Sandsynlighedsregning
1. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Anvendt Matematik og Computer Science
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby – Danmark
Email: bfni@dtu.dk

Hvad er sandsynlighedsregning?

- Formel/matematisk måde til at håndtere tilfældigheder
- Intuition kan være stærkt misvisende men kan blive voldsomt forbedret ved brug af sandsynlighedsregning

Kursus form

- 2 timers forelæsning
- 2 timers øvelser
- 2-3 timer til læsning, studie, forståelse
- 2-3 timers arbejde med opgaver og eksempler
- Introduktionsskrivelse på hjemmeside
- Ugentlige forslag til hjemme opgaver, heraf 4 obligatoriske
- løsninger til de fleste opgaver på hjemmeside, kort løsning til opgaver med ulige numre i lærebogen
- Transparenter tilgængelige på hjemmeside (tilstræbes)

Vigtigste nye emner i 1.1 - 1.6

- Udfald (ω), udfaldsrum (Ω), hændelse (A, B)
- Komplementærhændelse: A^c, fælleshændelse: $A \cap B$ og foreningshændelse: $A \cup B$.
- Aksiomer: $0 \leq P(A) \leq 1, P(\Omega) = 1, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ for A og B disjunkte.
- Betinget sandsynlighed $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  - Multiplikationsformlen $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$
- Uafhængighed (Generaliseres til k hændelser) $P(A|B) = P(A|B^c) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Bayes sætning

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

- Teknikker ved sekvensforsøg - fødselsdagseksemplet

Grundlæggende begreber

- Vi vil lave en (matematisk) model for et eksperiment
- Et udfald(outcome)
- Samlingen af alle mulige udfald kaldes udfaldsrummet (eng. outcome(sample) space)
- En samling/mængde af udfald er en hændelse (an event)

Lige sandsynlige udfald p.3

- Intuitivt tiltrækkende
- Hvis alle udfald i en endelig mængde Ω er lige sandsynlige, så er sandsynligheden for hændelsen A lig antallet af udfald (elementer) i A delt med antalet af udfald (elementer) i Ω

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

- Standard eksempler er møntkast, korteksempler, terningkast, lotto

---

- Vi får dog brug for mere generalitet end dette

Grundlæggende definitioner i sandsynlighedsregning

Udfald	ω	
Hændelse	A, B	
Udfaldsrum	Ω	Mængden af mulige udfald
Komplementær hændelse	$A^c = \Omega \backslash A$	
Foreningshændelse	$A \cup B$	Udfaldet er i mindst een af A og B
Fælleshændelse	$A \cap B$	Udfaldet er i både A og B
Den tomme eller umulige hændelse	$\emptyset$	

Se Tabel 1 i Pitman page 19

(Naturlige) regler for sandsynligheder

- Vi tilknytter sandsynligheder (mål) til hændelser
- Sandsynligheden for en hændelse er ikke negativ og højst en $0 \leq P(A) \leq 1$
- Den totale sandsynlighed er een: $P(\Omega) = 1$
- Addition af sandsynligheder for ikke-overlappende hændelser. For A og B gensidigt udelukkende, dvs. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivitet)

Aksiomer og første afledede resultater

$$0 \leq P(A) \leq 1, \qquad P(\Omega) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{for } A \cap B = \emptyset$$

Hvoraf udledes

$$P(\emptyset) = 0, \qquad P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(inklusion- eksklusionsformlen, udvides opg. 1.3.11 og 1.3.12)

Antag, at 15% af svenske gråænder har dobbelt svømmehud og ekstra lange næb, at 30% har dobbelt svømmehud, og, at 32.5% har ekstra lange næb.

Spørgsmål 1

Hvad er andelen af svenske gråænder, der hverken har dobbelt svømmehud eller ekstra lange næb?

1 ☐ 22,5%

2 ☐ 37,5%

3 ☐ 52,5%

4 ☐ 67,5%

5 ☐ 68,75%

6 ☐ Ved ikke

Betinget sandsynlighed

Der gælder:

$$P(A \cap B) \leq P(B)$$

- Der eksisterer da et tal $0 \leq c \leq 1$ så:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot c$$

  Vi kalder tallet c for den betingede sandsynlighed for A givet B

- og skriver $c = P(A|B)$

Betinget sandsynlighed - fortolkning

- Hvis vi ved, at vores udfald er i mængden B (B er indtruffet)
- Delvis men ikke fuld information om udfaldet
- For $P(B) > 0$ er $P(A|B)$ veldefineret og vi får:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ multiplikations reglen

Antag, at 15% af svenske gråænder har dobbelt svømmehud og ekstra lange næb, at 30% har dobbelt svømmehud, og, at 32.5% har ekstra lange næb. En svensk ornitolog observerer en gråand med ekstra langt næb i sin kikkert.

Spørgsmål 2

Hvad er sandsynligheden for, at den observerede gråand har dobbelt svømmehud?

1 ☐ 17,5%

2 ☐ 30,0%

3 ☐ 32,5%

4 ☐ 46,2%

5 ☐ 50,0%

6 ☐ Ved ikke

Uafhængighed

- Model for begivenheder, der ikke påvirker hinanden.
- Kendskab til at en hændelse har indtruffet vil ikke påvirke sandsynligheden for om den anden er indtruffet
- Det virker rimeligt at formode at hændelserne "min bil vil starte imorgen" og "aktiemarkedet vil stige mere end 1%" ikke vekselvirker og således kan antages at være uafhængige
- Hændelserne: Toget bliver forsinket; det vil sne imorgen - er næppe uafhængige
- Uafhængige hændelser (den matematiske definition)

$$P(A|B) = P(A|B^c) = P(A) \qquad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Et meget vigtigt begreb og ofte en nødvendig forudsætning for mange beregninger

Opgave 1.4.10

- To kraftværker sikrer strømforsyningen til et givet område.
- Kraftværkerne er i drift med sandsynlighed 0.4 henholdsvis 0.5.
- Hvis begge kraftværker er i drift, er der tilstrækkeligt med strøm. Hvis kun et af dem er i drift er stømforsyningen tilstrækkelig med sandsynlighed 0.6. Hvis ingen er i drift er strømforsyningen utilstrækkelig.
- Hvad er sandsynligheden for, at netop k værker er i drift? $k = 0, 1, 2$
- Betegn hændelserne, at kraftværk i er i drift, med V_i
- Betegn hændelsen, at der er tilstrækkelig strøm, med S
- Oplysningerne fra opgaveteksten kan nu skrives formelt

$$P(V_1) = 0.4,\ P(V_2) = 0.5,\ P(S|V_1 \cap V_2) = 1$$

$$P(S|(V_1 \cap V_2^c) \cup (V_1^c \cap V_2)) = 0.6,\ P(S|(V_1 \cup V_2)^c) = P(S|V_1^c \cap V_2^c) = 0$$

- Vi betegner hændelserne, at k værker er i drift, med F_k
- Vi har $F_2 = V_1 \cap V_2$, således at $P(F_2) = P(V_1 \cap V_2)$. Da V_1 og V_2 er uafhængige får vi $P(F_2) = P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P(V_2) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2$
- Vi har $F_0 = (V_1 \cup V_2)^c = V_1^c \cap V_2^c$. $P(F_0) = P(V_1^c \cap V_2^c) = P(V_1^c)P(V_2^c)$ idet V_1^c og V_2^c er uafhængige da V_1 og V_2 er uafhængige. Med standardreglen $P(V_1^c) = 1 - P(V_1)$ får vi

$$P(F_0) = P(V_1^c)P(V_2^c) = (1 - P(V_1))(1 - P(V_2)) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3$$

- Endelig er $F_1 = (V_1 \cap V_2^c) \cup (V_1^c \cap V_2) = (V_1 \cup V_2) \setminus (V_1 \cap V_2)$. Ved brug af det første udtryk får vi $P(F_1) = P((V_1 \cap V_2^c) \cup (V_1^c \cap V_2))$. Da $V_1 \cap V_2^c$ og $V_1^c \cap V_2$ er gensidigt udelukkende fås $P(F_1) = P(V_1 \cap V_2^c) + P(V_1^c \cap V_2)$. Endelig får vi ved brug af uafhængigheden $P(F_1) = P(V_1)P(V_2^c) + P(V_1^c)P(V_2) = 0.5 (= 1 - 0.2 - 0.3)$.

- Beregn sansynligheden for, at der er tilstækkelig strøm. De givne oplysninger kan udtrykkes ved brug af hændelserne F_k.

$$P(S|F_0) = 0,\ P(S|F_1) = 0.6,\ P(S|F_2) = 1$$

Vi kan altså svare, når vi ved, hvilken af hændelserne F_k, der er indtruffet. Det virker vel umiddelbart fornuftigt, at svaret er en slags gennemsnit - et vægtet gennemsnit. Reglen om gennemsnittet af betingede sandsynligheder formaliserer - beviser, at dette er rigtigt. De tre hændelser F_0, F_1, F_2 udgør en partitionering af Ω. Vi finder således

$$P(S) = P(S|F_0)P(F_0) + P(S|F_1)P(F_1) + P(S|F_2)P(F_2)$$

$$= 0 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 = 0.5$$

Partitionering/klassedeling side 20

- Hvis vi opdeler en mængde B i et antal indbyrdes disjunkte mængder B_i, kaldes samlingen B_i en klassedeling af B
- På præcis tilsvarende vis kan vi opdele en hændelse B i et antal gensidigt udelukkende (mutually exclusive) hændelser B_i. Vi kalder dette en partitionering af B
- Formelt er $B_i, i = 1, \ldots, n$ en partitionering af B, hvis:

$$B_i \cap B_j = \emptyset \text{ for } i \neq j \text{ og } \cup_{i=1}^{n} B_i = B$$

- Ethvert udfald (element) i B findes i een og kun een af hændelserne B_i

Endelig additivitet

- For en partitionering $\{B_i\}, i = 1, \ldots, n$ af B har vi fra reglen om additivitet, at

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

- Hvis $\{B_i\}, i = 1, \ldots, n$ er en partitionering af B må $\{A \cap B_i\}, i = 1, \ldots, n$ være en partitionering af $A \cap B$. Så:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

- benytter vi multiplikationsreglen for $P(A \cap B_i)$ får vi

$$P(A \cap B) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

- For $B = \Omega$ får vi

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

- Reglen om gennemsnit af betingede sandsynligheder p. 41

Opgave 1.5.4

- Et digitalt kommunikationssystem består af en sender og en modtager. I et transmissionsinterval sender senderen enten et signal, der skal fortolkes som 0 eller et signal, der skal fortolkes som 1. Ved hvert intervals afslutning, foretager modtageren et bedste gæt af om det afsendte signal skal fortolkes som 0 eller 1. Betragt nu hændelserne:
  - ◇ T_0 “Senderen sender 0”
  - ◇ T_1 “Senderen sender 1”
  - ◇ R_0 “Modtageren modtager 0”
  - ◇ R_1 “Modtageren modtager 1”
- Antag at $P(R_0|T_0) = 0.99$, $P(R_1|T_1) = 0.98$, og $P(T_1) = 0.5$.
- Find sandsynligheden for en transmissionsfejl
- Find sandsynligheden for en transmissionsfejl givet R_1

Sandsynligheden for en fejl givet R_1

- Vi indfører hændelsen E: “Transmissionsfejl”. $E = (T_0 \cap R_1) \cup (T_1 \cap R_0)$.
- Sandsynligheden for en transmissionsfejl. $P(E) = P((T_0 \cap R_1) \cup (T_1 \cap R_0)) = P(T_0 \cap R_1) + P(T_1 \cap R_0) = P(R_1|T_0)P(T_0) + P(R_0|T_1)P(T_1) = 0.01 * 0.5 + 0.02 * 0.5 = 0.015$
- $P(E|R_1) = P(T_0|R_1)$.(Bayes sætning)

$$P(T_0|R_1) = \frac{P(T_0 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{P(R_1|T_0)P(T_0)}{P(R_1|T_0)P(T_0) + P(R_1|T_1)P(T_1)}$$

$$= \frac{0.01 * 0.5}{0.01 * 0.5 + 0.98 * 0.5} = \frac{0.01}{0.99}$$

Den generelle Bayes sætning

- For en partitionering $B_1, \ldots, B_n$ af udfaldsrummet Ω,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

- “Ombytning af betingning”
- Begreberne apriori, aposteori sandsynligheder

Vi betragter en produktion af integrerede kredsløb. Over lang tids produktion er andelen af defekte kredsløb 20 %. En grundig afprøvning af hver enkelt kredsløb er meget dyr, så man overvejer at bruge en billigere men ikke helt pålidelig testprocedure. Alle intakte kredsløb accepteres af testen men desværre accepteres også 10 % af de defekte.

Spørgsmål 3

Givet et kredsløb har passeret testen, hvad er da sandsynligheden for, at det er intakt.

1 ☐ $\frac{1}{2}$

2 ☐ $\frac{38}{41}$

3 ☐ $\frac{9}{10}$

4 ☐ $\frac{40}{41}$

5 ☐ 1

6 ☐ Ved ikke

Et medicinsk problem

- En patient har et særligt symptom. Man ønsker at bestemme sandsynligheden for, at patienten lider af en given sygdom. Patienten tilhører en subpopulation for hvilken man ved, at 10% lider af sygdommen. Af dem, der lider af sygdommen, har 75% symptomet. 5% af patienterne, der ikke lider af sygdommen, har symptomet.
  - Hvad er sandsynligheden for, at patienten har sygdommen?
  - Ændrer denne sandsynlighed sig, hvis forekomsten af sygdommen i subpopulationen er 1% snarere end 10%?
    - Forsøg først at gætte et svar?

- Definer hændelsen S: patienten har symptomet
- Definer hændelsen D: patienten lider af sygdommen
- Vi har to mulige partitioneringer (S, S^c), and (D, D^c).
- Den relevante sandsynlighed er: $P(D|S)$
- Vi ved at $P(D) = 0.1$, $P(S|D) = 0.75$, $P(S|D^c) = 0.05$.
- Vi har alle ingredienserne til brug af Bayes' sætning

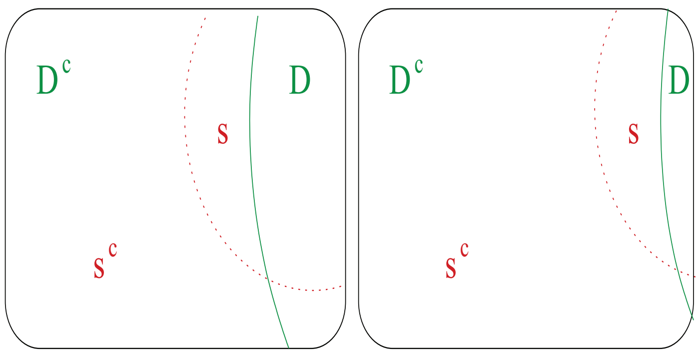
$$P(D|S) = \frac{P(S|D)P(D)}{P(S|D)P(D) + P(S|D^c)P(D^c)}$$

- Numerisk fås $\frac{0.75 \cdot 0.1}{0.075+0.05(1-0.1)} = 0.625$
- Med de ændrede værdier $\frac{0.75 \cdot 0.01}{0.0075+0.05(1-0.01)} = 0.13$

Populationsandele/forklaring

Kategori	$P(D) = 0.1$	$P(D) = 0.01$
Sygdom og symptom $(P(D \cap S))$	0.075	0.0075
Sygdom uden symptom $(P(D \cap S^c))$	0.025	0.0025
"Rask" og symptom $(P(D^c \cap S))$	0.045	0.0495
"rask" uden symptom $(P(D^c \cap S^c))$	0.855	0.9405

- Hvor vi har brugt multiplikations (kæde) reglen: $P(D \cap S) = P(S|D)P(D)$ gentagne gange



Sekvens af hændelser 1.6

- Multiplikationsreglen: $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
- For tre hændelser A, B, er C, kan vi benytte multiplikationsreglen rekursivt

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)P(C|A \cap B) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

- Dette generaliserer til n hændelser p.56

$$P\left(\cap_{i=1}^n A_i\right) = \left(P(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n)\right)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})$$

Fødselsdagseksemplet

- Hvad er sandsynligheden for at mindst to blandt 25 personer har samme fødselsdag? (Antag, at alle dage er lige sandsynlige og se bort fra skudår)
- Vi vil tænke sekventielt, eksempelvis ved at spørge dem en ad gangen.
- D_n er nu hændelsen, at alle blandt de første n spurgte har forskellige fødselsdage.
- Det er åbenbart, at $P(D_1) = 1$
- For $P(D_2)$ får vi $P(D_2) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2|D_1)$
- Man finder $P(D_2|D_1) = \frac{364}{365}$
- Og generelt $P(D_{n+1}|D_n) = \frac{365-n}{365}$
- $P(D_{25}) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdots \frac{341}{365} = 0.44$

Uafhængighed af n hændelser

$$P(B|A) = P(B|A^c) = P(B)$$

$$\begin{aligned} P(C|A \cap B) &= P(C|A^c \cap B) = P(C|A \cap B^c) \\ &= P(C|A^c \cap B^c) = P(C) \end{aligned}$$

- Det kan vises, at denne definition svarer til at forlange, at for alle delmængder af k hændelser gælder

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

- Dvs. at for k vilkårlige hændelser gælder, at sandsynligheden for fælleshændelsen er lig produktet af sandsynlighederne for de enkelte hændelser
- Uafhængighed er typisk meget svær (umulig) at vise

Sandsynlighedsregningens grundregler

- $0 \le P(A) \le 1 \qquad P(\Omega) = 1 \qquad P(\emptyset) = 0$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Komplementær regel p.21: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Differens regel p.22, for $A \subset B$: $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A)$
- Inklusion, eksklusion for 2 hændelser p.22: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Betinget sandsynlighed for A givet B (partiel information) p.36: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Multiplikationsreglen p.37: $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$
- Gennemsnit af betingede sandsynligheder (loven om den totale sandsynlighed) p.41: (B_i er en partitionering), $P(A) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i)$
- Bayes sætning p.49: (B_i er en partitionering): $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$
- Uafhængighed p.42: $P(A|B) = P(A|B^c) \qquad (P(A \cap B) = P(A)P(B))$