

# Sandsynlighedsregning

## 6. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Matematik og Computer Science

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Kgs. Lyngby – Danmark

Email: [bfni@dtu.dk](mailto:bfni@dtu.dk)

# Dagens emner: Afsnit 4.2, 4.3 og 4.4



- Poissonprocessen/eksponentialfordelingen  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ 
  - ◇ Rate  $\lambda$  Overlevelsesfunktion:  $G(x) = e^{-\lambda x}$
  - ◇ Gammafordelingen  $f(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}$  hvor  $\Gamma(r) = (r-1)!$  for  $r$  heltallig. For  $r$  heltallig  $P(X \leq x) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}$
- Hazard-funktionen (hazard rate)

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T \in (t, t + \Delta t) | T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{G(t)}$$

- Variabelskift,  $P(X \in [x, x + dx]) = f_X(x)dx$ ,  $Y = g(X)$

$$P(Y \in [y, y + dy]) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} dy$$

Antag, at rosinboller fra Genbrugsbageren har gennemsnitligt 3 friske og 2 rådne rosiner pr. bolle.

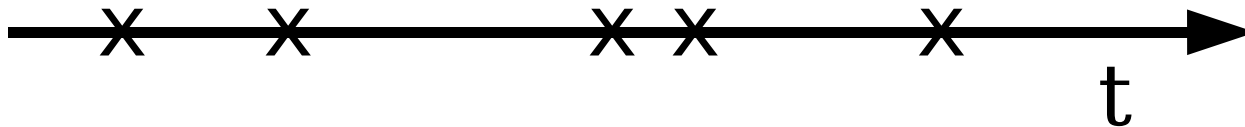
## Spørgsmål 1

Hvad er sandsynligheden for ikke at få nogen rosiner i en bid, der tager 20% af en bolle?

- 1   $\frac{3}{5}$
- 2  0,368
- 3  0,2514
- 4   $\frac{1}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^5$
- 5  0,0067
- 6  Ved ikke

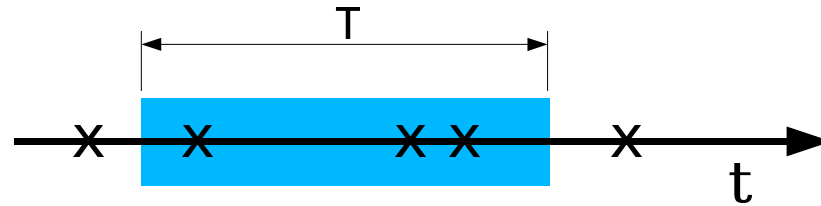
# Punktprocesser på linien

- Uheld i et vejkryds
- Radioaktivt henfald
- Opkald til internetudbyder
- Produktionsfejl på et kabel



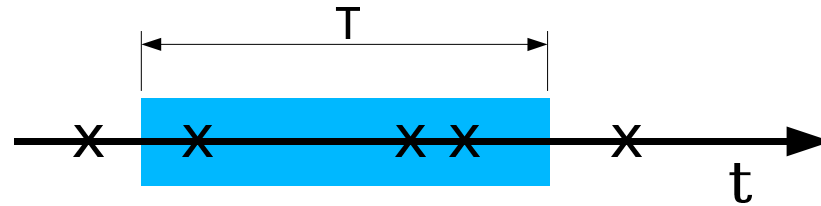
# Fællestræk: Vi kan modellere ...

Antal i et tidsinterval

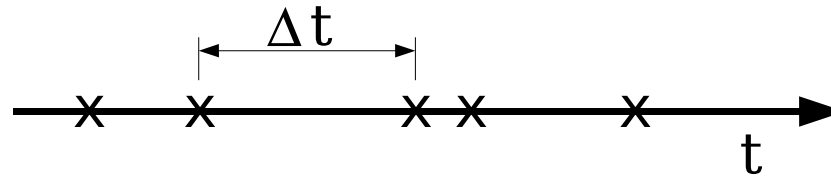


# Fællestræk: Vi kan modellere ...

Antal i et tidsinterval

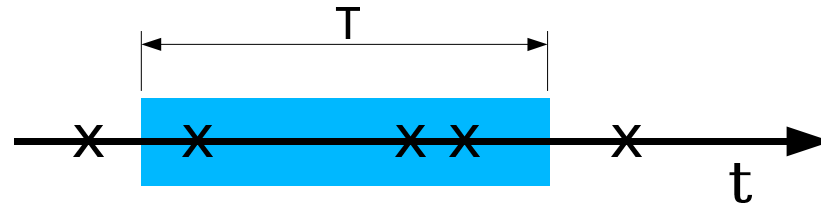


Tid mellem hændelser

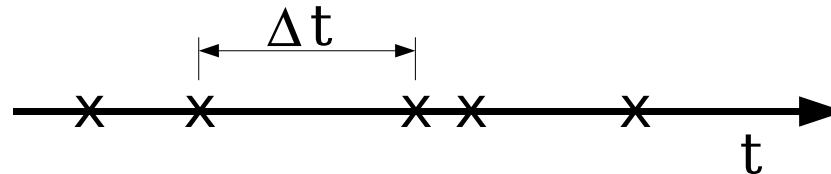


# Fællestræk: Vi kan modellere ...

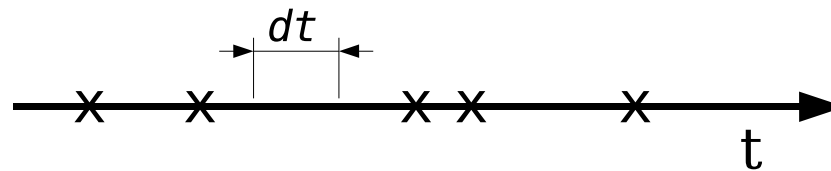
Antal i et tidsinterval



Tid mellem hændelser



Et lille tidsinterval



# Een grondlæggende model: Poissonprocessen



(side 289)



# Een grundlæggende model:

## Poissonprocessen



(side 289)

- Antal hændelser i et tidsinterval er Poissonfordelt (2. p.289)

# Een grundlæggende model:

## Poissonprocessen



(side 289)

- Antal hændelser i et tidsinterval er Poissonfordelt (2. p.289)
- Tiden mellem hændelser er eksponential fordelt (3. p.289)

# Een grundlæggende model:

## Poissonprocessen



(side 289)

- Antal hændelser i et tidsinterval er Poissonfordelt (2. p.289)
- Tiden mellem hændelser er eksponential fordelt (3. p.289)
- Konstant intensitet (sandsynlighed for en hændelse i  $\Delta t$  er proportional med  $\Delta t$ ) (1. p.289).

# Eksponentialfordelingen side 279



# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

overlevelseshfunktion

# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

overlevelseshfunktion

$$G(t)$$



# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

overlevelseshfunktion

$$G(t) = P(T > t)$$

# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

overlevelseshfunktion

$$G(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

overlevelsesfunktion

$$G(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

middelværdi og varians

# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

overlevelsesfunktion

$$G(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

middelværdi og varians

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

overlevelsesfunktion

$$G(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

middelværdi og varians

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Parameteren  $\lambda$  er intensiteten eller (*døds*)raten (hazard rate).

# Eksponentialfordelingen side 279



En eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel  $T$  har tæthed

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

overlevelsesfunktion

$$G(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

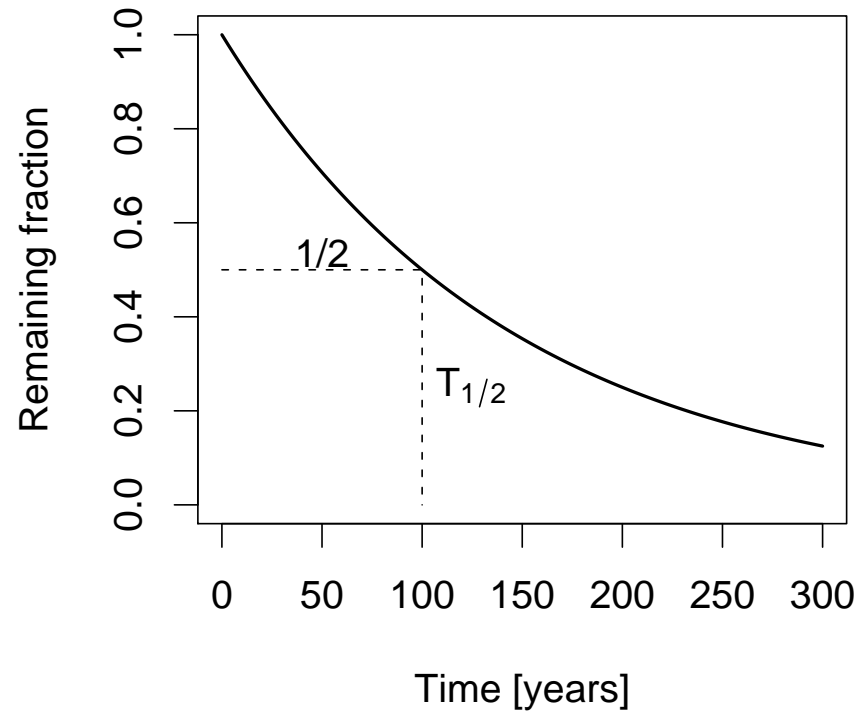
middelværdi og varians

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Parameteren  $\lambda$  er intensiteten eller (*døds*)raten (hazard rate).

Eksponentialfordelingen er *uden hukommelse* (side 279 nederst).

# Halveringstid



Antag at en type af radioaktive atomer har halveringstid 1 år.

## Spørgsmål 2



Sandsynligheden for, at et atom af denne type overlever 5 år, er

- 1   $\frac{1}{5}$
- 2   $e^{-5}$
- 3   $\frac{1}{32}$
- 4   $1 - \Phi\left(\frac{5-1}{1}\right)$
- 5   $1 - \Phi\left(\frac{5-1}{\sqrt{5}}\right)$
- 6  Ved ikke

Hvor  $\Phi$  som sædvanlig betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.



# Ventetid til $r$ 'te hændelse: Gammafordelingen

Ofte vil vi beskrive tiden til den  $r$ 'te hændelse.

# Ventetid til $r$ 'te hændelse: Gammafordelingen

Ofte vil vi beskrive tiden til den  $r$ 'te hændelse.

Sammenhæng mellem antal ( $N_t$ ) og tid ( $T_r$ ).

# Ventetid til $r$ 'te hændelse: Gammafordelingen

Ofte vil vi beskrive tiden til den  $r$ 'te hændelse.

Sammenhæng mellem antal ( $N_t$ ) og tid ( $T_r$ ).

$$P(N_t \leq r - 1) = P(T_r > t)$$

# Ventetid til $r$ 'te hændelse: Gammafordelingen

Ofte vil vi beskrive tiden til den  $r$ 'te hændelse.

Sammenhæng mellem antal ( $N_t$ ) og tid ( $T_r$ ).

$$P(N_t \leq r - 1) = P(T_r > t)$$

For Poisson-processen fås:

$$P(T_r > t) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

# Ventetid til $r$ 'te hændelse: Gammafordelingen

Ofte vil vi beskrive tiden til den  $r$ 'te hændelse.

Sammenhæng mellem antal ( $N_t$ ) og tid ( $T_r$ ).

$$P(N_t \leq r - 1) = P(T_r > t)$$

For Poisson-processen fås:

$$P(T_r > t) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

Fra dette kan vi udlede tætheden for Gammafordelingen

$$f(t) = -\frac{d}{dt}G(t) = \frac{d}{dt}P(T_r \leq t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda t}$$

## Opgave 4.2.6



En Geigertæller opsamler baggrundsstråling med en gennemsnitlig rate af en registrering pr. minut.

Lad  $T_3$  betegne det tidspunkt hvor den tredje partikel registreres (målt i minutter).

*Spm:* Bestem  $P(2 \leq T_3 \leq 4)$

*Svar:*  $T_3$  antages Gamma (3,1) fordelt (hvorfor?)



*Svar:*  $T_3$  antages Gamma (3,1) fordelt (hvorfor?)

Således er

$$P(T_3 > 4)$$



Svar:  $T_3$  antages Gamma (3,1) fordelt (hvorfor?)

Således er

$$P(T_3 > 4) = e^{-1 \cdot 4} \left( 1 + 4 + \frac{4^2}{2} \right) = 0,238$$

Svar:  $T_3$  antages Gamma (3,1) fordelt (hvorfor?)

Således er

$$P(T_3 > 4) = e^{-1 \cdot 4} \left( 1 + 4 + \frac{4^2}{2} \right) = 0,238$$

$$P(T_3 \geq 2) = e^{-1 \cdot 2} \left( 1 + 2 + \frac{2^2}{2} \right) = 0,677$$

Svar:  $T_3$  antages Gamma (3,1) fordelt (hvorfor?)

Således er

$$P(T_3 > 4) = e^{-1 \cdot 4} \left( 1 + 4 + \frac{4^2}{2} \right) = 0,238$$

$$P(T_3 \geq 2) = e^{-1 \cdot 2} \left( 1 + 2 + \frac{2^2}{2} \right) = 0,677$$

... og dermed

$$P(2 \leq T_3 \leq 4) = P(T_3 \geq 2) - P(T_3 > 4) = 0,439$$

# Gammafordeling med ikke-heltallig parameter

Definér Gammafunktionen (s. 291):



$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1} e^{-t} dt$$

For heltallig parameter  $r$  har vi  $\Gamma(r) = (r - 1)!$

Hvis  $X$  har tætheden

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r t^{r-1} e^{-\lambda t}$$

så er  $X$  Gammafordelt med formparameter  $r$  og skalaparameter  $\lambda$ .

Gammafordelingen bruges ofte til beskrivelse af levetider etc., der ikke kan beskrives ved eksponentialfordelingen.

En kontinuert stokastisk variabel  $T$  har overlevelsesfunktionen  
 $G(t) = P(T > t)$ .

### Spørgsmål 3

Bestem  $P(a < T \leq b)$

- 1   $\frac{G(b) - G(a)}{G(b)}$
- 2   $\frac{G(a) - G(b)}{G(a)}$
- 3   $G'(b) - G'(a)$
- 4   $G(a) - G(b)$
- 5   $G(b) - G(a)$
- 6  Ved ikke

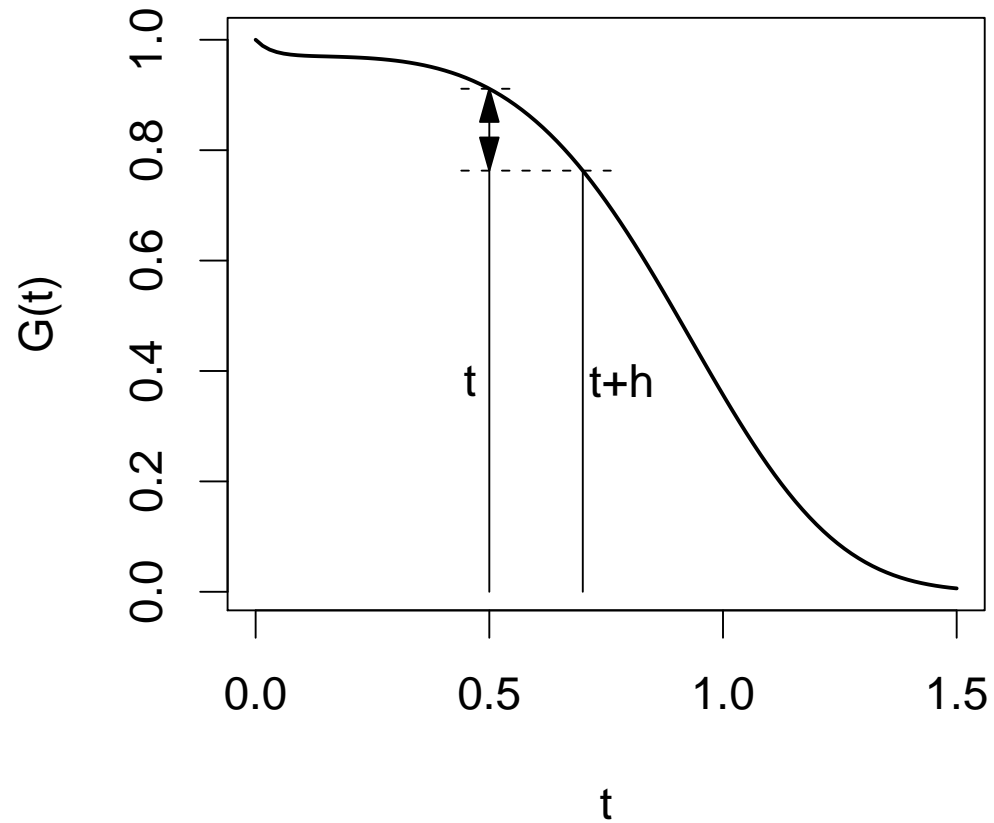
# Hazard rate side 296



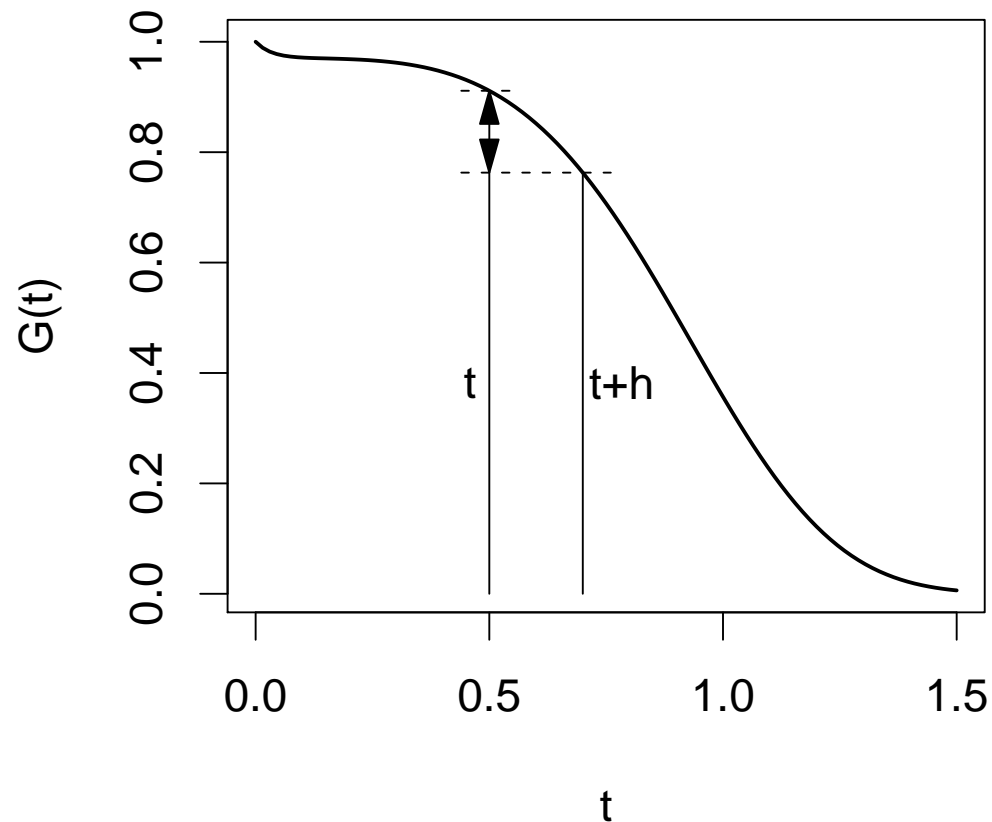
Under service af en bil overvejer man præventivt at skifte en komponent (f.eks. en tandrem). Komponenten har allerede alderen  $t$ , næste service er til tiden  $t + h$ , og komponentens levetid har overlevelsesfunktion  $G(\cdot)$ .

*Spm:* Hvad er sandsynligheden for, at komponenten svigter inden næste service?

Svar:



Svar:

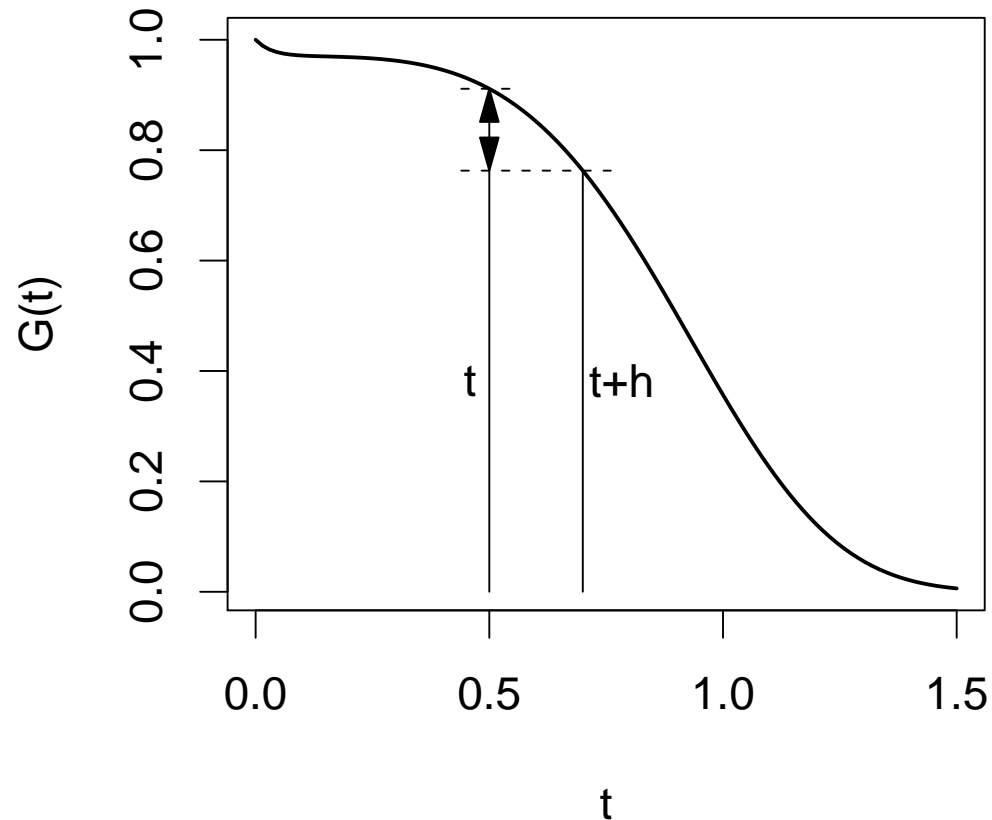


Det relevante er den **be-tingede** sandsynlighed:

$$P(T \leq t + h \mid T > t)$$



Svar:

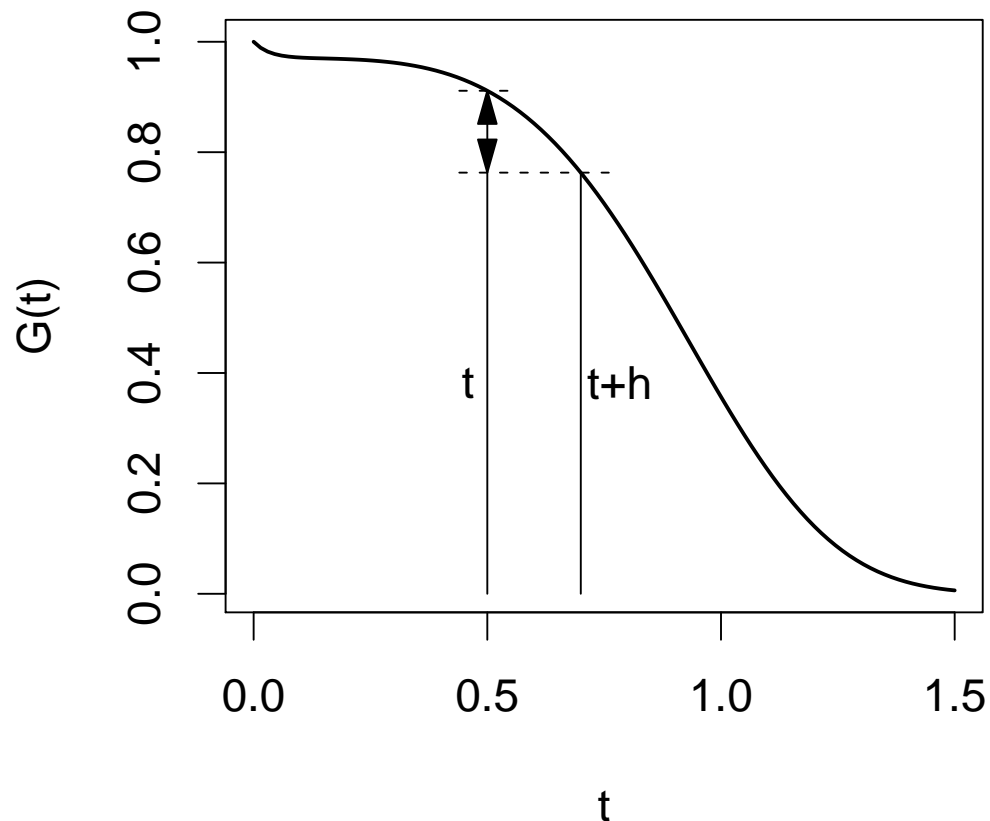


Det relevante er den **be-tingede** sandsynlighed:

$$P(T \leq t + h \mid T > t)$$

som bestemmes til

Svar:



Det relevante er den **be-tingede** sandsynlighed:

$$P(T \leq t + h \mid T > t)$$

som bestemmes til

$$\frac{G(t) - G(t + h)}{G(t)}$$

# Hazard rate

For korte tidsrum („serviceintervaller“)  $h$  har vi

$$\frac{G(t) - G(t + h)}{G(t)} = \frac{f(t)}{G(t)} \cdot h + o(h)$$

# Hazard rate

For korte tidsrum („serviceintervaller“)  $h$  har vi

$$\frac{G(t) - G(t + h)}{G(t)} = \frac{f(t)}{G(t)} \cdot h + o(h)$$

Vi definerer nu **hazard raten**  $\lambda(t)$  for sandsynligheden for at hændelsen indtræffer kort efter  $t$ , **givet** at den ikke er indtruffet før.

# Hazard rate

For korte tidsrum („serviceintervaller“)  $h$  har vi

$$\frac{G(t) - G(t + h)}{G(t)} = \frac{f(t)}{G(t)} \cdot h + o(h)$$

Vi definerer nu **hazard raten**  $\lambda(t)$  for sandsynligheden for at hændelsen indtræffer kort efter  $t$ , **givet** at den ikke er indtruffet før.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)}$$

# Hazard rate

For korte tidsrum („serviceintervaller“)  $h$  har vi

$$\frac{G(t) - G(t + h)}{G(t)} = \frac{f(t)}{G(t)} \cdot h + o(h)$$

Vi definerer nu **hazard raten**  $\lambda(t)$  for sandsynligheden for at hændelsen indtræffer kort efter  $t$ , **givet** at den ikke er indtruffet før.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)}$$

Sandsynligheden for at overleve indtil næste „service“ findes som

$$P(T > t + h \mid T > t) = \exp\left(-\int_t^{t+h} \lambda(s) ds\right)$$

# Hazard rate

For korte tidsrum („serviceintervaller“)  $h$  har vi

$$\frac{G(t) - G(t + h)}{G(t)} = \frac{f(t)}{G(t)} \cdot h + o(h)$$

Vi definerer nu **hazard raten**  $\lambda(t)$  for sandsynligheden for at hændelsen indtræffer kort efter  $t$ , **givet** at den ikke er indtruffet før.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)}$$

Sandsynligheden for at overleve indtil næste „service“ findes som

$$P(T > t + h \mid T > t) = \exp\left(-\int_t^{t+h} \lambda(s) ds\right)$$

Hazardraten bestemmer sandsynligheden for, at en hændelse indtræffer (fejl, død, ankomst) kort efter et givet tidspunkt  $t$  **givet**, at den ikke er indtruffet før.

# Hazard rate for eksponentialfordelingen



Vi har  $f(t)$



# Hazard rate for eksponentialfordelingen



Vi har  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ .

# Hazard rate for eksponentialfordelingen



Vi har  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ . Så

$$\lambda(t)$$

# Hazard rate for eksponentialfordelingen



Vi har  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ . Så

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}$$

# Hazard rate for eksponentialfordelingen



Vi har  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ . Så

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}$$

# Hazard rate for eksponentialfordelingen



Vi har  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ . Så

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

# Hazard rate for eksponentialfordelingen



Vi har  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ . Så

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

... d.v.s. eksponentialfordelingen er **hukommelsesløs**.

Eksponentialfordelingen er *den eneste* kontinuerte fordeling med denne egenskab (opgave 4.3.1)

# Overlevelsesfunktionen fra hazard rate



# Overlevelsesfunktionen fra hazard rate



$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)}$$



# Overlevelsesfunktionen fra hazard rate



$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)} = -\frac{G'(t)}{G(t)}$$

# Overlevelsesfunktionen fra hazard rate



$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)} = -\frac{G'(t)}{G(t)}$$

D.v.s.  $G(t)$  løser

$$G'(t) = -\lambda(t) \cdot G(t) \quad , \quad G(0) = 1$$

# Overlevelsesfunktionen fra hazard rate



$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)} = -\frac{G'(t)}{G(t)}$$

D.v.s.  $G(t)$  løser

$$G'(t) = -\lambda(t) \cdot G(t) \quad , \quad G(0) = 1$$

som har løsningen

$$G(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$$

# Overlevelsesfunktionen fra hazard rate



$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)} = -\frac{G'(t)}{G(t)}$$

D.v.s.  $G(t)$  løser

$$G'(t) = -\lambda(t) \cdot G(t) \quad , \quad G(0) = 1$$

som har løsningen

$$G(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$$

- Eksponentialfordelingen som eksempel:

$$G(t) = e^{-\int_0^t \lambda du}$$

# Overlevelsesfunktionen fra hazard rate



$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{G(t)} = -\frac{G'(t)}{G(t)}$$

D.v.s.  $G(t)$  løser

$$G'(t) = -\lambda(t) \cdot G(t) \quad , \quad G(0) = 1$$

som har løsningen

$$G(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$$

- Eksponentialfordelingen som eksempel:

$$G(t) = e^{-\int_0^t \lambda du} = e^{-\lambda t}$$

# Fra tæthed til overlevelsesfunktion



# Fra tæthed til overlevelsesfunktion



$$G(t) = \int_t^{\infty} f(u) du$$

# Fra tæthed til overlevelsesfunktion



$$G(t) = \int_t^{\infty} f(u) du \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = -\frac{dG}{dt}(t) \quad , \quad G(0) = 1$$



# Fra tæthed til overlevelsesfunktion

$$G(t) = \int_t^{\infty} f(u) du \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = -\frac{dG}{dt}(t) \quad , \quad G(0) = 1$$

Eksponentialfordeling ( $\lambda$ )	Gammafordeling ( $r, \lambda$ )
$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$f(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^r t^{r-1}}{(r-1)!}$
$G(t) = e^{-\lambda t}$	$G(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

# Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

# Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

Lad  $T$  være en ikke-negativ kontinuert stokastisk variabel.

# Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

Lad  $T$  være en ikke-negativ kontinuert stokastisk variabel.

$T$ 's forventningsværdi er

$$E(T)$$

# Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

Lad  $T$  være en ikke-negativ kontinuert stokastisk variabel.

$T$ 's forventningsværdi er

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt$$

# Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

Lad  $T$  være en ikke-negativ kontinuert stokastisk variabel.

$T$ 's forventningsværdi er

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} G(t) dt$$

hvor  $G$  er overlevelsesfunktionen og ligheden skyldes partiel integration.

# Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

Lad  $T$  være en ikke-negativ kontinuert stokastisk variabel.

$T$ 's forventningsværdi er

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} G(t) dt$$

hvor  $G$  er overlevelsesfunktionen og ligheden skyldes partiel integration. (Dette er den kontinuerte version af *tail sum formula*.)

# Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

Lad  $T$  være en ikke-negativ kontinuert stokastisk variabel.

$T$ 's forventningsværdi er

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} G(t) dt$$

hvor  $G$  er overlevelsesfunktionen og ligheden skyldes partiel integration. (Dette er den kontinuerte version af *tail sum formula*.)

For en eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel finder vi

$$E(T)$$



# Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

Lad  $T$  være en ikke-negativ kontinuert stokastisk variabel.

$T$ 's forventningsværdi er

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} G(t) dt$$

hvor  $G$  er overlevelsesfunktionen og ligheden skyldes partiel integration. (Dette er den kontinuerte version af *tail sum formula*.)

For en eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel finder vi

$$E(T) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) dt$$

# Forventningsværdien i en overlevelsesfordeling

Lad  $T$  være en ikke-negativ kontinuert stokastisk variabel.

$T$ 's forventningsværdi er

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} G(t) dt$$

hvor  $G$  er overlevelsesfunktionen og ligheden skyldes partiel integration. (Dette er den kontinuerte version af *tail sum formula*.)

For en eksponentialfordelt ( $\lambda$ ) variabel finder vi

$$E(T) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

## Opgave R.4.20



Et apparat har en kritisk komponent med konstant fejlrage  $\lambda$ . Apparatet har en tilsvarende komponent som backup. Når den første komponent fejler, bliver dens funktion straks overtaget af den anden, som derefter har konstant fejlrage  $\lambda$  uafhængigt af, hvornår den første komponent fejlede.

Lad  $T$  være levetiden af apparatet bestemt ved det tidspunkt erstatningskomponenten fejler.

## Opgave R.4.20



Et apparat har en kritisk komponent med konstant fejlrate  $\lambda$ . Apparatet har en tilsvarende komponent som backup. Når den første komponent fejler, bliver dens funktion straks overtaget af den anden, som derefter har konstant fejlrate  $\lambda$  uafhængigt af, hvornår den første komponent fejlede.

Lad  $T$  være levetiden af apparatet bestemt ved det tidspunkt erstatningskomponenten fejler.

*Spm:* Bestem tæthedsfunktionen for  $T$ .

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ )

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ ) er  $T$  Gamma( $2, \lambda$ ) fordelt.



Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ ) er  $T$  Gamma( $2, \lambda$ ) fordelt.

$$f(t)$$

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ ) er  $T$  Gamma( $2, \lambda$ ) fordelt.

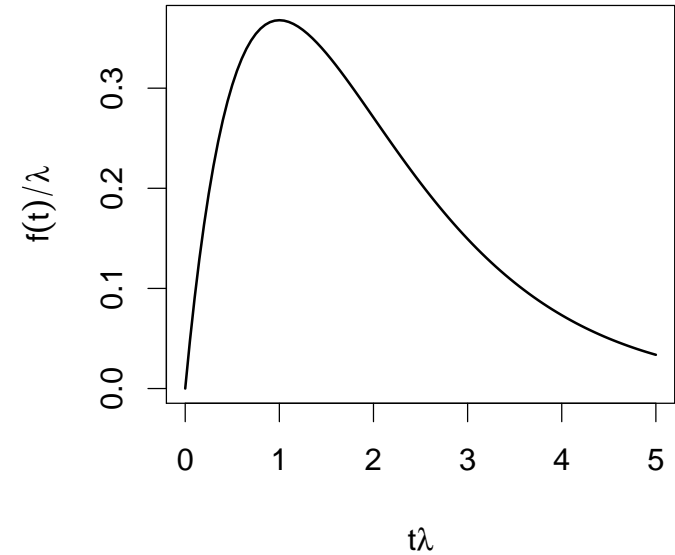
$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ ) er  $T$  Gamma( $2, \lambda$ ) fordelt.

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

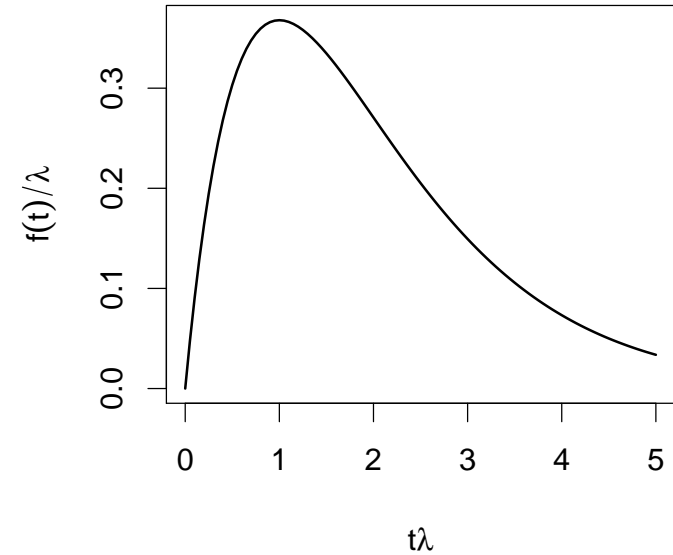


Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ ) er  $T$  Gamma( $2, \lambda$ ) fordelt.

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$



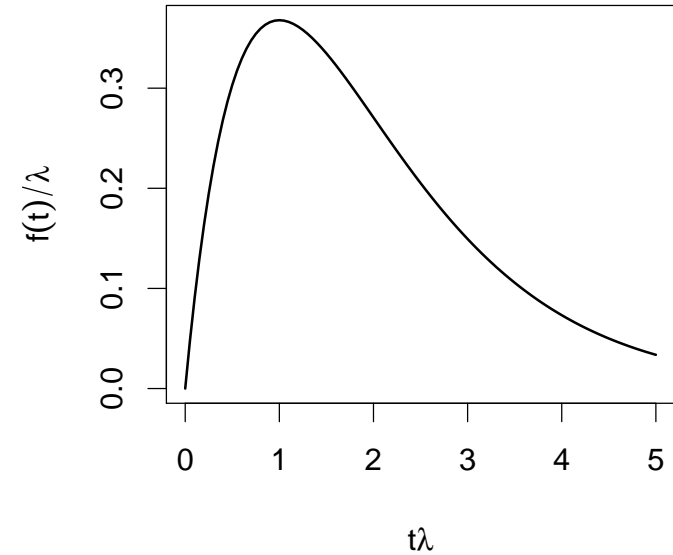
*Spm:* Bestem overlevelsesfunktionen

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ ) er  $T$  Gamma( $2, \lambda$ ) fordelt.

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$



*Spm:* Bestem overlevelsesfunktionen

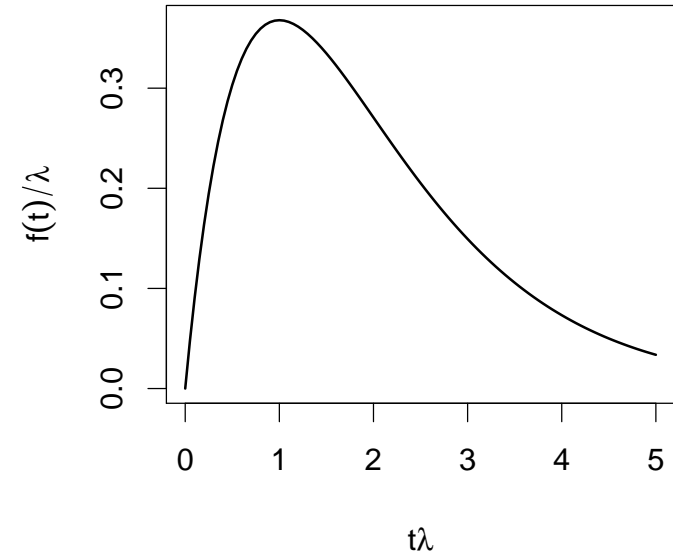
*Svar:*

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ ) er  $T$  Gamma( $2, \lambda$ ) fordelt.

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$



*Spm:* Bestem overlevelsesfunktionen

*Svar:*

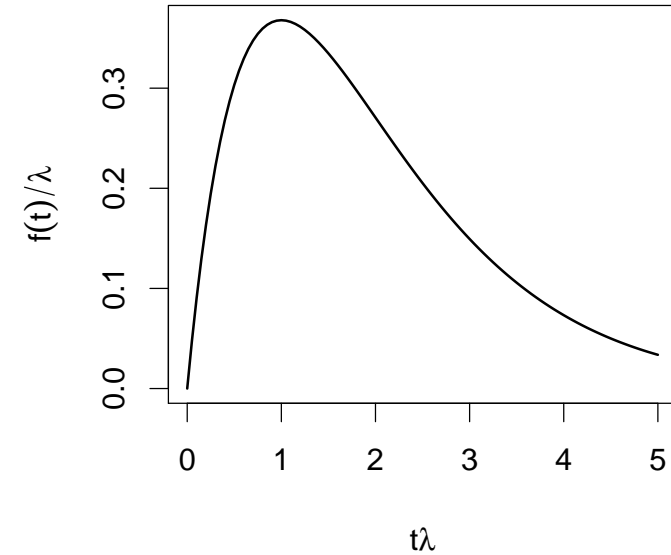
$$G(t)$$

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ ) er  $T$  Gamma( $2, \lambda$ ) fordelt.

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$



*Spm:* Bestem overlevelsesfunktionen

*Svar:*

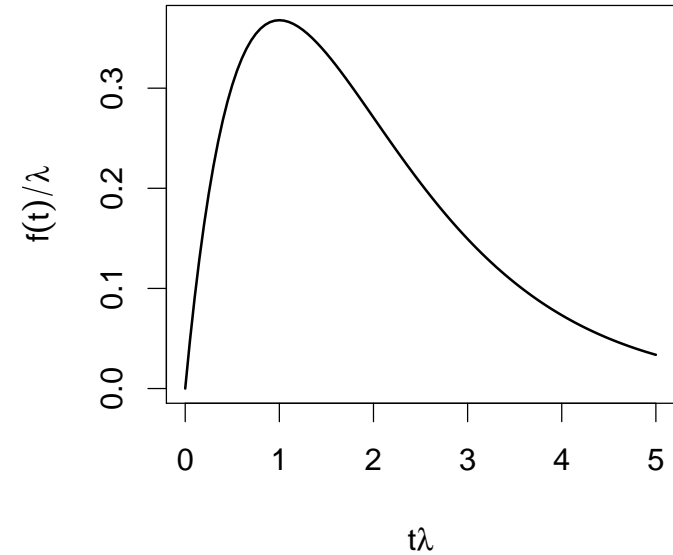
$$G(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$

Vi beskriver komponenternes levetid ved stokastiske variable  $X_i$ .

Levetiden  $T$  af apparatet er da givet ved  $T = X_1 + X_2$ .

Da  $X_i$  er uafhængige og eksponentialfordelte ( $\lambda$ ) er  $T$  Gamma( $2, \lambda$ ) fordelt.

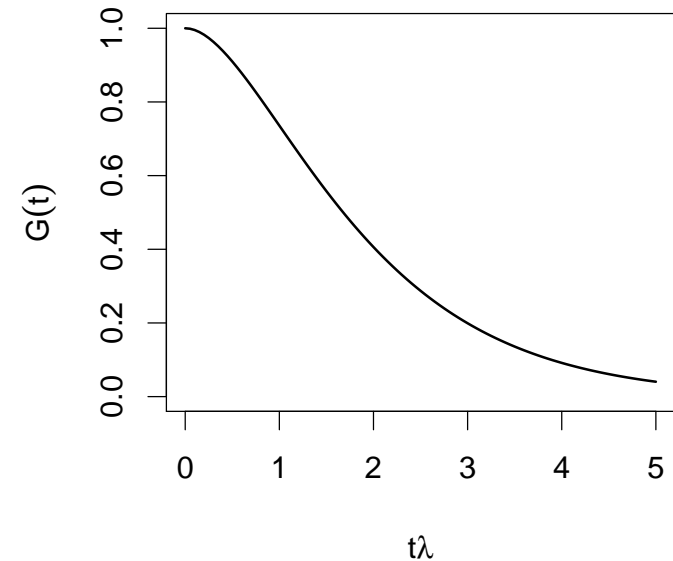
$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$



*Spm:* Bestem overlevelsesfunktionen

*Svar:*

$$G(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$





*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t)$$

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)}$$

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

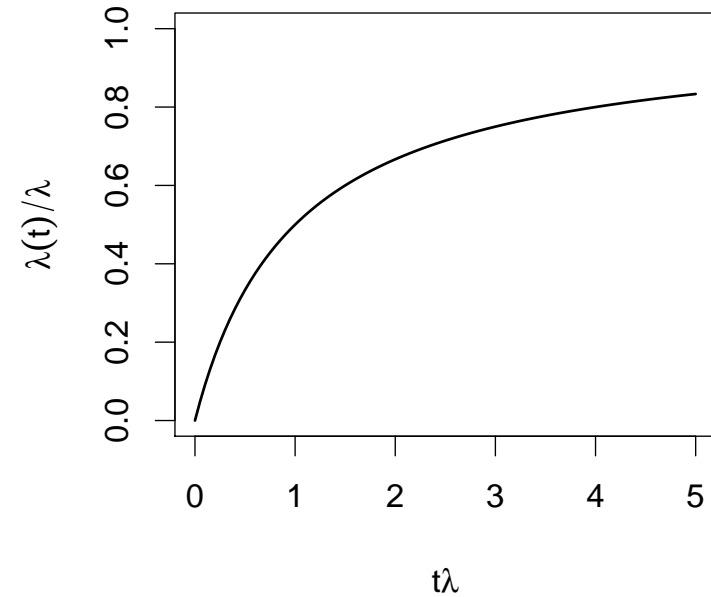
*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

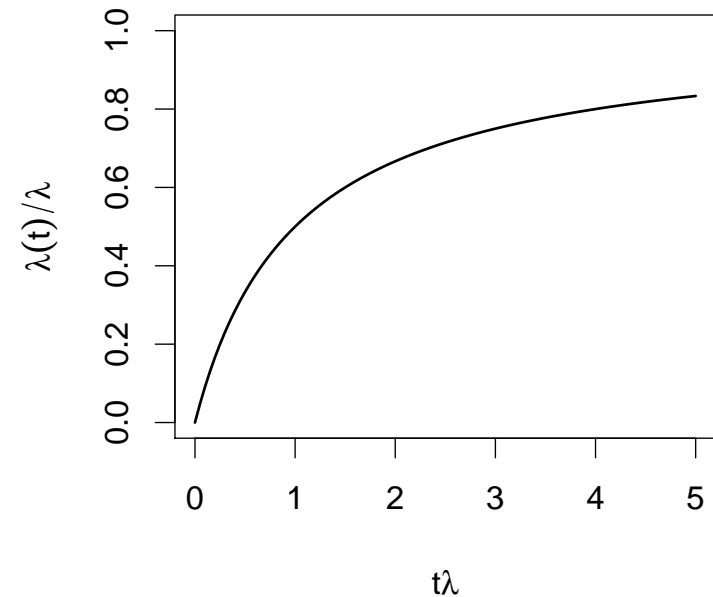
$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$



*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$

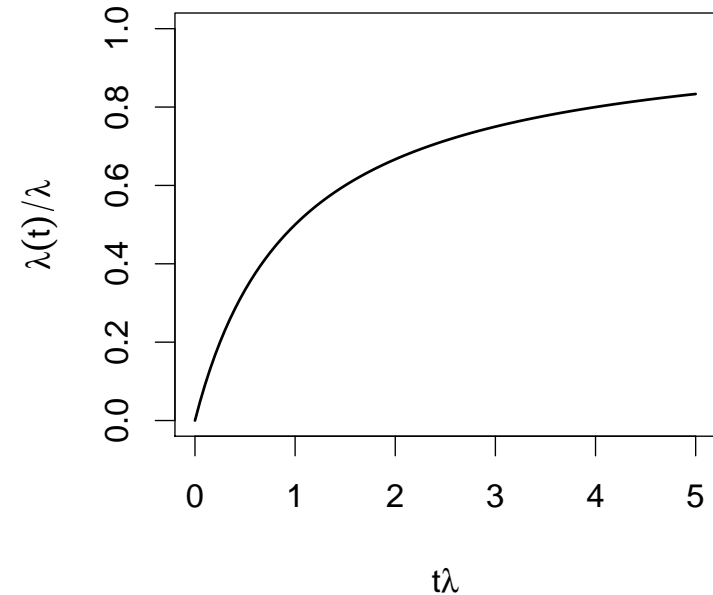


Med  $\lambda = 1$  per time, hvad er da sandsynligheden for, at et apparat, der har virket i to timer, fejler i det næste minut

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$



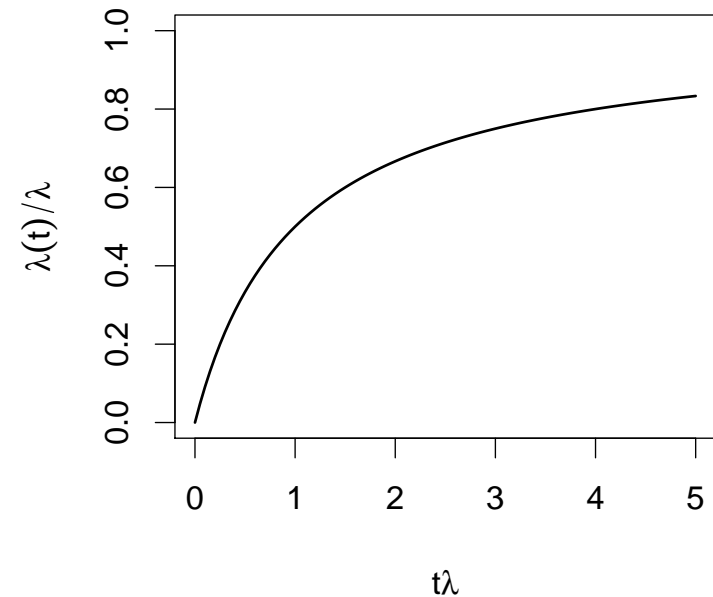
Med  $\lambda = 1$  per time, hvad er da sandsynligheden for, at et apparat, der har virket i to timer, fejler i det næste minut

$$P\left(T \leq 2 + \frac{1}{60} \text{ timer} \mid T > 2 \text{ timer}\right)$$

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$



Med  $\lambda = 1$  per time, hvad er da sandsynligheden for, at et apparat, der har virket i to timer, fejler i det næste minut

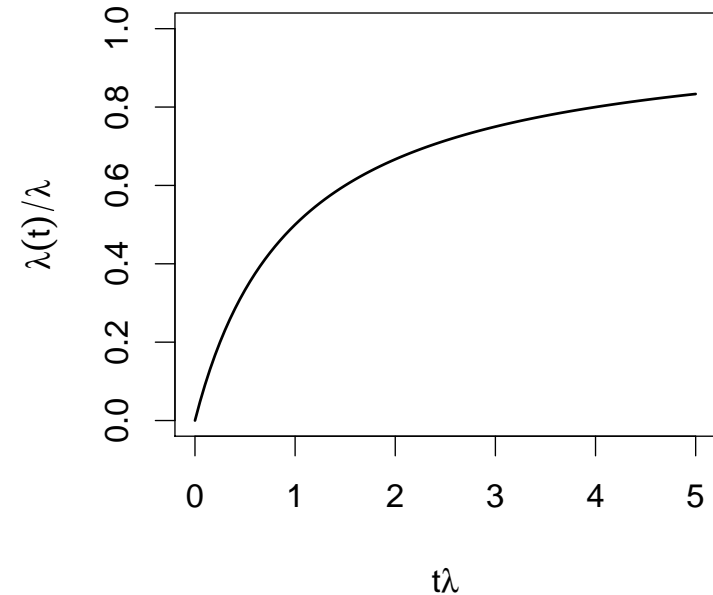
$$P\left(T \leq 2 + \frac{1}{60} \text{ timer} \mid T > 2 \text{ timer}\right) = \lambda(2)$$



*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$



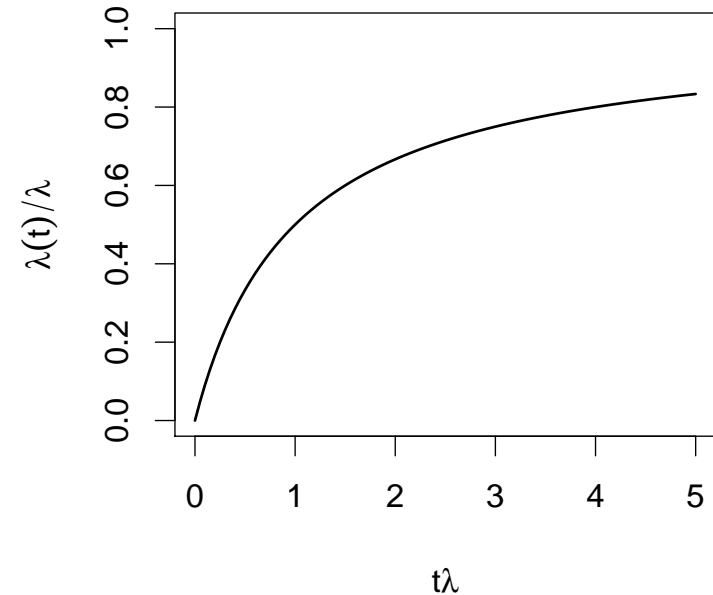
Med  $\lambda = 1$  per time, hvad er da sandsynligheden for, at et apparat, der har virket i to timer, fejler i det næste minut

$$P\left(T \leq 2 + \frac{1}{60} \text{ timer} \mid T > 2 \text{ timer}\right) = \lambda(2) \frac{1}{60}$$

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$



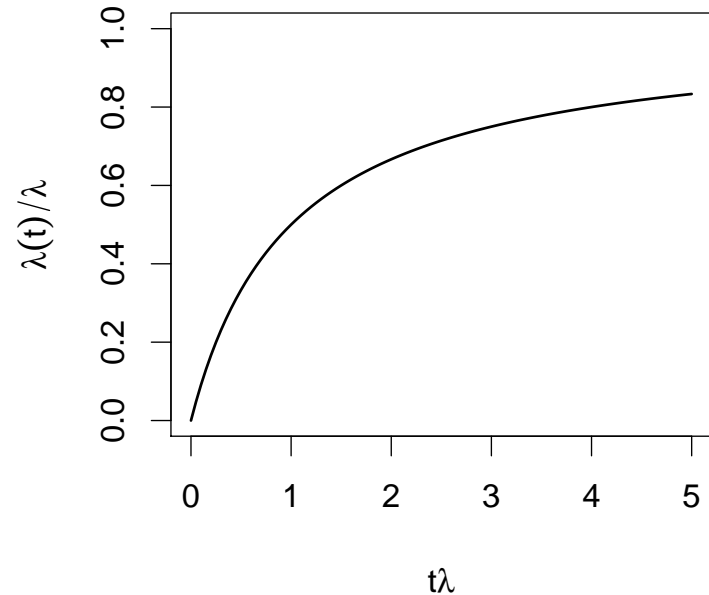
Med  $\lambda = 1$  per time, hvad er da sandsynligheden for, at et apparat, der har virket i to timer, fejler i det næste minut

$$P\left(T \leq 2 + \frac{1}{60} \text{ timer} \mid T > 2 \text{ timer}\right) = \lambda(2) \frac{1}{60} = \frac{1}{60}$$

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$



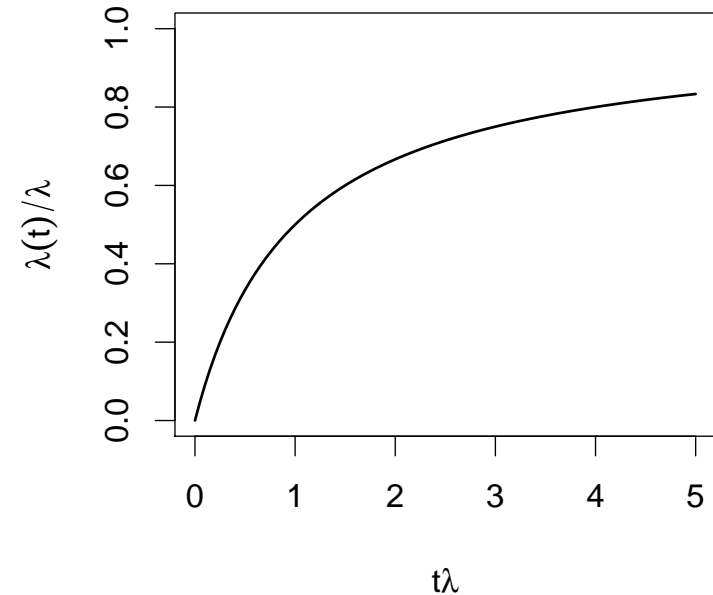
Med  $\lambda = 1$  per time, hvad er da sandsynligheden for, at et apparat, der har virket i to timer, fejler i det næste minut

$$P\left(T \leq 2 + \frac{1}{60} \text{ timer} \mid T > 2 \text{ timer}\right) = \lambda(2) \frac{1}{60} = 1 \cdot (1 \cdot 2)$$

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$



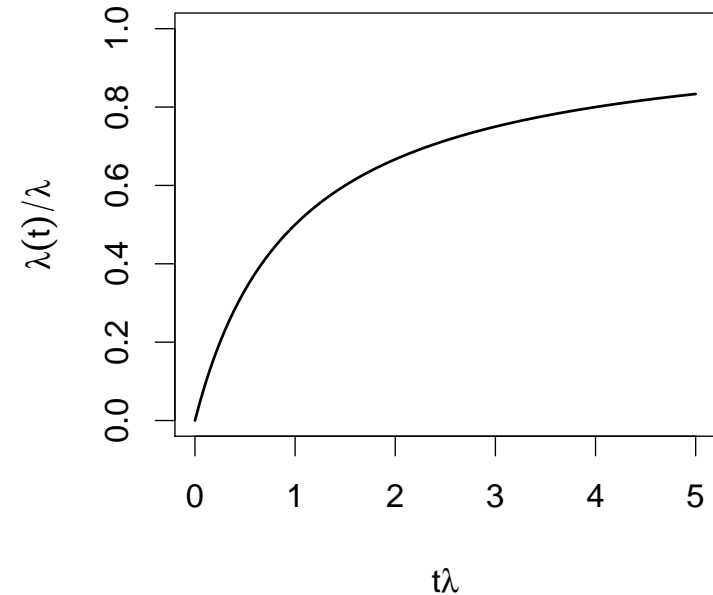
Med  $\lambda = 1$  per time, hvad er da sandsynligheden for, at et apparat, der har virket i to timer, fejler i det næste minut

$$P\left(T \leq 2 + \frac{1}{60} \text{ timer} \mid T > 2 \text{ timer}\right) = \lambda(2) \frac{1}{60} = \frac{1 \cdot (1 \cdot 2)}{1 + 1 \cdot 2}$$

*Spm:* Bestem fejlfunktionen  
(hazard-rate)

*Svar:*

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{\lambda t}}$$



Med  $\lambda = 1$  per time, hvad er da sandsynligheden for, at et apparat, der har virket i to timer, fejler i det næste minut

$$P\left(T \leq 2 + \frac{1}{60} \text{ timer} \mid T > 2 \text{ timer}\right) = \lambda(2) \frac{1}{60} = \frac{1 \cdot (1 \cdot 2)}{1 + 1 \cdot 2} \frac{1}{60} = \frac{1}{90}$$

# Variabelskift



Givet en stokastisk variabel  $X$  med tæthed  $f(x)$ ,

# Variabelskift



Givet en stokastisk variabel  $X$  med tæthed  $f(x)$ ,  
og en funktion  $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ .

# Variabelskift



Givet en stokastisk variabel  $X$  med tæthed  $f(x)$ ,

**og** en funktion  $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ .

Det definerer en ny stokastisk variabel

$$Y = g(X)$$



# Variabelskift



Givet en stokastisk variabel  $X$  med tæthed  $f(x)$ ,

**og** en funktion  $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ .

Det definerer en ny stokastisk variabel

$$Y = g(X)$$

Vi har for eksempel

$$E(Y)$$

# Variabelskift



Givet en stokastisk variabel  $X$  med tæthed  $f(x)$ ,

**og** en funktion  $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ .

Det definerer en ny stokastisk variabel

$$Y = g(X)$$

Vi har for eksempel

$$E(Y) = E(g(X))$$

# Variabelskift



Givet en stokastisk variabel  $X$  med tæthed  $f(x)$ ,

**og** en funktion  $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ .

Det definerer en ny stokastisk variabel

$$Y = g(X)$$

Vi har for eksempel

$$E(Y) = E(g(X)) = \int g(x)f(x)dx$$

# Hvad er fordelingen af $Y$ ?



# Hvad er fordelingen af $Y$ ?



Bestem for eksempel overlevelsesfunktion

# Hvad er fordelingen af $Y$ ?



Bestem for eksempel overlevelsesfunktion

$$P(Y > y)$$

# Hvad er fordelingen af $Y$ ?



Bestem for eksempel overlevelsesfunktion

$$P(Y > y) = E(I_{Y>y})$$

# Hvad er fordelingen af $Y$ ?



Bestem for eksempel overlevelsesfunktion

$$P(Y > y) = E(I_{Y>y}) = \int_{\{x:g(x)>y\}} f(x) dx$$



# Hvad er fordelingen af $Y$ ?



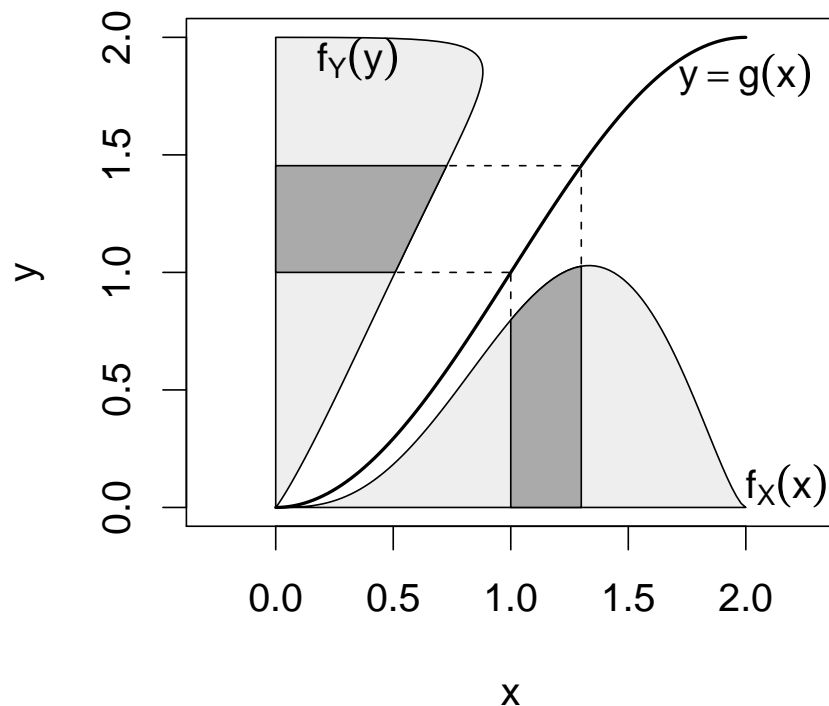
Bestem for eksempel overlevelsesfunktion

$$P(Y > y) = E(I_{Y>y}) = \int_{\{x:g(x)>y\}} f(x) dx$$

... men hvordan bestemmer vi tætheden af  $Y$  ud fra tætheden af  $X$ ?

# Variabelskift

Givet  $X$  med tæthedsfunktion  $f_X(x)$ , og relationen  $Y = g(X)$ .



Hvis  $g$  er voksende:

$$P(y_1 < Y \leq y_2) =$$

$$P(g^{-1}(y_1) < X \leq g^{-1}(y_2))$$

Dermed er fordelingen af  $Y$  fastlagt!

# Bestem tæthedsfunktionen for $Y$



# Bestem tæthedsfunktionen for $Y$



$Y = g(X)$  med  $g(x)$  voksende

# Bestem tæthedsfunktionen for $Y$



$Y = g(X)$  med  $g(x)$  voksende

Indfør  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du$

# Bestem tæthedsfunktionen for $Y$



$Y = g(X)$  med  $g(x)$  voksende

Indfør  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du$  og  $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(v)dv$ .

Tæthedsfunktionen  $f_Y(y)$  kan findes ved at differentiere:

$$f_Y(y)h$$

# Bestem tæthedsfunktionen for $Y$



$Y = g(X)$  med  $g(x)$  voksende

Indfør  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du$  og  $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(v)dv$ .

Tæthedsfunktionen  $f_Y(y)$  kan findes ved at differentiere:

$$f_Y(y)h = \mathbf{P}(y < Y \leq y + h)$$

# Bestem tæthedsfunktionen for $Y$



$Y = g(X)$  med  $g(x)$  voksende

Indfør  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du$  og  $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(v)dv$ .

Tæthedsfunktionen  $f_Y(y)$  kan findes ved at differentiere:

$$f_Y(y)h = \mathbf{P}(y < Y \leq y + h) = F_Y(y + h) - F_Y(y)$$



# Bestem tæthedsfunktionen for $Y$



$Y = g(X)$  med  $g(x)$  voksende

Indfør  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du$  og  $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(v)dv$ .

Tæthedsfunktionen  $f_Y(y)$  kan findes ved at differentiere:

$$\begin{aligned} f_Y(y)h &= \mathbf{P}(y < Y \leq y + h) = F_Y(y + h) - F_Y(y) \\ &= \mathbf{P}(g^{-1}(y) \leq g^{-1}(Y) \leq g^{-1}(y+h)) = F_X(g^{-1}(y+h)) - F_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

og dermed

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} \quad \text{hvor } x = g^{-1}(y)$$

Opgave 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.6 og 4.4.10 er af denne type

Variabelskift teknisk:  $Y \equiv g(X)$



# Variabelskift teknisk: $Y \equiv g(X)$



For en strengt monoton funktion  $y = g(x)$  kan vi bestemme  $f_Y(y)$  ud fra  $f_X(x)$  ved

# Variabelskift teknisk: $Y \equiv g(X)$



For en strengt monoton funktion  $y = g(x)$  kan vi bestemme  $f_Y(y)$  ud fra  $f_X(x)$  ved

$$f_Y(y)$$

# Variabelskift teknisk: $Y \equiv g(X)$



For en strengt monoton funktion  $y = g(x)$  kan vi bestemme  $f_Y(y)$  ud fra  $f_X(x)$  ved

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx}(x) \right|}$$


# Variabelskift teknisk: $Y \equiv g(X)$



For en strengt monoton funktion  $y = g(x)$  kan vi bestemme  $f_Y(y)$  ud fra  $f_X(x)$  ved

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx}(x) \right|}$$

hvor vi erstatter  $x$  med  $y$  ved brug af den omvendte funktion  $x = g^{-1}(y)$

Antag at  $X$  er en eksponential ( $\lambda$ ) fordelt stokastisk variabel. 

## Spørgsmål 4

Tætheden  $f(y)$  af  $Y = cX$  for  $c > 0$  er

- 1   $f(y) = \lambda e^{-\lambda(cy)}$
- 2   $f(y) = c\lambda e^{-c\lambda y}$
- 3   $f(y) = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}y}$
- 4   $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-c\lambda)^2}$
- 5   $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{c}{\lambda})^2}$
- 6  Ved ikke

# Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .



## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ ,

## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ , således at  $X = -\sqrt{Y}$ ,

## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ , således at  $X = -\sqrt{Y}$ , og  $\frac{dy}{dx}(x) = 2x$ .

## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ , således at  $X = -\sqrt{Y}$ , og  $\frac{dy}{dx}(x) = 2x$ .

$$f_Y(y)$$

## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ , således at  $X = -\sqrt{Y}$ , og  $\frac{dy}{dx}(x) = 2x$ .

$$f_Y(y) =$$

## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ , således at  $X = -\sqrt{Y}$ , og  $\frac{dy}{dx}(x) = 2x$ .

$$f_Y(y) = f_X(x)$$

## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ , således at  $X = -\sqrt{Y}$ , og  $\frac{dy}{dx}(x) = 2x$ .

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}$$



## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ , således at  $X = -\sqrt{Y}$ , og  $\frac{dy}{dx}(x) = 2x$ .

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} = \frac{1}{|2x|}$$

## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ , således at  $X = -\sqrt{Y}$ , og  $\frac{dy}{dx}(x) = 2x$ .

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} = \frac{1}{|2x|} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

## Modificeret opgave 4.4.3



Antag, at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 0[$ .

*Spm:* Find tætheden for  $X^2$ .

*Svar:* Vi indfører  $Y = X^2$ , således at  $X = -\sqrt{Y}$ , og  $\frac{dy}{dx}(x) = 2x$ .

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} = \frac{1}{|2x|} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, 0 < y < 1$$

Mange til een funktion

# Mange til een funktion

Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

# Mange til een funktion

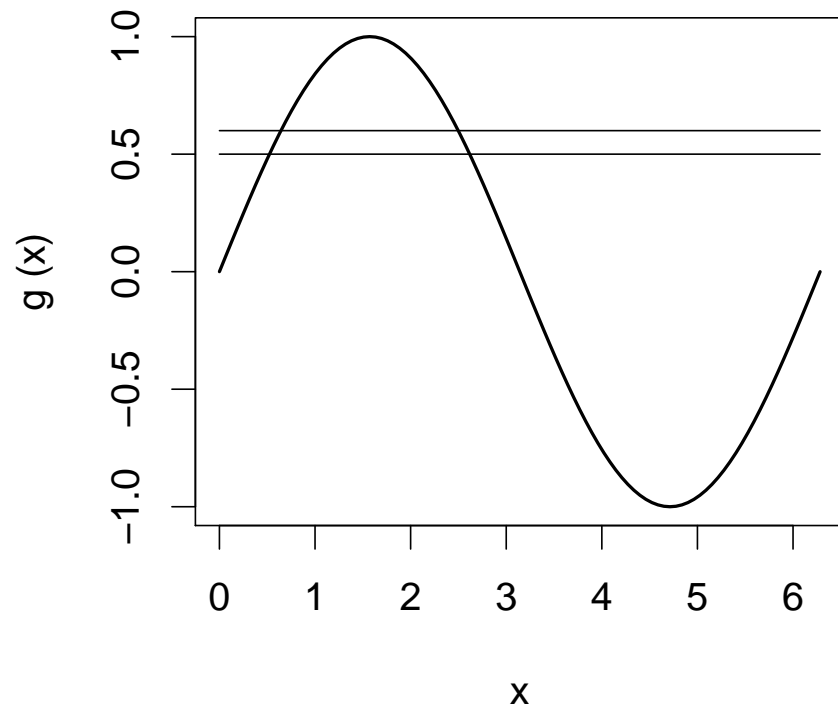
Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

*Spm:* Find tætheden for  $Y$ .

# Mange til een funktion

Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

*Spm:* Find tætheden for  $Y$ .

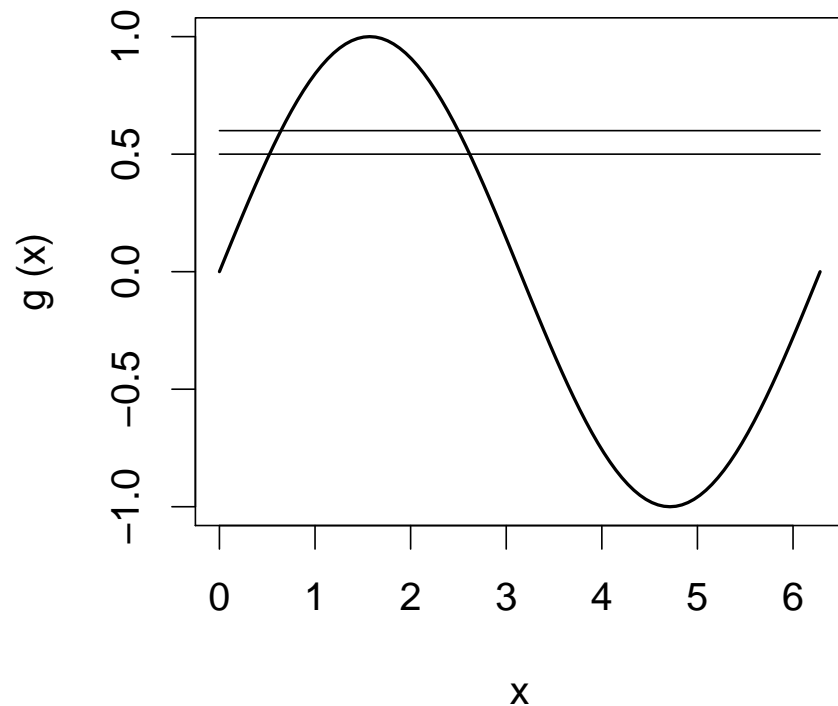


# Mange til een funktion

Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

*Spm:* Find tætheden for  $Y$ .

Tætheden af  $X$  er  $\frac{1}{2\pi}$ .

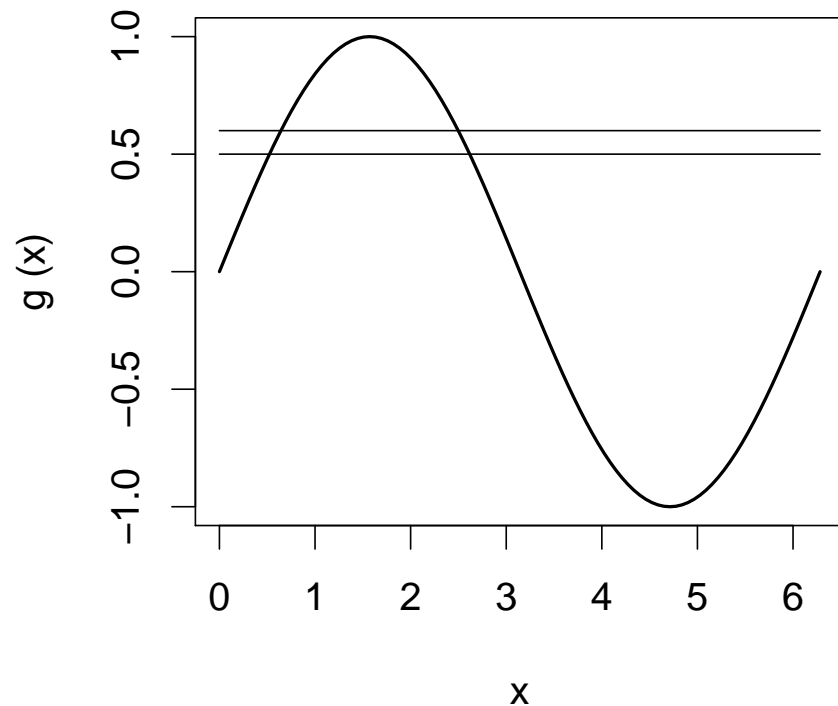




# Mange til een funktion

Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

*Spm:* Find tætheden for  $Y$ .



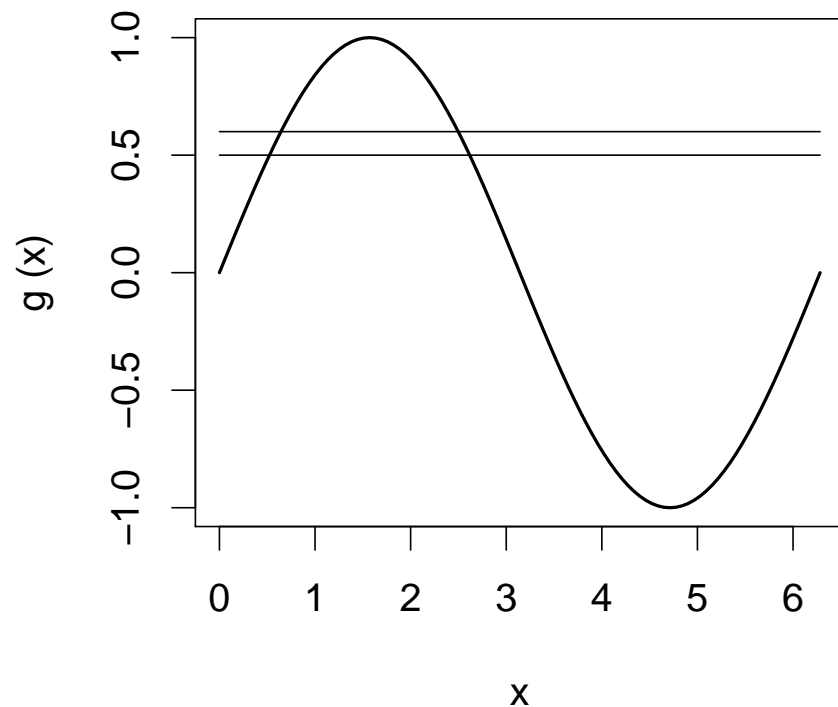
Tætheden af  $X$  er  $\frac{1}{2\pi}$ .

For hvert skæringspunkt er  
bidraget

# Mange til een funktion

Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

*Spm:* Find tætheden for  $Y$ .



Tætheden af  $X$  er  $\frac{1}{2\pi}$ .

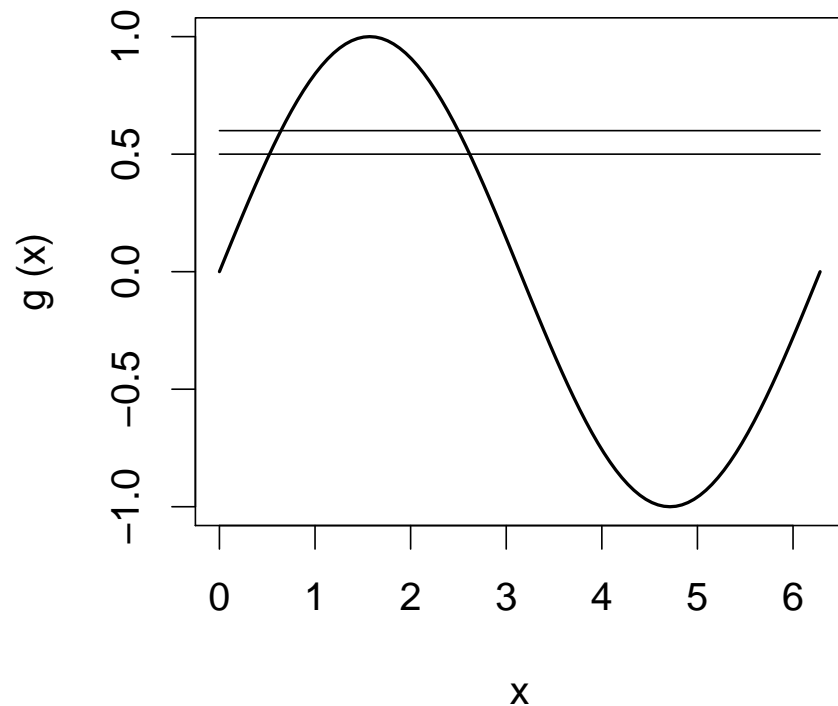
For hvert skæringspunkt er bidraget

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\cos x|}$$

# Mange til een funktion

Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

*Spm:* Find tætheden for  $Y$ .



Tætheden af  $X$  er  $\frac{1}{2\pi}$ .

For hvert skæringspunkt er bidraget

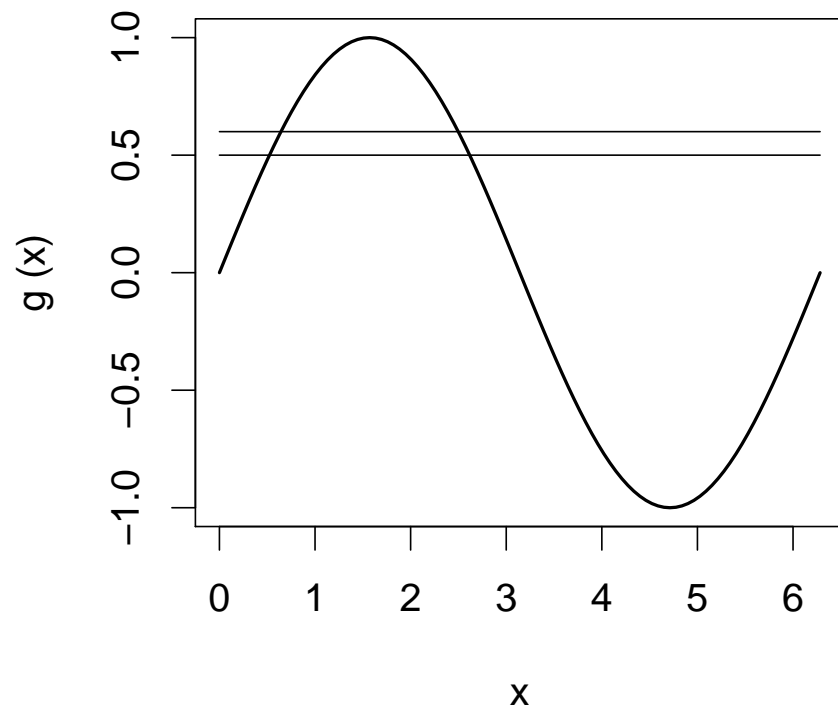
$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\cos x|}$$

med  $x = \sin^{-1} y$ .

# Mange til een funktion

Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

*Spm:* Find tætheden for  $Y$ .



Tætheden af  $X$  er  $\frac{1}{2\pi}$ .

For hvert skæringspunkt er bidraget

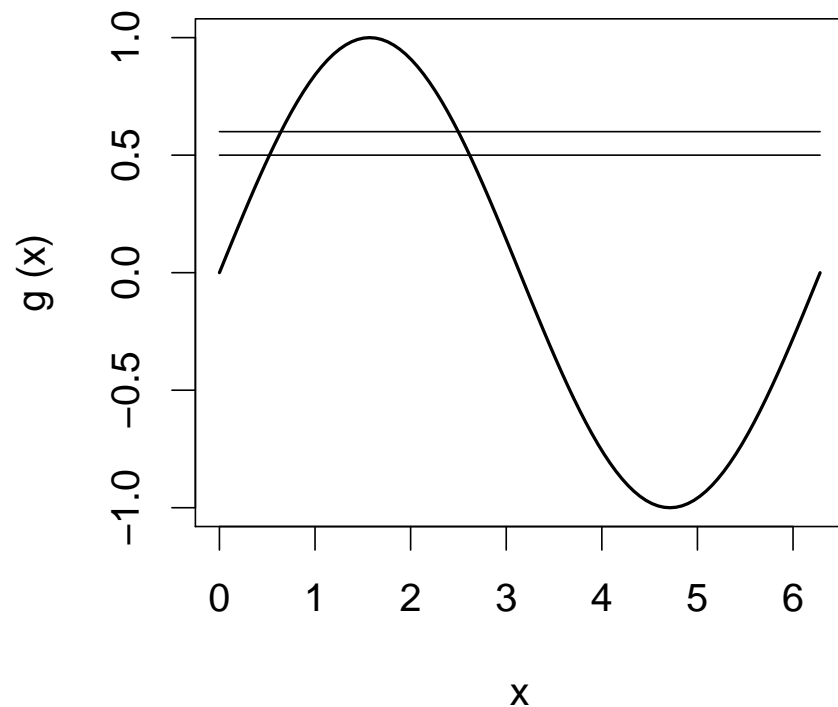
$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\cos x|}$$

med  $x = \sin^{-1} y$ . I alt fås

# Mange til een funktion

Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

*Spm:* Find tætheden for  $Y$ .



Tætheden af  $X$  er  $\frac{1}{2\pi}$ .

For hvert skæringspunkt er bidraget

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\cos x|}$$

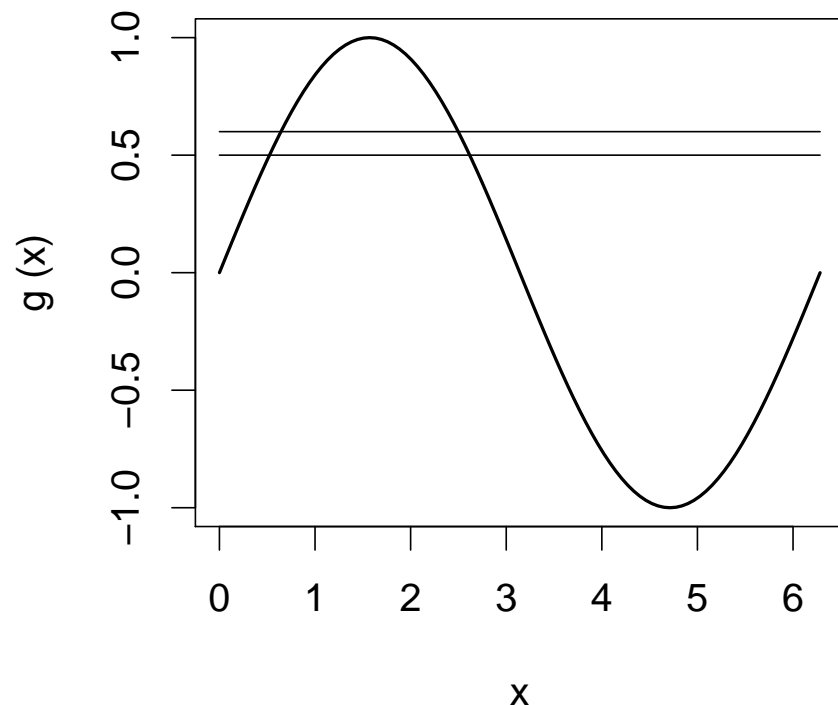
med  $x = \sin^{-1} y$ . I alt fås

$$f_Y(y)$$

# Mange til een funktion

Lad  $X$  være ligefordelt på  $[0, 2\pi]$ ; lad  $Y = \sin(X)$ .

*Spm:* Find tætheden for  $Y$ .



Tætheden af  $X$  er  $\frac{1}{2\pi}$ .

For hvert skæringspunkt er bidraget

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\cos x|}$$

med  $x = \sin^{-1} y$ . I alt fås

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - y^2}}$$

# Mange-til-een funktioner, generelt



# Mange-til-een funktioner, generelt



Hvis funktionen  $g(x)$  er strengt monoton i delintervaller gælder:



# Mange-til-een funktioner, generelt



Hvis funktionen  $g(x)$  er strengt monoton i delintervaller gælder:

$$f_Y(y)$$

# Mange-til-ene funktioner, generelt



Hvis funktionen  $g(x)$  er strengt monoton i delintervaller gælder:

$$f_Y(y) = \sum_{\{x:g(x)=y\}}$$

# Mange-til-ene funktioner, generelt



Hvis funktionen  $g(x)$  er strengt monoton i delintervaller gælder:

$$f_Y(y) = \sum_{\{x:g(x)=y\}} \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}$$

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ .

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2)$$



## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{2}$$

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{2} \text{ og } \left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right| = 2|x_i|$$

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{2} \text{ og } \left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right| = 2|x_i|$$

Dermed:

$$f_Y(y)$$

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{2} \text{ og } \left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right| = 2|x_i|$$

Dermed:

$$f_Y(y) =$$

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{2} \text{ og } \left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right| = 2|x_i|$$

Dermed:

$$f_Y(y) = 2$$

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{2} \text{ og } \left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right| = 2|x_i|$$

Dermed:

$$f_Y(y) = 2 \frac{f_X(x_i)}{\left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right|}$$

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{2} \text{ og } \left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right| = 2|x_i|$$

Dermed:

$$f_Y(y) = 2 \frac{f_X(x_i)}{\left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right|} = 2 \frac{\frac{1}{2}}{|2x|}$$

## Opgave 4.4.4



Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] - 1; 1[$ . *Spm:* Find tætheden af  $Y = X^2$ .

*Svar:* Ligningen  $x^2 = y$  har de to løsninger  $x_1 = \sqrt{y}$  og  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Både for  $x_1$  og for  $x_2$  finder vi:

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{2} \text{ og } \left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right| = 2|x_i|$$

Dermed:

$$f_Y(y) = 2 \frac{f_X(x_i)}{\left| \frac{dy}{dx}(x_i) \right|} = 2 \frac{\frac{1}{2}}{|2x|} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, 0 < y < 1$$



# Opgave 4.4.5



## Opgave 4.4.5



- Antag at  $X$  er ligefordelt på  $[-1; 2]$ . Find tætheden af  $X^2$ .

## Opgave 4.4.5



- Antag at  $X$  er ligefordelt på  $[-1; 2]$ . Find tætheden af  $X^2$ .
- For  $Y$  i intervallet  $[0; 1]$  har vi to løsninger til  $y = x^2$ , medens vi har en løsning for  $Y$  i intervallet  $]1; 2]$ . Vi får således:

$$f_Y(y)$$

## Opgave 4.4.5



- Antag at  $X$  er ligefordelt på  $[-1; 2]$ . Find tætheden af  $X^2$ .
- For  $Y$  i intervallet  $[0; 1]$  har vi to løsninger til  $y = x^2$ , medens vi har en løsning for  $Y$  i intervallet  $]1; 2]$ . Vi får således:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 1 \\ 0, & 1 < y \leq 2 \end{cases}$$

## Opgave 4.4.5



- Antag at  $X$  er ligefordelt på  $[-1; 2]$ . Find tætheden af  $X^2$ .
- For  $Y$  i intervallet  $[0; 1]$  har vi to løsninger til  $y = x^2$ , medens vi har en løsning for  $Y$  i intervallet  $]1; 2]$ . Vi får således:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 1 < y < 2 \end{cases}$$

# Afsnit 4.2, 4.3 og 4.4



- Poissonprocessen/eksponentialfordelingen  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ 
  - ◇ Rate  $\lambda$  Overlevelsesfunktion:  $G(x) = e^{-\lambda x}$
  - ◇ Gammafordelingen  $f(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}$  hvor  $\Gamma(r) = (r-1)!$  for  $r$  heltallig. For  $r$  heltallig  $P(X \leq x) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}$
- Hazard-funktionen (hazard rate)

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T \in (t, t + \Delta t) | T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{G(t)}$$

- Variabelskift,  $P(X \in [x, x + dx]) = f_X(x)dx$ ,  $Y = g(X)$

$$P(Y \in [y, y + dy]) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}$$