IMM - DTU

02405 Probability
2006-12-18
BFN/bfn

Løsning til prøveeksamen 1

Spørgsmål 1) 3 For en indikatorvariabel I_A for hændelsen A gælder $E(I_A) = P(A)$ (se for eksemepl side 168). Således er $E(X) = P(N \leq 5) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ud fra ligefordelingen af N. Tilsvarende finder vi $E(Y) = P(N \in \{2, 4, 6, 8, 10\}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Spørgsmål 2) 2
Opgaven minder om fødselsdagsproblemet se eksempel 5 side 62-63 (sekvens af hændelser)

Spørgsmål 3) 3
Man benytter, at $W = X + Y + Z \in normal(0 + 0 + 0, 1 + 1 + 1)$. Se eventuelt side 364 øverst.

Spørgsmål 4) 1 Ved omskrivningen

$$P(X + Y \leq 2Z) = P(X + Y - 2Z \leq 0) = P(W \leq 0)$$

hvor

$$W = X + Y - 2Z \in normal(0 + 0 - 2 \cdot 0, 1 + 1 + (-2)^2 \cdot 1)$$

ser vi, at $P(X + Y \leq 2Z) = P(W \leq 0) = \frac{1}{2}$. Vi har dels brugt resultatet, at en linearkombination af uafhængige normalfordelte variable er normalfordelt (boksen nederst side 363 kombineret med bemærkningen side 364 top) og dels brugt symmetrien af normalfordelingen, således at sandsynligheden for, at en normalfordelt variabel er mindre end sin middelværdi (i dette tilfælde 0) er $\frac{1}{2}$.

Spørgsmål 5) 4 Denne kan løses gennem brugen af reglen om vægtet gennemsnit af betingede sandsynligheder side 41 og 73 (average rule). Idet K betegner hændelsen, at studenten kender svaret og S betegner hændelsen, at hun svarer korrekt finder vi

$$P(S) = P(S|K)P(K) + P(S|K^c)P(K^c) = 1 \cdot 0.7 + \frac{1}{5} \cdot 0.30 = 0.76$$

Spørgsmål 6) 5
Bayes sætning side 49,73. Således

$$P(K|S) = \frac{P(S|K)P(K)}{P(S|K)P(K) + P(S|K^c)P(K^c)} = \frac{0.7}{0.76} = 0.92$$

Spørgsmål 7) 3

Markovs ulighed side 174. Hvis I betegner husstandsindkomsten af en tilfældigt valgt familie får vi

$$P(I > 800\,000) = \frac{E(I)}{800\,000} = \frac{15}{80} = 0.1875$$

Hvis vi havde kendt variansen, er det bedre at bruge Chebychevs ulighed side 191 og 249.

Spørgsmål 8) 4

$W \in \chi^2(3)$ dvs. $W \in gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Se side 365, 485, eventuelt også opgave 5.3.15.

Spørgsmål 9) 2

Vi beregner middelværdien sekventielt. Middeltiden til første forskellige er 1. Tiden til den næste er geometrisk fordelt med $p = \frac{5}{6}$. Problemet er behandlet i example 5 side 215 (samlerens problem). Dvs.

$$E(T) = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14.7$$

Spørgsmål 10) 2

Vi benytter samme tankemåde som i spørgsmål 9. Vi skal nu blot "samle" de sidste tre idet vi har fået tre forskellige i de første 6 forsøg. Vi skal altså bruge de 6 vi har brugt plus de sidste tre led fra ovenstående beregning.

$$6 + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 17$$

Spørgsmål 11) 5

Vi benytte formlen for variabelskift side 304 og 332/333. Vi har $X = g(T) = \frac{1}{T}$, hvoraf $T = \frac{1}{X}$ og $\frac{\mathrm{d}g(t}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2}$. Ved indsættelse i formlen finder vi

$$f_X(x) = e^{-t}\frac{1}{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

Spørgsmål 12) 3

Det drejer sig om at finde fordelingens modus, som for binomialfordelingen side 85. Vi benytter odds ratio samt udtrykket for tæthederne i den negative binomialfordeling side 482

$$\frac{\begin{pmatrix} (n+1)+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p^r(1-p)^{n+1}}{\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p^r(1-p)^n} = \frac{(n+r)(1-p)}{n+1}$$

Denne brøk skal sammenlignes med 1

Spørgsmål 13) 2
Minimum af uafhængige eksponentialfordelte er eksponentialfordelt med en intensitet, der er summen af intensiteterne af de enkelte variable. Se det generelle resultat for minimum side 317 og eksempel 3 umiddelbart derunder.

Spørgsmål 14) 2
Summen af uafhængige eksponenitalfordelte variable med samme intensitet er gammafordelt med en antalsparameter lig antallet af led i summen og en intensitet lig intensiteten for de eksponentialfordelte variable (side 286 og 289).

Spørgsmål 15) 5
Vi omskriver

$$P(Y^2 > 3X^2) = P(Y > \sqrt{3}X)$$

En geometrisk betragtning som i afsnit 5 giver svaret som arealet af en trekant med grundlinie 1 og højde $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Spørgsmål 16) 4
Vi kan lave beregninger i standardenheder. Hvis vi definerer X til at være den standardiserede højdemåling og Y til at være den standardiserde vægtmåling så er Y for givet $X = x$ givet ved

$$Y = \rho x + \sqrt{1-\rho^2}Z$$

hvor Z er en standardiseret normalfordelt variabel (side 451,465). Da x er 90% fraktilen i en standardiseret normalfordeling findes den til 1.28. Vi har $Y \in \mathit{normal}\left(0.75 \cdot 1.28, 1 - \frac{9}{16}\right)$ Vi søger

$$P(Y > 1.28) = 1 - P(Y \leq 1.28) = 1 - P\left(\frac{Y - 1.28\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \leq \frac{1.28 - 1.28\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1.28}{\sqrt{7}}\right) = 1 - \Phi(0.484) = 1 - 0.69 = 0.31$$

Spørgsmål 17) 1 Vi antager, at forekomsterne kan beskrives med en Poissonfordeling ud fra oplysningen om, at mikroorganismerne forekommer tilfældigt. Dvs. vi bruger Poisson Scatter Theorem side 230. Vi finder $\lambda \cdot area(B) = 5000 \cdot 10^{-4} = 0.5$. Sandsynligheden for 0 i en Poissonfordeling med parameter λ er $e^{-\lambda}$, side 222, 486.

Spørgsmål 18) 2
Vi finder den nedre kvartil ved at sætte den kumulerede fordelingsfunktion lig $\frac{1}{4}$ eller overlevelsesfunktionen lig $\frac{3}{4}$. Således

$$1 - e^{-\frac{t_{nk}}{10}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-\frac{t_{nk}}{10}} = \frac{3}{4}$$

Ved at tage logaritmen finder vi $t_{nk} = 10(\ln(4) - \ln(3))$.

Spørgsmål 19) 4

Hvis S_i er de stokastiske variable, der betegner styrken af de enkelte søjler er styrken W af konstruktionen $W = \min_i S_i$. Vi bruger resultatet for fordelingen af min side 317. Vi har brug for $F(10000)$ i denne beregning. Denne findes fra en $\gamma(3, \frac{1}{10000})$ fordeling side 286, 481 til

$$F(10000) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{\left(10000 \cdot \frac{1}{10000}\right)^i}{i!} e^{-10000 \cdot \frac{1}{10000}} = 1 - \frac{5}{2} e^{-1}$$

Så

$$F_{\text{min}} = 1 - \left(\frac{5}{2} e^{-1}\right)^5$$

Spørgsmål 20) 4 Resultatet er givet i boksen nederst side 327. Vi har $k = 3$ og $n - k + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$.

Spørgsmål 21) 3

Vi definerer hændelserne S store ører, og K korte knurhår. Der spørges om $P(S \cap K^c) = P(S \backslash (S \cap K))$ Denne sandsynlighed findes ved differensreglen side 22 til

$$P(S \backslash (S \cap K)) = P(S) - P(S \cap K) = 0.23 - 0.08 = 0.15$$

Spørgsmål 22) 4

I opgaven er hazard rate for fordelingen alderen af det elektroniske udstyr opgivet, og der spørges om værdien af overlevelsesfunktionen i punktet t_0. Vi anvender formel (7) side 297 således at

$$G(t_0) = e^{-\int_0^{t_0} \lambda(t) \mathrm{d}t} = e^{-\int_0^{t_0} t^2 \mathrm{d}t}$$

Spørgsmål 23) 5

Vi finder den marginale fordeling af Y ved først at integrere over x.

$$f_Y(y) = \int_0^1 k(3x^2 + 2xy)\mathrm{d}x = k(1 + y)$$

Herefter findes fordelingsfunktionen af Y ved at integrere $f_Y(y)$.

$$F_Y(y) = \int_0^y k(1 + y)\mathrm{d}y = k\left(y + \frac{1}{2}y^2\right)$$

Ved indsættelse af $y = \frac{1}{2}$ får vi $k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = k\frac{5}{8}$.

Spørgsmål 24) 3

Vi finder k ud fra $F_Y(1) = k\frac{3}{2}$.

Spørgsmål 25) 4

Alle elever skal have samme sandsynlighed, d.v.s $\frac{1}{64}$ for at blive valgt. Mulighed 4 sikrer netop dette. Sandsynligheden for, at en tilfældig pige bliver valgt, er $\frac{15}{32}\frac{1}{30} = \frac{1}{64}$, medens sandsynligheden for, at en tilfældig dreng bliver valgt, er $\frac{17}{32}\frac{1}{34} = \frac{1}{64}$.

Spørgsmål 26) 3

Definitionen på uafhængighed af to variable er ensbetydende med produktreglen for uafhængige hændelser givet i boksen nederst side 42.

Spørgsmål 27) 2

Vi definerer hændelserne R revner og M misfarvning. Der spørges om $P(R \cap M)$. Denne sandsynlighed findes ved brug af inklusion-eksklusionsformlen for 2 variable side 22, 72. Formlen generaliseres let til 3 eller flere variable se eventuelt opgave 1.3.11 og 1.3.12 side 31.

Spørgsmål 28) 3

Vi finder først tætheden for X ud fra overlevelsesfunktionen, (5) side 297.

$$f(x) = -\frac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2}$$

Dernæst findes $E\left(\frac{1}{X}\right)$ fra definitionen

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_1^\infty \frac{1}{x}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Spørgsmål 29) 2

Hvis Id er en stokastisk variabel, der betegner den indre diameter for et tilfældigt valgt kugleleje skal vi finde et interval $[a; b]$, således at $P(a < Id < b) = 0.95$. Da 1.96 er 97.5% fraktilen for en standardiseret normalfordelt variabel ser vi at

$$P\left(\frac{a-1}{0.01} < \frac{Id-1}{0.01} < \frac{b-1}{0.01}\right) = 0.95$$

er opfyldt for $a = 1 - 0.01 \cdot 1.960$ og $b = 1 + 0.01 \cdot 1.960$.

Spørgsmål 30) 3

Vi indfører den stokastiske variabel GR med værdien 1, hvis det er den gamle garvede kontormus, der er betjeneren og 0 hvis ikke. GR kan opfattes som en indikatorvariabel, men det er dog ikke af betydning her. Vi benytter, at de betingede fordelinger er eksponentialfordelinger. Idet B betegner en tilfældig betjeningstid finder vi

$$P(B > 5) = P(B > 5|GR)P(GR) + P(B > 5|GR^c)P(GR^c) = \frac{10}{13}e^{-\frac{5}{3}} + \frac{3}{13}e^{-\frac{5}{10}}$$