

# Sandsynlighedsregning

## 12. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Matematik og Computer Science

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Kgs. Lyngby – Danmark

Email: [bfni@imm.dtu.dk](mailto:bfni@imm.dtu.dk)

# Dagens nye emner afsnit 6.5



- Den bivariate normalfordeling

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

$$Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z, \quad X, Z \text{ uafhængige standard NF}$$

- $V = \mu_V + \sigma_V X$ ,  $W = \mu_W + \sigma_W Y$  er bivariat normalfordelt med  $E(V) = \mu_V$ ,  $E(W) = \mu_W$ ,  $\text{Var}(V) = \sigma_V^2$ ,  $\text{Var}(W) = \sigma_W^2$ , samt  $\text{Cov}(V, W) = \rho\sigma_V\sigma_W$ .

$$V = \sum_i a_i Z_i, \quad W = \sum_i b_i Z_i \text{ med } Z_i \sim \text{normal}(\mu_i, \sigma_i^2) \text{ uafhængige}$$

$$\Rightarrow V \sim \text{normal} \left( \sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2 \right), W \sim \text{normal} \left( \sum b_i \mu_i, \sum b_i^2 \sigma_i^2 \right),$$

$$\text{Cov}(V, W) = \sum_i a_i b_i \sigma_i^2 \quad (V, W) \text{ bivariat normalfordelte}$$

# Bivariat NF - en lille forhistorie



# Bivariat NF - en lille forhistorie



- givet  $X$  med  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

# Bivariat NF - en lille forhistorie



- givet  $X$  med  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel  $Y$  der for givet  $X = x$  har

# Bivariat NF - en lille forhistorie



- givet  $X$  med  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel  $Y$  der for givet  $X = x$  har
  - ◇  $E(Y|X = x) = \rho x,$

# Bivariat NF - en lille forhistorie



- givet  $X$  med  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel  $Y$  der for givet  $X = x$  har
  - ◇  $E(Y|X = x) = \rho x$ , hvor  $-1 < \rho < 1$

# Bivariat NF - en lille forhistorie



- givet  $X$  med  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel  $Y$  der for givet  $X = x$  har
  - ◇  $E(Y|X = x) = \rho x$ , hvor  $-1 < \rho < 1$
  - ◇  $\text{Var}(Y|X = x) = 1 - \rho^2$

# Bivariat NF - en lille forhistorie



- givet  $X$  med  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel  $Y$  der for givet  $X = x$  har
  - ◇  $E(Y|X = x) = \rho x$ , hvor  $-1 < \rho < 1$
  - ◇  $\text{Var}(Y|X = x) = 1 - \rho^2$
  - ★  $Y$  givet  $X = x$  normalfordelt.

# Bivariat NF - en lille forhistorie



- givet  $X$  med  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel  $Y$  der for givet  $X = x$  har
  - ◇  $E(Y|X = x) = \rho x$ , hvor  $-1 < \rho < 1$
  - ◇  $\text{Var}(Y|X = x) = 1 - \rho^2$
  - ★  $Y$  givet  $X = x$  normalfordelt.

$$f_Y(y|X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y - \rho x)^2}{1 - \rho^2}}$$

# forhistorie fortsat



# forhistorie fortsat



- Den simultane fordeling  $f(x, y)$

# forhistorie fortsat



- Den simultane fordeling  $f(x, y)$

$$f(x, y)$$

# forhistorie fortsat



- Den simultane fordeling  $f(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

# forhistorie fortsat



- Den simultane fordeling  $f(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}}$$

# forhistorie fortsat



- Den simultane fordeling  $f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}} \end{aligned}$$

# forhistorie fortsat



- Den simultane fordeling  $f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}} \end{aligned}$$

- Udtrykket er symmetrisk i  $x$  og  $y$

# forhistorie fortsat



- Den simultane fordeling  $f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}} \end{aligned}$$

- Udtrykket er symmetrisk i  $x$  og  $y$  så  $Y$  er også standard normal fordelt.

# Et kapitel til i forhistorien



# Et kapitel til i forhistorien



- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får

# Et kapitel til i forhistorien



- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får
- $E(Z) = 0$

# Et kapitel til i forhistorien



- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får
- $E(Z) = 0$
- $E(Z^2)$

# Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får
- $E(Z) = 0$
- $E(Z^2) = E\left(\frac{Y^2 + \rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1 - \rho^2}\right)$ .

# Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får
- $E(Z) = 0$
- $E(Z^2) = E\left(\frac{Y^2 + \rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1 - \rho^2}\right)$ .
- $E(X^2)$

# Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får
- $E(Z) = 0$
- $E(Z^2) = E\left(\frac{Y^2 + \rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1 - \rho^2}\right)$ .
- $E(X^2) = E(Y^2)$

# Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får
- $E(Z) = 0$
- $E(Z^2) = E\left(\frac{Y^2 + \rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1 - \rho^2}\right)$ .
- $E(X^2) = E(Y^2) = 1$

# Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får
- $E(Z) = 0$
- $E(Z^2) = E\left(\frac{Y^2 + \rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1 - \rho^2}\right)$ .
- $E(X^2) = E(Y^2) = 1$
- $E(XY)$

# Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får
- $E(Z) = 0$
- $E(Z^2) = E\left(\frac{Y^2 + \rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1 - \rho^2}\right)$ .
- $E(X^2) = E(Y^2) = 1$
- $E(XY) = E_X(E_Y(XY|X)) = E_X(\rho X^2) = \rho$

# Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ , og får
- $E(Z) = 0$
- $E(Z^2) = E\left(\frac{Y^2 + \rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1 - \rho^2}\right)$ .
- $E(X^2) = E(Y^2) = 1$
- $E(XY) = E_X(E_Y(XY|X)) = E_X(\rho X^2) = \rho$
- Alt i alt:  $E(Z^2) = 1$ .

# Slut på forhistorie



# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?



# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?

$$P(X \leq x, Z \leq z) =$$



# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?



$$P(X \leq x, Z \leq z) = P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) =$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?



$$P(X \leq x, Z \leq z) = P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) =$$

$$P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) =$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?



$$P(X \leq x, Z \leq z) = P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) =$$

$$P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^x$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?



$$P(X \leq x, Z \leq z) = P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) =$$

$$P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^x \int$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?



$$P(X \leq x, Z \leq z) = P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) =$$

$$P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z}$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?



$$P(X \leq x, Z \leq z) = P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) =$$

$$P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} f(u, y) dy du$$

# Slut på forhistorie



Fordelingen af  $(X, Z)$ ?

$$P(X \leq x, Z \leq z) = P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) =$$

$$P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} f(u, y) dy du =$$

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{u^2 - 2\rho uy + y^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du =$$

# Slut på forhistorie



Fordelingen af  $(X, Z)$ ?

$$P(X \leq x, Z \leq z) = P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) =$$

$$P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} f(u, y) dy du =$$

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{u^2 - 2\rho u y + y^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du =$$

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(y - \rho u)^2 + (1 - \rho^2)u^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du$$

# Slut på forhistorie



Fordelingen af  $(X, Z)$ ?

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Z \leq z) &= P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) = \\ P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} f(u, y) dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{u^2 - 2\rho u y + y^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(y - \rho u)^2 + (1 - \rho^2)u^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(y - \rho u)^2}{2(1 - \rho^2)}} dy \right] du & \end{aligned}$$

# Slut på forhistorie



Fordelingen af  $(X, Z)$ ?

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Z \leq z) &= P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) = \\ P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} f(u, y) dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{u^2 - 2\rho u y + y^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(y - \rho u)^2 + (1 - \rho^2)u^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(y - \rho u)^2}{2(1 - \rho^2)}} dy \right] du &= \\ = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \Phi\left(\frac{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z - \rho u}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) du & \end{aligned}$$

# Slut på forhistorie



Fordelingen af  $(X, Z)$ ?

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Z \leq z) &= P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) = \\ P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} f(u, y) dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{u^2 - 2\rho u y + y^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(y - \rho u)^2 + (1 - \rho^2)u^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(y - \rho u)^2}{2(1 - \rho^2)}} dy \right] du &= \\ = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \Phi\left(\frac{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z - \rho u}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) du &= \Phi(x)\Phi(z) \end{aligned}$$

# Slut på forhistorie



Fordelingen af  $(X, Z)$ ?

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Z \leq z) &= P\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq z\right) = \\ P\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} f(u, y) dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{u^2 - 2\rho u y + y^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(y - \rho u)^2 + (1 - \rho^2)u^2}{2(1 - \rho^2)}} dy du &= \\ \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(y - \rho u)^2}{2(1 - \rho^2)}} dy \right] du &= \\ = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \Phi\left(\frac{\rho u + \sqrt{1 - \rho^2} z - \rho u}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) du &= \Phi(x)\Phi(z) \end{aligned}$$

- så  $X$  og  $Z$  er uafhængige standard normalfordelte

# Slut på forhistorie



# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?



# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x, y)dx dy = f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)dx dy$$



# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x, y)dx dy = f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)dx dy$$

$$dx dy = dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) \right)$$

$$\approx \sqrt{1 - \rho^2}dx dz$$

$$g(x, z)dx dz$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x, y)dx dy = f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)dx dy$$

$$dx dy = dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) \right)$$

$$\approx \sqrt{1 - \rho^2}dx dz$$

$$g(x, z)dx dz = f(x, y)dx dy$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x, y)dx dy = f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)dx dy$$

$$dx dy = dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) \right)$$

$$\approx \sqrt{1 - \rho^2}dx dz$$

$$g(x, z)dx dz = f(x, y)dx dy = f \left( x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z \right) dx \sqrt{1 - \rho^2}dz$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x, y)dx dy = f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)dx dy$$

$$dx dy = dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) \right)$$

$$\approx \sqrt{1 - \rho^2}dx dz$$

$$g(x, z)dx dz = f(x, y)dx dy = f \left( x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z \right) dx \sqrt{1 - \rho^2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2}x^2 - 2\rho x}$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x, y)dx dy = f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)dx dy$$

$$dx dy = dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) \right)$$

$$\approx \sqrt{1 - \rho^2}dx dz$$

$$g(x, z)dx dz = f(x, y)dx dy = f \left( x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z \right) dx \sqrt{1 - \rho^2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)}$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x, y)dx dy = f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)dx dy$$

$$dx dy = dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) \right)$$

$$\approx \sqrt{1 - \rho^2}dx dz$$

$$g(x, z)dx dz = f(x, y)dx dy = f \left( x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z \right) dx \sqrt{1 - \rho^2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) + (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)^2}{1 - \rho^2}} dx \sqrt{1 - \rho^2}dz$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$\begin{aligned} f(x, y)dx dy &= f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z)dx dy \\ dx dy &= dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z) \right) \\ &\approx \sqrt{1 - \rho^2} dx dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x, z)dx dz &= f(x, y)dx dy = f \left( x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z \right) dx \sqrt{1 - \rho^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z) + (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z)^2}{1 - \rho^2}} dx \sqrt{1 - \rho^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} \end{aligned}$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$\begin{aligned} f(x, y)dx dy &= f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)dx dy \\ dx dy &= dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) \right) \\ &\approx \sqrt{1 - \rho^2}dx dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x, z)dx dz &= f(x, y)dx dy = f \left( x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z \right) dx \sqrt{1 - \rho^2}dz \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) + (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)^2}{1 - \rho^2}} dx \sqrt{1 - \rho^2}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dx dz \end{aligned}$$

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$\begin{aligned} f(x, y)dx dy &= f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z)dx dy \\ dx dy &= dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z) \right) \\ &\approx \sqrt{1 - \rho^2} dx dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x, z)dx dz &= f(x, y)dx dy = f \left( x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z \right) dx \sqrt{1 - \rho^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z) + (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z)^2}{1 - \rho^2}} dx \sqrt{1 - \rho^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dx dz \end{aligned}$$

- så  $X$  og  $Z$  er uafhængige standard normalfordelte

# Slut på forhistorie

Fordelingen af  $(X, Z)$ ?  $P(X \in dx, Z \in dz) = g(x, z)dx dz$



Vi finder - noget heuristisk -

$$\begin{aligned} f(x, y)dx dy &= f(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)dx dy \\ dx dy &= dx \left( \rho(x + dx) + \sqrt{1 - \rho^2}(z + dz) - (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) \right) \\ &\approx \sqrt{1 - \rho^2}dx dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x, z)dx dz &= f(x, y)dx dy = f\left(x, \rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z\right) dx \sqrt{1 - \rho^2}dz \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z) + (\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}z)^2}{1 - \rho^2}} dx \sqrt{1 - \rho^2}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dx dz \end{aligned}$$

- så  $X$  og  $Z$  er uafhængige standard normalfordelte
- og vi kan skrive  $Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2}Z$

På en passende normeret skala beskriver  $X$  og  $Y$  vægten af henholdsvis mørbraden og svinekammen hos slagtesvin. Man kan antage, at vægtene kan beskrives ved en standardiseret bivariat normalfordeling med korrelationskoefficient  $\rho = \frac{3}{5}$ .

## Spørgsmål 1

Bestem andelen af slagtesvin, hvor summen af de normerede vægte overstiger 1.

1   $1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{5}{16}}\right)$

2   $1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)^2$

3   $1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4   $1 - \Phi(1)$

5   $1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$

6  Ved ikke

# Standardiseret bivariat normal fordeling



# Standardiseret bivariat normal fordeling



- Samtidig fordeling af to ikke-uafhængige (korrelerede størrelser)

# Standardiseret bivariat normal fordeling



- Samtidig fordeling af to ikke-uafhængige (korrelerede størrelser)
  - ◇ Højde og vægt af mennesker

# Standardiseret bivariat normal fordeling



- Samtidig fordeling af to ikke-uafhængige (korrelerede størrelser)
  - ◇ Højde og vægt af mennesker
  - ◇ En lang række biologiske og tekniske målinger

# Standardiseret bivariat normal fordeling



- Samtidig fordeling af to ikke-uafhængige (korrelerede størrelser)
  - ◊ Højde og vægt af mennesker
  - ◊ En lang række biologiske og tekniske målinger
- For to standardiserede normalfordelte variable finder vi

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$



- Hvis  $X$  og  $Y$  er standardiseret bivariat normalfordelt med korellation  $\rho$ , kan vi skrive  $Y$  som

$$Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z$$

- Hvis  $X$  og  $Y$  er standardiseret bivariat normalfordelt med korellation  $\rho$ , kan vi skrive  $Y$  som

$$Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z$$

- hvor  $X$  og  $Z$  er uafhængige standardiserede normalfordelte variable

# Betinget tæthed



$$f_X(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \rho y)^2}{1 - \rho^2}}$$

# Betinget tæthed



$$f_X(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \rho y)^2}{1 - \rho^2}}$$

- De betingede tætheder i normalfordelingen er igen normale

# Generel bivariat normalfordeling



# Generel bivariat normalfordeling



- $U$  og  $V$  er bivariat normalfordelt hvis  $(X, Y)$  med

$$X = \frac{U - \mu_u}{\sigma_U}, \quad Y = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V}$$

# Generel bivariat normalfordeling



- $U$  og  $V$  er bivariat normalfordelt hvis  $(X, Y)$  med

$$X = \frac{U - \mu_u}{\sigma_U}, \quad Y = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V}$$

- er standardiseret bivariat normalfordelt

# Fædre og sønners højder



# Fædre og sønners højder



- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.

# Fædre og sønners højder



- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad  $U$  være en faders højde, og

# Fædre og sønners højder



- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad  $U$  være en faders højde, og  $V$  være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at

# Fædre og sønners højder



- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad  $U$  være en faders højde, og  $V$  være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
-

# Fædre og sønners højder



- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad  $U$  være en faders højde, og  $V$  være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- $E(U) = 172,5\text{cm}$ ,

# Fædre og sønners højder



- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad  $U$  være en faders højde, og  $V$  være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- $E(U) = 172,5\text{cm}$ ,  $E(V) = 175\text{cm}$ ,

# Fædre og sønners højder



- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad  $U$  være en faders højde, og  $V$  være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- $E(U) = 172,5\text{cm}$ ,  $E(V) = 175\text{cm}$ ,  $SD(U) = SD(V) = 5\text{cm}$  samt

# Fædre og sønners højder



- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad  $U$  være en faders højde, og  $V$  være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- $E(U) = 172,5\text{cm}$ ,  $E(V) = 175\text{cm}$ ,  $SD(U) = SD(V) = 5\text{cm}$  samt  $\rho = 0,5$ .

# Fædre og sønners højder



- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad  $U$  være en faders højde, og  $V$  være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- $E(U) = 172,5\text{cm}$ ,  $E(V) = 175\text{cm}$ ,  $SD(U) = SD(V) = 5\text{cm}$  samt  $\rho = 0,5$ .
- Man ønsker at bestemme den forventede højde af en søn, hvis fader er 185cm.

# Generel bivariat normalfordeling



# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \quad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \quad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \quad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X =$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \quad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \quad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $E(Y|X = 2,5)$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5\text{cm}}{5\text{cm}}, \quad Y = \frac{V - 175\text{cm}}{5\text{cm}}$$

- $U = 185\text{cm} \Leftrightarrow X = 2,5$
- $E(Y|X = 2,5) = 0,5$ .

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5\text{cm}}{5\text{cm}}, \quad Y = \frac{V - 175\text{cm}}{5\text{cm}}$$

- $U = 185\text{cm} \Leftrightarrow X = 2,5$
- $E(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5\text{cm}}{5\text{cm}}, \quad Y = \frac{V - 175\text{cm}}{5\text{cm}}$$

- $U = 185\text{cm} \Leftrightarrow X = 2,5$
- $E(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $E(V|U = 185\text{cm})$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5\text{cm}}{5\text{cm}}, \quad Y = \frac{V - 175\text{cm}}{5\text{cm}}$$

- $U = 185\text{cm} \Leftrightarrow X = 2,5$
- $E(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $E(V|U = 185\text{cm}) = 175\text{cm}$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5\text{cm}}{5\text{cm}}, \quad Y = \frac{V - 175\text{cm}}{5\text{cm}}$$

- $U = 185\text{cm} \Leftrightarrow X = 2,5$
- $E(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $E(V|U = 185\text{cm}) = 175\text{cm} + 1,25$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5\text{cm}}{5\text{cm}}, \quad Y = \frac{V - 175\text{cm}}{5\text{cm}}$$

- $U = 185\text{cm} \Leftrightarrow X = 2,5$
- $E(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $E(V|U = 185\text{cm}) = 175\text{cm} + 1,25 \cdot 5\text{cm}$

# Generel bivariat normalfordeling



- Vi danner  $(X, Y)$  ud fra  $U$  og  $V$

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \quad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $E(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $E(V|U = 185cm) = 175cm + 1,25 \cdot 5cm = 181,25cm$

## Regression towards the mean

Følgende tabel angiver amerikanske studerendes resultater ved kvalifikationsprøver til college



PSAT score	gennemsnit:1200	SD:100
SAT score	gennemsnit:1300	SD:90
korrelation: 0,6		

## Spørgsmål 2

Hvor stor en andel af de studerende, der fik 1000 i PSAT score scorede samtidigt over gennemsnittet i SAT score?

- 1  0,9332
- 2  0,8413
- 3  0,5
- 4  0,1587
- 5  0,0668
- 6  Ved ikke

# Linearkombinationer af uafhængige normal fordelte variable



# Linearkombinationer af uafhængige normal fordelte variable



- $Z_i \in normal(\mu_i, \sigma_i^2)$  uafhængige

$$V = \sum_i a_i Z_i, \quad W = \sum_i b_i Z_i$$

# Linearkombinationer af uafhængige normalfordelte variable



- $Z_i \in normal(\mu_i, \sigma_i^2)$  uafhængige

$$V = \sum_i a_i Z_i, \quad W = \sum_i b_i Z_i$$

- Parret  $V, W$  er bivariat normalfordelt med

$$\mu_V = \sum_i a_i \mu_i \quad \mu_W = \sum_i b_i \mu_i$$

$$\sigma_V^2 = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2 \quad \sigma_W^2 = \sum_i b_i^2 \sigma_i^2$$

$$\text{Cov}(V, W) = \sum_i a_i b_i \sigma_i^2$$



- Vi har  $Z_1 \in \text{normal}(3, 4)$  og  $Z_2 \in \text{normal}(-1, 9)$ .

- Vi har  $Z_1 \in normal(3, 4)$  og  $Z_2 \in normal(-1, 9)$ .
- Vi danner  $V = Z_1 + 2Z_2$  og  $W = 2Z_1 - Z_2$ .

$$E(V) = 3 + 2 \cdot (-1) = 1 \quad E(W) = 2 \cdot 3 - (-1) = 7$$

$$\text{Var}(V) = 4 + 4 \cdot 9 = 40 \quad \text{Var}(W) = 4 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\text{Cov}(V, W) = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 9 = -10$$

$$\text{Corr}(V, W) = \frac{-10}{\sqrt{40}\sqrt{25}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

# Ukorrelerede variable er uafhængige



# Ukorrelerede variable er uafhængige



- To linear kombinationer af  $V = \sum_i a_i Z_i$  og  $W = \sum_i b_i Z_i$  af uafhængige  $normal(\mu_i, \sigma_i^2)$  fordelte variable er uafhængige hvis og kun hvis de er ukorrelerede. Det vil sige hvis  $\sum_i a_i b_i \sigma_i^2 = 0$

# Ukorrelerede variable er uafhængige



- To linear kombinationer af  $V = \sum_i a_i Z_i$  og  $W = \sum_i b_i Z_i$  af uafhængige  $normal(\mu_i, \sigma_i^2)$  fordelte variable er uafhængige hvis og kun hvis de er ukorrelerede. Det vil sige hvis  $\sum_i a_i b_i \sigma_i^2 = 0$
- Med  $Z_i \in normal(0, 1)$   $i = 1, 2$  og  $V = \frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$ ,  $W = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{2}}$  får vi

$$\text{Cov}(V, W) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{(-1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 0$$

# Ukorrelerede variable er uafhængige



- To linear kombinationer af  $V = \sum_i a_i Z_i$  og  $W = \sum_i b_i Z_i$  af uafhængige  $normal(\mu_i, \sigma_i^2)$  fordelte variable er uafhængige hvis og kun hvis de er ukorrelerede. Det vil sige hvis  $\sum_i a_i b_i \sigma_i^2 = 0$
- Med  $Z_i \in normal(0, 1)$   $i = 1, 2$  og  $V = \frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$ ,  $W = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{2}}$  får vi

$$\text{Cov}(V, W) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{(-1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 0$$

- dvs.  $V$  og  $W$  er uafhængige

# Ukorrelerede variable er uafhængige



- To linear kombinationer af  $V = \sum_i a_i Z_i$  og  $W = \sum_i b_i Z_i$  af uafhængige  $normal(\mu_i, \sigma_i^2)$  fordelte variable er uafhængige hvis og kun hvis de er ukorrelerede. Det vil sige hvis  $\sum_i a_i b_i \sigma_i^2 = 0$
- Med  $Z_i \in normal(0, 1)$   $i = 1, 2$  og  $V = \frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$ ,  $W = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{2}}$  får vi

$$\text{Cov}(V, W) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{(-1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 0$$

- dvs.  $V$  og  $W$  er uafhængige
- Summen og differensen af to standardiserede normalfordelte variable er uafhængige

## Eksempel 2 side 457...

- Parret  $(X, Y)$  er bivariat standardiseret normalfordelt med korrelation  $\rho$ .



## Eksempel 2 side 457...

- Parret  $(X, Y)$  er bivariat standardiseret normalfordelt med  korrelation  $\rho$ .
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?

## Eksempel 2 side 457...

- Parret  $(X, Y)$  er bivariat standardiseret normalfordelt med  korrelation  $\rho$ .
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?
- $P(X > 0, Y > 0)$

## Eksempel 2 side 457...

- Parret  $(X, Y)$  er bivariat standardiseret normalfordelt med  korrelation  $\rho$ .
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?
- $P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0, \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z > 0)$

## Eksempel 2 side 457...

- Parret  $(X, Y)$  er bivariat standardiseret normalfordelt med  korrelation  $\rho$ .
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?
- $P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0, \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z > 0) =$   
 $P\left(X > 0, Z > \frac{-\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} X\right)$

## Eksempel 2 side 457...

- Parret  $(X, Y)$  er bivariat standardiseret normalfordelt med  korrelation  $\rho$ .
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?
- $P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0, \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z > 0) =$   
 $P\left(X > 0, Z > \frac{-\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} X\right)$

Herefter bruger vi rotationsinvariansen af den bivariante normalfordeling for uafhængige variable

$$\begin{aligned} P(X > 0, Y > 0) &= P\left(X > 0, Z > \frac{-\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} X\right) \\ &= \frac{\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right)}{2\pi} \end{aligned}$$

Den simultane fordeling af mødres og døtres højder kan beskrives ved en bivariat normalfordeling med korrelation  $\frac{1}{2}$ . På passende standardiseret skala gælder for begge enkeltvariable, at middelværdien er 0 og standardafvigelsen er 1.



### Spørgsmål 3

Hvad er andelen af døtre, der er over gennemsnitshøjde og samtidigt mindre end deres mødre?

- 1   $\frac{1}{10}$
- 2   $\frac{1}{8}$
- 3   $\frac{1}{6}$
- 4   $\frac{1}{4}$
- 5   $\frac{1}{3}$
- 6  Ved ikke

# Afsnit 6.5



- Den standardiserede bivariate normalfordeling

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

$$Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z, \quad X, Z \text{ uafhængige standard NF}$$

- $V = \mu_V + \sigma_V X$ ,  $W = \mu_W + \sigma_W Y$  er bivariat normalfordelt med  $E(V) = \mu_V$ ,  $E(W) = \mu_W$ ,  $\text{Var}(V) = \sigma_V^2$ ,  $\text{Var}(W) = \sigma_W^2$ , samt  $\text{Cov}(V, W) = \rho\sigma_V\sigma_W$ .

$$V = \sum_i a_i Z_i, \quad W = \sum_i b_i Z_i \text{ med } Z_i \sim \text{normal}(\mu_i, \sigma_i^2) \text{ uafhængige}$$

$$\Rightarrow V \sim \text{normal}\left(\sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2\right), W \sim \text{normal}\left(\sum b_i \mu_i, \sum b_i^2 \sigma_i^2\right),$$

$$\text{Cov}(V, W) = \sum_i a_i b_i \sigma_i^2 \quad (V, W) \text{ bivariat normalfordelte}$$