Sandsynlighedsregning
5. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Matematik og Computer Science

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Kgs. Lyngby – Danmark

Email: bfni@dtu.dk

Dagens emner afsnit 3.5 og 4.1

Poissonfordelingen

$$\mathsf{P}(X = x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}, \quad \mathsf{E}(X) = \mu, \quad \mathsf{Var}(X) = \mu$$

- Kontinuerte stokastiske variable
  - Tæthed (density): $f(x) \geq 0, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = 1,$
    $\mathsf{P}(X \in \mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x, \quad \mathsf{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
  - Middelværdi, varians (momenter): $\mathsf{E}(X) = \int x f(x)\mathrm{d}x$
    $\mathsf{E}(g(X)) = \int g(x)f(x)\mathrm{d}x$, $\mathsf{E}\left(X^k\right) = \int x^k f(x)\mathrm{d}x$,
- Normalfordelingen: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
  - Den centrale grænseværdisætning
- Standardisering $Z = \frac{X-\mathsf{E}(X)}{\mathsf{SD}(X)}, \quad \mathsf{E}(Z) = 0, \quad \mathsf{SD}(Z) = 1$

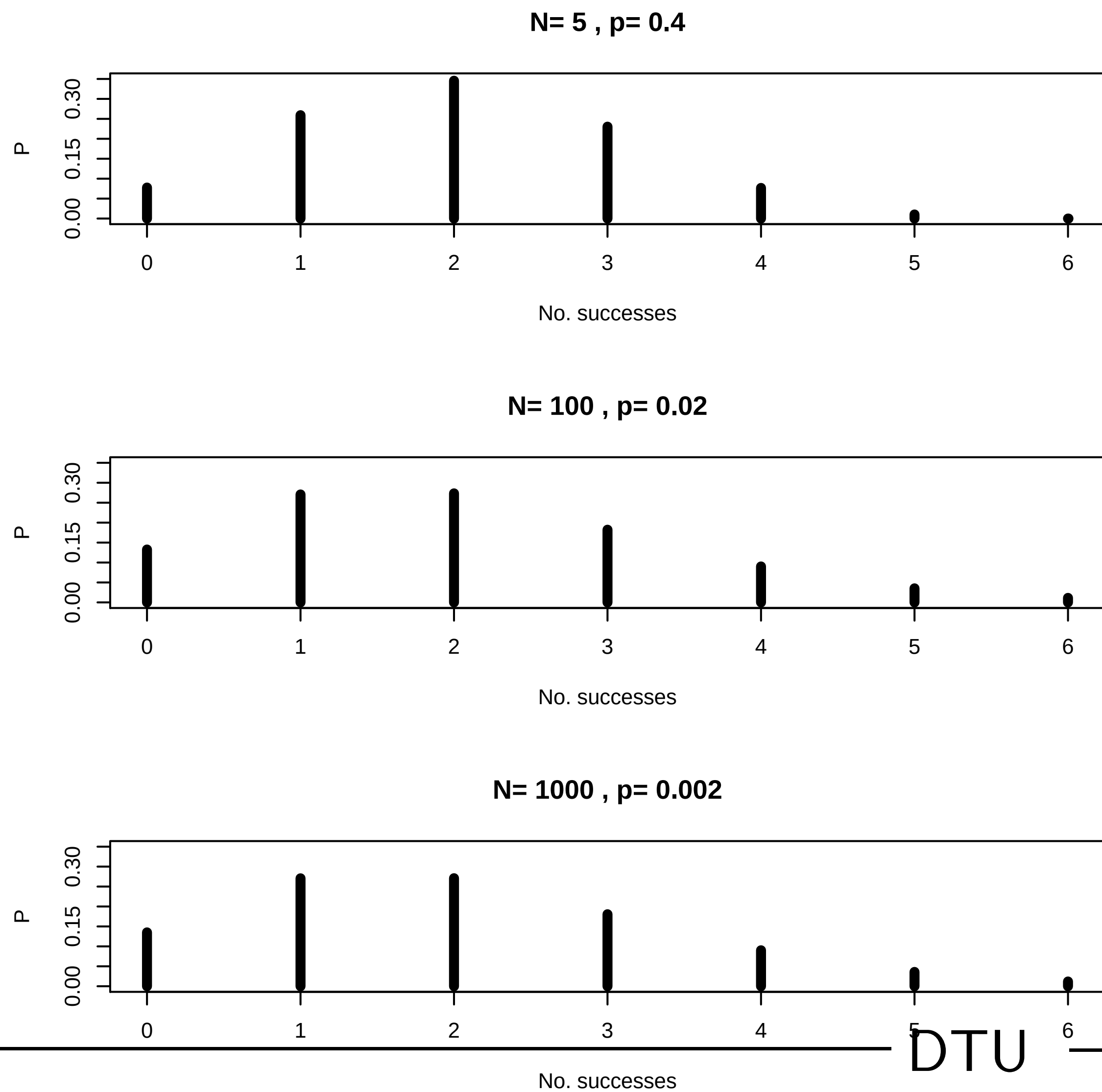
Poisson-fordelingen

En binomialfordelingen med mange forsøg, hvert med lille sandsynlighed.

n stor

p lille

np moderat.



Fra binomialfordelingen til Poissonfordelingen

$$X \sim \mathsf{Bin}(n,p), \quad \mathsf{P}(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{(np)^x}{x!} \frac{n!}{n^x (n-x)!} (1-p)^n (1-p)^{-x}$$

$$= \frac{(np)^x}{x!} (1-p)^n (1-p)^{-x} \prod_{k=0}^{x-1} \frac{n-k}{n}$$

$$= \frac{(np)^x}{x!} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n (1-p)^{-x} \prod_{k=0}^{x-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right), \quad \mu = np$$

$$= \frac{\mu^x}{x!} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-x} \prod_{k=0}^{x-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \to \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Eksempler på Poissonfordelte variable (?)

- Antal børn født i et kalenderår i Danmark med en given sjælden sygdom.
- Antal radioaktive henfald i en prøve indenfor et bestemt tidsrum.
- Antal komponenter i en batch der er defekte.

Sandsynlighedsfordelingen for $X \sim \mathrm{Pois}(\mu)$

$$\mathsf{P}(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

kan findes som grænsen af $\mathrm{Bin}(n, \mu/n)$ for $n \to \infty$

Momenter i Poisson-fordelingen

Vi får middelværdi:

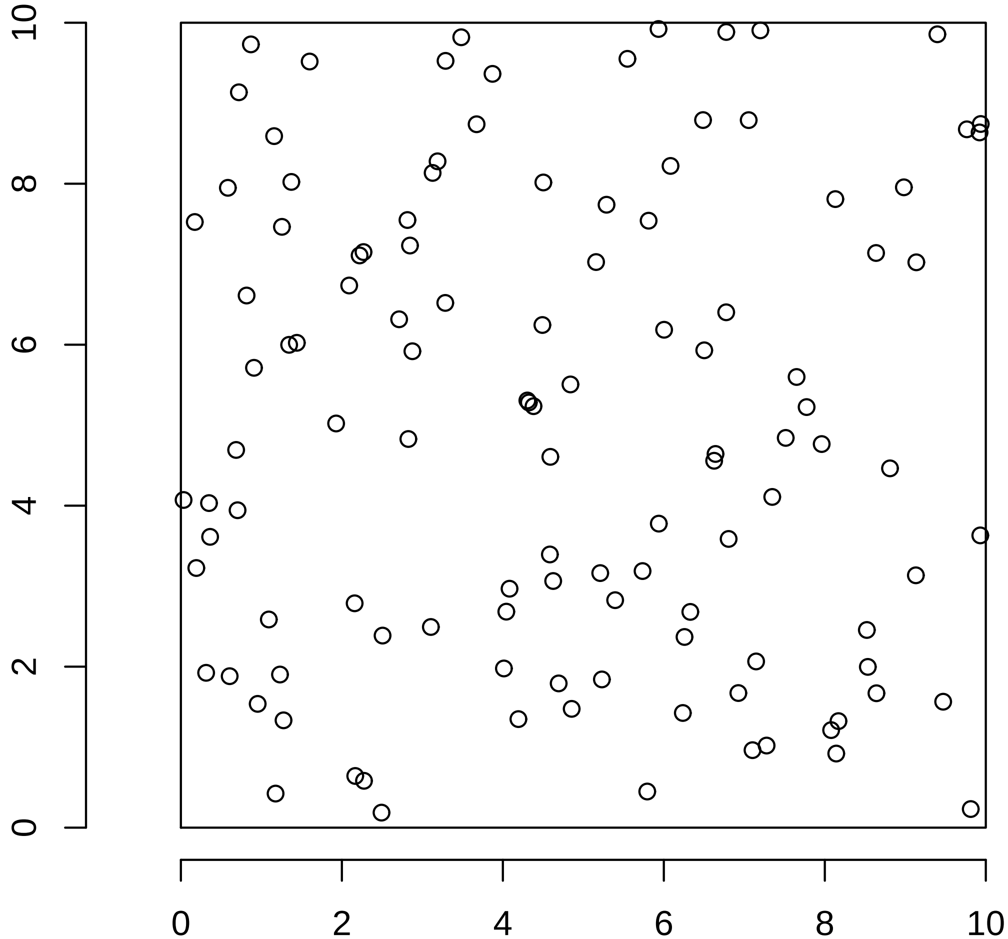
$$\mathsf{E}(X) = \mu \qquad \text{og varians:}$$

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 = \mathsf{E}(X^2) - \mu^2 = \mu$$

Eller

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}(X(X-1)) + \mathsf{E}(X) - \mu^2 = \mu$$

Poisson punktprocessen (scatter)



Antagelser (p. 229)

Antagelse 1: Ikke multiple forekomster, hvert punkt eller forekomst har særskilt placering

Antagelse 2: Tilfældighed. Alle disjunkte delområder med samme areal bliver "ramt" med samme sandsynlighed og uafhænigt af hinanden.

"Poisson Scatter Theorem" (p. 230):

Punktprocessen har en intensitet (tæthed) λ så:

Antallet af forekomster i et område B er $\sim \mathrm{Pois}(\lambda|B|)$

Antallet af forekomster i disjunkte områder er uafhængige.

Overlejring

Hvis to Poisson-punktprocesser overlejres, er resultatet en ny Poisson punktprocess. Intensiteten i den nye process er summen af intensiteterne i de to komponenter.

Udtynding

Hvis hvert punkt fjernes fra en Poisson-punktproces med sandsynlighed $1 - p$ (bibeholdes med sandsynlighed p), er resultatet en ny Poisson-punktproces med intensitet $p \cdot \lambda$.

Middelværdi for Poissonfordeling

$$\mathsf{E}(X) = \sum_x x f(x) = \sum_x x \mathsf{P}(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

- Lidt manipulation med summen giver

$$\sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^x}{(x-1)!} e^{-\mu} = \mu e^{-\mu} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \mu \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\mu^y}{y!} e^{-\mu} = \mu \cdot 1 = \mu$$

Samme fremgangsmåde for $\mathsf{E}(X(X-1))$ giver os $\mathsf{Var}(X) = \mu$

Ligefordelingen (uniform) side 264-265

- Vi ankommer til et busstoppested et øde sted. Vi ved, at der er en time mellem busserne, men kender ikke køreplanen og ved ikke, hvad klokken er.
- Vi vil gerne vide, hvad risikoen er for, at vi skal vente mindst tre kvarter.
- Hvordan kunne vi gribe det an?

Beregning i ligefordelingen

Spm: For $a < x < y < b$ find $\mathsf{P}(x < X < y)$

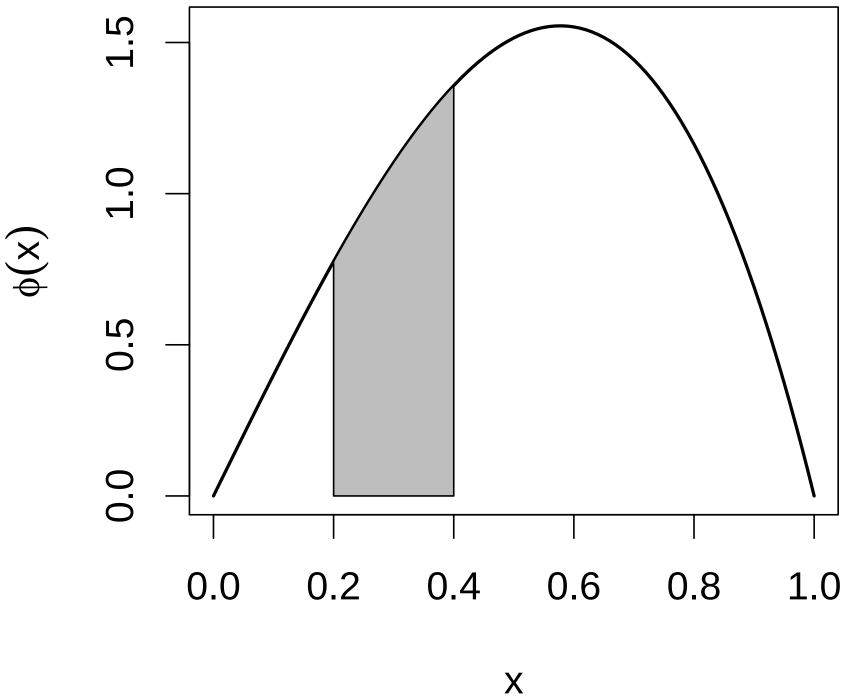
Svar:

$$\mathsf{P}(x < X < y) = \frac{y - x}{b - a} = c(y - x) = \int_x^y f(u)\mathsf{d}u$$

Sandsynligheden er altså den del af intervallet fra a til b, der udgøres af intervallet fra x til y.

Vi kan udtrykke dette som integralet af en normeringskonstant over et delinterval.

Tætheden $f(x)$ af en kontinuert S.V.



Sandsynligheder findes som arealet under kurven (s. 260)

$$\mathsf{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathsf{d}x$$

NB! Sammenfatning s. 262-263

En funktion $f(t)$ er en tæthed hvis

1. $f(t) \geq 0$ for alle t
2. f er *normeret*, d.v.s.

$$\mathsf{P}(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathsf{d}t = 1$$

Ligefordelingen

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{hvis } a < x < b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad = c 1_{]a,b[}(x)$$

hvor $\mathbf{1_A}(\mathbf{x})$ er en indikatorfunktion, med værdien 1, når $x \in A$ (vi undertrykte argumentet ω for en stokastisk indikatorfunktion).

Hvad er så c?

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0 + (b-a)\cdot c + 0 \\ c &= \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

Antag at X er en stokastisk variabel med tæthed

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{hvis } a < x < b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} .$$

Spørgsmål 1

Lad $U = (X - a)/(b - a)$. Værdimængden for U er

1 ☐ $(0; 1)$

2 ☐ $(0; b/(b - a))$

3 ☐ $(-\infty; \infty)$

4 ☐ $(a/(b - a); b/(b - a))$

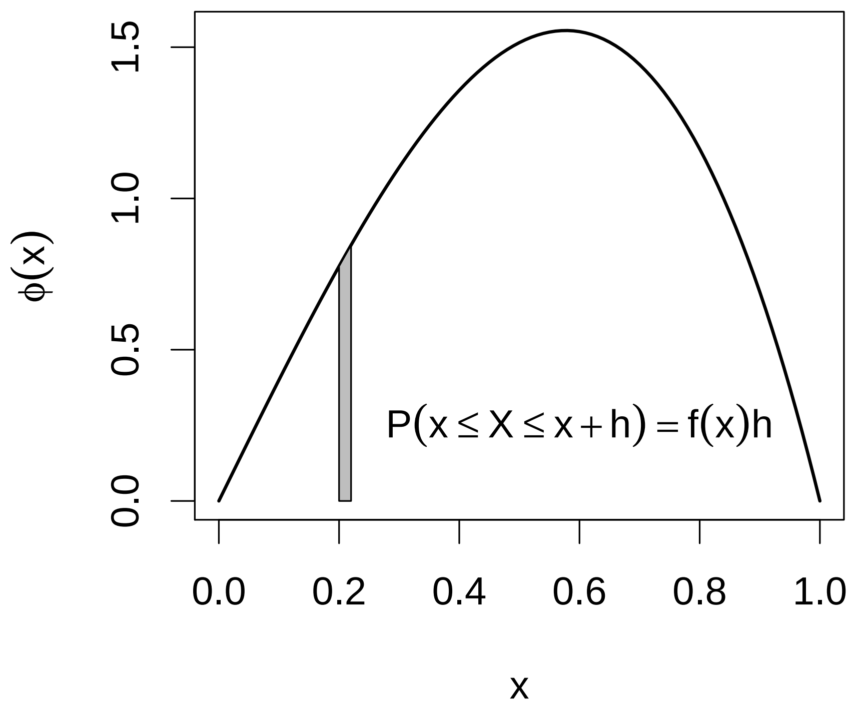
5 ☐ Oplysningerne i teksten er ikke tilstrækkelige

6 ☐ Ved ikke

Tætheder fortolket som sandsynligheder

For en kontinuert stokastisk variabel er alle punktsandsynligheder 0.

Sandsynligheden for at observere en observation i en omegn h af x findes som $hf(x)$.



Middelværdi og varians (side 261)

Generelt erstattes beregninger af summer (for diskrete variable) med integraler (for kontinuerte variable)

Eksempelvis

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathsf{d}x \qquad \mathsf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\mathsf{d}x$$

Vi har stadig den meget vigtige beregningsformel

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - (\mathsf{E}(X))^2$$

Transformation for ligefordelingen

$$U = \frac{X-a}{b-a} \Leftrightarrow X = a + (b-a)U$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathsf{d}x = \int_a^b x f(x) \mathsf{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{b-a}\right]_a^b = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Alternativt

$$\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(a + (b-a)U) = \mathsf{E}(a) + (b-a)\mathsf{E}(U) = a + (b-a)\frac{1}{2}$$

Variansberegning

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{Var}(a + (b-a)U) = (b-a)^2\mathsf{Var}(U)$$

$$\mathsf{Var}(X) = (b-a)^2\left(\mathsf{E}\left(U^2\right) - \left(\mathsf{E}(U)\right)^2\right)$$

$$\mathsf{E}\left(U^2\right) = \int_0^1 u^2 \mathsf{d}u = \frac{1}{3}$$

$$\mathsf{Var}(X) = (b-a)^2\left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Antag at X er en stokastisk variabel med tæthed $f(x) = cx(1+x)$ for $-1 < x < 0$, og 0 ellers.

Spørgsmål 2

Værdien af c er

1 ☐ -6

2 ☐ 1

3 ☐ 2

4 ☐ 6

5 ☐ $f(x)$ kan ikke være en tæthed

6 ☐ Ved ikke

Opgave 4.1.3 (modificeret)

Lad X være en stokastisk variabel med tæthed $f(x) = cx(1+x)$ for $-1 < x < 0$, og 0 ellers.

Spm: Find værdien af c.

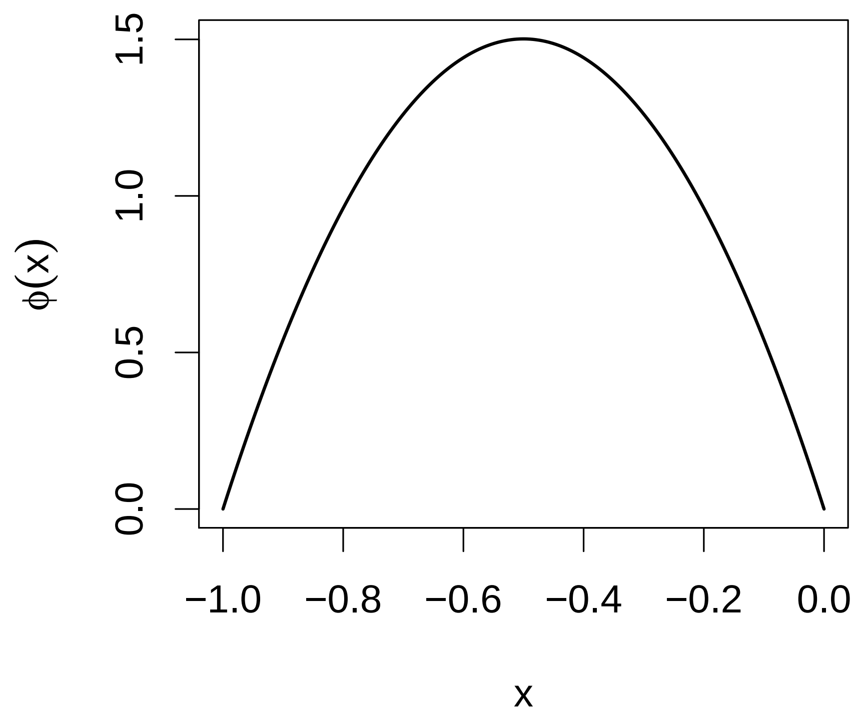
Svar: Vi kræver

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

... og finder

$$\int_{-1}^{0} cx(1+x)\, dx = -\frac{c}{6}$$

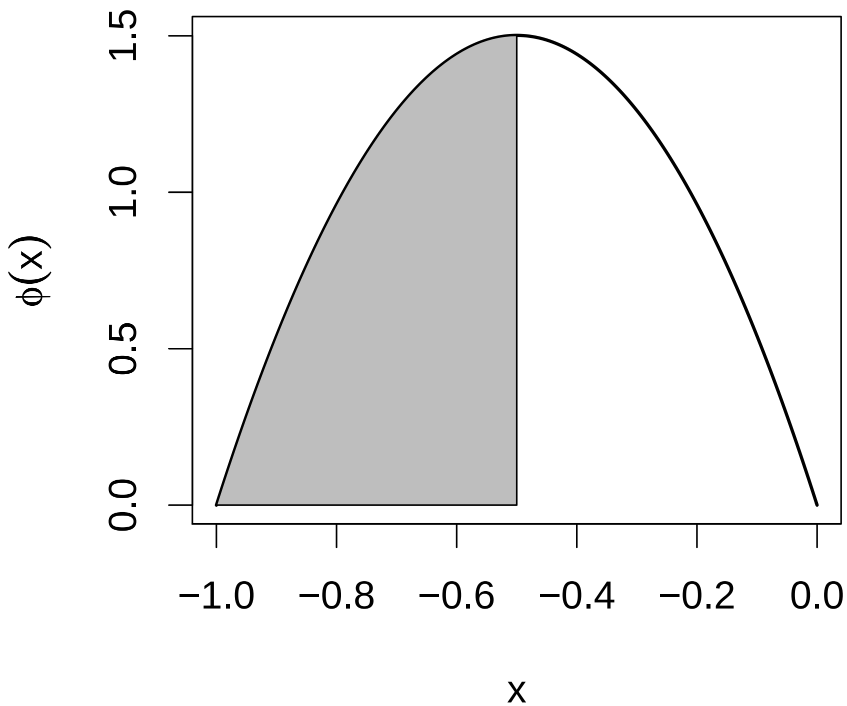
altså $c = -6$.



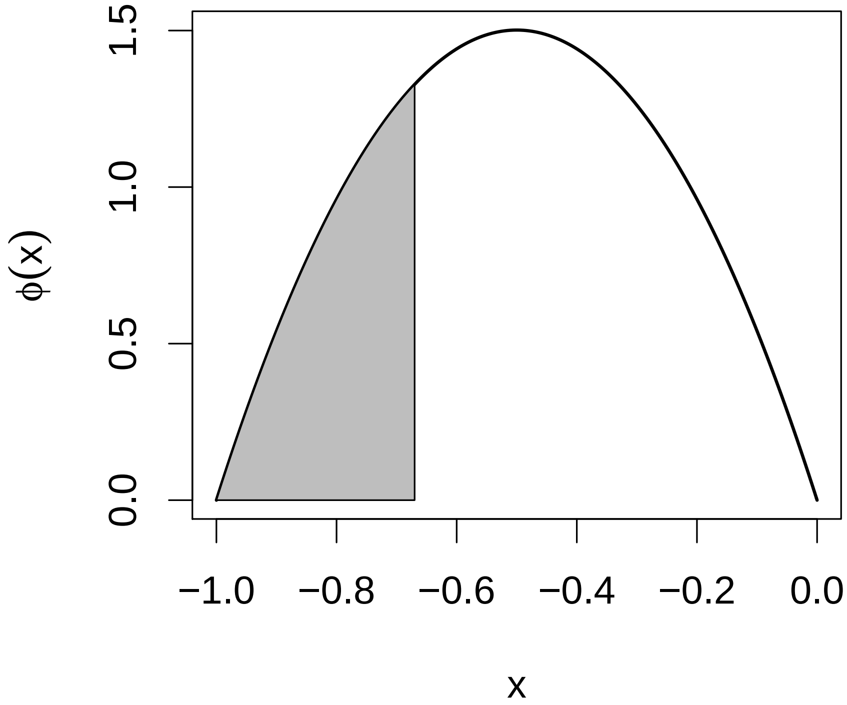
Spm: Bestem værdien af $P\left(X \le -\frac{1}{2}\right)$

Svar: Da fordelingen er symmetrisk om $-\frac{1}{2}$ får vi

$$P\left(X \le -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



Spm: Bestem værdien af $P\left(X \leq -\frac{2}{3}\right)$



Svar:

Vi benytter sammenhængen mellem tæthed og sandsynlighed side 260 eller side 263

$$P\left(X \leq -\frac{2}{3}\right) = \int_{-1}^{-\frac{2}{3}} cx(1+x)\mathsf{d}x = c\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_{x=-1}^{x=-\frac{2}{3}}$$

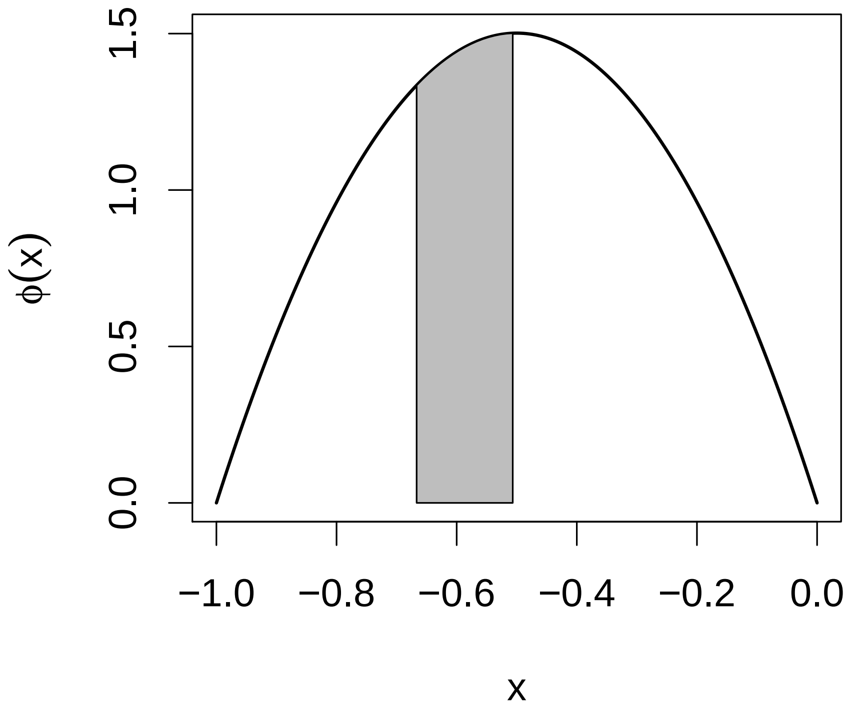
Med $c = -6$ får vi

$$P\left(X \leq -\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{27}$$

Spm: Hvad er $P\left(-\frac{2}{3} \leq X \leq -\frac{1}{2}\right)$

Svar:

$$P\left(-\frac{2}{3} \leq X \leq -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{27} = \frac{13}{54}$$



Spm: Hvad er middelværdi og varians af X?

Svar: Middelværdien er $-\frac{1}{2}$ ud fra symmetrien.

Vi finder $\mathsf{E}(X^2)$

$$\mathsf{E}(X^2) = -6\int_{-1}^{0} x^2 \cdot x(1+x)\mathsf{d}x = \frac{6}{20}$$

...og dermed

$$\mathsf{Var}(X) = \frac{6}{20} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

En række generiske modeller

- Forskellige ingeniørtekniske problemstillinger:
  - ◇ Hvor mange ulykker sker der i et vejkryds
  - ◇ Tidsafstanden mellem to pakker i et kommunikationsnetværk
  - ◇ Vægt/mængde angivelse af et kemisk produkt
  - ◇ Antal positive respondenter i en markedsanalyse
- og varianter heraf

Den centrale grænseværdisætning side 268, (196)

- I naturen/teknikken observeres ofte en ”klokkeformet” fordeling
- Dette understøttes teoretisk netop af CGS
- En sum af mange bidrag er (tilnærmelsesvist) normal fordelt når intet enkeltbidrag “dominerer” summen
- Formen (formlen!) for normalfordelingen fremkommer netop gennem udledningen - beviset - for CGS

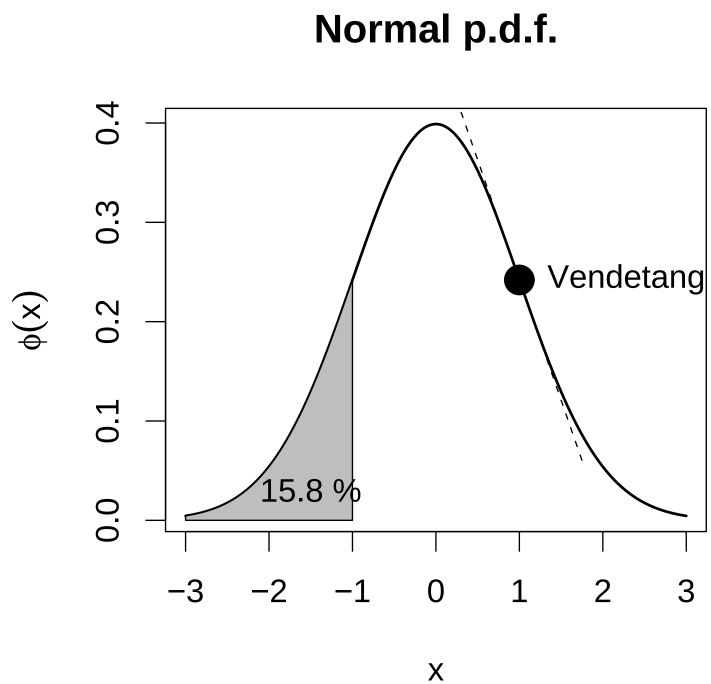
Normalfordeling - udtryk og egenskaber side 266-267, 477, 484-485

Hvis $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, så:

X har tætheden

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Middelværdi	$\mathsf{E}(X)$	$=$	μ
Varians	$\mathsf{Var}(X)$	$=$	σ^2
Spredning	$SD(X)$	$=$	σ



For $\mu = 0$ og $\sigma^2 = 1$ bruger vi $f(x) = \phi(x)$

Den standardiserede normalfordeling

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \ \ : \ \ \mathsf{P}(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathsf{d}x$$

De normalfordelte variable bevares under affine transformationer:

$$c_1 X + c_2 \sim N(c_1\mu + c_2, c_1^2\sigma^2)$$

Vi kan *standardisere* X:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\mathsf{P}(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathsf{d}t = \Phi(z)$$

Vi betragter en stokastisk variabel X, der er standard normal fordelt.

Spørgsmål 3

Sandsynligheden P$(0 < X < 0,001)$ findes (eventuelt approksimativt) til

1 □ 0,001

2 □ $\Phi(0,01) - \frac{1}{2}$

3 □ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}0{,}001^2}$

4 □ $\Phi(0)$

5 □ $\frac{0{,}001}{\sqrt{2\pi}}$

6 □ Ved ikke

Hvor Φ som sædvanlig betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Opgave 4.1.8

Vægtmålinger af en metalklump formodes at være uafhængige og identisk fordelte (I.I.D.), med middelværdien af 12 gram og standardafvigelse 1,1 gram.

Spørgsmål:

Hvad er sandsynligheden for at en enkelt måling er mellem 11,8 og 12,2 gram under antagelse af, at de enkelte målinger kan beskrives ved en normalfordeling?

Svar:

Lad W betegne vægten på en måling. $W \in normal\,(12, 1.1^2)$

Spørgsmålet kan nu formuleres: Bestem $\mathsf{P}(11,8 < W < 12,2)$.

Transformér til standardiseret normalfordeling:

$$\mathsf{P}(11,8 < W < 12,2) = \mathsf{P}\left(11,8 - 12 < W - 12 < 12,2 - 12\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\frac{11,8-12}{1,1} < \frac{W-12}{1.1} < \frac{12,2-12}{1,1}\right)$$

$$= \Phi(0,1818) - \Phi(-0,1818) = 2 \cdot 0,0714 = 0,1428$$

Spørgsmål:

Beregn sandsynligheden for at gennemsnittet af 100 målinger ligger i intervallet [11,8 gram;12,2 gram]

(er normalfordelingsantagelsen nødvendig her?)

Svar:

Lad W_i betegne resultatet af den i'te måling.

Lad $\bar{W}$ være gennemsnittet $\bar{W} = \frac{\sum_{i=1}^{100} W_i}{100}$

Spørgsmålet er altså:

$$\mathsf{P}(11,8 < \bar{W} < 12,2)$$

Ifølge C.G.S. (s. 196) er $\bar{W}$ approksimativt normalfordelt

Sum $S = \sum_{i=1}^{n} W_i$:	Gennemsnit $\bar{W} = S/n$:
$S \sim N(n\mu, n\sigma^2)$	$\bar{W} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$

Standardisér: Indfør

$$Z = \frac{\bar{W} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{\bar{W} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Omformulér spørgsmålet til at gælde Z:

$$\mathsf{P}\left(a < \bar{W} < b\right) = \mathsf{P}\left(\sqrt{n}\frac{a-\mu}{\sigma} < \sqrt{n}\frac{\bar{W}-\mu}{\sigma} < \sqrt{n}\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\sqrt{n}\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \sqrt{n}\frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\sqrt{n}\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Vi finder

$$\mathsf{P}(11,8 < \bar{W} < 12,2) = \mathsf{P}(-1,818 < Z < 1,818) = 0,9312$$

Afsnit 3.5 og 4.1

Poissonfordelingen

$$\mathsf{P}(X = x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}, \quad \mathsf{E}(X) = \mu, \quad \mathsf{Var}(X) = \mu$$

- Kontinuerte stokastiske variable
  - Tæthed (density): $f(x) \geq 0, \quad \int f(x)\mathsf{d}x = 1,$
    $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x) = f(x)\mathsf{d}x, \quad \mathsf{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathsf{d}x$
  - Middelværdi, varians (momenter): $\mathsf{E}(X) = \int x f(x)\mathsf{d}x$
    $\mathsf{E}(g(X)) = \int g(x)f(x)\mathsf{d}x$, $\mathsf{E}\left(X^k\right) = \int x^k f(x)\mathsf{d}x$,
- Normalfordelingen: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
  - Den centrale grænseværdisætning
- Standardisering $Z = \frac{X-\mathsf{E}(X)}{\mathsf{SD}(X)}, \quad \mathsf{E}(Z) = 0, \quad \mathsf{SD}(Z) = 1$