IMM - DTU

Statistical Design and Analysis of Experiments
H. Spliid, October 20, 2010

Løsning til opgave 26

1) Matematisk model:

$$\begin{aligned} Y_{ijkl} &= \mu + A_i + B_j + AB_{ij} + C_k + AC_{ik} + BC_{jk} + ABC_{ijk} \\ &+ D_l + AD_{il} + BD_{jl} + ABD_{ijl} + CD_{kl} \\ &+ ACD_{ikl} + BCD_{jkl} + ABCD_{ijkl} + E \end{aligned}$$

Om parametrene gælder de sædvanlige restriktioner:

$$\sum_i A_i = \sum_j B_j = \cdots = \sum_k ABCD_{ijkl} = \sum_l ABCD_{ijkl} = 0$$

2) Benyt Yates algoritme på cellesummerne (responserne):

Respons	værdi	Yates Algoritme	4. søjle	Kontrast	SAK	
(1)	4.2	mellem-	57.5	I	206.64050	
a	3.1	regningerne	-12.9	A	10.40063	*
b	4.5	udeladt	2.5	B	0.39063	*
ab	2.9		-3.5	AB	0.76563	*
c	3.9		-0.9	C	0.05063	
ac	2.8		-0.5	AC	0.01563	
bc	4.6		1.3	BC	0.10563	
abc	3.2		0.5	ABC	0.01563	
d	4.0		-0.9	D	0.05063	
ad	3.0		-2.5	AD	0.39063	*
bd	5.0		0.1	BD	0.00063	
abd	2.5		-1.9	ABD	0.22563	
cd	4.0		-0.5	CD	0.01563	
acd	2.5		-0.9	ACD	0.05063	
bcd	5.0		-0.7	BCD	0.03063	
abcd	2.3		0.1	ABCD	0.00063	

Skøn over usikkerhedsvariansen:
$\widehat{\sigma}^2 = \frac{0.01563+0.22563+0.05063+0.03063+0.00063}{5} = 0.32315/5 = 0.06463$

3) Test på 10% niveau:

$$F = \frac{\text{SAK}/1}{\widehat{\sigma}^2} \sim F(1,5)_{0.90} = 4.06$$

Det vil sige, at såfremt SAK$> 4.06 \times \widehat{\sigma}^2 = 4.06 \times 0.06463 = 0.2624$, vil den pågældende effekt være statistisk signifikant.

De med * markerede effekter er således signifikante ved test på et α=10% niveau.

4) Estimation af signifikante parametre (= kontrast/(r·2^k) med r=1 og k=4) :

$$\begin{array}{lllllllll} \widehat{A}_1 & = & -\widehat{A}_0 & = & & & & -12.9/2^4 & = & -0.80625 \\ \widehat{B}_1 & = & -\widehat{B}_0 & = & & & & 2.5/2^4 & = & 0.15625 \\ \widehat{AB}_{11} & = & -\widehat{AB}_{10} & = & -\widehat{AB}_{01} & = & +\widehat{AB}_{00} & = & -3.5/2^4 & = & -0.21875 \\ \widehat{AD}_{11} & = & -\widehat{AD}_{10} & = & -\widehat{AD}_{01} & = & +\widehat{AD}_{00} & = & -2.5/2^4 & = & -0.15625 \end{array}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = 0.06463 = 0.22601^2$$

5) Kun A– og B–virkninger samt AD–vekselvirkningen er signifikante, men ikke D–hovedvirkningen. Man bør nok også medtage denne i den endelige model, da AD-vekselvirkningen er signifikant:

$$\widehat{D}_1 = -\widehat{D}_0 = -0.9/2^4 = -0.05626$$

6) Som definerende kontrast vælges (jævnfør opgaveteksten) I=ABCD (så D=ABC, som også er det mest fornuftige her). Den principale fraktion er da

(1)	ab	ac	bc
ad	bd	cd	abcd

7) Forsøgets aliasrelationer er

I	=	ABCD
A	=	BCD
B	=	ACD
AB	=	CD
C	=	ABD
AC	=	BD
BC	=	AD
ABC	=	D

8) Som underliggende faktorstruktur vælges A, B og C. Yates algoritme benyttes på data ordnet herefter:

Forsøg	Respons	I	II	III	Kontrast/alias	SAK
(1)	4.2	7.2	15.1	28.8	I = (ABCD)	103.680
a d	3.0	7.9	13.7	-6.8	A = (BCD)	5.780
b d	5.0	6.8	-3.3	0.8	B = (ABD)	0.080
ab	2.9	6.9	-3.5	-2.0	AB = (CD)	0.500
c d	4.0	-1.2	0.7	-1.4	C = (ACD)	0.240
ac	2.8	-2.1	0.1	-0.2	AC = (BD)	0.005
bc	4.6	-1.2	-0.9	-0.6	BC = (AD)	0.045
abc d	2.3	-2.3	-1.1	-0.2	(ABC) = D	0.005

De effekter, som på forhånd anses for at være af mindre betydning, er sat i parantes.

9) Ifølge teksten anses alle vekselvirkninger forsvindende, hvorfor et estimat for usikkerhedsvariansen er:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{0.500 + 0.005 + 0.045}{3} = 0.550/3 = 0.1833 = 0.43^2$$

Det ses, at kun A–effektens SAK er væsentligt større end $\widehat{\sigma}^2$, og $F_A = 5.78/0.1833 = 31.5$, der har (1,3) frihedsgrader. I F-tabellen findes f.eks. $F(1,3)_{0.99}$=29.5, således, at A–effekten er signifikant på et 1% signifikansniveau.

Man finder også $F_B = 0.44$, $F_C = 1.31$ og $F_D = 0.03$, som ikke er signifikante på noget rimeligt niveau.

$$\widehat{A}_1 = -\widehat{A}_0 = -6.8/(2^{4-1}) = -6.8/8 = -0.85$$

Endelig kunne alle de restende kvadratafvigelsesummer slås sammen til

$$\widehat{\sigma}^2_{rest} = \frac{0.550 + 0.080 + 0.240 + 0.005}{3 + 1 + 1 + 1} = 0.15 = 0.38^2$$