Sandsynlighedsregning
6. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Matematik og Computer Science

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Kgs. Lyngby – Danmark

Email: bfni@dtu.dk

Dagens emner: Afsnit 4.2, 4.3 og 4.4

- Poissonprocessen/eksponentialfordelingen $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
  - ◇ Rate λ Overlevelsesfunktion: $G(x) = e^{-\lambda x}$
  - ◇ Gammafordelingen $f(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}$ hvor $\Gamma(r) = (r-1)!$

    for r heltallig. For r heltallig $\mathsf{P}(X \leq x) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}$
- Hazard-funktionen (hazard rate)

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{P}(T \in (t, t+\Delta t) | T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{G(t)}$$

- Variabelskift, $\mathsf{P}(X \in [x, x + \mathsf{d}x]) = f_X(x)\mathsf{d}x$, $Y = g(X)$

$$\mathsf{P}(Y \in [y, y + \mathsf{d}y]) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\left|\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x}\right|}\mathsf{d}y$$

Antag, at rosinboller fra Genbrugsbageren har gennemsnitligt 3 friske og 2 rådne rosiner pr. bolle.

Spørgsmål 1

Hvad er sandsynligheden for ikke at få nogen rosiner i en bid, der tager 20% af en bolle?

1 ☐ $\frac{3}{5}$

2 ☐ 0,368

3 ☐ 0,2514

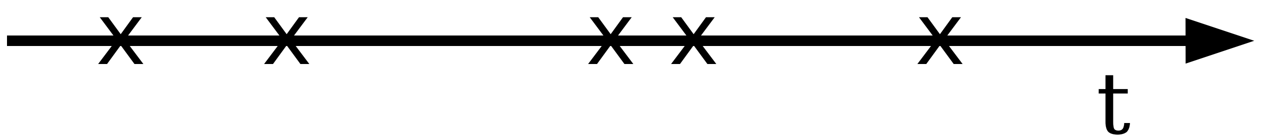
4 ☐ $\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5$

5 ☐ 0,0067

6 ☐ Ved ikke

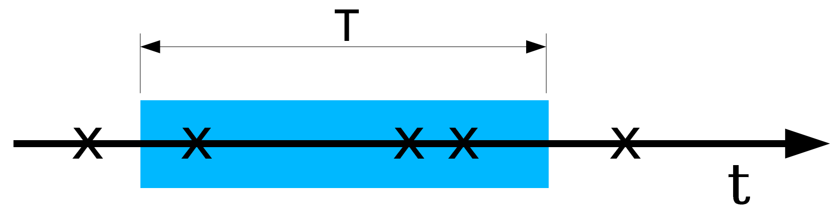
Punktprocesser på linien

- Uheld i et vejkryds
- Radioaktivt henfald
- Opkald til internetudbyder
- Produktionsfejl på et kabel

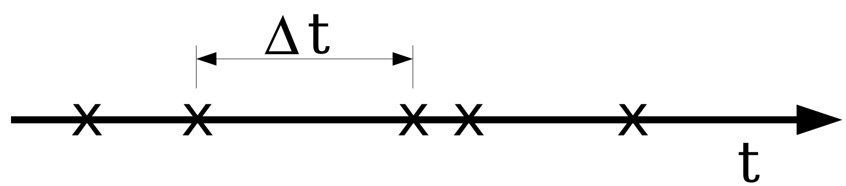


Fællestræk: Vi kan modellere ...

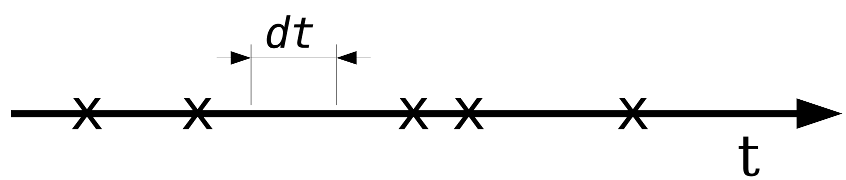
Antal i et tidsinterval



Tid mellem hændelser



Et lille tidsinterval



Een grundlæggende model: Poissonprocessen (side 289)

- Antal hændelser i et tidsinterval er Poissonfordelt (2. p.289)
- Tiden mellem hændelser er eksponential fordelt (3. p.289)
- Konstant intensitet (sandsynlighed for en hændelse i Δt er proportional med Δt) (1. p.289).

Eksponentialfordelingen side 279

En eksponentialfordelt (λ) variabel T har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

overlevelsesfunktion

$$G(t) = \mathsf{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$$

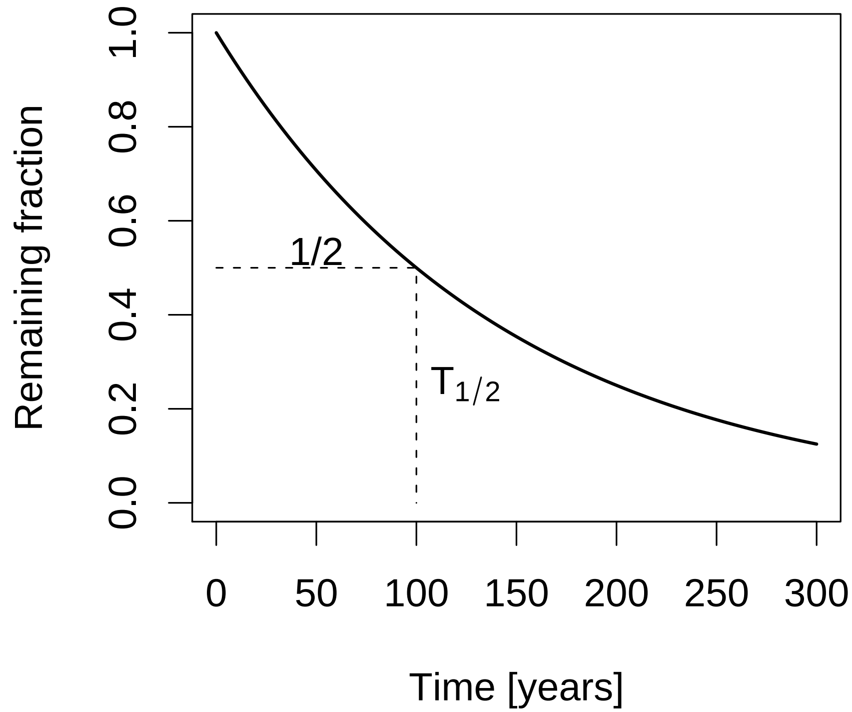
middelværdi og varians

$$\mathsf{E}(T) = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathsf{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Parameteren λ er intensiteten eller *(døds)raten* (hazard rate).

Eksponentialfordelingen er *uden hukommelse* (side 279 nederst).

Halveringstid



Spørgsmål 2

Sandsynligheden for, at et atom af denne type overlever 5 år, er

1 ☐ $\frac{1}{5}$

2 ☐ e^{-5}

3 ☐ $\frac{1}{32}$

4 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{5-1}{1}\right)$

5 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{5-1}{\sqrt{5}}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Hvor Φ som sædvanlig betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Ventetid til r'te hændelse: Gammafordelingen

Ofte vil vi beskrive tiden til den r'te hændelse.

Sammenhæng mellem antal (N_t) og tid (T_r).

$$\mathsf{P}(N_t \leq r-1) = \mathsf{P}(T_r > t)$$

For Poisson-processen fås:

$$\mathsf{P}(T_r > t) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

Fra dette kan vi udlede tætheden for Gammafordelingen

$$f(t) = -\frac{d}{dt}G(t) = \frac{d}{dt}\mathsf{P}(T_r \leq t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda t}$$

Opgave 4.2.6

En Geigertæller opsamler baggrundsstråling med en gennemsnitlig rate af en registrering pr. minut.

Lad T_3 betegne det tidspunkt hvor den tredje partikel registreres (målt i minutter).

Spm: Bestem $\mathsf{P}(2 \leq T_3 \leq 4)$

Svar: T_3 antages Gamma (3,1) fordelt (hvorfor?)

Således er

$$\mathsf{P}(T_3 > 4) = e^{-1\cdot 4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2}\right) = 0,238$$

$$\mathsf{P}(T_3 \geq 2) = e^{-1\cdot 2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2}\right) = 0,677$$

... og dermed

$$P(2 \leq T_3 \leq 4) = \mathsf{P}(T_3 \geq 2) - \mathsf{P}(T_3 > 4) = 0,439$$

Gammafordeling med ikke-heltallig parameter

Definér Gammafunktionen (s. 291):

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t} \, dt$$

For heltallig parameter r har vi $\Gamma(r) = (r-1)!$

Hvis X har tætheden

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r t^{r-1} e^{-\lambda t}$$

så er X Gammafordelt med formparameter r og skalaparameter λ.

Gammafordelingen bruges ofte til beskrivelse af levetider etc., der ikke kan beskrives ved eksponentialfordelingen.

En kontinuert stokastisk variabel T har overlevelsesfunktionen $G(t) = \mathsf{P}(T > t)$.

Spørgsmål 3

Bestem $\mathsf{P}(a < T \leq b)$

1 ☐ $\frac{G(b)-G(a)}{G(b)}$

2 ☐ $\frac{G(a)-G(b)}{G(a)}$

3 ☐ $G'(b) - G'(a)$

4 ☐ $G(a) - G(b)$

5 ☐ $G(b) - G(a)$

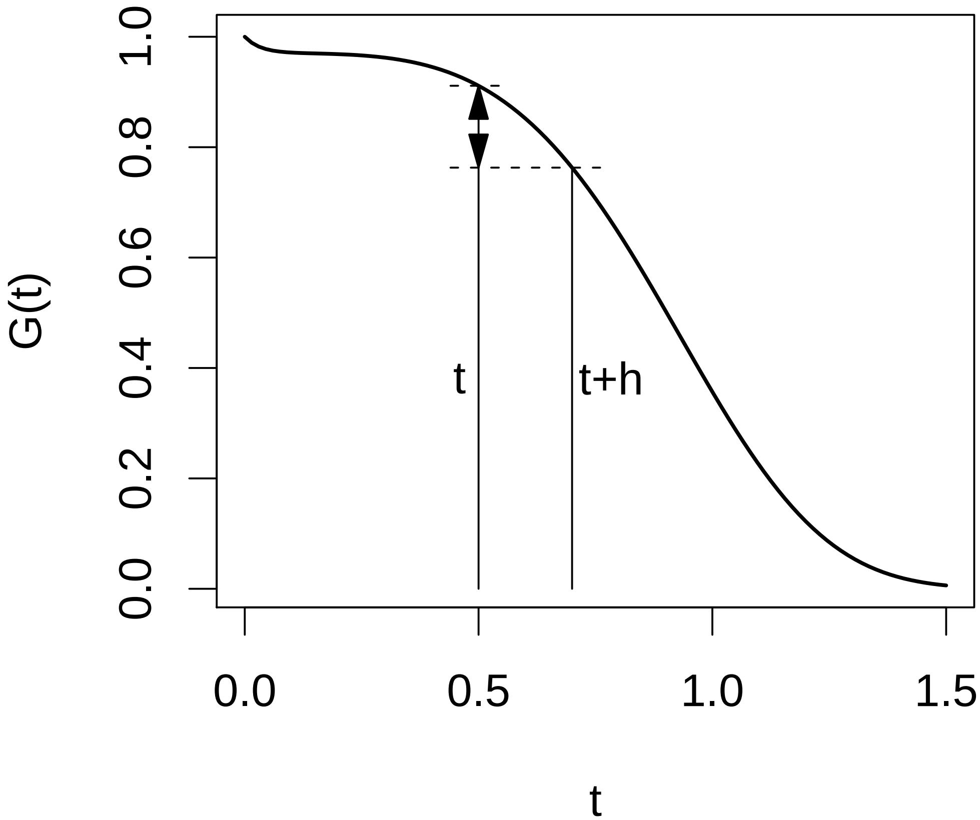
6 ☐ Ved ikke

Hazard rate side 296

Under service af en bil overvejer man præventivt at skifte en komponent (f.eks. en tandrem). Komponenen har allerede alderen t, næste service er til tiden $t + h$, og komponentens levetid har overlevelsesfunktion $G(\cdot)$.

Spm: Hvad er sandsynligheden for, at komponenten svigter inden næste service?

Svar:



Det relevante er den **betingede** sandsynlighed:

$$\mathsf{P}(T \leq t + h \mid T > t)$$

som bestemmes til

$$\frac{G(t) - G(t+h)}{G(t)}$$

Hazard rate

For korte tidsrum („serviceintervaller") h har vi

$$\frac{G(t) - G(t+h)}{G(t)} = \frac{f(t)}{G(t)} \cdot h + o(h)$$

Vi definerer nu **hazard raten** $\lambda(t)$ for sandsynligheden for at hændelsen indtræffer kort efter t, **givet** at den ikke er indtruffet før.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)}$$

Sandsynligheden for at overleve indtil næste „service" findes som

$$\mathsf{P}(T > t + h \mid T > t) = \exp(-\int_t^{t+h} \lambda(s)\, ds)$$

Hazardraten bestemmer sandsynligheden for, at en hændelse indtræffer (fejl, død, ankomst) kort efter et givet tidspunkt t **givet**, at den ikke er indtruffet før.

Hazard rate for eksponentialfordelingen

Vi har $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Så

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

... d.v.s. eksponentialfordelingen er **hukommelsesløs**.

Eksponentialfordelingen er *den eneste* kontinuerte fordeling med denne egenskab (opgave 4.3.1)

Overlevelsesfunktionen fra hazard rate

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)} = -\frac{G'(t)}{G(t)}$$

D.v.s. $G(t)$ løser

$$G'(t) = -\lambda(t) \cdot G(t) \quad , \qquad G(0) = 1$$

som har løsningen

$$G(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) \mathrm{d}u}$$

- Eksponentialfordelingen som eksempel:

$$G(t) = e^{-\int_0^t \lambda \mathrm{d}u} = e^{-\lambda t}$$

Fra tæthed til overlevelsesfunktion

$$G(t) = \int_t^{\infty} f(u)\mathrm{d}u \qquad \Leftrightarrow \qquad f(t) = -\frac{dG}{dt}(t) \quad , \quad G(0) = 1$$

Eksponentialfordeling (λ)	Gammafordeling (r,λ)
$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$f(t) = e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda^r t^{r-1}}{(r-1)!}$
$G(t) = e^{-\lambda t}$	$G(t) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{r-1}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$

Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

Lad T være en ikke-negativ kontinuert stokastisk variabel.

T's forventningsværdi er

$$\mathsf{E}(T) = \int_0^\infty t\ f(t)\ dt = \int_0^\infty G(t)\ dt$$

hvor G er overlevelsesfunktionen og ligheden skyldes partiel integration. (Dette er den kontinuerte version af *tail sum formula*.)

For en eksponentialfordelt (λ) variabel finder vi

$$\mathsf{E}(T) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\ dt = \frac{1}{\lambda}$$

Opgave R.4.20

Et apparat har en kritisk komponent med konstant fejlrate λ. Apparatet har en tilsvarende komponent som backup. Når den første komponent fejler, bliver dens funktion straks overtaget af den anden, som derefter har konstant fejlrate λ uafhængigt af, hvornår den første komponent fejlede.

Lad T være levetiden af apparatet bestemt ved det tidspunkt erstatningskomponenten fejler.

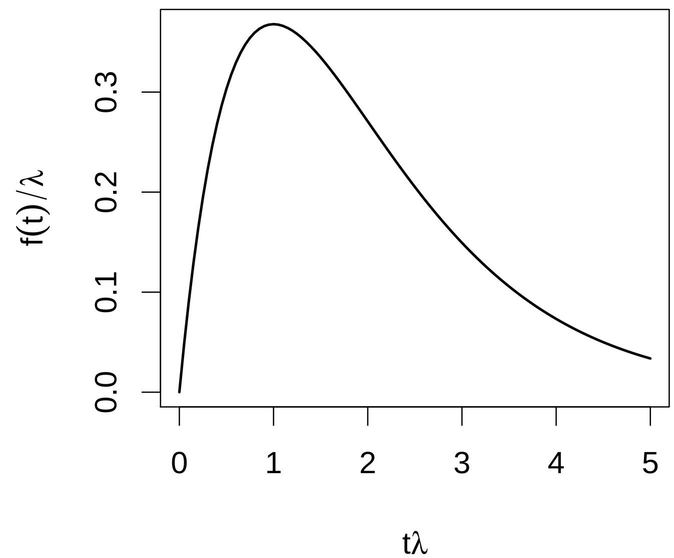
Spm: Bestem tæthedsfunktionen for T.

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable X_i.

Levetiden T af apparatet er da givet ved $T = X_1 + X_2$.

Da X_i er uafhængige og eksponentialfordelte (λ) er T Gamma(2,λ) fordelt.

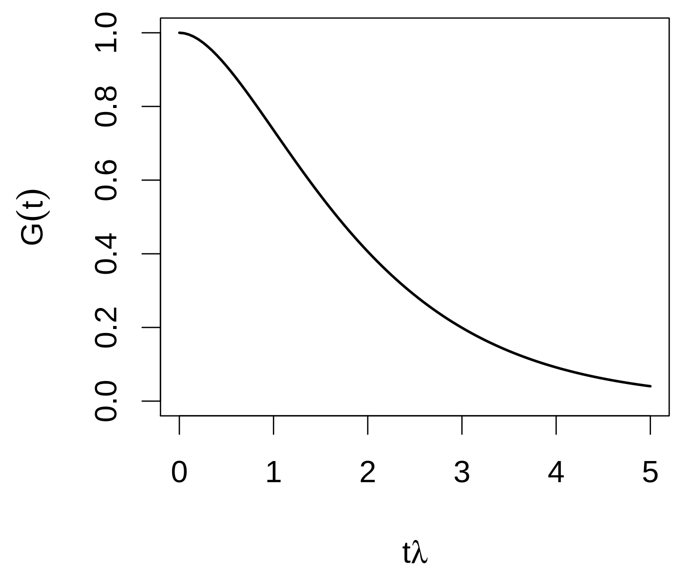
$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$



Spm: Bestem overlevelsesfunktionen

Svar:

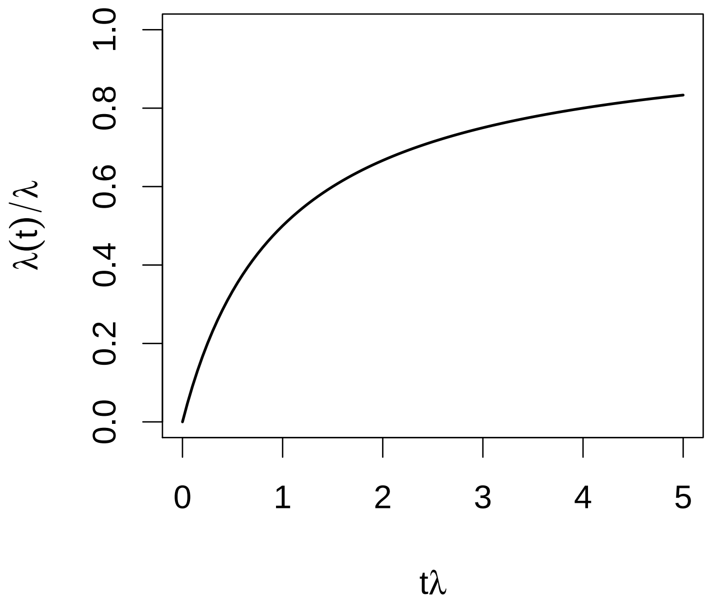
$$G(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$



Spm: Bestem fejlfunktionen (hazard-rate)

Svar:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}(1+\lambda t)} = \frac{\lambda}{1+\frac{1}{\lambda t}}$$



Med $\lambda = 1$ per time, hvad er da sandsynligheden for, at et apparat, der har virket i to timer, fejler i det næste minut

$$P\left(T \leq 2 + \frac{1}{60} \text{ timer} \mid T > 2 \text{ timer}\right) = \lambda(2)\frac{1}{60} = \frac{1\cdot(1\cdot 2)}{1+1\cdot 2}\frac{1}{60} = \frac{1}{90}$$

Variabelskift

Givet en stokastisk variabel X med tæthed $f(x)$,

og en funktion $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$.

Det definerer en ny stokastisk variabel

$$Y = g(X)$$

Vi har for eksempel

$$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(g(X)) = \int g(x)f(x)\mathsf{d}x$$

Hvad er fordelingen af Y?

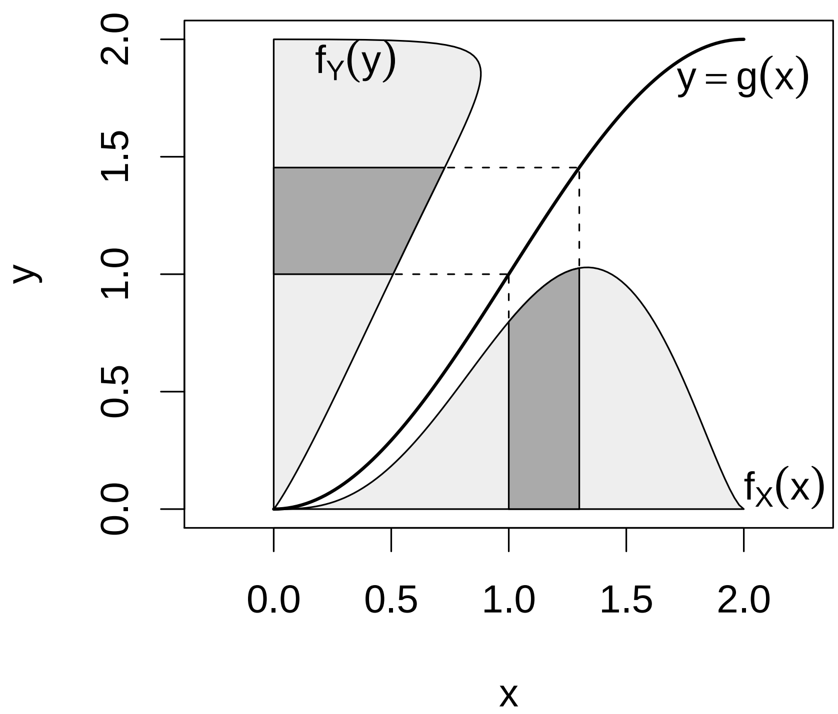
Bestem for eksempel overlevelsesfunktion

$$\mathsf{P}(Y > y) = \mathsf{E}(I_{Y>y}) = \int_{\{x:g(x)>y\}} f(x)\; dx$$

... men hvordan bestemmer vi tætheden af Y ud fra tætheden af X?

Variabelskift

Givet X med tæthedsfunktion $f_X(x)$, og relationen $Y = g(X)$.



Hvis g er voksende:

$$\mathsf{P}(y_1 < Y \leq y_2) =$$

$$P(g^{-1}(y_1) < X \leq g^{-1}(y_2))$$

Dermed er fordelingen af Y fastlagt!

Bestem tæthedsfunktionen for Y

$Y = g(X)$ med $g(x)$ voksende

Indfør $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\mathrm{d}u$ og $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\mathrm{d}v$.

Tæthedsfunktionen $f_Y(y)$ kan findes ved at differentiere:

$$f_Y(y)h = \mathsf{P}(y < Y \leq y + h) = F_Y(y + h) - F_Y(y)$$

$$= \mathsf{P}(g^{-1}(y) \leq g^{-1}(Y) \leq g^{-1}(y+h)) = F_X(g^{-1}(y+h)) - F_X((g^{-1}(y))$$

og dermed

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} \quad \text{hvor } x = g^{-1}(y)$$

Opgave 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.6 og 4.4.10 er af denne type

Variabelskift teknisk: $Y = g(X)$

For en strengt monoton funktion $y = g(x)$ kan vi bestemme $f_Y(y)$ ud fra $f_X(x)$ ved

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)\right|}$$

hvor vi erstatter x med y ved brug af den omvendte funktion $x = g^{-1}(y)$

Antag at X er en eksponential (λ) fordelt stokastisk variabel.

Spørgsmål 4

Tætheden $f(y)$ af $Y = cX$ for $c > 0$ er

1 ☐ $f(y) = \lambda e^{-\lambda(cy)}$

2 ☐ $f(y) = c\lambda e^{-c\lambda y}$

3 ☐ $f(y) = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c} y}$

4 ☐ $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y - c\lambda)^2}$

5 ☐ $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y - \frac{c}{\lambda})^2}$

6 ☐ Ved ikke

Modificeret opgave 4.4.3

Antag, at X er ligefordelt på $]-1;0[$.

Spm: Find tætheden for X^2.

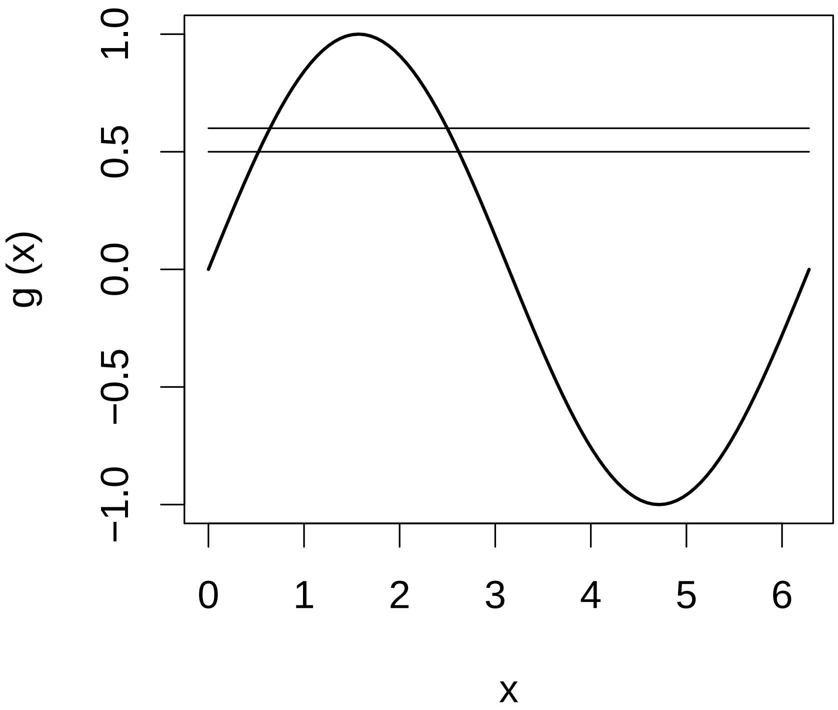
Svar: Vi indfører $Y = X^2$, således at $X = -\sqrt{Y}$, og $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 2x$.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|} = \frac{1}{|2x|} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, 0 < y < 1$$

Mange til een funktion

Lad X være ligefordelt på $[0, 2\pi]$; lad $Y = \sin(X)$.

Spm: Find tætheden for Y.



Tætheden af X er $\frac{1}{2\pi}$.

For hvert skæringspunkt er bidraget

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\cos x|}$$

med $x = \sin^{-1} y$. I alt fås

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

Mange-til-een funktioner, generelt

Hvis funktionen $g(x)$ er strengt monoton i delintervaller gælder:

$$f_Y(y) = \sum_{\{x:g(x)=y\}} \frac{f_X(x)}{\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|}$$

Opgave 4.4.4

Antag at X er ligefordelt på $]-1;1[$. *Spm:* Find tætheden af $Y = X^2$.

Svar: Ligningen $x^2 = y$ har de to løsninger $x_1 = \sqrt{y}$ og $x_2 = -\sqrt{y}$.

Både for x_1 og for x_2 finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{2} \text{ og } \left| \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_i) \right| = 2|x_i|$$

Dermed:

$$f_Y(y) = 2\frac{f_X(x_i)}{\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_i)\right|} = 2\frac{\frac{1}{2}}{|2x|} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, 0 < y < 1$$

Opgave 4.4.5

- Antag at X er ligefordelt på $[-1;2]$. Find tætheden af X^2.
- For Y i intervallet $[0;1]$ har vi to løsninger til $y = x^2$, medens vi har en løsning for Y i intervallet $]1;2]$. Vi får således:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 1 < y < 2 \end{cases}$$

Afsnit 4.2, 4.3 og 4.4

- Poissonprocessen/eksponentialfordelingen $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
  - ◇ Rate λ Overlevelsesfunktion: $G(x) = e^{-\lambda x}$
  - ◇ Gammafordelingen $f(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}$ hvor $\Gamma(r) = (r-1)!$ for r heltallig. For r heltallig $\mathsf{P}(X \leq x) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}$
- Hazard-funktionen (hazard rate)

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{P}(T \in (t, t+\Delta t) | T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{G(t)}$$

- Variabelskift, $\mathsf{P}(X \in [x, x+\mathsf{d}x]) = f_X(x)\mathsf{d}x$, $Y = g(X)$

$$\mathsf{P}(Y \in [y, y+\mathsf{d}y]) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\left|\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x}\right|}$$