IMM - DTU Statistical Design and Analysis of Experiments
H. Spliid, October 20, 2010

Løsning til opgave 34

Spørgsmål 1

Faktorernes indflydelse beskrives passende ved en 3^4 fuldstændig faktorstruktur:

$$\begin{aligned} Y_{ijkl} &= \mu + A_i + B_j + AB_{ij} + C_k + AC_{ik} + BC_{jk} \\ &\quad + ABC_{ijk} + D_l + AD_{il} + BD_{jl} + ABD_{ijl} + CD_{kl} \\ &\quad + ACD_{ikl} + BCD_{jkl} + ABCD_{ijkl} + E_{ijkl} \end{aligned}$$

Modellen omskrives til den generelle form:

$$\begin{aligned} Y_{ijkl} &= \mu + A_i + B_j + AB_{i+j} + AB^2_{i+2j} + C_k + AC_{i+k} \\ &\quad + BC_{j+k} + ABC_{i+j+k} + AB^2C_{i+2j+k} + AC^2_{i+2k} \\ &\quad + BC^2_{j+2k} + \cdots + AB^2C^2_{i+2j+2k} + D_l \\ &\quad + \cdots + AB^2C^2D^2_{i+2j+2k+2l} + E_{ijkl} \end{aligned}$$

hvor indices for disse "effekter" alle tages modulo 3 (da der er tre niveauer for faktorerne).

Ved deling i blokke vil blokstørrelsen 27 være egnet. Der skal derfor vælges én af effekterne i den generelle model til at konfundere blokke med. En 4-faktorvekselvirkning vil være velegnet, fx vælges Blokke = $ABCD_{i+j+k+l}$, dvs. bloknummeret er givet ved $(i+j+k+l)_3$. Blokkene kan konstrueres ved at finde 3 løsninger til ligningen $(i+j+k+l)_3 = 0, 1$ og 2.

Den principale blok findes: $(i+j+k+l)_3 = 0$.

i	j	k	l	forsøg	
1	0	0	2	ad^2	$= x$
0	1	0	2	bd^2	$= y$
0	0	1	2	cd^2	$= z$

Den principale blok er med $x = ad^2, y = bd^2, z = cd^2$:

(1)	x	x^2	y	xy	x^2y	y^2	xy^2	x^2y^2
z	xz	x^z	yz		$\dots$			
z^2	xz^2	x^2z^2	yz^2		$\dots$			$x^2y^2z^2$

Fx er elementet $x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2d^6 \Rightarrow a^2b^2c^2$ Den anden blok findes som løsning til $i+j+k+l = 1$. En løsning er $(1,0,0,0) \sim a$. Ved at "gange" a på den principale blok fås den samlede blok. Den tredje blok findes på samme måde ud fra $i+j+k+l = 2$. En løsning er $(2,0,0,0) \sim a^2$, der ganges på den principale blok.

Spørgsmål 2

$\frac{1}{3} \cdot 3^3$-forsøget konstrueres ved at lægge D ind i den fuldstændige faktorstruktur, der dannes af A, B og C. D konfunderes med en 3-faktorvekselvirkning, fx

$$D = ABC \sim l = i + j + k$$

Definitionsrelation: $I = ABCD^2$.

Den principale fraktion dannes med $(i+j+k+2l)_3 = 0$. Den er på $3^3 = 27$ enkeltforsøg. Der skal findes 3 løsninger til ligningen:

i	j	k	l	forsøg	
1	0	0	1	ad	$= x$
0	1	0	1	bd	$= y$
0	0	1	1	cd	$= z$

Forsøget er

(1)	x	x^2	y	xy	$\ldots$	x^2y^2
z	xz		$\ldots$			
z^2			$\ldots$			$x^2y^2z^2$

Man kan også fabrikere en tabel: $D = (A + B + C)_3 \Leftrightarrow i + j + k + 2l = 0$.

Forsøgsplan

A	B	C	D	forsøg
0	0	0	0	(1)
1	0	0	1	ad
2	0	0	2	a^2d^2
0	1	0	1	bd
1	1	0	2	abd^2
2	1	0	0	a^2b
0	2	0	2	b^2d^2
1	2	0	0	ab^2
2	2	0	1	a^2b^2d
0	0	1	1	cd
1	0	1	2	acd^2
2	0	1	0	a^2c
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	2	2	0	$a^2b^2c^2$

Aliasrelationer

I	$=$	$ABCD^2$		
A	$=$	$AB^2C^2D(rettet)$	$=$	BCD^2
B	$=$	AB^2CD^2	$=$	ACD^2
AB	$=$	ABC^2D	$=$	CD^2
AB^2	$=$	AC^2D	$=$	BC^2D
C	$=$	ABC^2D^2	$=$	ABD^2
AC	$=$	$\vdots$	$=$	$\vdots$
BC	$=$		$=$	
ABC	$=$	$ABCD$	$=$	D
AB^2C	$=$		$=$	
AC^2	$=$	$\vdots$	$=$	$\vdots$
BC^2	$=$		$=$	
ABC^2	$=$	ABD	$=$	CD
AB^2C^2	$=$	AD	$=$	BCD

Spørgsmål 3

En af aliasrelationerne vælges til at konfundere med blokke, fx $ABC^2 = ABD = CD$, dvs. at blokkens nr. er givet ved $(i + j + 2k)$. Den principale blok (der indeholder (1)) er givet ved $(i + j + 2k) = 0$. Blokken er på 9 enkeltforsøg, der er løsninger til $(i + j + k + 2l) = 0$ og $(i + j + 2k) = 0$. Der skal findes 2 løsninger:

i	j	k	l	forsøg	
1	0	1	2	acd^2	$= x$
0	1	1	2	bcd^2	$= y$

Blokken er:

$$\begin{array}{|lll|}\hline (1) & x & x^2 \\ y & xy & x^y \\ y^2 & xy^2 & x^2y^2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|lll|}\hline (1) & acd^2 & a^2c^2d \\ bcd^2 & abc^2d & a^2b \\ b^2c^2d & ab^2 & a^2b^2cd^2 \\ \hline \end{array}$$

Den anden blok: $(i+j+k+2l) = 0$ og $(i+j+2k) = 1$. En løsning er $(1,0,0,1) \sim ad$, og blokken bliver:

ad	a^2c	c^2d^2
abc	$a^2bc^2d^2$	bd
$ab^2c^2d^2$	a^2b^2d	b^2c

som findes ved at gange den første blok med løsningen ad

Den tredje blok: $(i+j+k+2l) = 0$ og $(i+j+2k) = 2$. En løsning er $(1,0,2,0) \sim ac^2$.

ac^2	a^2d^2	cd
abd^2	a^2bcd	bc^2
ab^2cd	$a^2b^2c^2$	b^2d^2

Man kunne også tabellere forsøgsplanen som i foregående spørgsmål:

A	B	C	$D = A+B+C$	Blok $= A+B+2C$	Forsøg
0	0	0	0	0	(1)
1	0	0	1	1	ad
2	0	0	2	2	a^2d^2
0	1	0	1	1	bd
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

. o O o .