Sandsynlighedsregning 9. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Matematik og Computer Science

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Kgs. Lyngby – Danmark

Email: bfni@dtu.dk

Dagens emner afsnit 5.3 og 5.4

- Simultane kontinuerte fordelinger

  $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Y \in \mathsf{d}y) \stackrel{\sim}{=} f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$

- Uafhængige normalfordelte variable ($\sim normal(\mu, \sigma^2) = N(\mu, \sigma^2)$)

  ◇ $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

  ◇ $F_R(r) = \mathsf{P}(\sqrt{X^2+Y^2} \leq r) = 1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}$ (Rayleigh)

  ◇ $X \sim N(\lambda, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \tau^2) \Rightarrow X + Y \sim N(\lambda + \mu, \sigma^2 + \tau^2)$

  ◇ For $X_i \sim N(0,1)$ er $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$ χ^2-fordelt (gamma).

- Operationer med stokastiske variable

  ◇ $\mathsf{P}(Z = X + Y \in \mathsf{d}z) \stackrel{\sim}{=} f_Z(z)\mathsf{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

  ◇ $\mathsf{P}\left(Z = \frac{Y}{X} \in \mathsf{d}z\right) \stackrel{\sim}{=} f_Z(z)\mathsf{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, zx)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Simultan fordeling for kontinuerte variable

$$\mathsf{P}((X,Y) \in B) = \int_B f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

- Marginale fordelinger

$$f_X(x) = \int_y f(x,y)\mathsf{d}y \qquad f_Y(y) = \int_x f(x,y)\mathsf{d}x$$

- Hvis X og Y er uafhængige

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Uafhængige normalfordelte variable

- Tætheden for en standardiseret normalfordelt variabel er

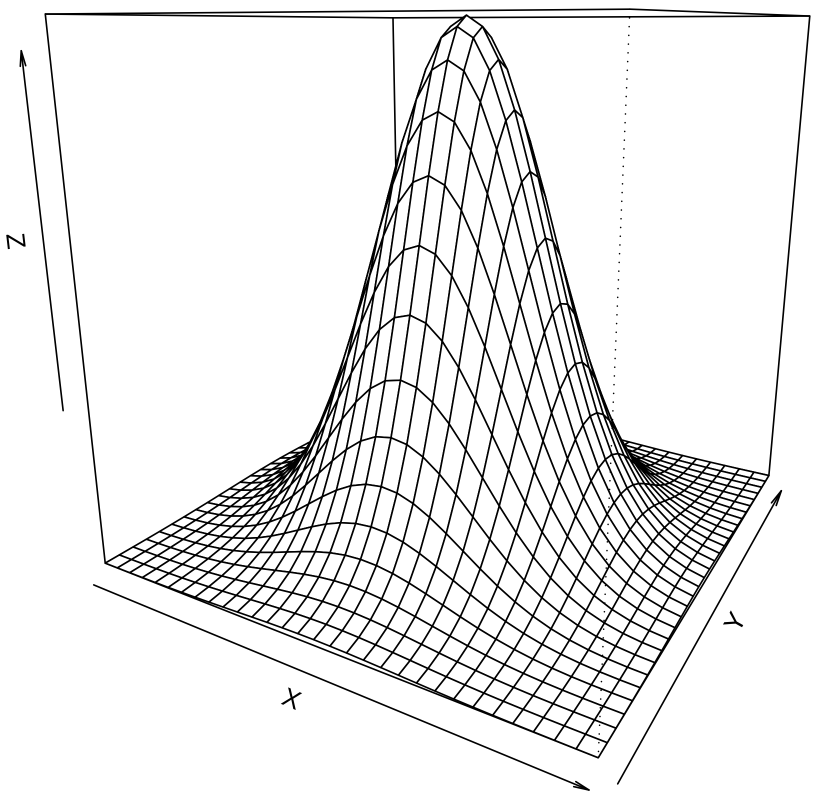
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

- for to uafhængige $normal(0,1)$ variable X og Y får vi

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

- Bemærk rotationssymmetrien.

Den simultane tæthed for (X, Y)



Fordelingen er rotationsinvariant

Linearkombinationer af to normalfordelte variable

Lad X og Y være uafhængige $normal(0,1)$-fordelte variable.

Betragt $Z = aX + bY$.

1. Hvis $a^2 + b^2 = 1$, da er Z også $normal(0,1)$-fordelt.
   Det skyldes rotationssymmetrien, Z er den nye førstekoordinat i et drejet koordinatsystem.

2. Generelt:

$$Z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}X + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}Y\right)$$

... altså er Z **normalfordelt** med middel 0 og varians $a^2 + b^2$.

Resultatet kan også vises analytisk ved brug af afsnit 5.4

Linearkombination

- Summer af normalfordelte variable side 363

Hvis X og Y er uafhængige og normalfordelt med henholdsvis $N(\lambda, \sigma^2)$ og $N(\mu, \tau^2)$ så er $Z = X + Y$ $normal(\lambda + \mu, \sigma^2 + \tau^2)$ fordelt.

- For X_i $normal(\mu_i, \sigma_i^2)$ fordelte og uafhængige er $Z = b + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad normal(b + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$ fordelt.

(Denne står ikke direkte i Pitman, men kan dog let udledes af resultatet side 364.)

Antag at R_1 og R_2 er to uafhængige stokastiske variable med den samme tæthedsfunktion $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ for $x \geq 0$.

Spørgsmål 1

Tætheden af $Y = \min(R_1, R_2)$ findes til

1 ☐ $f_Y(y) = 2ye^{-y^2}$

2 ☐ $f_Y(y) = 1 - (1 - ye^{-\frac{1}{2}y^2})(1 - ye^{-\frac{1}{2}y^2})$

3 ☐ $f_Y(y) = e^{-y}$

4 ☐ $f_Y(y) = 2y^2e^{-y^2}$

5 ☐ $f_Y(y) = 2y^2e^{-\frac{y^2}{2}}$

6 ☐ Ved ikke

Konstanten $1/\sqrt{2\pi}$

(X, Y) har simultan tæthed $f_{XY}(x, y) = c^2 e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

(Bemærk! Vi har hidtil taget $c = 1/\sqrt{2\pi}$ for givet, men nu udleder vi det!)

$$\mathsf{P}(r \le R \le r + \mathsf{d}r) = \mathsf{P}(r \le \sqrt{X^2 + Y^2} \le r + \mathsf{d}r)$$

$$\widetilde{=} c^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}(\pi(r + \mathsf{d}r)^2 - \pi r^2) = 2\pi c^2 r e^{-\frac{1}{2}r^2} \mathsf{d}r + o(\mathsf{d}r)$$

... tegn en skitse af X, Y og R for at checke dette. Vi får tætheden af R direkte:

$$f_R(r) = 2\pi c^2 \ r \ e^{-\frac{1}{2}r^2}$$

Eftersom $\int_0^\infty f_R(r) \ \mathsf{d}r = 1$, må vi have $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

$$f_R(r) = r e^{-\frac{1}{2}r^2} \qquad \mathsf{P}(R \le r) = F_R(r) = 1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}$$

Størrelse af normalfordelt vektor side 358-361

- Hvis talparret (X, Y) er uafhængige standardiserede normalfordelte ($normal(0,1)$) variable,så er $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ Rayleigh fordelt.

$$f_R(r) = re^{-\frac{1}{2}r^2}, \qquad F_R(r) = 1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}$$

- Middelværdi og varians er

$$\mathsf{E}(R) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \mathsf{Var}(R) = \mathsf{E}(R^2) - \mathsf{E}(R)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

En skytte skyder mod en skydeskive. Skuddenes placering på skiven kan beskrives ved 2 uafhængige standardiserede normalfordelte variable, hvor skivens centrum er koordinatsystemets nulpunkt.

Spørgsmål 2

Sandsynligheden for, at et skud rammer indenfor en cirkel med radius $\frac{1}{2}$, er

1 ☐ $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right)$

2 ☐ $\frac{1}{4}$

3 ☐ $\frac{1}{2}$

4 ☐ $1 - e^{-\frac{1}{8}}$

5 ☐ $\left(\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2$

6 ☐ Ved ikke

Hvor $\Phi(x)$ er fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Fordelingen af $S = R^2 = X^2 + Y^2$

$$F_S(s) = \mathsf{P}(S \le s) = \mathsf{P}(\sqrt{S} \le \sqrt{s}) = \mathsf{P}(R \le \sqrt{s})$$

$$= F_R(\sqrt{s}) = 1 - e^{\frac{1}{2}(\sqrt{s})^2} = 1 - e^{-\frac{1}{2}s}$$

... altså er S eksponentialfordelt med middelværdi 2. Alternativt vi kunne have brugt variabelskift fra afsnit 4.4.

Af eksponentialfordelingen fås i øvrigt

$$\mathsf{E}(X^2) = 1 \qquad (!)$$

En skytte skyder mod en skydeskive. Skuddenes placering på skiven kan beskrives ved 2 uafhængige standardiserede normalfordelte variable, hvor skivens centrum er koordinatsystemets nulpunkt.

Spørgsmål 3

Sandsynligheden for, at et skud rammer indenfor en afstand 1 fra koordinatsystemets anden-akse, er

1 ☐ $\Phi(1)$

2 ☐ $\frac{1}{4}$

3 ☐ $2\Phi(1) - 1$

4 ☐ $1 - e^{-\frac{1}{2}}$

5 ☐ $1 - e^{-\frac{1}{4}}$

6 ☐ Ved ikke

Hvor $\Phi(x)$ er fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Operationer med stokastiske variable 5.4

- Vi har set $\max$ og $\min$ af stokastiske variable, samt specielle former for summer.
- For uafhængige diskrete variable har vi tidligere set

$$\mathsf{P}(Z = X + Y = z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)$$

- En foldning.For ikke negative uafhængige X og Y

$$\mathsf{P}(Z = X + Y = z) = \sum_{x=0}^{z} f_X(x) f_Y(z-x)$$

- For kontinuerte tætheder får vi

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x \overset{uaf}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

Lad X_1 være ligeligt fordelt på enhedsintervallet og X_2 være ligeligt fordelt på intervallet (0;2) og uafhængig af X_1.

Spørgsmål 4

Tætheden $f_Z(z)$ for $Z = X_1 + X_2$ findes til

1 ☐ $f_Z(z) = \frac{1}{2}$ for $0 \leq z \leq 2$

2 ☐ $f_Z(z) = \frac{z}{2}$

3 ☐ $$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} & \text{for } 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for } 1 \leq z < 2 \\ \frac{3-z}{2} & \text{for } 2 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

4 ☐ $f_Z(z) = \frac{1}{3}$ for $0 \leq z \leq 3$

5 ☐ $f_Z(z) = \frac{z}{3}$

6 ☐ Ved ikke

Lad X_1 være ligeligt fordelt på enhedsintervallet og X_2 være ligeligt fordelt på intervallet (0;2) og uafhængig af X_1.

Spørgsmål 5

Sandsynligheden $\mathrm{P}(X_1 + X_2 \leq 2)$ findes til

1 ☐ $\frac{1}{2}$

2 ☐ $\frac{2}{3}$

3 ☐ $\frac{3}{4}$

4 ☐ $\frac{5}{6}$

5 ☐ 1

6 ☐ Ved ikke

- Enten brug $f_Z(z)$
- Den simultane tæthed af (X_1, X_2) er

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\mathsf{P}(X_1 + X_2 \le 2) = \int_{x_1+x_2\le 2} \frac{1}{2} \mathsf{d}x_1 \mathsf{d}x_2$$

- Eller vi kan bruge arealbetragtninger og få $\mathsf{P}(X_1 + X_2 \le 2) = \frac{3}{4}$

$X \sim N(0,1), \quad Y \sim N(0,1)$ uafhængige

$$f_X(z) = f_Y(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$V = aX \qquad W = bY \qquad v = g(x) = ax \qquad w = h(y) = by$$

$$f_V(v) \quad = \quad \frac{f_X(x)}{\left|\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{|a|} = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2a^2}}$$

Tilsvarende

$$f_W(w) = \frac{1}{|b|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2b^2}}$$

$Z = aX + bY = V + W$

(her med $a > 0$ og $b > 0$ uden tab af generalitet)

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_V(v) f_W(z-v) \mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2a^2}} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-v)^2}{2b^2}} \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2ab\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2 b^2 + (z-v)^2 a^2}{2a^2 b^2}} \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2ab\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(a^2+b^2)v^2 - 2zva^2 + z^2 a^2}{2a^2 b^2}} \mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

Med $a^2 + b^2 = 1$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2ab\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2-2zva^2+z^2a^4-z^2a^4+z^2a^2}{2a^2b^2}}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1-a^2)z^2}{2b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ab\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-za^2)^2}{2a^2b^2}}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1-a^2)z^2}{2b^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}
\end{aligned}
$$

hvor vi har benyttet $a^2 + b^2 = 1$ ved det sidste lighedstegn

Sum af max og min af to eksponentialfordelte variable

Vi har tidligere set at for $W_i \in \exp(\lambda)$, $X = \min(W_1, W_2)$ og $Y = \max(W_1, W_2)$ er den simultane tæthed:

$$f(x, y) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, 0 < x \leq y.$$

Fordelingen af $Z = X + Y$ findes til

$$f_Z(z) = \int_0^{\frac{z}{2}} 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+(z-x))} \mathrm{d}x = \lambda(\lambda z) e^{-\lambda z}$$

Overraskende?

Summer af uafhængige variable

- Med $X \in bin(n,p)$ og $Y \in bin(m,p)$ er
  $Z = X + Y \in bin(n+m,p)$
- Med $X \in NB(n,p)$ og $Y \in NB(m,p)$ er
  $Z = X + Y \in NB(n+m,p)$
- Med $X \in Pois(\lambda)$ og $Y \in Pois(\mu)$ er
  $Z = X + Y \in Pois(\lambda+\mu)$
- Med $X \in Gamma(r,\lambda)$ og $Y \in Gamma(s,\lambda)$ er
  $Z = X + Y \in Gamma(r+s,\lambda)$
- Summer af mange har normalfordelingen som grænse
- Summer af normalfordelte variable side 363
- Med $X \in N(\mu_1,\sigma_1^2)$ og $Y \in N(\mu_2,\sigma_2^2)$ er
  $Z = X + Y \in N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
  - Med $X \in N(\mu_1,\sigma_1^2)$ og $Y \in N(\mu_2,\sigma_2^2)$ er
    $W = aX + bY \in N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$

χ^2 fordelingen side 364-366, opgave 5.3.15

Summer af kvadrerede uafhængige standard normalfordelte variable:

$X_i \sim normal(0,1)$, uafhængige. Da har $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

tæthed

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(n/2\right)} y^{(n/2)-1} e^{-y/2}$$

... og siges at være χ^2 fordelt med n frihedsgrader.

(... det er også en Gamma-fordeling $\Gamma(n/2, 1/2)$)

Reproduktion: Hvis $Y_1 \sim \chi^2(n)$ og $Y_2 \sim \chi^2(m)$, så er $Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(n+m)$.

Fordeling af forhold side 383

- Hvis $Z = \frac{Y}{X}$, hvor X og Y er uafhængige

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) \mathrm{d}x$$

- Se eksempel 5 side 383

$Z = \frac{Y}{X}$ med $X > 0$ og $Y > 0$.

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) = \mathsf{P}(Z \leq z) &= \int_0^{\infty} \int_0^{zx} f(x,y) \mathsf{d}y \mathsf{d}x \\
f_Z(z) &= \frac{\mathsf{d}F(z)}{\mathsf{d}z} = \frac{\mathsf{d}\int_0^{\infty} \int_0^{zx} f(x,y) \mathsf{d}y \mathsf{d}x}{\mathsf{d}z} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\mathsf{d}\int_0^{zx} f(x,y) \mathsf{d}y}{\mathsf{d}z} \mathsf{d}x \\
&= \int_0^{\infty} |x| f(x, zx) \mathsf{d}x
\end{aligned}
$$

Opgave 5.4.10

- Find tætheden af $Y = \frac{V}{U}$, hvor U og V er uafhængige ligefordelte (0,1) variable.
- Vi benytter $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |u| f_U(u) f_V(uy) \mathrm{d}u$.
- Integrationsgrænserne for u er fra 0 til $\min\left(1, \frac{1}{y}\right)$. Så

$$f_Y(y) = \int_0^1 u \mathrm{d}u = \frac{1}{2}, \qquad \text{for } y < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\frac{1}{y}} u \mathrm{d}u = \frac{1}{2y^2}, \qquad \text{for } 1 < y$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}, & y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2y}, & 1 < y \end{cases}$$

F-fordelingen: Forholdet mellem to uafhængige χ^2 fordelte variable

Lad $Y \in \chi^2(n)$ og $X \in \chi^2(m)$ og betragt $Z = \frac{\frac{Y}{n}}{\frac{X}{m}}$

$$f_Z(z) = \int_0^\infty \frac{n}{m} x f_X(x) f_Y\left(\frac{n}{m}xz\right) \mathrm{d}x$$

... efter en længere række udregninger finder vi

$$f_Z(z) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1 + \frac{n}{m}z\right)^{\frac{n+m}{2}}} \qquad \text{hvor } B(r,s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

Dette kaldes en $F(n,m)$ fordeling - den optræder hyppigt som en fordeling for teststørrelser i statistikken.

Udledningen af F-fordelingen

- Med $Y \in \chi^2(n)$ og $X \in \chi^2(m)$,vil vi undersøge fordelingen af $Z = \frac{\frac{Y}{n}}{\frac{X}{m}} = \frac{Y_1}{X_1}$

$$f_Z(z) = \int_0^\infty x f_{X_1}(x) f_{Y_1}(xz) \mathrm{d}x$$

- Af tætheden for Y $f_Y(y)$, findes tætheden $f_{Y_1}(y)$ for $Y_1 = \frac{Y}{n}$ til $n f_Y(n \cdot y)$
- Ved indsættelse af $f_Z(z) =$

$$\int_0^\infty x \cdot m \cdot 2^{-\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^{-1} (mx)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{mx}{2}} n 2^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1} (nxz)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{nxz}{2}} \mathrm{d}x$$

$$\int_0^\infty x2^{-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^{-1}(mx)^{\frac{m}{2}-1}me^{-\frac{mx}{2}}2^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}(nxz)^{\frac{n}{2}-1}ne^{-\frac{nxz}{2}}\mathsf{d}x$$

$$= 2^{-\frac{n+m}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} z^{\frac{n}{2}-1}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty x^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{m+nz}{2}x}\mathsf{d}x$$

- Funktionen under integralet er næsten en Γ tæthed

$$= \int_0^\infty \frac{m+nz}{2}\frac{\left(\frac{m+nz}{2}x\right)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}e^{-\frac{m+nz}{2}x}\mathsf{d}x$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left(\frac{m+nz}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}}2^{-\frac{n+m}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} z^{\frac{n}{2}-1}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{m+nz}{2} \frac{\left(\frac{m+nz}{2}x\right)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} e^{-\frac{m+nz}{2}x} \mathrm{d}x$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left(\frac{m+nz}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}} 2^{-\frac{n+m}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} z^{\frac{n}{2}-1} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}$$

- Integralet er 1. Efter de sidste modifikationer får vi

$$f_Z(z) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1 + \frac{n}{m}z\right)^{\frac{n+m}{2}}}$$

- Idet

$$B(r, s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

- En $F(n, m)$ fordeling.

Lad Y_1, Y_2 og Y_3 være tre punkter, der vælges tilfældigt og uafhængigt i intervallet $(0, 1)$. Lad X være punktet tættest på 1.

Spørgsmål 6

Fordelingsfunktionen for X er

1 ☐ $F(x) = 1 - (1 - x)^3$

2 ☐ $F(x) = x$

3 ☐ $F(X) = \Phi\left(\frac{x - \frac{2}{3}}{\sqrt{12}}\right)$

4 ☐ $F(x) = x^3$

5 ☐ $F(x) = x^{\frac{1}{3}}$

6 ☐ Ved ikke

Hvor $\Phi(x)$ er fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Farvede kugler trækkes tilfældigt med tilbagelægning fra en æske. Indholdet af æsken er givet ved

Farve	Rød	blå	grøn	gul
Andel	0.1	0.2	0.3	0.4

Spørgsmål 7

Hvad er sandsynligheden for at få præcis 5 gule kugler i 20 trækninger

1 ☐ Ingen af de nedenstående

2 ☐ $\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} (0.4)^5 (0.6)^{15}$

3 ☐ $\Phi\left(\frac{5-0.1\cdot 20}{\sqrt{20\cdot 0.1\cdot 0.9}}\right)$

4 ☐ $5 \cdot 0.1$

5 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{5-0.1\cdot 20}{\sqrt{20\cdot 0.1\cdot 0.9}}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 8

Netop 2 røde, 4 blå, 6 grønne og 8 gule i 20 trækninger.

1 ☐ $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}(0.1)^2(0.2)^4(0.3)^6(0.4)^8$

2 ☐ $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2(0.1)^2(0.2)^4(0.3)^6(0.4)^8$

3 ☐ 0.5

4 ☐ $\frac{20!}{(5!)^4}(0.1)^2(0.2)^4(0.3)^6(0.4)^8$

5 ☐ $\frac{20!}{2!4!6!8!}(0.1)^2(0.2)^4(0.3)^6(0.4)^8$

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 9

Netop 25 trækninger for at få 3 røde.

1 ☐ $\begin{pmatrix} 25 \\ 3 \end{pmatrix} (0.1)^3(0.9)^{22}$

2 ☐ $((0.1)(0.9)^{24})^3$

3 ☐ $(0.1)^3(0.9)^{22}$

4 ☐ $\begin{pmatrix} 24 \\ 2 \end{pmatrix} (0.1)^3(0.9)^{22}$

5 ☐ $((0.1)^{24}(0.9))^3$

6 ☐ Ved ikke

Afsnit 5.3 og 5.4

- Simultane kontinuerte fordelinger
  $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Y \in \mathsf{d}y) \stackrel{\sim}{=} f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$
- Uafhængige normalfordelte variable ($\sim normal(\mu, \sigma^2) = N(\mu, \sigma^2)$)
  - ◇ $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$
  - ◇ $F_R(r) = \mathsf{P}(\sqrt{X^2+Y^2} \leq r) = 1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}$ (Rayleigh)
  - ◇ $X \sim N(\lambda, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \tau^2) \Rightarrow X + Y \sim N(\lambda + \mu, \sigma^2 + \tau^2)$
  - ◇ For $X_i \sim N(0,1)$ er $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$ χ^2-fordelt (gamma).
- Operationer med stokastiske variable
  - ◇ $\mathsf{P}(Z = X + Y \in \mathsf{d}z) \stackrel{\sim}{=} f_Z(z)\mathsf{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$
  - ◇ $\mathsf{P}\left(Z = \frac{Y}{X} \in \mathsf{d}z\right) \stackrel{\sim}{=} f_Z(z)\mathsf{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, zx)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$