IMM - DTU

02405 Probability
2006-05-20
BFN/bfn

Løsning til eksamen 16/12 2004

Spørgsmål 1) Afsnit 1.3, opgaven kan løses ved brug af ekslusion/inklusionsreglen side 22. Se også opgave 1.3.11, 1.3.12 og resume side 72.
Korrekt svar er 4, procent korrekte var 93 %

Spørgsmål 2) Afsnit 1.4 multiplikationsreglen resultatet i boksen øverst side 37. Lad R_1 betegne hændelsen, at det regner en dag og R_2 betegne hændelsen, at det regner den næste dag, man har da $\frac{1}{3} = P(R_2) < P(R_2|R_1)$ så $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) > \frac{1}{9}$. Samtidigt er $\frac{1}{3} = P(R_1) \geq P(R_1 \cap R_2)$.
Korrekt svar er 3, procent korrekte var 73 %

Spørgsmål 3) Afsnit 1.5 Bayes sætning. Lad H betegne hændelsen, at rotten er af hunkøn og K_i betegne hændelsen, at rotten stammer fra kuld i. Vi har da

$$P(K_3|H) = \frac{P(H|K_3)P(K_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(H|K_i)P(K_i)} = \frac{\frac{2}{4}\frac{4}{9}}{\frac{2}{4}\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\frac{3}{9} + \frac{1}{2}\frac{2}{9}}$$

Korrekt svar er 5, procent korrekte var 70 %

Spørgsmål 4) Afsnit 3.5 Poisson fordeling.
Korrekt svar er 4, procent korrekte var 79 %

Spørgsmål 5) Afsnit 1.3 eksklusion/inklusion eller benyt afsnit 1.6 eksempel 7.
Korrekt svar er 5, procent korrekte var 62 %

Spørgsmål 6) Afsnit 6.3 betinget tæthed eventuelt kombineret med afsnit 5.1 ligefordelinger. Korrekt svar er 2, procent korrekte var 35 %

Spørgsmål 7) Fra afsnit 4.5 fordeling af maksimum side 316 nederst. Fordelingsfunktionen findes som integralet af tætheden.
Korrekt svar er 2, procent korrekte var 49 %

Spørgsmål 8) Afsnit 1.6 sekvens af hændelser.
Korrekt svar er 5, procent korrekte var 43 %

Spørgsmål 9) Afsnit 3.4 negativ binomialfordeling eksempel 4 side 213. Med notationen fra eksemplet

$$P(T_2 = 10) = \binom{10-1}{2-1}\left(\frac{1}{36}\right)^2\left(\frac{35}{36}\right)^8$$

Korrekt svar er 1, procent korrekte var 54 %

Spørgsmål 10) Afsnit 3.3 varians. det er bekvemt at benytte beregningsformlen for varians i boksen side 186. Man finder $E(X) = 1$ og $E(X^2) = 2$.
Korrekt svar er 2, procent korrekte var 74 %

Spørgsmål 11) Afsnit 1.1 lige sandsynlige udfald. Der er de 3 mulige kombinationer $((V1, V2), (H1, H2))$, $((V1, H1), (V2, H2))$, $((V1, H2), (V2, H1))$, hvoraf den første svarer til den hændels, vi er interesseret i.
Korrekt svar er 3, procent korrekte var 33 %

Spørgsmål 12) Afsnit 2.2 normalfordelingstilnærmelse til binomialfordelingen. Det er en anelse lettere at betragte drengene, hvis antal ikke må overstige 13. Man kan benytte resultatet i boksen side 99 idet det sidste led falder bort. $\Phi\left(\frac{0-\frac{1}{2}-28\cdot 0.51}{\sqrt{28\cdot 0.51\cdot 0.49}}\right)=\Phi(-5.59)\tilde{=}0$.
Korrekt svar er 4, procent korrekte var 46 %

Spørgsmål 13) Afsnit 6.5 bivariat normalfordeling med $\rho=-0.6$. Man kan benytte metoden fra eksempel 2 side 457.

$$P(X>0\cap Y>0)=P(X>0\cap -0.6X+\sqrt{1-0.36}Z>0)=P(X>0\cap Z>\frac{3}{4}X)$$

Vinkeludsnittet i (x,z) planen, der svarer til hændelsen $\{X>0\cap Y>0\}$ i (y,z) planen er således $\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)$. (Lav eventuelt en lille tegning). Dette vinkeludsnit sættes i forhold til den samlede vinkel (2π).
Korrekt svar er 1, procent korrekte var 23 %

Spørgsmål 14) Afsnit 4.4 variabelskift formlen i boksen side 304. Med $Y=\sqrt{e^X}$ finder vi $X=\log(Y^2)=2\log(Y)$ og $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{e^x}}e^x=\frac{1}{2}\sqrt{e^x}=\frac{1}{2}y$.
Korrekt svar er 5, procent korrekte var 51 %

Spørgsmål 15) Afsnit 3.2 regneregler for middelværdi. Additionsreglen i boksen øverst side 167 kombineret med reglen for lineære funktioner nederst side 175.
Korrekt svar er 5, procent korrekte var 73 %

Spørgsmål 16) Afsnit 3.3, den centrale grænseværdisætning boksen side 196. Denne formulering svarer til summen af de værnepligtiges højder. For at omskrive til et udtryk for gennemsnittet af de værnepligtiges højder skal vi dividere i tæller og nævner med $n=25$. Man får i denne formulering

$$P(\bar{X}>185)=1-P(\bar{X}\leq 185)=1-\Phi\left(\frac{185-182}{\frac{8}{\sqrt{25}}}\right)$$

Korrekt svar er 3, procent korrekte var 35 %

Spørgsmål 17) Afsnit 4.3 hazard rate.

$$P(X>t+\pi|X>t)=\frac{P(X>t+\pi)}{P(X>t)}$$

Man finder nu $P(X>t)$ fra (7) side 297.

$$P(X>t)=e^{-\int_0^t(1+\cos(x))\mathrm{d}x}=e^{-t-\sin(t)}$$

Korrekt svar er 1, procent korrekte var 36 %

Spørgsmål 18) Afsnit 4.1. Man kan benytte, at $P(Y>1)=P(X>1\cup X<-1)=P(X<-1)+P(X>1)=\frac{1}{2}+P\left(\frac{X+1}{2}>1\right)$
Korrekt svar er 2, procent korrekte var 12 %

Spørgsmål 19) Afsnit 6.3 kovarians og korrelation. fra den generelle formel for variansen af summen af to stokastiske variable sidste resultat i boksen side 430 fås

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)=1+2+2\rho\cdot 1\cdot\sqrt{2}$$

Korrekt svar er 4, procent korrekte var 42 %

Spørgsmål 20) Afsnit 1.6 sekvens af hændelser - fødselsdagsproblemet eksempel 5 side 62. Lad T_i betegne den hændelse, at de i første te person foretrukne tekstbehandlingsprogrammer er forskellige. Den ønskede sandsynlighed er $1 - P(T_4)$.

$$P(T_1) = 1 \qquad P(T_2) = P(T_2 \cap T_1)P(T_1)P(T_2|T_1)1 \cdot \frac{9}{10}$$

Tilsvarende findes

$$P(T_4) = P(T_1)P(T_2|T_1)P(T_3|T_1 \cap T_2)P(T_4|T_1 \cap T_2 \cap T_3)$$

Korrekt svar er 1, procent korrekte var 33 %

Spørgsmål 21) Afsnit 4.5 fordelingsfunktion og fraktiler side 319 og fordeling af maksimum side 316.

$$F_Y(y) = F(y)^n \qquad F_Y(y) = \frac{1}{2}$$

Korrekt svar er 1, procent korrekte var 19 %

Spørgsmål 22) Afsnit 4.2 Poisson ankomst processen boksen side 284 og gamma fordelingen boksen øverst side 286. Man behøver ikke kende den første kundes tid i betjening da (boksen nederst side 279) eksponentialfordelingen er uden hukommelse.Vi identificerer $\lambda = \frac{1}{2}$, $t = 10$, og $r = 4$ (tre kunder foran + en selv).

$$P(T_4 \leq 10) = 1 - P(T_4 > 10) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{5^i}{i!} e^{-5} = 1 - e^{-5}\left(1 + 5\left(1 + \frac{5}{2}\left(1 + \frac{5}{3}\right)\right)\right)$$

Korrekt svar er 1, procent korrekte var 34 %

Spørgsmål 23) Afsnit 5.1 ligefordelte todimensionale variable (i planen). Området $(Y > 0, Y > X)$ er et cirkeludsnit med vinklen $\frac{3}{4}\pi$, medens området $(Y > 0)$ udgør en halvcirkel (cirkeludsnit med vinkel π).
Korrekt svar er 5, procent korrekte var 30 %

Spørgsmål 24) Afsnit 4.6 ordnede variable formel for tæthed boksen side 326. Herudover benyttes formlen for tæthed for den standardiserede normalfordeling (e.g. side 484) samt at $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
Korrekt svar er 3, procent korrekte var 29 %

Spørgsmål 25) Afsnit 5.4 operationer med variable. Man kan benytte den generelleteknik beskrevet ved udledningen af formlener (f) og (g) øverst side 383. Man betragter hyperblerne $z = yx$ og $z + \mathrm{d}z = yx$ i intervallet $(x; x + \mathrm{d}x)$. Problemet er iøvrigt behandlet i opgave 5.4.7.
Korrekt svar er 2, procent korrekte var 24 %

Spørgsmål 26) Afsnit 2.1 binomialfordelingen.
Idet S kan betegne antallet af de fire der kan spille skak, findes den ønskede sandsynlighed som $P(S = 0) + P(S = 2) + P(S = 4)$, der beregnes med formlen i boksen side 81 (den første formel).
Korrekt svar er 5, procent korrekte var 70 %

Spørgsmål 27) Afsnit 5.3 uafhængige normalfordelte variable. Afstanden fra et tilfældigt valgt punkt til koordinatsystemets nulpunkt er Rayleigh fordelt side 359 formel (c2).
Korrekt svar er 3, procent korrekte var 36 %

Spørgsmål 28) Afsnit 6.3 fordelingsfunktion for flerdimensionale stokastiske variable. Man benytter $P(X \leq 1, Y \leq 1) = F(1,1) = 1$.
Korrekt svar er 4, procent korrekte var 20 %

Spørgsmål 29) Afsnit 6.2 betinget fordeling for diskrete variable.
Man har $P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y|X = x) = P(X = x)P(Y - X = y - x|X = x)$ $P(X = x)P(Y - X = y - x)$. $P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}$ $= \frac{P(X=x)P(Y-X=y-x)}{P(Y=y)}$. Alle sandsynligheder der indgår i udtrykket kan nu beregnes ved hjælp af binomialfordelingstætheden boksen side 81 eller resume side 479.
Korrekt svar er 2, procent korrekte var 32 %

Spørgsmål 30) Afsnit 3.3 Chebuchevs ulighed. Man har ikke fordelingskendskab og ikke nogen mulighed for at anvende approksimative resultater vedrørende fordelingsantagelser, helt specifikt kan man *ikke* anvende den centrale grænseværdisætning. Idet man kan indføre den stokastiske variabel X til at betegne belastningen skal belastningsgrænsen $x_{\max}$ bestemmes så $P(B > x_{max}) \leq 0.001$. Ved indsættelse i Chebychevs ulighed (boksen nederst side 191) $P(|B - 1000| > x_{\max} - 1000) \leq 0.001$. Man identificerer nu $k^2 = 1000$ så $x_{\max} 1000 + \sqrt{1000} 500$.
Korrekt svar er 2, procent korrekte var 21 %