Sandsynlighedsregning
3. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Anvendt Matematik og Computer Science
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby – Danmark
Email: bfni@dtu.dk

Dagens emner

- Stokastiske variable: *udfald identificeres med reelle tal*
  - ◇ Fordeling $P(X = x)$ $\quad \sum_x P(X = x) = 1$
  - ◇ Simultan(joint) fordeling
    $P(X = x, Y = y)$ $\quad \sum_{x,y} P(X = x, Y = y) = 1$
  - ◇ Marginal fordeling $P_X(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$
  - ◇ Betinget fordeling $P(Y = y|X = x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P_X(X=x)}$
  - ◇ Uafhængighed $P(Y = y, X = x) = P_X(X = x)P_Y(Y = y)$
- Multinomialfordelingen
- Middelværdi $E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$
- Forventningsværdi mere generelt $E(g(X)) = \sum g(x) \cdot P(X = x)$
- Linearitet $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$

Stokastiske variable kap.3

- Beskriver eksperimenter, hvor udfaldet kan karakteriseres ved et eller flere tal
- Gør det muligt at definere gennemsnit og andre beregninger
- Gør notation og formulering mere smidig

Eksempel på anvendelse

- For binomialfordelingen indførte vi hændelserne S_i for i succeser
- Hændelsen H_i højst i successer blev skrevet som $\cup_{j=0}^{i} S_j$
- Så $P(H_i) = P\left(\cup_{j=0}^{i} S_j\right) = \sum_{j=0}^{i} P(S_j)$ Hvorfor?
- Vi kunne ønske mere kompakt notation, færre symboler
- Den stokastiske variabel X betegner antallet af succeser
- Hvordan vil vi skrive hændelsen S_5 ved hjælp af X?
- Hvordan vil vi skrive hændelsen H_5 ved hjælp af X?
- En stokastisk variabel er et tal, der beskriver udfaldet af vores eksperiment.

Fordele ved stokastiske variable

- Mange problemer formuleres mere enkelt
- Giver os mulighed for at danne nye stokastiske variable ved funktioner
- Knytter en forbindelse mellem udfaldsrummet og de reelle tal

Vi lader den stokastiske variabel X betegne antallet af krone i tre kast med en retfærdig mønt, og definerer en ny stokastisk variabel $Y = |X - 1|$.

Spørgsmål 1

Angiv sandsynligheden for $P(Y = 1)$.

1 ☐ $\frac{1}{8}$

2 ☐ $\frac{1}{4}$

3 ☐ $\frac{3}{8}$

4 ☐ $\frac{1}{2}$

5 ☐ $\frac{5}{8}$

6 ☐ Ved ikke

Københavnske boliger 1989 (antal)

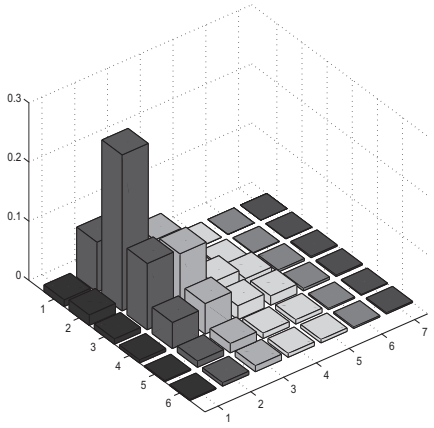
Antal beboere:	0	1	2	3	4	5	6
1 værelse	3166	23554	2038	260	69	19	8
2 værelser	4874	73508	26670	3826	955	248	145
3 værelser	2408	31193	29023	8781	3735	925	565
4 værelser	1343	12301	14374	6487	4380	1064	585
5 værelser	436	2877	4376	2487	1977	538	264
6 værelser	442	1553	2748	1775	1543	615	521

- En bolig er således her karakteriseret ved to egenskaber størrelse og antal beboere

Relative andele

Antal beboere	0	1	2	3	4	5	6
1 værelse	0,011	0,085	0,007	0,001	0,000	0,000	0,000
2 værelser	0,017	0,264	0,096	0,014	0,003	0,001	0,001
3 værelser	0,009	0,112	0,104	0,032	0,013	0,003	0,002
4 værelser	0,005	0,044	0,052	0,023	0,016	0,004	0,002
5 værelser	0,002	0,010	0,016	0,009	0,007	0,002	0,001
6 værelser	0,002	0,006	0,010	0,006	0,006	0,002	0,002

Histogram over bolighyppigheder



Flerdimensionale stokastiske variable

- Vi indfører nu symbolet X til at betegne antallet af værelser i en tilfældigt valgt bolig og Y til at betegne antallet af beboere i denne bolig.
- En bolig er således karakteriseret ved parret (X, Y) - en todimensional stokastisk variabel.
- Vi har $P(X = x) = P_X(x)$ til at beskrive antallet af værelser i en bolig
- Og $P(Y = y) = P_Y(y)$ til at beskrive antallet af beboere i en bolig.
- Som en ny ting får vi brug for $P(x, y) = P(X = x, Y = y)$ til at beskrive de samlede egenskaber ved en bolig.
- Den simultane fordeling

Brug af den simultane fordeling

- Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt bolig har højst to værelser og højst 3 beboere?

$$\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=0}^{3} P(x,y) = 0,011 + \ldots 0,014 = 0,4978$$

- Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt bolig vil have flere værelser end beboere?

$$\sum_{x=1}^{6}\sum_{y=0}^{x-1} P(x,y) = 0,011{+}0,017{+}0,264{+}0,009{+}\cdots{+}0,002 = 0,7160$$

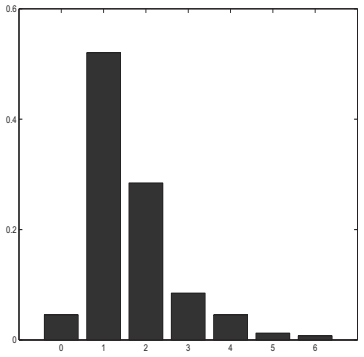
Hvis vi kun interesserer os for antal beboere

Antal beboere	0	1	2	3	4	5	6
1 værelse	0,011	0,085	0,007	0,001	0,000	0,000	0,000
2 værelser	0,017	0,264	0,096	0,014	0,003	0,001	0,001
3 værelser	0,009	0,112	0,104	0,032	0,013	0,003	0,002
4 værelser	0,005	0,044	0,052	0,023	0,016	0,004	0,002
5 værelser	0,002	0,010	0,016	0,009	0,007	0,002	0,001
6 værelser	0,002	0,006	0,010	0,006	0,006	0,002	0,002
Boliger i alt	0,045	0,520	0,284	0,085	0,045	0,012	0,007

- Dvs. kun Y

- altså Y

$$P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_x P(x, y)$$

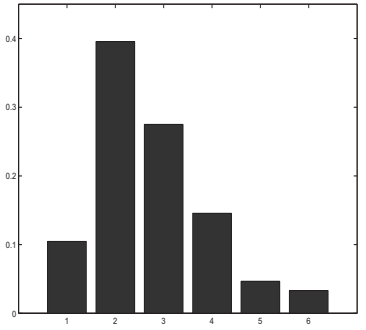


- Den marginale fordeling af Y ($P_Y(y)$)

Hvis vi kun interesserer os for størrelsen

- I så fald interesserer vi os for X

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y P(x, y)$$



- Den marginale fordeling af X ($P_X(x)$)

Antallet af beboere i en 3 værelses bolig

- Hvis vi ved, at en bolig har 3 værelser, betyder det så noget for fordelingen af antal beboere? Fra rækken med 3 værelses boliger i tabellerne har vi:

Beboere:	0	1	2	3	4	5	6	Alle
Antal:	2408	31193	29023	8781	3735	925	565	76630
Andel:	0,009	0,112	0,104	0,032	0,013	0,003	0,002	0,275
Andel af 3 værelses	0,031	0,407	0,379	0,115	0,049	0,012	0,007	1,000

- Hvordan udtrykker vi dette symbolsk/matematisk?

Betinget sandsynlighed/fordeling,

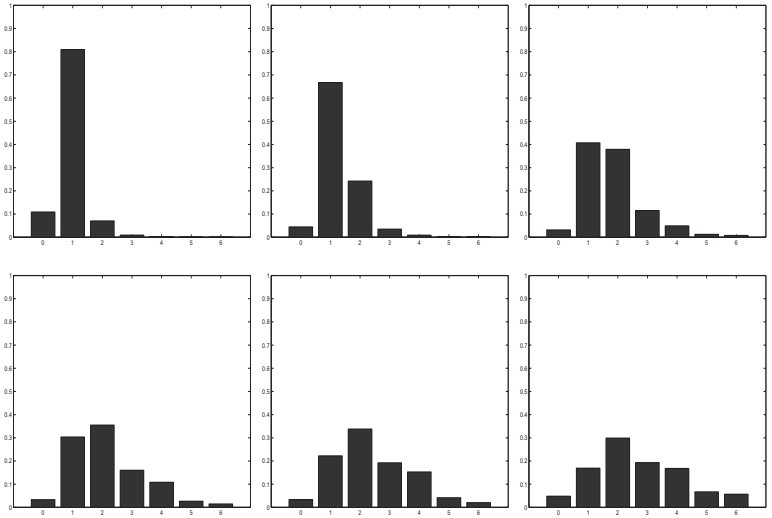
$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}$$

- Den betingede fordeling. Konkret får vi

$$P(Y = y|X = 3) = \frac{P(Y = y, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{P(3, y)}{0,275}$$

som i tabellen

Beboere betinget af størrelse



Uafhængige stokastiske variable

- Vi har set, hvordan den betingede fordeling fremkommer ved hjælp af betingede sandsynligheder.
- Nogle gange ved vi intuitivt (antagelse), at en størrelse (stokastisk variabel) ikke vekselvirker med en anden stokastisk variabel.
  - ◇ Terningeeksempler
- Hvad er en naturlig definition på uafhængige stokastiske variable?
- Er X og Y uafhængige i boligeksemplet?

Definition på uafhængige stokastiske variable

- X og Y er uafhængige hvis

$$P(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$$

- for alle x, y
- Giv et eksempel på uafhængige X og Y (gode kandidater)

Opgave 3.12

- Lad X og Y være resultatet (talværdi) fra to trækninger fra en æske med 4 sedler, med numrene 1,2,3 og 4.
- Angiv den marginale fordeling og simultane fordeling for X og Y. For
  - ◇ Stikprøvetagning med tilbagelægning
  - ◇ Stikprøvetagning uden tilbagelægning
- Beregn $P(X \leq Y)$
- Er X og Y uafhængige?

Med tilbagelægning får vi

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$P(X=i)=P(Y=i)=\frac{1}{4}=P_X(i)=P_Y(i)$$

$$P(X\leq Y)=\sum_{x\leq y}P(x,y)=\sum_{x=1}^{4}\sum_{y=x}^{4}P(x,y)$$

$$=\sum_{y=1}^{4}\sum_{x=1}^{y}P(x,y)=\sum_{y=1}^{4}y\frac{1}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

Uden tilbagelægning får vi

$$P(X=i)=\frac{1}{4}=P_X(i)$$

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

$$P(Y=i)=\sum_{x=1}^{4}P_(x,i)=\frac{1}{4}=P_Y(i)$$

Uden tilbagelægning fortsat

$$P(X\leq Y)=\sum_{x\leq y}P(x,y)=\sum_{x=1}^{4}\sum_{y=x}^{4}P(x,y)$$

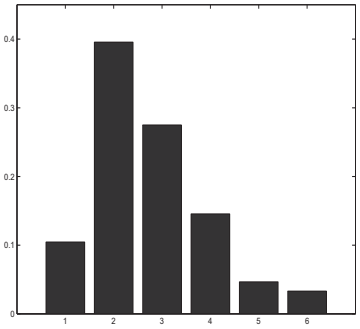
$$=\sum_{y=1}^{4}\sum_{x=1}^{y-1}P(x,y)=\sum_{y=1}^{4}(y-1)\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

- Kunne vi have indset dette direkte?

Funktioner af stokastiske variable

- Fra boligeksemplet:
  - Z_1 : antal beboere pr. værelse $Z_1=\frac{Y}{X}$
  - Z_2 : antal værelser pr. beboer $Z_2=\frac{X}{Y}=\frac{1}{Z_1}$ (uproblematisk?)

Fordeling af værelser på antal boliger



værelser:	1	2	3	4	5	≥ 6
andel:	0,104	0,396	0,275	0,145	0,046	0,033

Enkel karakteristik af fordeling

Spørgsmål 2

Hvilket af følgende tal ville du vælge til at karakterisere fordelingen af antal værelser i en bolig?

1 ☐ 2

2 ☐ 3

3 ☐ 3.5

4 ☐ $1 \cdot 0,104 + 2 \cdot 0,396 + 3 \cdot 0,275 + 4 \cdot 0,145 + 5 \cdot 0,046 + 6 \cdot 0,033 = 2,729$

5 ☐ Noget andet

6 ☐ Ved ikke

Middelværdi(forventning) p.162(163)

$$E(X) = \sum_{\text{alle x}} xP(X = x)$$

- Fordelingens tyngdepunkt
- Gennemsnit af stort antal udfald, eksperimenter
- Beregningsmæssig bekvem

Spørgsmål 3

Hvad er middelværdien/forventningsværdien ved kast med en terning?

1 ☐ Alle værdier $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2 ☐ 3

3 ☐ 3.5

4 ☐ 4

5 ☐ 4.5

6 ☐ Ved ikke

Bemærk

- Middelværdien af X, $E(X)$ behøver ikke at være en mulig værdi for X

Skatteindtægt fra bolig

- Skatteindtægten fra en bolig afhænger af antallet af værelser kr. 2.500 pr. værelse.
- Plus et fast beløb - kr. 7.500
- Hvad er den forventede skatteindtægt fra en bolig?

Lineære funktioner af stokastiske variable

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- i Eksemplet får vi: Z : skatteindtægt fra bolig

$$E(Z) = E(2.500 \cdot X + 7.500)$$

$$= 2.500 \cdot E(X) + 7.500 = 14322,50$$

Forventning af en funktion af en stokastisk variabel p.175

- Lidt mere generelt får vi for en vilkårlig funktion $g(x)$:

$$E(g(X)) = \sum_{\text{alle } x} g(x)P(X = x)$$

- Af særlig interesse har vi $g(x) = x^k$, så

$$E(X^k) = \sum_{\text{alle } x} x^k P(X = x)$$

- det k'te moment af X

Antag, at $E(X^2) = 3$, $E(Y^2) = 4$, $E(XY) = 2$.

Spørgsmål 4

$E\left[(X+Y)^2\right]$ findes til

1 ☐ 7

2 ☐ 9

3 ☐ 11

4 ☐ 13

5 ☐ 15

6 ☐ Ved ikke

Forventning af en funktion af flere stokastiske variable p.176

- Generelt har vi:

$$E(g(X,Y)) = \sum_{\text{alle } (x,y)} g(x,y)P(X=x, Y=y)$$

- Additionsregel $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ (altid) p.167.
- Multiplikationsregel, hvis X og Y er uafhængige p.177

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Relative andele af boliger

Antal beboere	0	1	2	3	4	5	6
1 værelse	0,011	0,085	0,007	0,001	0,000	0,000	0 ,000
2 værelser	0,017	0,264	0,096	0,014	0,003	0,001	0 ,001
3 værelser	0,009	0,112	0,104	0,032	0,013	0,003	0 ,002
4 værelser	0,005	0,044	0,052	0,023	0,016	0,004	0 ,002
5 værelser	0,002	0,010	0,016	0,009	0,007	0,002	0 ,001
6 værelser	0,002	0,006	0,010	0,006	0,006	0,002	0 ,002

- Hvordan ville I beregne den forventede værdi af antallet af beboere pr. værelse?

Sammensætning/funktioner af stokastiske variable

- Først definerer vi X som antal værelser i en bolig, dernæst Y som antallet af beboere.
- Vi danner en ny variabel $Z = \frac{Y}{X}$ som antal beboere pr. værelse

$$E(Z) = E(Y/X) = \sum_{x=1}^{6}\sum_{y=0}^{6} \frac{y}{x} P(x,y)$$

Nye begreber i afsnit 3.1, 3.2

- Stokastisk variabel
- Fordeling/marginal fordeling
- Flerdimensional stokastisk variabel
- Simultan (eng.: joint) fordeling
- Betinget fordeling
- Uafhængige stokastiske variable
- Middelværdi/Forventning

Afsnit 3.1 og 3.2

- Stokastiske variable: *udfald identificeres med relle tal*
  - ◇ Fordeling $P(X = x)$ $\quad \sum_x P(X = x) = 1$
  - ◇ Simultan(joint) fordeling
    $P(X = x, Y = y)$ $\quad \sum_{x,y} P(X = x, Y = y) = 1$
  - ◇ Marginal fordeling $P_X(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$
  - ◇ Betinget fordeling $P(Y = y|X = x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P_X(X=x)}$
  - ◇ Uafhængighed $P(Y = y, X = x) = P_X(X = x)P_Y(Y = y)$
- Multinomialfordelingen
- Middelværdi $E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$
- Forventningsværdi mere generelt $E(g(X)) = \sum g(x) \cdot P(X = x)$
- Linearitet $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$