IMM - DTU

02405 Probability
2003-12-12
BFN/bfn

Løsning til prøveeksamen 1

Spørgsmål 1) 4
Minimum af to eksponentialfordelinger

Spørgsmål 2) 5
$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ så $Var(n\bar{X}) = n^2\frac{\sigma^2}{n} = n\sigma^2$

Spørgsmål 3) 3
Middelværdien i en negativ binomialfordeling med antalsparameter 6 og $p = \frac{1}{6}$.

Spørgsmål 4) 2
Varians i en negativ binomialfordeling med antalsparameter 6 og $p = \frac{1}{6}$.

Spørgsmål 5) 2
Man kan bruge reglen om gennemsnittet af betingede sandsynligheder.

Spørgsmål 6) 4
Ved brug af Bayes sætning/regel.

Spørgsmål 7) 4
Tætheden for den største af to variable er $2f(x)F(x)$, se afsnittet om max/min (side 316 efter min hukommelse) eller afsnit 4.6 om ordnede variable.

Spørgsmål 8) 5
Sandsynligheden for at få noget der er 1 eller større (1-$P(0)$) i en binomialfordeling med $p = 0.01$ og $n = 250$

Spørgsmål 9) 1
I afsnit 5.4 om operationer med stokastiske variable er fordelingen for $X + Y$ udledt side 372.

Spørgsmål 10) 3
Man finder $E(X + Y) = 1 + 2 = 3$ og $Var(X + Y) = 1 + 4 = 5$.

Spørgsmål 11) 1
Indfør hændelsen K, der betegner kønnet af en tilfældig valgt passager og benyt betingede fordelinger.

Spørgsmål 12) 2
Variabelskift. Opgaven er en eksamensopgave fra et tidligere kursus. Her er løsningen $\frac{1}{3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}e^{-y^3}, \qquad y > 0$. Enten er der en fejl i denne løsningen eller måske har jeg lavet en fejl.

Spørgsmål 13) 4

Middelværdien i en *gamma* $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ fordeling.

Spørgsmål 14) 3

Idet hazard rate er en funktion, der vokser med alderen.

Spørgsmål 15) 1

Opgaven minder om forskellige øvelsesopgaver. Alternativt udleder man den simultane fordelingsfunktion

$$F(x,y) = y^2 - (y-x)^2, \qquad 0 < x < y < 1$$

og finder tætheden ved differentation.

Spørgsmål 16) 4

Opgaven er final examination 3 exercise 8. Se løsningen til denne side 504.

Spørgsmål 17) 4

$$Cov(I_D, I_R) = E((I_D \cdot I_R) - E((I_D)E(I_R) = 0 - \alpha\beta$$

Spørgsmål 18) 3

Se afsnittet om simulation fra fordelinger og eventuelt opgave 4.5.7 c)

Spørgsmål 19) 4

Opgaven er eksempel 3 side 343 i svag forklædning.

Spørgsmål 20) 3

Variansen er summen af de indgånde varianser dvs. $3^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 1 = 14$

Spørgsmål 21) 4

Vi skal evaluere integralet

$$\int_1^\infty x^{\frac{1}{2}} x^{-2} \mathrm{d}x = [-2x^{-\frac{1}{2}}]_1^\infty = 2$$

Spørgsmål 22) 5

Stikprøvetagning uden tilbagelægning, den hypergeometriske fordeling side 125.

Spørgsmål 23) 5

Formlen for betinget forventning side 403 (se også side 424,425). Vi har $E(X|P) = n \cdot P$, så $E(E(X|P)) = E(nP) = nE(P)$. Da P er beta fordelt finder vi $E(P) = \frac{r}{r+s}$ side 477, så $E(X) = \frac{nr}{r+s}$.

Spørgsmål 24) 4

Ved benyttelse af Bayes sætning

$$P(p < P < p + \mathrm{d}p | X = x) = \frac{P(X = x | P = p) f_P(p)}{P(X = x)}$$

$$= \frac{P(X = x|P = p)f_P(p)\mathrm{d}p}{\int_0^1 P(X = x|P = \rho)f_P(\rho)\mathrm{d}\rho}$$

ved indsættelse af $f_P(p)$ og lidt yderligere regninger fås resultatet. Se eventuelt opgave 6.3.14 (6.3.15)
Ps. Jeg ved at denne opgave ligger i den svære ende og måske lidt til.

Spørgsmål 25) 2
Antallet af overlevende er binomialfordelt med $p = e^{-\lambda t}$.

Spørgsmål 26) 4
Ved geometriske betragtninger (afsnit 5.1).

Spørgsmål 27) 5
Fordelingen af $Z = X \cdot Y$ kan udledes på samme måde som fordelingen af $\frac{Y}{X}$ side 382 (se eventuelt opgave 5.4.7 a)). Ps. Også denne er nok i den svære ende

Spørgsmål 28) 2
Vi har en sum af kvadrerede uafhængige $normal(0,1)$ fordelte størrelser, der således følger en χ^2 fordeling. Der er 8 led i summen, så fordelingen har 8 frihedsgrader (side 364-365) og opgave 5.3.15.

Spørgsmål 29) 2
Variansen i en Poissonfordelingen er lig middelværdien (e.g. side 476).

Spørgsmål 30) 4