
\text{SAK}_{tm} &= \frac{1}{4}\sum_i\sum_j T_{ij\cdot}^2 - \frac{1}{12}\sum_i T_{i\cdot\cdot}^2 - \frac{1}{12}\sum_j T_{\cdot j\cdot}^2 + \frac{1}{36}T_{\cdots}^2 \\
&= \frac{38377}{4} - \frac{105149}{12} - \frac{105689}{12} + \frac{288369}{36} = 34.6667 \\
\text{SAK}_{rest} &= 220.75 \\
\text{SAK}_{tot} &= \sum_i\sum_j\sum_k Y_{ijk}^2 - T_{\cdots}^2/36 \\
&= 9815 - \frac{288369}{36} = 1804.75
\end{aligned}$$

Kontrol: $752.17 + 797.17 + 34.67 + 220.75 = 1804.76$

ANOVA

Variationskilde	SAK	f	s^2	F-test
temperatur: t	752.17	2	376.08	46.03
metoder: m	797.17	2	398.58	48.79
Vekselvirkning: tm	34.67	4	8.67	1.06
Restvariation	220.75	27	8.17	
Total	1804.75	35		

Det konkluderes, at der kun er hovedvirkninger, idet vekselvirkningens variation er ikke-signifikant.

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= 8.17 = 2.85^2 \text{ eller } \frac{34.67 + 220.75}{4+27} = 8.23 = 2.87^2 \\
\{\hat{t}_i\} &= \{\overline{Y}_{i\cdot\cdot} - \overline{Y}_{\cdots}\} = \{5.08, 0.92, -6.00\} \\
\{\hat{m}_j\} &= \{\overline{Y}_{\cdot j\cdot} - \overline{Y}_{\cdots}\} = \{-5.25, -0.92, 6.17\} \\
\hat{\mu} &= \overline{Y}_{\cdots} = 14.91
\end{aligned}$$

Spørgsmål 2

Dette spørgsmål kan løses ved hjælp af ortogonale polynomier. Med 3 niveauer kan variationen mellem temperaturniveauerne opspaltes i et 1.ordens- og et 2.ordens-bidrag:

Koefficienter: 1. orden (-1,0,1) og 2. orden (1,-2,1)

$$\begin{aligned}
C_{lin} &= -240 + 0 + 107 = -133 \\
C_{kvad} &= 240 - 2 \cdot 190 + 107 = -33 \\
\text{SAK}_{t,lin} &= C_{lin}^2/(12 \cdot 2) = 737.04 \\
\text{SAK}_{t,kvad} &= C_{kv}^2/(12 \cdot 6) = 15.13
\end{aligned}$$

Kontrol: 737.04 + 15.13 = 752.17

F-test for linearitet:

$$F_{t,kvad} = (15.13/1)/s_{rest}^2 = 15.13/8.17 = 1.85$$

Ej sign., da $F(1, 27)_{0.90} = 2.90$.

$$F_{t,lin} = 737.04/8.17 = 90 \text{ er stærkt sign.}$$

Temperaturafhængigheden er med andre ord stort set retlinet. Vi kan estimere afhængigheden:

$$\begin{aligned}
U &= (t - 2050)/100, \ \lambda_1 = 1 \\
\hat{A}_L &= C_{lin}/12.2 = -133/24 = -5.54 \\
\hat{A}_0 &= \overline{Y}_{\cdots} = 14.91
\end{aligned}$$

Derved fås:

$$Y = 14.91 - 5.54 \cdot \left(\frac{t - 2050}{100}\right) + \text{afvigelser,}$$

dvs. et fald i tabet på 5.54 enheder pr. 100°C.

Spørgsmål 3

Vi opstiller ortogonale kontraster, som måler de to forhold:

$$\begin{aligned}
C_{A-B} &= T_{A_1} + T_{A_2} - T_B \cdot 2 = 116 + 168 - 2 \cdot 253 = -222 \\
C_{A_1-A_2} &= T_{A_1} - T_{A_2} = 116 - 168 = -52 \\
\text{SAK}_{A-B} &= C_{A-B}^2/(12 \cdot 6) = (-222)^2/72 = 684.50 \\
\text{SAK}_{A_1-A_2} &= C_{A_1-A_2}^2/(12 \cdot 2) = (-52)^2/24 = 112.67
\end{aligned}$$

Kontrol: $684.50 + 112.67 = 797.17$.

$$
\begin{aligned}
F_{A-B} &= \frac{684.50/1}{220.75/27} = 83.7 \qquad \text{stærkt signifikant} \\
F_{A_1-A_2} &= \frac{112.67/1}{220.75/27} = 13.8 \qquad \text{stærkt signifikant}
\end{aligned}
$$

Konklusion: De tre metoder er tydeligt forskellige. A_1-metoden giver åbenbart den bedste lysleder, mens B-metoden giver den dårligste.