IMM - DTU

02405 Probability
2004-5-11
BFN/bfn

Løsning til eksamen 16/12 2003

Spørgsmål 1) 2 44%

Man benytter formlen for skalering og positionsskift i forbindelse med varians og standardafvigelse, samt formlen for variansen for en Poissonfordelt variabel. For formler se boksen øverst side 188 eller se øverst side 249. For Poissonvariansen benyttes boksen side 223 eller oversigten over Poissonfordelingen side 486. Idet X betegner antallet af solgte blomål findes standardafvigelsen af fortjenesten til $SD(12.5 \cdot X) = 12.5 \cdot SD(X) = 12.5\sqrt{8.4}$.

Spørgsmål 2) 5 44%

Idet den samlede sandsynlighedsmasse skal være 1 findes:

$$\sum_{i=0}^{8} \frac{1}{c}\frac{A^i}{i!}e^{-A} = 1 \Leftrightarrow c = \sum_{i=0}^{8} \frac{A^i}{i!}e^{-A}$$

Spørgsmål 3) 3 56%

Apparatets levetid svarer til levetiden af den længstlevende dims. Sandsynligheden for, at apparatet lever højst t tidsenheder er således 0.8^{25} og sandsynligheden for at apparatets levetid overstiger t tidsenheder er $1 - 0.8^{25}$..

Spørgsmål 4) 1 56%

Idet X betegner trykpåvirkningen, Y betegner vridpåvirkningen, og Z betegner den samlede påvirkningen, findes $Z = X+Y+3$, hvor $Z \in normal(5+8+3, 2+3)$ (se eventuelt resultatet i boksen side 363). $P(Z < 25) = \Phi\left(\frac{25-16}{\sqrt{2+3}}\right)$.

Spørgsmål 5) 4 72%

Løses ved brug af eksklusion/inklusion

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Se side 22 eller 72 samt opgaverne 1.3.11 og 1.3.12. Her findes $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0 \Rightarrow P(A \cap B \cap C)$.

Spørgsmål 6) 4 41%

Opgaven løses ved brug af den centrale grænseværdisætning se side 196 (249). Idet X_i betegner vægten af en tilfældig passager og $X = \sum_{i=1}^{300} X_i$ betegner den totale vægt findes $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{300} X_i\right) = \sum_{i=1}^{300} E(X_i) = 300E(X_i)$. Pga. uafhængigheden finder vi ligeledes $Var(X) = 300Var(X_i)$ så $SD(X) = \sqrt{300}SD(X_i)$.

Spørgsmål 7) 2 44%

Resultatet er gengivet side 484 under resumeet for normalfordelingen. Udledningen er givet i eksempel 1 side 269.

Spørgsmål 8) 4 47 %

Opgaven er et standardeksempel på brug af gammafordelingen. Se side 286 side 289 og eksempel 4 side 290.

Spørgsmål 9) 3 60%

Man løser $e^{-1.5t^{1.5}} = 0.5$ til $t = \left(\frac{\log(2)}{1.5}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.5978$. Alternativt kan man indsætte værdierne i udtrykket for $G(t)$ og indse at $G(0.5978) = 0.5$.

Spørgsmål 10) 4 37%

For fast $U = u$ er sandsynligheden for at $X > U = u$ lig e^{-u}. Ved at integrere over de mulige værdier for U vægtet med tætheden $f(u) = 1$ fås $\int_0^1 e^{-u}\mathrm{d}u$. Opgaven er en kontinuert udgave af gennemsnittet af betingede sandsynligheder udtrykt i resultatet i boksen nederst side 417.

Spørgsmål 11) 4 69%

Vi benytter formlen for variabelskift side 304 og 332/333. Vi har $Y = g(X) = \sqrt{X}$, hvoraf $X = Y^2$ og $\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ved indsættelse i formlen finder vi

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x}\frac{1}{2}\sqrt{x} = 2\lambda y e^{-\lambda y^2}$$

Resultatet er en Weibull fordeling, se eventuelt opgave 4.3.4, 4.3.5 og specielt 4.4.9.

Spørgsmål 12) 1 58%

Vi benytter formlen for betinget middelværdi side 403, 425. $E(X) = E_V(E(X|V)) = E_V(0.1 \cdot V) = 0.1E(V) = \frac{\mu}{10}$. hvor det tredje lighedstegn skyldes fordelingen af vandmængden for en givet vægt og det fjerde er standardresultatet om linearitet af middelværdioperatoren.

Spørgsmål 13) 3 62%

Standareksempel på geometrisk fordeling. Hvert terningekast har en sandsynlighed på $\frac{1}{6}$ for at resultatet bliver 3 øjne og de enkelte kast er uafhængige. Se eventuelt side 58-59 og 208.

Spørgsmål 14) 1 93%

Multiplikationsreglen side 37 øverst (boksen) eller side 73. $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

Spørgsmål 15) 1 90%

Den hypergeometriske fordeling side 125, 483 med $G = 14, B = 11, N = 25, n = 5, g = 2, b = 2$.

Spørgsmål 16) 3 68%
Idet $Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$ (side 430) ser vi straks at uafhængige stokastiske variable er ukorrelerede. Se i øvrigt de sidste to linier på side 430.

Spørgsmål 17) 2 20%
Problemstillingen i opgaven svarer til problemstillingen i boksen sidst på side 460. Vi har således $Cov(W,Z) = \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}$, idet variansen på X og Y begge er 1. Tilsvarende findes $SD(W) = SD(Z) = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}}$ så $Corr(W,Z) = \frac{a^2-1}{a^2+1}$ Løsningen til $\frac{a^2-1}{a^2+1} = \frac{1}{2}$ er $a = \pm\sqrt{3}$, hvoraf $+\sqrt{3}$ er anført som mulighed.

Spørgsmål 18) 2 94%
Standardeksempel på anvendelse af binomialfordelingen, d.v.s, at antallet af defekte emner i et parti beskrives ved en $binomial(n,p)$ fordeling. Middelværdi og varians for binomialfordelingen kan findes side 479.

Spørgsmål 19) 4 39%
Man benytter at eksponentialfordelingen er hukommelsesløs. Idet der alderen t_0 er opnået og der spørges om hændelsen at komponenten fejler inden t kan spørgsmålet, idet T betegner levetiden, formuleres $P(T < t | T > t_0)$ der netop er lig $P(T < t - t_0)$ (den manglende hukommelse). Se i øvrigt boksen nederst side 279.

Spørgsmål 20) 5 38% Opgaven kan løses ved brug af metoderne i afsnit 5.1. Vi finder den simultane tæthed for Y ved at integrere den simultane tæthed over de mulige værdier for X. Først konstateres, at det beskrevne område har arelaet $\frac{1}{2}$, således at den simultane tæthed er 2 indenfor området og 0 ellers. Man finder herefter $f_Y(y) = \int_y^1 2\mathrm{d}x = 2 - 2 \cdot y$.

Spørgsmål 21) 1 48%
Opgaven løses ved brug af Chebychevs ulighed side 191 nederst. Man identificerer k i formlen til at være $\frac{16}{4}$ idet $SD(X) = 4$ i opgaven.

Spørgsmål 22) 3 49%
Opgaven løses ved brug af Bayes regel, idet vi har den klassiske situation hvor der så at sige skal byttes om på de variable i den betingede sandsynlighed. Lad L betegne den hændelse, at ledningen er læk, og K betegne den hændelse, at trykket er under den kritiske grænse. Oplysningerne i opgaven er $P(L) = 0.01$, $P(K|L) = 0.039$, og $P(K|L^c) = 0.000394$, hvor L^c betegner den komplementære hændelse til L, at ledningen er intakt. Spørgsmålet i opgaven udtrykkes som $P(L|K) = \frac{P(K|L)P(L)}{P(K|L)P(L) + P(K|L^c)P(L^c)}$. Man finder $P(L|K) = \frac{1}{2}$ ved indsættelse af talværdierne.

Spørgsmål 23) 5 40%
Svarmulighed 1 er oplagt forkert (grænsende til det rene vrøvl). $P(Y = 1|X = 3) = 1 \neq 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = P(Y = 1)$ så svarmulighed 2 er heller ikke korrekt.

Værdimængderne for X og Y er forskellige så parret kan ikke være multinomialfordelt, hvilket udelukker mulighed 3. Betingelserne for anvendelsen af den centrale grænseværdisætning er på ingen måde til stede, hvilket udelukker mulighed 4. Endelig har vi $E(X) = \frac{3}{2}$, idet $X \in binomial\left(3, \frac{1}{2}\right)$ og $E(Y) = P(Y = 1) = \frac{1}{4}$. Da $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ ser vi, at mulighed 5 er korrekt. Til det første lighedstegn har vi brugt additionsreglen for middelværdier øverst side 167. Se eventuelt også side 168 for brug af indikatorvariable.

Spørgsmål 24) 2 16%

Idet T betegner varigheden af fræsearbejdet har vi $P(t_0 < T < t_0 + \delta) \tilde{=} f(t_0)\delta$ for δ lille se side 263 eller 332. Idet $T \in gamma\left(3, \frac{3}{\mu}\right)$ har vi $f(t_0) = \frac{3}{\mu}\frac{\left(\frac{3}{\mu}t_0\right)^2}{2!}e^{-t_0\frac{3}{\mu}}$, hvor gammafordelingens tæthed kan findes side 286 eller 481.

Spørgsmål 25) 5 66%

Forudsætninger i opgaven svarer til antagelserne, der leder til Poissonfordelingen. Se afsnit 3.5 side 228-233, specielt side 229. Specifikt kan man benytte resultatet om udtynding på sede 232, til at indse at antallet af mælkebøtter på en m^2 kan beskrives ved en $Poisson(1)$ fordeling. Med $X \in Poisson(1)$ findes $P(X \leq 1) = e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} = 2 \cdot e^{-1} = 0.736$.

Spørgsmål 26) 3 77%

Man benytter princippet om lige sandsynlige udfald. Der er ialt 75 børn fra familier med 3 børn, så den ønskede sandsynlighed er $\frac{75}{225} = \frac{1}{3}$.

Spørgsmål 27) 4 62%

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^n X_i)$$

ved brug af tredje linie side 249. Fra samme side femte linie får vi for uafhængige variable

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^n X_i)\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X) = \frac{Var(X)}{n}$$

Endelig er

$$SD(\bar{X}) = \sqrt{Var(\bar{X})} = \frac{SD(X)}{\sqrt{n}}$$

Spørgsmål 28) 2 37%

Man kan eksempelvis bruge formel (6) side 297. Først findes $G(x) = \int_x^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_x^1 6t(1-t)\mathrm{d}t = [3t^2 - 2t^3]_{t=x}^{t=1} = 1 - 3x^2 + 2x^3$. Endelig fås hazard rate $\lambda x = \frac{6x(1-x)}{3-3x^2+2x^3}$.

Spørgsmål 29) 5 14%

Da X og Y er uafhængige kan vi benytte formlen for forhold af uafhængige variable - formel (g) side 383.

$$f_Z(z) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu xz}\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\lambda\mu e^{-x(\lambda+\mu z)}\mathrm{d}x$$

Integralet kan løses ved delt integration. Alternativt kan man udnytte resultatet for middelværdien af en eksponentialfordelt variabel, eller omskrive integralet til integralet over en gamma tæthed. Middelværdimetoden

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-x(\lambda+\mu z)}\mathrm{d}x = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu z}\int_0^\infty x\cdot\lambda+\mu z e^{-x(\lambda+\mu z)}\mathrm{d}x = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu z)^2}$$

hvor det sidste lighedstegn gør brug af den første boks side 279.

Spørgsmål 30) 5 21%

Man benytter formlen nederst side 417, der er en variant af formlen om gennemsnit af betingede sandsynligheder.

$$P(Y=0) = \int_0^\infty P(Y=0|X=x)f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}\cdot 1\cdot e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

hvor vi har benyttet $f_X(x) = 1\cdot e^{-\cdot x}$ - se eventuelt side 279.