Sandsynlighedsregning
12. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Matematik og Computer Science

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Kgs. Lyngby – Danmark

Email: bfni@imm.dtu.dk

Dagens nye emner afsnit 6.5

- Den bivariate normalfordeling

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

$$Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z, \qquad X, Z \text{ uafhængige standard NF}$$

- $V = \mu_V + \sigma_V X$, $W = \mu_W + \sigma_W Y$ er bivariat normalfordelt med $\mathsf{E}(V) = \mu_V$, $\mathsf{E}(W) = \mu_W$, $\mathsf{Var}(V) = \sigma_V^2$, $\mathsf{Var}(W) = \sigma_W^2$, samt $\mathsf{Cov}(V,W) = \rho\sigma_V\sigma_W$.

$$V = \sum_i a_i Z_i, \quad W = \sum_i b_i Z_i \text{ med } Z_i \sim normal(\mu_i, \sigma_i^2) \text{ uafhængige}$$

$$\Rightarrow V \sim normal\left(\sum a_i\mu_i, \sum a_i^2\sigma_i^2\right), W \sim normal\left(\sum b_i\mu_i, \sum b_i^2\sigma_i^2\right),$$

$$\mathsf{Cov}(V,W) = \sum_i a_i b_i \sigma_i^2 \qquad (V,W) \text{ bivariat normalfordelte}$$

Bivariat NF - en lille forhistorie

Bivariat NF - en lille forhistorie

- givet X med $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Bivariat NF - en lille forhistorie

- givet X med $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel Y der for givet $X = x$ har

Bivariat NF - en lille forhistorie

- givet X med $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel Y der for givet $X = x$ har
  - $\mathsf{E}(Y|X = x) = \rho x$,

Bivariat NF - en lille forhistorie

- givet X med $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel Y der for givet $X = x$ har
  - $\mathsf{E}(Y|X = x) = \rho x$, hvor $-1 < \rho < 1$

Bivariat NF - en lille forhistorie

- givet X med $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel Y der for givet $X = x$ har
  - $\mathrm{E}(Y|X = x) = \rho x$, hvor $-1 < \rho < 1$
  - $\mathrm{Var}(Y|X = x) = 1 - \rho^2$

Bivariat NF - en lille forhistorie

- givet X med $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel Y der for givet $X = x$ har
  - $\mathrm{E}(Y|X = x) = \rho x$, hvor $-1 < \rho < 1$
  - $\mathrm{Var}(Y|X = x) = 1 - \rho^2$
    - Y givet $X = x$ normalfordelt.

Bivariat NF - en lille forhistorie

- givet X med $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Vi indfører en stokastisk variabel Y der for givet $X = x$ har
  - $\mathsf{E}(Y|X = x) = \rho x$, hvor $-1 < \rho < 1$
  - $\mathsf{Var}(Y|X = x) = 1 - \rho^2$
    - Y givet $X = x$ normalfordelt.

$$f_Y(y|X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}}$$

forhistorie fortsat

forhistorie fortsat

- Den simultane fordeling $f(x,y)$

forhistorie fortsat

- Den simultane fordeling $f(x, y)$

$$f(x, y)$$

forhistorie fortsat

- Den simultane fordeling $f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

forhistorie fortsat

- Den simultane fordeling $f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}}$$

forhistorie fortsat

- Den simultane fordeling $f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{1-\rho^2}}$$

forhistorie fortsat

- Den simultane fordeling $f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{1-\rho^2}}$$

- Udtrykket er symmetrisk i x og y

forhistorie fortsat

- Den simultane fordeling $f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\rho x)^2}{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{1-\rho^2}}$$

- Udtrykket er symmetrisk i x og y så Y er også standard normal fordelt.

Et kapitel til i forhistorien

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får
- $\mathsf{E}(Z) = 0$

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får
- $\mathsf{E}(Z) = 0$
- $\mathsf{E}(Z^2)$

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får
- $\mathsf{E}(Z) = 0$
- $\mathsf{E}(Z^2) = \mathsf{E}\left(\frac{Y^2 + \rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1-\rho^2}\right)$.

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får
- $\mathsf{E}(Z) = 0$
- $\mathsf{E}(Z^2) = \mathsf{E}\left(\frac{Y^2 + \rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1-\rho^2}\right)$.
- $\mathsf{E}(X^2)$

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får
- $\mathsf{E}(Z) = 0$
- $\mathsf{E}(Z^2) = \mathsf{E}\left(\frac{Y^2+\rho^2 X^2-2\rho XY}{1-\rho^2}\right)$.
- $\mathsf{E}(X^2) = \mathsf{E}(Y^2)$

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får
- $\mathsf{E}(Z) = 0$
- $\mathsf{E}(Z^2) = \mathsf{E}\left(\frac{Y^2+\rho^2 X^2-2\rho XY}{1-\rho^2}\right)$.
- $\mathsf{E}(X^2) = \mathsf{E}(Y^2) = 1$

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får
- $\mathsf{E}(Z) = 0$
- $\mathsf{E}(Z^2) = \mathsf{E}\left(\frac{Y^2+\rho^2 X^2-2\rho XY}{1-\rho^2}\right)$.
- $\mathsf{E}(X^2) = \mathsf{E}(Y^2) = 1$
- $\mathsf{E}(XY)$

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får
- $\mathsf{E}(Z) = 0$
- $\mathsf{E}(Z^2) = \mathsf{E}\left(\frac{Y^2+\rho^2 X^2 - 2\rho XY}{1-\rho^2}\right)$.
- $\mathsf{E}(X^2) = \mathsf{E}(Y^2) = 1$
- $\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}_X(\mathsf{E}_Y(XY|X)) = \mathsf{E}_X(\rho X^2) = \rho$

Et kapitel til i forhistorien

- Vi betragter nu $Z = \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$, og får
- $\mathsf{E}(Z) = 0$
- $\mathsf{E}(Z^2) = \mathsf{E}\left(\frac{Y^2+\rho^2X^2-2\rho XY}{1-\rho^2}\right)$.
- $\mathsf{E}(X^2) = \mathsf{E}(Y^2) = 1$
- $\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}_X(\mathsf{E}_Y(XY|X)) = \mathsf{E}_X(\rho X^2) = \rho$
- Alt i alt: $\mathsf{E}(Z^2) = 1$.

Slut på forhistorie

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) =$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2} z\right) =$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x}$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2} z}$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} f(u, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}u$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2} z} f(u, y) \mathsf{d}y \mathsf{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{u^2-2\rho u y+y^2}{2(1-\rho^2)}} \mathsf{d}y \mathsf{d}u =$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} f(u,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{u^2 - 2\rho u y + y^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}y \mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho u)^2 + (1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}y \mathrm{d}u$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2}z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2}z} f(u,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2}z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{u^2-2\rho uy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2}z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(y-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2}z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(y-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} f(u, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{u^2 - 2\rho u y + y^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}y \mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho u)^2 + (1-\rho^2) u^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}y \mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \Phi\left(\frac{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z - \rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \mathrm{d}u$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} f(u,y) \mathsf{d}y \mathsf{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{u^2 - 2\rho u y + y^2}{2(1-\rho^2)}} \mathsf{d}y \mathsf{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho u)^2 + (1-\rho^2) u^2}{2(1-\rho^2)}} \mathsf{d}y \mathsf{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}} \mathsf{d}y\right] \mathsf{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \Phi\left(\frac{\rho u + \sqrt{1-\rho^2} z - \rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \mathsf{d}u = \Phi(x)\Phi(z)$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

$$\mathsf{P}(X \leq x, Z \leq z) = \mathsf{P}\left(X \leq x, \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq z\right) =$$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq \rho X + \sqrt{1-\rho^2} z\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2} z} f(u, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{u^2-2\rho u y+y^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}y \mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}y \mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\rho u+\sqrt{1-\rho^2} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \Phi\left(\frac{\rho u+\sqrt{1-\rho^2} z-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \mathrm{d}u = \Phi(x)\Phi(z)$$

- så X og Z er uafhængige standard normalfordelte

Slut på forhistorie

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)?

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x, z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x, y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x) + \sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z) - (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$

$$\tilde{=}\ \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x) + \sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z) - (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$

$$\overset{\sim}{=} \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z = f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x) + \sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z) - (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$

$$\overset{\sim}{=} \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z = f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f\left(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z\right)\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x) + \sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z) - (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$
$$\stackrel{\sim}{=} \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z = f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f\left(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z\right)\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\,x^2-2\rho x}$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X, Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x) + \sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z) - (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$

$$\stackrel{\sim}{=} \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z = f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f\left(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z\right)\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\, x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)}$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x,\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x) + \sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z) - (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$
$$\stackrel{\sim}{=} \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z = f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f\left(x,\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z\right)\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2-2\rho x(\rho x+\sqrt{1-\rho^2}z)+(\rho x+\sqrt{1-\rho^2}z)^2}{1-\rho^2}}\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x) + \sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z) - (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$

$$\overset{\sim}{=} \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z = f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f\left(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z\right)\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z) + (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)^2}{1-\rho^2}} \mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)? $\mathsf{P}(X\in \mathsf{d}x, Z\in \mathsf{d}z)=g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x,\rho x+\sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x)+\sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z)-(\rho x+\sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$
$$\stackrel{\sim}{=}\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z = f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f\left(x,\rho x+\sqrt{1-\rho^2}z\right)\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2-2\rho x(\rho x+\sqrt{1-\rho^2}z)+(\rho x+\sqrt{1-\rho^2}z)^2}{1-\rho^2}}\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x) + \sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z) - (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$

$$\stackrel{\sim}{=} \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z = f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f\left(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z\right)\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z) + (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)^2}{1-\rho^2}} \mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

- så X og Z er uafhængige standard normalfordelte

Slut på forhistorie

Fordelingen af (X,Z)? $\mathsf{P}(X \in \mathsf{d}x, Z \in \mathsf{d}z) = g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z$

Vi finder - noget heuristisk -

$$f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \mathsf{d}x\left(\rho(x+\mathsf{d}x) + \sqrt{1-\rho^2}(z+\mathsf{d}z) - (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)\right)$$

$$\tilde{=} \sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

$$g(x,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}z = f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = f\left(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2}z\right)\mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2 - 2\rho x(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z) + (\rho x + \sqrt{1-\rho^2}z)^2}{1-\rho^2}} \mathsf{d}x\sqrt{1-\rho^2}\mathsf{d}z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}z$$

- så X og Z er uafhængige standard normalfordelte
- og vi kan skrive $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z$

På en passende normeret skala beskriver X og Y vægten af henholdsvis mørbraden og svinekammen hos slagtesvin. Man kan antage, at vægtene kan beskrives ved en standardiseret bivariat normalfordeling med korrelationskoefficient $\rho = \frac{3}{5}$.

Spørgsmål 1

Bestem andelen af slagtesvin, hvor summen af de normerede vægte overstiger 1.

1 ☐ $1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{5}{16}}\right)$

2 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)^2$

3 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4 ☐ $1 - \Phi(1)$

5 ☐ $1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Standardiseret bivariat normal fordeling

Standardiseret bivariat normal fordeling

- Samtidig fordeling af to ikke-uafhængige (korrelerede størrelser)

Standardiseret bivariat normal fordeling

- Samtidig fordeling af to ikke-uafhængige (korrelerede størrelser)
  - Højde og vægt af mennesker

Standardiseret bivariat normal fordeling

- Samtidig fordeling af to ikke-uafhængige (korrelerede størrelser)
  - Højde og vægt af mennesker
  - En lang række biologiske og tekniske målinger

Standardiseret bivariat normal fordeling

- Samtidig fordeling af to ikke-uafhængige (korrelerede størrelser)
  - Højde og vægt af mennesker
  - En lang række biologiske og tekniske målinger
- For to standardiserede normalfordelte variable finder vi

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

- Hvis X og Y er standardiseret bivariat normalfordelt med korellation ρ, kan vi skrive Y som

$$Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z$$

- Hvis X og Y er standardiseret bivariat normalfordelt med korellation ρ, kan vi skrive Y som

$$Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z$$

- hvor X og Z er uafhængige standardiserede normalfordelte variable

Betinget tæthed

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\rho y)^2}{1-\rho^2}}$$

Betinget tæthed

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\rho y)^2}{1-\rho^2}}$$

- De betingede tætheder i normalfordelingen er igen normale

Generel bivariat normalfordeling

Generel bivariat normalfordeling

- U og V er bivariat normalfordelt hvis (X, Y) med

$$X = \frac{U - \mu_u}{\sigma_U}, \qquad Y = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V}$$

Generel bivariat normalfordeling

- U og V er bivariat normalfordelt hvis (X, Y) med

$$X = \frac{U - \mu_u}{\sigma_U}, \qquad Y = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V}$$

- er standardiseret bivariat normalfordelt

Fædre og sønners højder

Fædre og sønners højder

- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.

Fædre og sønners højder

- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad U være en faders højde, og

Fædre og sønners højder

- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad U være en faders højde, og V være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at

Fædre og sønners højder

- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad U være en faders højde, og V være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
-

Fædre og sønners højder

- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad U være en faders højde, og V være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- $\mathsf{E}(U) = 172,5$cm,

Fædre og sønners højder

- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad U være en faders højde, og V være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- $\mathsf{E}(U) = 172,5$cm, $\mathsf{E}(V) = 175$cm,

Fædre og sønners højder

- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad U være en faders højde, og V være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- E$(U) = 172,5$cm, E$(V) = 175$cm, SD(U) = SD(V) = 5cm samt

Fædre og sønners højder

- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad U være en faders højde, og V være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- $\mathrm{E}(U) = 172,5$cm, $\mathrm{E}(V) = 175$cm, $\mathrm{SD}(U) = \mathrm{SD}(V) = 5$cm samt $\rho = 0,5$.

Fædre og sønners højder

- Baseret på 1078 par af engelske mænd og deres (voksne) sønner har man fundet, at den simultane fordeling af højderne kan beskrives ved en bivariat normalfordling.
- Lad U være en faders højde, og V være en søns højde. Eksperimentelt vides da, at
- $\mathsf{E}(U) = 172,5$cm, $\mathsf{E}(V) = 175$cm, $\mathsf{SD}(U) = \mathsf{SD}(V) = 5$cm samt $\rho = 0,5$.
- Man ønsker at bestemme den forventede højde af en søn, hvis fader er 185cm.

Generel bivariat normalfordeling

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X,Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X =$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $\mathsf{E}(Y|X = 2,5)$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $\mathsf{E}(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X,Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $\mathsf{E}(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X,Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $\mathsf{E}(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $\mathsf{E}(V|U = 185cm)$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $\mathsf{E}(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $\mathsf{E}(V|U = 185cm) = 175cm$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $\mathsf{E}(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $\mathsf{E}(V|U = 185cm) = 175cm + 1,25$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $\mathsf{E}(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $\mathsf{E}(V|U = 185cm) = 175cm + 1,25 \cdot 5cm$

Generel bivariat normalfordeling

- Vi danner (X, Y) ud fra U og V

$$X = \frac{U - 172,5cm}{5cm}, \qquad Y = \frac{V - 175cm}{5cm}$$

- $U = 185cm \Leftrightarrow X = 2,5$
- $\mathsf{E}(Y|X = 2,5) = 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$
- $\mathsf{E}(V|U = 185cm) = 175cm + 1,25 \cdot 5cm = 181,25cm$

Regression towards the mean

Følgende tabel angiver amerikanske studerendes resultater ved kvalifikationsprøver til college

PSAT score	gennemsnit:1200	SD:100
SAT score	gennemsnit:1300	SD:90
korrelation: 0,6		

Spørgsmål 2

Hvor stor en andel af de studerende, der fik 1000 i PSAT score scorede samtidigt over gennemsnittet i SAT score?

1 ☐ 0,9332

2 ☐ 0,8413

3 ☐ 0,5

4 ☐ 0,1587

5 ☐ 0,0668

6 ☐ Ved ikke

Linearkombinationer af uafhængige normal fordelte variable

Linearkombinationer af uafhængige normal fordelte variable

- $Z_i \in normal(\mu_i, \sigma_i^2)$ uafhængige

$$V = \sum_i a_i Z_i, \qquad W = \sum_i b_i Z_i$$

Linearkombinationer af uafhængige normal fordelte variable

- $Z_i \in normal(\mu_i, \sigma_i^2)$ uafhængige

$$V = \sum_i a_i Z_i, \qquad W = \sum_i b_i Z_i$$

- Parret V, W er bivariat normalfordelt med

$$\mu_V = \sum_i a_i \mu_i \qquad \mu_W = \sum_i b_i \mu_i$$

$$\sigma_V^2 = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2 \qquad \sigma_W^2 = \sum_i b_i^2 \sigma_i^2$$

$$\mathsf{Cov}(V, W) = \sum_i a_i b_i \sigma_i^2$$

- Vi har $Z_1 \in normal(3,4)$ og $Z_2 \in normal(-1,9)$.

- Vi har $Z_1 \in normal(3,4)$ og $Z_2 \in normal(-1,9)$.
- Vi danner $V = Z_1 + 2Z_2$ og $W = 2Z_1 - Z_2$.

$$\mathsf{E}(V) = 3 + 2 \cdot (-1) = 1 \qquad \mathsf{E}(W) = 2 \cdot 3 - (-1) = 7$$

$$\mathsf{Var}(V) = 4 + 4 \cdot 9 = 40 \qquad \mathsf{Var}(W) = 4 \cdot 4 + 9 = 25$$

$$\mathsf{Cov}(V,W) = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 9 = -10$$

$$Corr(V,W) = \frac{-10}{\sqrt{40}\sqrt{25}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

Ukorrelerede variable er uafhængige

Ukorrelerede variable er uafhængige

- To linear kombinationer af $V = \sum_i a_i Z_i$ og $W = \sum_i b_i Z_i$ af uafhængige $normal(\mu_i, \sigma_i^2)$ fordelte variable er uafhængige hvis og kun hvis de er ukorrelerede. Det vil sige hvis $\sum_i a_i b_i \sigma_i^2 = 0$

Ukorrelerede variable er uafhængige

- To linear kombinationer af $V = \sum_i a_i Z_i$ og $W = \sum_i b_i Z_i$ af uafhængige $normal(\mu_i, \sigma_i^2)$ fordelte variable er uafhængige hvis og kun hvis de er ukorrelerede. Det vil sige hvis $\sum_i a_i b_i \sigma_i^2 = 0$
- Med $Z_i \in normal(0,1)$ $i = 1,2$ og $V = \frac{Z_1+Z_2}{\sqrt{2}}$, $W = \frac{Z_1-Z_2}{\sqrt{2}}$ får vi

$$\text{Cov}(V, W) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{(-1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 0$$

Ukorrelerede variable er uafhængige

- To linear kombinationer af $V = \sum_i a_i Z_i$ og $W = \sum_i b_i Z_i$ af uafhængige $normal(\mu_i, \sigma_i^2)$ fordelte variable er uafhængige hvis og kun hvis de er ukorrelerede. Det vil sige hvis $\sum_i a_i b_i \sigma_i^2 = 0$
- Med $Z_i \in normal(0,1)$ $i = 1,2$ og $V = \frac{Z_1+Z_2}{\sqrt{2}}$, $W = \frac{Z_1-Z_2}{\sqrt{2}}$ får vi

$$\text{Cov}(V,W) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{(-1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 0$$

- dvs. V og W er uafhængige

Ukorrelerede variable er uafhængige

- To linear kombinationer af $V = \sum_i a_i Z_i$ og $W = \sum_i b_i Z_i$ af uafhængige $normal(\mu_i, \sigma_i^2)$ fordelte variable er uafhængige hvis og kun hvis de er ukorrelerede. Det vil sige hvis $\sum_i a_i b_i \sigma_i^2 = 0$
- Med $Z_i \in normal(0,1)$ $i = 1, 2$ og $V = \frac{Z_1+Z_2}{\sqrt{2}}$, $W = \frac{Z_1-Z_2}{\sqrt{2}}$ får vi

$$\mathrm{Cov}(V, W) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{(-1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 0$$

- dvs. V og W er uafhængige
- Summen og differensen af to standardiserede normalfordelte variable er uafhængige

Eksempel 2 side 457...

- Parret (X, Y) er bivariat standardiseret normalfordelt med korrelation ρ.

Eksempel 2 side 457...

- Parret (X, Y) er bivariat standardiseret normalfordelt med korrelation ρ.
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?

Eksempel 2 side 457...

- Parret (X, Y) er bivariat standardiseret normalfordelt med korrelation ρ.
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?
- $\mathsf{P}(X > 0, Y > 0)$

Eksempel 2 side 457...

- Parret (X, Y) er bivariat standardiseret normalfordelt med korrelation ρ.
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?
- $\mathsf{P}(X > 0, Y > 0) = \mathsf{P}(X > 0, \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z > 0)$

Eksempel 2 side 457...

- Parret (X, Y) er bivariat standardiseret normalfordelt med korrelation ρ.
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?
- $\mathsf{P}(X > 0, Y > 0) = \mathsf{P}(X > 0, \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z > 0) =$
  $\mathsf{P}\left((X > 0, Z > \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} X\right)$

Eksempel 2 side 457...

- Parret (X, Y) er bivariat standardiseret normalfordelt med korrelation ρ.
- Hvad er sandsynligheden for at punktet ligger i første kvadrant?
- $\mathsf{P}(X > 0, Y > 0) = \mathsf{P}(X > 0, \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z > 0) = \mathsf{P}\left((X > 0, Z > \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} X\right)$

Herefter bruger vi rotationsinvariansen af den bivariate normal fordeling for uafhængige variable

$$\mathsf{P}(X > 0, Y > 0) = \mathsf{P}\left(X > 0, Z > \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} X\right)$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} + \mathsf{Arctan}\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{2\pi}$$

Den simultane fordeling af mødres og døtres højder kan beskrives ved en bivariat normalfordeling med korrelation $\frac{1}{2}$. På passende standardiseret skala gælder for begge enkeltvariable, at middelværdien er 0 og standardafvigelsen er 1.

Spørgsmål 3

Hvad er andelen af døtre, der er over gennemsnitshøjde og samtidigt mindre end deres mødre?

1 ☐ $\frac{1}{10}$

2 ☐ $\frac{1}{8}$

3 ☐ $\frac{1}{6}$

4 ☐ $\frac{1}{4}$

5 ☐ $\frac{1}{3}$

6 ☐ Ved ikke

Afsnit 6.5

- Den standardiserede bivariate normalfordeling

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

$$Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z, \qquad X, Z \text{ uafhængige standard NF}$$

- $V = \mu_V + \sigma_V X$, $W = \mu_W + \sigma_W Y$ er bivariat normalfordelt med $\mathsf{E}(V) = \mu_V$, $\mathsf{E}(W) = \mu_W$, $\mathsf{Var}(V) = \sigma_V^2$, $\mathsf{Var}(W) = \sigma_W^2$, samt $\mathsf{Cov}(V,W) = \rho\sigma_V\sigma_W$.

$$V = \sum_i a_i Z_i, \quad W = \sum_i b_i Z_i \text{ med } Z_i \sim normal(\mu_i, \sigma_i^2) \text{ uafhængige}$$

$$\Rightarrow V \sim normal\left(\sum a_i\mu_i, \sum a_i^2\sigma_i^2\right), W \sim normal\left(\sum b_i\mu_i, \sum b_i^2\sigma_i^2\right),$$

$$\mathsf{Cov}(V,W) = \sum_i a_i b_i \sigma_i^2 \qquad (V,W) \text{ bivariat normalfordelte}$$