Sandsynlighedsregning
2. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Anvendt Matematik og Computer Science

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Kgs. Lyngby – Danmark

Email: bfni@dtu.dk

Vigtigste nye emner i 2.1, 2.2 og 2.5

- Binomialfordelingen p.81 : $\mathsf{P}(k\text{successer}) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k q^{n-k}$
- Normalfordelingsapproksimationen p.99

$$\mathsf{P}(\text{mellem } a \text{ og } b) = \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right)$$

- Hypergeometrisk fordeling - stikprøve uden tilbagelægning - p.125

$$\mathsf{P}(g \text{ gode og } b \text{ dårlige}) = \frac{\left(\begin{array}{c} G \\ g \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} B \\ b \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)}$$

Case: (motivation for Binomialfordelingen)

En fabrikant af plastik lyseholdere garanterer, at i en æske med 20 holdere vil højst to være itu.

Case: (motivation for Binomialfordelingen)

En fabrikant af plastik lyseholdere garanterer, at i en æske med 20 holdere vil højst to være itu.Man har gennem længere tid konstateret, at 5% af de producerede lyseholdere er defekte.

Case: (motivation for Binomialfordelingen)

En fabrikant af plastik lyseholdere garanterer, at i en æske med 20 holdere vil højst to være itu.Man har gennem længere tid konstateret, at 5% af de producerede lyseholdere er defekte.

- Hvad er sandsynligheden for, at en æske overholder garantien?

Case: (motivation for Binomialfordelingen)

En fabrikant af plastik lyseholdere garanterer, at i en æske med 20 holdere vil højst to være itu.Man har gennem længere tid konstateret, at 5% af de producerede lyseholdere er defekte.

- Hvad er sandsynligheden for, at en æske overholder garantien?
- Hvad er sandsynligheden for, at alle holdere i en æske er intakte?

Case: (motivation for Binomialfordelingen)

En fabrikant af plastik lyseholdere garanterer, at i en æske med 20 holdere vil højst to være itu.Man har gennem længere tid konstateret, at 5% af de producerede lyseholdere er defekte.

- Hvad er sandsynligheden for, at en æske overholder garantien?
- Hvad er sandsynligheden for, at alle holdere i en æske er intakte?

En forhandler køber et parti med 50 æsker. Han lover at erstatte alle holdere, der er itu.

Case: (motivation for Binomialfordelingen)

En fabrikant af plastik lyseholdere garanterer, at i en æske med 20 holdere vil højst to være itu.Man har gennem længere tid konstateret, at 5% af de producerede lyseholdere er defekte.

- Hvad er sandsynligheden for, at en æske overholder garantien?
- Hvad er sandsynligheden for, at alle holdere i en æske er intakte?

En forhandler køber et parti med 50 æsker. Han lover at erstatte alle holdere, der er itu.

- Hvad er det forventede antal holdere, han skal erstatte, hvis alle 50 æsker bliver solgt?

Det er bekvemt at generalisere problemet

Det er bekvemt at generalisere problemet

- Antagelser:

Det er bekvemt at generalisere problemet

- Antagelser:
  - Vi har n emner, med een af to egenskaber kaldet succes og fiasko

Det er bekvemt at generalisere problemet

- Antagelser:
  - Vi har n emner, med een af to egenskaber kaldet succes og fiasko
  - Hver har en sandsynlighed for succes på p

Det er bekvemt at generalisere problemet

- Antagelser:
  - Vi har n emner, med een af to egenskaber kaldet succes og fiasko
  - Hver har en sandsynlighed for succes på p
- Der er uafhængighed mellem de enkelte emner mht. egenskaberne succes/fiasko

Det er bekvemt at generalisere problemet

- Antagelser:
  - Vi har n emner, med een af to egenskaber kaldet succes og fiasko
  - Hver har en sandsynlighed for succes på p
- Der er uafhængighed mellem de enkelte emner mht. egenskaberne succes/fiasko
- Vi har således n på hinanden følgende uafhængige Bernoulli experimenter

Bernoulli fordeling

- Det simplest mulige experiment
- To muligheder
  - Succes/fiasko
  - Mand/kvinde
  - Regn/ikke regn
- (I næste uge vil vi identificere den ene mulighed med 1, X(succes) $= 1$, den anden 0, X(fiasko) $= 0$)
  - $\mathsf{P}(\text{succes}) = p$, $\mathsf{P}(\text{fiasko}) = 1 - p$
- $X \sim be(p)$

- H_i: Hændelsen holder i intakt

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathrm{P}(I_i)$?

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte})$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1\right.$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt.

  Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap\right.$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2\right.$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt.

  Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n}\right.$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right)$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) =$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n}$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = p$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p \ldots p$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p \ldots p = p^n$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p \ldots p = p^n$$

- Tilsvarende er sandsynligheden for, at alle n er itu:

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p \ldots p = p^n$$

- Tilsvarende er sandsynligheden for, at alle n er itu:

$\mathsf{P}(n \text{ itu})$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^n H_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p \ldots p = p^n$$

- Tilsvarende er sandsynligheden for, at alle n er itu:

$$\mathsf{P}(n \text{ itu}) = \mathsf{P}(I_0)$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p \ldots p = p^n$$

- Tilsvarende er sandsynligheden for, at alle n er itu:

$$\mathsf{P}(n \text{ itu}) = \mathsf{P}(I_0) = \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n}\right.$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^n H_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p \ldots p = p^n$$

- Tilsvarende er sandsynligheden for, at alle n er itu:

$$\mathsf{P}(n \text{ itu}) = \mathsf{P}(I_0) = \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^n H_i^c\right)$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt. Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p \ldots p = p^n$$

- Tilsvarende er sandsynligheden for, at alle n er itu:

$$\mathsf{P}(n \text{ itu}) = \mathsf{P}(I_0) = \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i^c\right) = (1-p)$$

- H_i: Hændelsen holder i intakt
- I_i: Hændelsen i intakte holdere
- Hvad er $\mathsf{P}(I_i)$?
- Antag eventuelt, at holderne produceres sekventielt.

  Sandsynligheden for, at n holdere er intakte, er

$$\mathsf{P}(n \text{ intakte}) = \mathsf{P}(I_n) = \mathsf{P}\left(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = p \cdot p \ldots p = p^n$$

- Tilsvarende er sandsynligheden for, at alle n er itu:

$$\mathsf{P}(n \text{ itu}) = \mathsf{P}(I_0) = \mathsf{P}\left(\cap_{i=1}^{n} H_i^c\right) = (1-p)\ldots(1-p) = (1-p)^n$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

For $n-1$ intakte holdere finder vi

I_{n-1}

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \right) \right.$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \Big[\Big(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\Big) \cap$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \Big[\Big(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\Big) \cap H_n^c$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right]$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right)\right.$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c\right.$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap\right.$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right]$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup \left[H_1^c \cap \left(\cap_{i=2}^{n} H_i\right)\right]$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup [H_1^c \cap \left(\cap_{i=2}^{n} H_i\right)]$$

$$= \cup_{i=1}^{n}$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup [H_1^c \cap \left(\cap_{i=2}^{n} H_i\right)]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c\right.$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup \left[H_1^c \cap \left(\cap_{i=2}^{n} H_i\right)\right]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c \cap \left(\cap_{j=1, j\neq i}^{n} H_j\right)\right]$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup [H_1^c \cap (\cap_{i=2}^{n} H_i)]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c \cap \left(\cap_{j=1,j\neq i}^{n} H_j\right)\right]$$

$$\mathsf{P}(I_{n-1})$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup [H_1^c \cap (\cap_{i=2}^{n} H_i)]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c \cap \left(\cap_{j=1, j\neq i}^{n} H_j\right)\right]$$

$$\mathsf{P}(I_{n-1}) =$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup [H_1^c \cap (\cap_{i=2}^{n} H_i)]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c \cap \left(\cap_{j=1, j\neq i}^{n} H_j\right)\right]$$

$$\mathsf{P}(I_{n-1}) = n$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup [H_1^c \cap \left(\cap_{i=2}^{n} H_i\right)]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c \cap \left(\cap_{j=1, j\neq i}^{n} H_j\right)\right]$$

$$\mathsf{P}(I_{n-1}) = n \cdot (1-p)$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup [H_1^c \cap (\cap_{i=2}^{n} H_i)]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c \cap \left(\cap_{j=1, j\neq i}^{n} H_j\right)\right]$$

$$\mathsf{P}(I_{n-1}) = n \cdot (1-p) \cdot p^{n-1}$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup [H_1^c \cap \left(\cap_{i=2}^{n} H_i\right)]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c \cap \left(\cap_{j=1,j\neq i}^{n} H_j\right)\right]$$

$$\mathsf{P}(I_{n-1}) = n \cdot (1-p) \cdot p^{n-1}$$

- For I_i, generelt i, må vi tælle antallet af sekvenser med præcis i intakte.

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup [H_1^c \cap (\cap_{i=2}^{n} H_i)]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c \cap \left(\cap_{j=1, j\neq i}^{n} H_j\right)\right]$$

$$\mathsf{P}(I_{n-1}) = n \cdot (1-p) \cdot p^{n-1}$$

- For I_i, generelt i, må vi tælle antallet af sekvenser med præcis i intakte. Antallet er

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

For $n-1$ intakte holdere finder vi

$$I_{n-1} = \left[\left(\cap_{i=1}^{n-1} H_i\right) \cap H_n^c\right] \cup \left[\left(\cap_{i=1}^{n-2} H_i\right) \cap H_{n-1}^c \cap H_n\right] \ldots \cup \left[H_1^c \cap \left(\cap_{i=2}^{n} H_i\right)\right]$$

$$= \cup_{i=1}^{n} \left[H_i^c \cap \left(\cap_{j=1, j\neq i}^{n} H_j\right)\right]$$

$$\mathsf{P}(I_{n-1}) = n \cdot (1-p) \cdot p^{n-1}$$

- For I_i, generelt i, må vi tælle antallet af sekvenser med præcis i intakte. Antallet er

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

vi kommer tilbage til udledningen af dette sidst i forelæsningen

Vi har udledt Binomial fordelingen

Vi har udledt Binomial fordelingen

- $\mathsf{P}(I_i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i}$

Vi har udledt Binomial fordelingen

- $\mathsf{P}(I_i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i}$
- En fundamental byggesten/værktøj i ingeniørens værktøjskasse.

Vi har udledt Binomial fordelingen

- $\mathsf{P}(I_i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i(1-p)^{n-i}$
- En fundamental byggesten/værktøj i ingeniørens værktøjskasse.
- Det forventede antal successer ud af n (long term average)

$$E(X) = np$$

Vi har udledt Binomial fordelingen

- $\mathsf{P}(I_i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i(1-p)^{n-i}$
- En fundamental byggesten/værktøj i ingeniørens værktøjskasse.
- Det forventede antal successer ud af n (long term average)

$$E(X) = np$$

- Vi diskuterer dette begreb i dybden i næste uge - afsnit 3.2

Vi vil betragte et kast med 7 terninger.

Spørgsmål 1

Hvad er sandsynligheden for at få netop 4 seksere

1 ☐ $\frac{7!}{4!3!}\frac{125}{6^7}$

2 ☐ $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6^4}$

3 ☐ $\frac{4}{6}$

4 ☐ $\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6^4}$

5 ☐ $\frac{4}{7}$

6 ☐ Ved ikke

Tilbage til lyseholderfabrikanten

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

P(Indenfor garantien)

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2)$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

$$\mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

$$\mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$$

$$= 0,95^{20}$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

$$\mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$$

$$= 0,95^{20} + 20 \cdot 0,95^{19} \cdot 0,05$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

$$\mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$$

$$= 0,95^{20} + 20 \cdot 0,95^{19} \cdot 0,05 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,95^{18} \cdot 0,05^2$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

$$\mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$$
$$= 0,95^{20} + 20 \cdot 0,95^{19} \cdot 0,05 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,95^{18} \cdot 0,05^2 = 0,9245$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

$$\mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$$
$$= 0,95^{20} + 20 \cdot 0,95^{19} \cdot 0,05 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,95^{18} \cdot 0,05^2 = 0,9245$$

- Det forventede antal, der skal erstattes fra en æske, er

$$np$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

$$\mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$$
$$= 0,95^{20} + 20 \cdot 0,95^{19} \cdot 0,05 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,95^{18} \cdot 0,05^2 = 0,9245$$

- Det forventede antal, der skal erstattes fra en æske, er

$$np = 20 \cdot 0,05$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

$$\mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$$

$$= 0,95^{20} + 20 \cdot 0,95^{19} \cdot 0,05 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,95^{18} \cdot 0,05^2 = 0,9245$$

- Det forventede antal, der skal erstattes fra en æske, er

$$np = 20 \cdot 0,05 = 1$$

Tilbage til lyseholderfabrikanten

- Lad B_i betegne hændelsen, at i holdere er itu.

$$\mathsf{P}(\text{Indenfor garantien}) = \mathsf{P}(B_0)+\mathsf{P}(B_1)+\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(I_{20})+\mathsf{P}(I_{19})+\mathsf{P}(I_{18})$$

- Sandsynlighederne $\mathsf{P}(B_i)$ er givet ved Binomialfordelingen

$$\mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$$

$$= 0,95^{20} + 20 \cdot 0,95^{19} \cdot 0,05 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,95^{18} \cdot 0,05^2 = 0,9245$$

- Det forventede antal, der skal erstattes fra en æske, er

$$np = 20 \cdot 0,05 = 1$$

- Vi forventer at måtte erstatte 50 holdere fra 50 æsker

- Fabrikanten har en stor detailhandelskæde mellem sine kunder

- Fabrikanten har en stor detailhandelskæde mellem sine kunder
- Kæden indkøber 12.500.000 æsker

- Fabrikanten har en stor detailhandelskæde mellem sine kunder
- Kæden indkøber 12.500.000 æsker
- kunden har konstateret 13.403.411 defekte holdere, som fabrikanten må erstatte ifølge kontrakten. Fabrikanten mistænker, at nogle af holderne er blevet ødelagt af kædens personale eller kunder.

- Fabrikanten har en stor detailhandelskæde mellem sine kunder
- Kæden indkøber 12.500.000 æsker
- kunden har konstateret 13.403.411 defekte holdere, som fabrikanten må erstatte ifølge kontrakten. Fabrikanten mistænker, at nogle af holderne er blevet ødelagt af kædens personale eller kunder.
- Hvem støtter I?

- Fabrikanten har en stor detailhandelskæde mellem sine kunder
- Kæden indkøber 12.500.000 æsker
- kunden har konstateret 13.403.411 defekte holdere, som fabrikanten må erstatte ifølge kontrakten. Fabrikanten mistænker, at nogle af holderne er blevet ødelagt af kædens personale eller kunder.
- Hvem støtter I?
- Indledende undersøgelse:

- Fabrikanten har en stor detailhandelskæde mellem sine kunder
- Kæden indkøber 12.500.000 æsker
- kunden har konstateret 13.403.411 defekte holdere, som fabrikanten må erstatte ifølge kontrakten. Fabrikanten mistænker, at nogle af holderne er blevet ødelagt af kædens personale eller kunder.
- Hvem støtter I?
- Indledende undersøgelse:

$$\frac{13.403.411}{}$$

- Fabrikanten har en stor detailhandelskæde mellem sine kunder
- Kæden indkøber 12.500.000 æsker
- kunden har konstateret 13.403.411 defekte holdere, som fabrikanten må erstatte ifølge kontrakten. Fabrikanten mistænker, at nogle af holderne er blevet ødelagt af kædens personale eller kunder.
- Hvem støtter I?
- Indledende undersøgelse:

$$\frac{13.403.411}{20 \cdot 12.500.000}$$

- Fabrikanten har en stor detailhandelskæde mellem sine kunder
- Kæden indkøber 12.500.000 æsker
- kunden har konstateret 13.403.411 defekte holdere, som fabrikanten må erstatte ifølge kontrakten. Fabrikanten mistænker, at nogle af holderne er blevet ødelagt af kædens personale eller kunder.
- Hvem støtter I?
- Indledende undersøgelse:

$$\frac{13.403.411}{20 \cdot 12.500.000} = 0,0536$$

- Fabrikanten har en stor detailhandelskæde mellem sine kunder
- Kæden indkøber 12.500.000 æsker
- kunden har konstateret 13.403.411 defekte holdere, som fabrikanten må erstatte ifølge kontrakten. Fabrikanten mistænker, at nogle af holderne er blevet ødelagt af kædens personale eller kunder.
- Hvem støtter I?
- Indledende undersøgelse:

$$\frac{13.403.411}{20 \cdot 12.500.000} = 0,0536$$

- Hvad skal man konkludere?

Model

Model

- Sandsynligheden $\mathsf{P}(B_i)$ for hændelsen B_i, at i holderere er itu

Model

- Sandsynligheden $\mathsf{P}(B_i)$ for hændelsen B_i, at i holderere er itu

$$\mathsf{P}(B_i) = \begin{pmatrix} 250.000.000 \\ i \end{pmatrix} 0,05^i 0,95^{250.000.000-i}$$

Model

- Sandsynligheden $\mathsf{P}(B_i)$ for hændelsen B_i, at i holderere er itu

$$\mathsf{P}(B_i) = \begin{pmatrix} 250.000.000 \\ i \end{pmatrix} 0,05^i 0,95^{250.000.000-i}$$

- Binomialfordelingen

Model

- Sandsynligheden $\mathsf{P}(B_i)$ for hændelsen B_i, at i holderere er itu

$$\mathsf{P}(B_i) = \binom{250.000.000}{i} 0,05^i 0,95^{250.000.000-i}$$

- Binomialfordelingen
- Vi ønsker at beregne

Model

- Sandsynligheden $\mathsf{P}(B_i)$ for hændelsen B_i, at i holderere er itu

$$\mathsf{P}(B_i) = \binom{250.000.000}{i} 0,05^i 0,95^{250.000.000-i}$$

- Binomialfordelingen
- Vi ønsker at beregne

$$\sum_{i=13.403.411}^{250.000.000} \mathsf{P}(B_i) = 1 - \sum_{i=0}^{13.403.410} \mathsf{P}(B_i)$$

Model

- Sandsynligheden $\mathsf{P}(B_i)$ for hændelsen B_i, at i holderere er itu

$$\mathsf{P}(B_i) = \begin{pmatrix} 250.000.000 \\ i \end{pmatrix} 0,05^i 0,95^{250.000.000-i}$$

- Binomialfordelingen
- Vi ønsker at beregne

$$\sum_{i=13.403.411}^{250.000.000} \mathsf{P}(B_i) = 1 - \sum_{i=0}^{13.403.410} \mathsf{P}(B_i)$$

- En stærkt udfordrende beregning!

Normalfordeingen p.94

Normalfordeingen p.94

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathsf{d}t$$

Normalfordeingen p.94

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t$$

- Normalfordelingen er meget vigtig i sandsynlighedsregning og statistik

Normalfordeingen p.94

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t$$

- Normalfordelingen er meget vigtig i sandsynlighedsregning og statistik
- Blandt andet på grund af den centrale grænseværdisætning (CGS - eng: Central Limit Theorem - CLT),

Normalfordeingen p.94

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathsf{d}t$$

- Normalfordelingen er meget vigtig i sandsynlighedsregning og statistik
- Blandt andet på grund af den centrale grænseværdisætning (CGS - eng: Central Limit Theorem - CLT), der siger, at gennemsnittet af et stort antal uafhængige målinger

Normalfordeingen p.94

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t$$

- Normalfordelingen er meget vigtig i sandsynlighedsregning og statistik
- Blandt andet på grund af den centrale grænseværdisætning (CGS - eng: Central Limit Theorem - CLT), der siger, at gennemsnittet af et stort antal uafhængige målinger er meget godt beskrevet ved normalfordelingen.

Normalfordeingen p.94

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t$$

- Normalfordelingen er meget vigtig i sandsynlighedsregning og statistik
- Blandt andet på grund af den centrale grænseværdisætning (CGS - eng: Central Limit Theorem - CLT), der siger, at gennemsnittet af et stort antal uafhængige målinger er meget godt beskrevet ved normalfordelingen. Dette gælder under meget generelle antagelser.

Normalapproksimationen p.99

Normalapproksimationen p.99

- Antal succeser beskrives ved $B(n, p)$

Normalapproksimationen p.99

- Antal successer beskrives ved $B(n,p)$

$$\mathsf{P}(a \leq \text{antal successer} \leq b)$$

Normalapproksimationen p.99

- Antal succeser beskrives ved $B(n,p)$

$$\mathsf{P}(a \leq \text{antal succeser} \leq b) = \sum_{i=a}^{b} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) p^i (1-p)^{n-i}$$

Normalapproksimationen p.99

- Antal succeser beskrives ved $B(n,p)$

$$\mathsf{P}(a \leq \text{antal succeser} \leq b) = \sum_{i=a}^{b} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

Normalapproksimationen p.99

- Antal succeser beskrives ved $B(n,p)$

$$\mathsf{P}(a \leq \text{antal succeser} \leq b) = \sum_{i=a}^{b} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Normalapproksimationen p.99

- Antal successer beskrives ved $B(n,p)$

$$\mathsf{P}(a \leq \text{antal successer} \leq b) = \sum_{i=a}^{b} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- Brugen af $a - \frac{1}{2}$ og $b + \frac{1}{2}$ snarere end a, b kaldes en kontinuitetskorrektion.

Normalapproksimationen p.99

- Antal successer beskrives ved $B(n,p)$

$$\mathrm{P}(a \leq \text{antal successer} \leq b) = \sum_{i=a}^{b} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- Brugen af $a - \frac{1}{2}$ og $b + \frac{1}{2}$ snarere end a, b kaldes en kontinuitetskorrektion.
- Den er vigtig for små værdier af $\sqrt{np(1-p)}$

Normalapproksimationen p.99

- Antal successer beskrives ved $B(n,p)$

$$\mathsf{P}(a \leq \text{antal successer} \leq b) = \sum_{i=a}^{b} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- Brugen af $a - \frac{1}{2}$ og $b + \frac{1}{2}$ snarere end a, b kaldes en kontinuitetskorrektion.
- Den er vigtig for små værdier af $\sqrt{np(1-p)}$
- Approksimationen kan forfines yderligere: side 104

Lad H_i betegne hændelsen: Antallet af krone i 400 kast med en retfærdig mønt er i.

Spørgsmål 2

Beregn sandsynligheden for $\mathrm{P}(\cup_{i=190}^{210} H_i)$ - (eventuelt approksimativt).

1 ☐ $\frac{1}{2}$

2 ☐ $\Phi(1,05) - \Phi(-1,05)$

3 ☐ $\Phi(1,75) - \Phi(-1,75)$

4 ☐ $\sum_{i=185}^{215} \left(\begin{array}{c} 400 \\ i \end{array} \right) \frac{1}{2^{400}}$

5 ☐ $\Phi(1,50) - \Phi(-1,50)$

6 ☐ Ved ikke

hvor Φ betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Normalapproksimationen for lyseholderne

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere),

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\Bigg($$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410}{}\right.$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\begin{matrix} 13.403.410+\frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix}\right.$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\Bigg(13.403.410 + \tfrac{1}{2} - 250.000.000$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi \left(\frac{13.403.410 + \frac{1}{2} - 250.000.000 \cdot 0,05}{} \right.$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410+\frac{1}{2}-250.000.000\cdot 0,05}{\sqrt{}}\right.$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410 + \frac{1}{2} - 250.000.000 \cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000}}\right.$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410 + \frac{1}{2} - 250.000.000 \cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000 \cdot 0,05}}\right)$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410 + \frac{1}{2} - 250.000.000 \cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000 \cdot 0,05(1 - 0,05)}}\right)$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410 + \frac{1}{2} - 250.000.000 \cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000 \cdot 0,05(1-0,05)}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{903.410,5}{3.446.01}\right)$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410+\frac{1}{2}-250.000.000\cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000\cdot 0,05(1-0,05)}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{903.410,5}{3.446.01}\right)=\Phi(262,16)$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410 + \frac{1}{2} - 250.000.000 \cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000 \cdot 0,05(1-0,05)}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{903.410,5}{3.446.01}\right) = \Phi(262,16) \tilde{=} 1$$

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410+\frac{1}{2}-250.000.000\cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000\cdot 0,05(1-0,05)}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{903.410,5}{3.446.01}\right)=\Phi(262,16)\tilde{=}1$$

- Den sandsynlighed vi er interesseret i er P(mere end 13.403.410), der er $\tilde{=}0$.

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410+\frac{1}{2}-250.000.000\cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000\cdot 0,05(1-0,05)}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{903.410,5}{3.446.01}\right)=\Phi(262,16)\tilde{=}1$$

- Den sandsynlighed vi er interesseret i er P(mere end 13.403.410), der er $\tilde{=}0$.
- Enten har fabrikanten været meget uheldig,

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410+\frac{1}{2}-250.000.000\cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000\cdot 0,05(1-0,05)}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{903.410,5}{3.446.01}\right)=\Phi(262,16)\tilde{=}1$$

- Den sandsynlighed vi er interesseret i er P(mere end 13.403.410), der er $\tilde{=}0$.
- Enten har fabrikanten været meget uheldig, eller fejlraten er højere end 5%,

Normalapproksimationen for lyseholderne

- Vi ønsker at beregne P(mindre end 13.403.411 defekte holdere), som ved brug af normalapproksimationen findes til

$$\Phi\left(\frac{13.403.410 + \frac{1}{2} - 250.000.000 \cdot 0,05}{\sqrt{250.000.000 \cdot 0,05(1-0,05)}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{903.410,5}{3.446.01}\right) = \Phi(262,16) \tilde{=} 1$$

- Den sandsynlighed vi er interesseret i er P(mere end 13.403.410), der er $\tilde{=} 0$.
- Enten har fabrikanten været meget uheldig, eller fejlraten er højere end 5%, eller nogle af lyseholderne er blevet beskadiget efter fabrikationen.

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathrm{P}($$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p$$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c$$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere}$$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c)$$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathrm{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c) = 0,95$$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c) = 0,95$$

- Ved brug af normalapproksimationen får vi

$$\mathsf{P}($$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c) = 0,95$$

- Ved brug af normalapproksimationen får vi

$$\mathsf{P}(n \cdot p$$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c) = 0,95$$

- Ved brug af normalapproksimationen får vi

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c$$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c) = 0,95$$

- Ved brug af normalapproksimationen får vi

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere}$$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c) = 0,95$$

- Ved brug af normalapproksimationen får vi

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c)$$

Hvad er rimelige værdier for antallet af defekte holdere?

- Vi vil bestemme c, således at

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c) = 0,95$$

- Ved brug af normalapproksimationen får vi

$$\mathsf{P}(n \cdot p - c \leq \text{Antal defekte holdere} \leq n \cdot p + c)$$

$$= \Phi\left(\frac{(n \cdot p + c) + \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{(n \cdot p - c) - \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- For store n er dette approksimativt

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{-c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-1$$

Med

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

får vi

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \quad 1,95$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{1,95}{2}$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

Vi har

$$\Phi^{-1}(0,975)$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

Vi har

$$\Phi^{-1}(0,975) = 1,96$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

Vi har

$$\Phi^{-1}(0,975) = 1,96$$

Således at

$$\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}} = 1,96$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-1=0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)=\frac{1,95}{2}=0,975$$

Vi har

$$\Phi^{-1}(0,975)=1,96$$

Således at

$$\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}=1,96 \qquad c=1,96\cdot\sqrt{np(1-p)}$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-1=0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)=\frac{1,95}{2}=0,975$$

Vi har

$$\Phi^{-1}(0,975)=1,96$$

Således at

$$\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}=1,96 \qquad c=1,96\cdot\sqrt{np(1-p)}=6754,2$$

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-1=0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right)=\frac{1,95}{2}=0,975$$

Vi har

$$\Phi^{-1}(0,975)=1,96$$

Således at

$$\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}=1,96 \qquad c=1,96\cdot\sqrt{np(1-p)}=6754,2$$

- Der vil altså med 95 % sandsynlighed være mellem 12.493.246 og 12.506.754 defekte holdere.

Med

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 = 0,95$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

Vi har

$$\Phi^{-1}(0,975) = 1,96$$

Således at

$$\frac{c}{\sqrt{np(1-p)}} = 1,96 \qquad c = 1,96 \cdot \sqrt{np(1-p)} = 6754,2$$

- Der vil altså med 95 % sandsynlighed være mellem 12.493.246 og 12.506.754 defekte holdere.
- Et overraskende snævert interval

Kvadratrodsloven p.100

Kvadratrodsloven p.100

- For store n

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg
  - vil antallet af successer

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg
  - vil antallet af successer med høj sandsynlighed

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg
  - vil antallet af successer med høj sandsynlighed, ligge i et relativt snævert inteval

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg
  - vil antallet af successer med høj sandsynlighed, ligge i et relativt snævert inteval centreret om np

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg
  - vil antallet af successer med høj sandsynlighed, ligge i et relativt snævert inteval centreret om np, med et moderat multiplum af $\sqrt{n}$ på en numerisk skala.

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg
  - vil antallet af successer med høj sandsynlighed, ligge i et relativt snævert inteval centreret om np, med et moderat multiplum af $\sqrt{n}$ på en numerisk skala.
- *Andelen* af successer vil

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg
  - vil antallet af successer med høj sandsynlighed, ligge i et relativt snævert inteval centreret om np, med et moderat multiplum af $\sqrt{n}$ på en numerisk skala.
- *Andelen* af successer vil, med høj sandsynlighed

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg
  - vil antallet af successer med høj sandsynlighed, ligge i et relativt snævert inteval centreret om np, med et moderat multiplum af $\sqrt{n}$ på en numerisk skala.
- *Andelen* af successer vil, med høj sandsynlighed, ligge i et smalt interval centreret om p

Kvadratrodsloven p.100

- For store n; i n uafhængige forsøg med sandsynlighed p for succes i det enkelte forsøg
  - vil antallet af successer med høj sandsynlighed, ligge i et relativt snævert inteval centreret om np, med et moderat multiplum af $\sqrt{n}$ på en numerisk skala.
- *Andelen* af successer vil, med høj sandsynlighed, ligge i et smalt interval centreret om p, med en bredde, der er et moderat multiplum af $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

De store tals lov p.101

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor, vil andelen af successer i n

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor, vil andelen af successer i n, uafhængige forsøg

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor, vil andelen af successer i n, uafhængige forsøg, med overvældende sandsynlighed

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor, vil andelen af successer i n, uafhængige forsøg, med overvældende sandsynlighed, være meget tæt på p

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor, vil andelen af successer i n, uafhængige forsøg, med overvældende sandsynlighed, være meget tæt på p, sandsynligheden for succes i det enkelte forsøg. Mere formelt:

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor, vil andelen af successer i n, uafhængige forsøg, med overvældende sandsynlighed, være meget tæt på p, sandsynligheden for succes i det enkelte forsøg. Mere formelt:
    - for uafhængige forsøg

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor, vil andelen af successer i n, uafhængige forsøg, med overvældende sandsynlighed, være meget tæt på p, sandsynligheden for succes i det enkelte forsøg. Mere formelt:
  - for uafhængige forsøg, med sandsynlighed p for succes i hvert forsøg

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor, vil andelen af successer i n, uafhængige forsøg, med overvældende sandsynlighed, være meget tæt på p, sandsynligheden for succes i det enkelte forsøg. Mere formelt:
  - for uafhængige forsøg, med sandsynlighed p for succes i hvert forsøg, for hver $\epsilon > 0$, uanset størrelse, for $n \rightarrow \infty$

De store tals lov p.101

- Hvis n er stor, vil andelen af successer i n, uafhængige forsøg, med overvældende sandsynlighed, være meget tæt på p, sandsynligheden for succes i det enkelte forsøg. Mere formelt:
  - for uafhængige forsøg, med sandsynlighed p for succes i hvert forsøg, for hver $\epsilon > 0$, uanset størrelse, for $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\left(\text{Andelen af successer i de } n \text{ forsøg afviger mindre end } \epsilon \text{ fra } p\right) \to 1$$

By A har en befolkning på 4 millioner, og by B har en befolkning på 6 millioner.

By A har en befolkning på 4 millioner, og by B har en befolkning på 6 millioner. Begge byer har den same andel af kvinder

By A har en befolkning på 4 millioner, og by B har en befolkning på 6 millioner. Begge byer har den same andel af kvinder. Man tager en tilfældig stikprøve af personer (med tilbagelægning), fra *hver* by for at estimere denne andel.

By A har en befolkning på 4 millioner, og by B har en befolkning på 6 millioner. Begge byer har den same andel af kvinder. Man tager en tilfældig stikprøve af personer (med tilbagelægning), fra *hver* by for at estimere denne andel. Følgende tre metoder til at bestemme stikprøvestørrelserne overvejes

By A har en befolkning på 4 millioner, og by B har en befolkning på 6 millioner. Begge byer har den same andel af kvinder. Man tager en tilfældig stikprøve af personer (med tilbagelægning), fra *hver* by for at estimere denne andel. Følgende tre metoder til at bestemme stikprøvestørrelserne overvejes

- I: En 0,01% stikprøve fra hver by

By A har en befolkning på 4 millioner, og by B har en befolkning på 6 millioner. Begge byer har den same andel af kvinder. Man tager en tilfældig stikprøve af personer (med tilbagelægning), fra *hver* by for at estimere denne andel. Følgende tre metoder til at bestemme stikprøvestørrelserne overvejes

- I: En 0,01% stikprøve fra hver by
- II: En stikprøve på 400 fra hver by.

By A har en befolkning på 4 millioner, og by B har en befolkning på 6 millioner. Begge byer har den same andel af kvinder. Man tager en tilfældig stikprøve af personer (med tilbagelægning), fra *hver* by for at estimere denne andel. Følgende tre metoder til at bestemme stikprøvestørrelserne overvejes

- I: En 0,01% stikprøve fra hver by
- II: En stikprøve på 400 fra hver by.
- III: En 0,1% stikprøve fra by A, og en 0,075% stikprøve fra by B.

Spørgsmål 3

Spørgsmål 3

- Angiv, for hvilke metoder estimatet p_A for by A og estimatet p_B for by B har samme præcision.

1 ☐ Ingen af metoderne giver samme præcision for A og B

2 ☐ Kun metode I giver samme præcision for A og B

3 ☐ Kun metode II giver samme præcision for A og B

4 ☐ Metode I og II giver samme præcision for A og B

5 ☐ Metode II og III giver samme præcision for A og B

6 ☐ Ved ikke

- En 0,01% stikprøve fra hver by

- En 0,01% stikprøve fra hver by
  - Stikprøvestørrelserne er

- En 0,01% stikprøve fra hver by
  - Stikprøvestørrelserne er 400

- En 0,01% stikprøve fra hver by
  - Stikprøvestørrelserne er 400 og 600;

- En 0,01% stikprøve fra hver by
  - Stikprøvestørrelserne er 400 og 600; præcisionen af estimaterne er proportional med $\frac{1}{\sqrt{400}}$ respektivt $\frac{1}{\sqrt{600}}$

- En 0,01% stikprøve fra hver by
  - Stikprøvestørrelserne er 400 og 600; præcisionen af estimaterne er proportional med $\frac{1}{\sqrt{400}}$ respektivt $\frac{1}{\sqrt{600}}$
- En stikprøve på 400 fra hver by.

- En 0,01% stikprøve fra hver by
  - Stikprøvestørrelserne er 400 og 600; præcisionen af estimaterne er proportional med $\frac{1}{\sqrt{400}}$ respektivt $\frac{1}{\sqrt{600}}$
- En stikprøve på 400 fra hver by.
  - Vi får lige gode estimater

- En 0,01% stikprøve fra hver by
  - Stikprøvestørrelserne er 400 og 600; præcisionen af estimaterne er proportional med $\frac{1}{\sqrt{400}}$ respektivt $\frac{1}{\sqrt{600}}$
- En stikprøve på 400 fra hver by.
  - Vi får lige gode estimater
- En 0,1% stikprøve fra by A, og en 0,075% stikprøve fra by B.

- En 0,01% stikprøve fra hver by
  - Stikprøvestørrelserne er 400 og 600; præcisionen af estimaterne er proportional med $\frac{1}{\sqrt{400}}$ respektivt $\frac{1}{\sqrt{600}}$
- En stikprøve på 400 fra hver by.
  - Vi får lige gode estimater
- En 0,1% stikprøve fra by A, og en 0,075% stikprøve fra by B.
  - Stikprøvestørrelserne er 4.000 og 4.500, stikprøven fra B er en lille smule bedre.

Kombinatorik (counting App. 1.)

Kombinatorik (counting App. 1.)

- Hvis vi har N forskellige elementer, på hvor mange måder kan vi da udtage en stikpøve på $n \leq N$ uden tilbagelægning?

Kombinatorik (counting App. 1.)

- Hvis vi har N forskellige elementer, på hvor mange måder kan vi da udtage en stikpøve på $n \leq N$ uden tilbagelægning?
  - Det første element kan udtages på

Kombinatorik (counting App. 1.)

- Hvis vi har N forskellige elementer, på hvor mange måder kan vi da udtage en stikprøve på $n \leq N$ uden tilbagelægning?
  - Det første element kan udtages på N forskellige måder.

Kombinatorik (counting App. 1.)

- Hvis vi har N forskellige elementer, på hvor mange måder kan vi da udtage en stikpøve på $n \leq N$ uden tilbagelægning?
  - Det første element kan udtages på N forskellige måder.
  - Det andet element skal udtages ud af en population på $N-1$ individer, hvilket således kan ske på $N-1$ måder.

Kombinatorik (counting App. 1.)

- Hvis vi har N forskellige elementer, på hvor mange måder kan vi da udtage en stikpøve på $n \leq N$ uden tilbagelægning?
  - Det første element kan udtages på N forskellige måder.
  - Det andet element skal udtages ud af en population på $N-1$ individer, hvilket således kan ske på $N-1$ måder.
  - Alt i alt kan vi udtage en stikprøve på n elementer ud af en population på N, på

Kombinatorik (counting App. 1.)

- Hvis vi har N forskellige elementer, på hvor mange måder kan vi da udtage en stikpøve på $n \leq N$ uden tilbagelægning?
  - ◇ Det første element kan udtages på N forskellige måder.
  - ◇ Det andet element skal udtages ud af en population på $N-1$ individer, hvilket således kan ske på $N-1$ måder.
  - ◇ Alt i alt kan vi udtage en stikprøve på n elementer ud af en population på N, på

$$(N)_n$$

Kombinatorik (counting App. 1.)

- Hvis vi har N forskellige elementer, på hvor mange måder kan vi da udtage en stikpøve på $n \leq N$ uden tilbagelægning?
  - ◇ Det første element kan udtages på N forskellige måder.
  - ◇ Det andet element skal udtages ud af en population på $N-1$ individer, hvilket således kan ske på $N-1$ måder.
  - ◇ Alt i alt kan vi udtage en stikprøve på n elementer ud af en population på N, på

$$(N)_n = N(N-1)\ldots(N-n+1)$$

Kombinatorik (counting App. 1.)

- Hvis vi har N forskellige elementer, på hvor mange måder kan vi da udtage en stikpøve på $n \leq N$ uden tilbagelægning?
  - ◇ Det første element kan udtages på N forskellige måder.
  - ◇ Det andet element skal udtages ud af en population på $N-1$ individer, hvilket således kan ske på $N-1$ måder.
  - ◇ Alt i alt kan vi udtage en stikprøve på n elementer ud af en population på N, på

$$(N)_n = N(N-1)\ldots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

måder.

Kombinatorik (counting App. 1.)

- Hvis vi har N forskellige elementer, på hvor mange måder kan vi da udtage en stikpøve på $n \leq N$ uden tilbagelægning?
  - Det første element kan udtages på N forskellige måder.
  - Det andet element skal udtages ud af en population på $N-1$ individer, hvilket således kan ske på $N-1$ måder.
  - Alt i alt kan vi udtage en stikprøve på n elementer ud af en population på N, på

$$(N)_n = N(N-1)\dots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

    måder.
- Hvor $(N)_n$ betegner antallet af ordnede stikprøver af størrelse n ud af N elementer

Uden ordning af elementerne

Uden ordning af elementerne

- Vi indfører symbolet $\left(\begin{array}{c} N \\ \\ n \end{array}\right)$ til at betegne antallet af måder, hvorpå vi kan udtage en stikprøve af størrelse n ud af N uden ordning.

Uden ordning af elementerne

- Vi indfører symbolet $\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)$ til at betegne antallet af måder, hvorpå vi kan udtage en stikprøve af størrelse n ud af N uden ordning.
- Vi kan få en ordnet stikprøve ved at ordne en uordnet,

Uden ordning af elementerne

- Vi indfører symbolet $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ til at betegne antallet af måder, hvorpå vi kan udtage en stikprøve af størrelse n ud af N uden ordning.
- Vi kan få en ordnet stikprøve ved at ordne en uordnet,
- Der er $n!$ forskellige måder, hvorpå vi kan ordne n elementer,

Uden ordning af elementerne

- Vi indfører symbolet $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ til at betegne antallet af måder, hvorpå vi kan udtage en stikprøve af størrelse n ud af N uden ordning.
- Vi kan få en ordnet stikprøve ved at ordne en uordnet,
- Der er $n!$ forskellige måder, hvorpå vi kan ordne n elementer, så

Uden ordning af elementerne

- Vi indfører symbolet $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ til at betegne antallet af måder, hvorpå vi kan udtage en stikprøve af størrelse n ud af N uden ordning.
- Vi kan få en ordnet stikprøve ved at ordne en uordnet,
- Der er $n!$ forskellige måder, hvorpå vi kan ordne n elementer, så

$$(N)_n$$

Uden ordning af elementerne

- Vi indfører symbolet $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ til at betegne antallet af måder, hvorpå vi kan udtage en stikprøve af størrelse n ud af N uden ordning.
- Vi kan få en ordnet stikprøve ved at ordne en uordnet,
- Der er $n!$ forskellige måder, hvorpå vi kan ordne n elementer, så

$$(N)_n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Uden ordning af elementerne

- Vi indfører symbolet $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ til at betegne antallet af måder, hvorpå vi kan udtage en stikprøve af størrelse n ud af N uden ordning.
- Vi kan få en ordnet stikprøve ved at ordne en uordnet,
- Der er $n!$ forskellige måder, hvorpå vi kan ordne n elementer, så

$$(N)_n = \frac{N!}{(N-n)!} = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$$

Uden ordning af elementerne

- Vi indfører symbolet $\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)$ til at betegne antallet af måder, hvorpå vi kan udtage en stikprøve af størrelse n ud af N uden ordning.
- Vi kan få en ordnet stikprøve ved at ordne en uordnet,
- Der er $n!$ forskellige måder, hvorpå vi kan ordne n elementer, så

$$(N)_n = \frac{N!}{(N-n)!} = \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right) n!$$

Uden ordning af elementerne

- Vi indfører symbolet $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ til at betegne antallet af måder, hvorpå vi kan udtage en stikprøve af størrelse n ud af N uden ordning.
- Vi kan få en ordnet stikprøve ved at ordne en uordnet,
- Der er $n!$ forskellige måder, hvorpå vi kan ordne n elementer, så

$$(N)_n = \frac{N!}{(N-n)!} = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} n!$$

- Vi har således

$$\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Stikprøvetagning med tilbagelægning

Stikprøvetagning med tilbagelægning

- n elementer udtages ud af en population med N elementer, hvor alle elementer har samme sandsynlighed for at blive udtrukket og således, at det samme emne kan udtages hver gang

Stikprøvetagning uden tilbagelægning

Stikprøvetagning med tilbagelægning

- n elementer udtages ud af en population med N elementer, hvor alle elementer har samme sandsynlighed for at blive udtrukket og således, at det samme emne kan udtages hver gang

Stikprøvetagning uden tilbagelægning

- n elementer udtages ud af en population med N elementer, hvor alle elementer har samme sandsynlighed for at blive udtrukket og således, at et emne kun kan udtrækkes en gang

Den hypergeometriske fordeling

Den hypergeometriske fordeling

- Vi betragter en population, med N individer, hvor hvert individ er karakteriseret ved besiddelse eller mangel af en egenskab - succes/fiasko - modellen.

Den hypergeometriske fordeling

- Vi betragter en population, med N individer, hvor hvert individ er karakteriseret ved besiddelse eller mangel af en egenskab - succes/fiasko - modellen.
- Når vi udtager n elementer uden tilbagelægning ændrer den relative forekomst af individer med egenskaben sig mellem hver trækning.

Den hypergeometriske fordeling

- Vi betragter en population, med N individer, hvor hvert individ er karakteriseret ved besiddelse eller mangel af en egenskab - succes/fiasko - modellen.
- Når vi udtager n elementer uden tilbagelægning ændrer den relative forekomst af individer med egenskaben sig mellem hver trækning.
- Vi kan bestemme sandsynligheden for ud af en stikprøve på n at få netop g med egenskaben.

Den hypergeometriske fordeling

- Vi betragter en population, med N individer, hvor hvert individ er karakteriseret ved besiddelse eller mangel af en egenskab - succes/fiasko - modellen.
- Når vi udtager n elementer uden tilbagelægning ændrer den relative forekomst af individer med egenskaben sig mellem hver trækning.
- Vi kan bestemme sandsynligheden for ud af en stikprøve på n at få netop g med egenskaben.
- Sandsynligheden bestemmes som antallet af måder, hvormed vi kan udtage en stikpøve med netop g “positive” i forhold til det totale antal af mulige stikprøver.

Hypergeometrisk fordeling fortsat

Hypergeometrisk fordeling fortsat

- Antallet af måder hvormed vi kan udtage g positive elementer på

  er

Hypergeometrisk fordeling fortsat

- Antallet af måder hvormed vi kan udtage g positive elementer på er $\begin{pmatrix} G \\ g \end{pmatrix}$

Hypergeometrisk fordeling fortsat

- Antallet af måder hvormed vi kan udtage g positive elementer på er $\begin{pmatrix} G \\ g \end{pmatrix}$
- Antallet af måder, hvormed vi kan udtage $b = n - g$ negative

  elementer på er

Hypergeometrisk fordeling fortsat

- Antallet af måder hvormed vi kan udtage g positive elementer på er $\begin{pmatrix} G \\ g \end{pmatrix}$
- Antallet af måder, hvormed vi kan udtage $b = n - g$ negative elementer på er $\begin{pmatrix} N-G \\ n-g \end{pmatrix}$

Hypergeometrisk fordeling fortsat

- Antallet af måder hvormed vi kan udtage g positive elementer på er $\begin{pmatrix} G \\ g \end{pmatrix}$
- Antallet af måder, hvormed vi kan udtage $b = n - g$ negative elementer på er $\begin{pmatrix} N - G \\ n - g \end{pmatrix}$
- Antallet af måder, hvormed vi kan udtage n elementer ud af N på er

Hypergeometrisk fordeling fortsat

- Antallet af måder hvormed vi kan udtage g positive elementer på er $\begin{pmatrix} G \\ g \end{pmatrix}$
- Antallet af måder, hvormed vi kan udtage $b = n - g$ negative elementer på er $\begin{pmatrix} N-G \\ n-g \end{pmatrix}$
- Antallet af måder, hvormed vi kan udtage n elementer ud af N på er $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$

- så sandsynligheden for hændelsen A_g at få netop g positive elementer ud af n er

- så sandsynligheden for hændelsen A_g at få netop g positive elementer ud af n er

$$\mathrm{P}(A_g)$$

- så sandsynligheden for hændelsen A_g at få netop g positive elementer ud af n er

$$\mathrm{P}(A_g) = \frac{\binom{G}{g}}{}$$

- så sandsynligheden for hændelsen A_g at få netop g positive elementer ud af n er

$$\mathsf{P}(A_g) = \frac{\begin{pmatrix} G \\ g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N - G \\ n - g \end{pmatrix}}{}$$

- så sandsynligheden for hændelsen A_g at få netop g positive elementer ud af n er

$$\mathsf{P}(A_g) = \frac{\begin{pmatrix} G \\ g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-G \\ n-g \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$

Eksempel på hypergeometrisk fordeling

Eksempel på hypergeometrisk fordeling

- Et firma, der har været belastet af et dårligt arbejdsklima, har foretaget en anonym tilfredshedsundersøgelse blandt medarbejderne.

Eksempel på hypergeometrisk fordeling

- Et firma, der har været belastet af et dårligt arbejdsklima, har foretaget en anonym tilfredshedsundersøgelse blandt medarbejderne.
- Denne undersøgelse har vist, at der i en afdeling med 19 medarbejdere er 7, der må forventes indledningsvist at modarbejde ledelsesmæssige tiltag til forbedring af arbejdsklimaet.

Eksempel på hypergeometrisk fordeling

- Et firma, der har været belastet af et dårligt arbejdsklima, har foretaget en anonym tilfredshedsundersøgelse blandt medarbejderne.
- Denne undersøgelse har vist, at der i en afdeling med 19 medarbejdere er 7, der må forventes indledningsvist at modarbejde ledelsesmæssige tiltag til forbedring af arbejdsklimaet.
- Et konsulentfirma har anbefalet at nedsætte en konstruktiv arbejdsgruppe på 3 personer, der skal komme med forslag.

Eksempel på hypergeometrisk fordeling

- Et firma, der har været belastet af et dårligt arbejdsklima, har foretaget en anonym tilfredshedsundersøgelse blandt medarbejderne.
- Denne undersøgelse har vist, at der i en afdeling med 19 medarbejdere er 7, der må forventes indledningsvist at modarbejde ledelsesmæssige tiltag til forbedring af arbejdsklimaet.
- Et konsulentfirma har anbefalet at nedsætte en konstruktiv arbejdsgruppe på 3 personer, der skal komme med forslag.
- Det forventes, at gruppen kan præstere nyttige resultater, hvis der er mindst to konstruktive medarbejdere i arbejdsgruppen.

- Vurder mulighederne for, at arbejdsgruppen får succes

- Vurder mulighederne for, at arbejdsgruppen får succes
- Nedsættelse af arbejdsgruppen kan betragtes som stikprøvetagning uden tilbagelægning.

- Vurder mulighederne for, at arbejdsgruppen får succes
- Nedsættelse af arbejdsgruppen kan betragtes som stikprøvetagning uden tilbagelægning.
- Vi definerer hændelserne K_i som hændelsen, at der er netop i konstruktive personer i arbejdsgruppen

- Vurder mulighederne for, at arbejdsgruppen får succes
- Nedsættelse af arbejdsgruppen kan betragtes som stikprøvetagning uden tilbagelægning.
- Vi definerer hændelserne K_i som hændelsen, at der er netop i konstruktive personer i arbejdsgruppen

$$\mathsf{P}(\text{succes}) = \mathsf{P}(K_2 \cup K_3) = \mathsf{P}(K_2) + \mathsf{P}(K_3)$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}} + \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{12 \cdot 11}{2} \cdot 7 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6}}{\frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 2}} = \frac{682}{969}$$

Afsnit 2.1, 2.2 og 2.5

- Binomialfordelingen p.81 : $\mathsf{P}(k \text{ succeser}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$
- Normalfordelingsapproksimationen p.99

$$\mathsf{P}(\text{mellem } a \text{ og } b) = \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right)$$

- Hypergeometrisk fordeling - stikprøve uden tilbagelægning - p.125

$$\mathsf{P}(g \text{ gode og } b \text{ dårlige}) = \frac{\begin{pmatrix} G \\ g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ b \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$