Sandsynlighedsregning
10. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Matematik og Computer Science

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Kgs. Lyngby – Danmark

Email: bfni@dtu.dk

Dagens emner afsnit 6.1 og 6.2

- Betingede diskrete fordelinger $\mathsf{P}(Y=y|X=x) = \frac{\mathsf{P}(X=x,Y=y)}{\mathsf{P}(X=x)}$
  - $\mathsf{P}(Y=y) = \sum_x \mathsf{P}(X=x)\mathsf{P}(Y=y|X=x)$
- Betinget middelværdi (det diskrete tilfælde)
  - $\mathsf{E}(Y|X=x) = \sum_y y\mathsf{P}(Y=y|X=x)$
  - $\mathsf{E}(Y|X)$ en stokastisk variabel
  - $\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}_X(\mathsf{E}_Y(Y|X)) = \sum_x \mathsf{P}(X=x)\mathsf{E}(Y|X=x)$
  - $\mathsf{E}(g(X,Y)|X=x) = \mathsf{E}(g(x,Y)|X=x)$
  - $\mathsf{E}(XY|X) = X\mathsf{E}(Y|X)$

En virksomhed, der producerer elektriske pærer, har afdelinger i to byer. Fabrikken i by A står for $\frac{2}{3}$ af produktionen. Resten produceres i by B, udaf disse er 1% defekte.

Spørgsmål 1

Hvor stor en andel af det samlede antal pærer, der produceres af virksomheden, fremstilles som intakte i by B?

1 ☐ $\frac{1}{300}$

2 ☐ $\frac{198}{300}$

3 ☐ $\frac{1}{100}$

4 ☐ $\frac{99}{300}$

5 ☐ Spørgsmålet kan ikke besvares pga. manglende oplysninger

6 ☐ Ved ikke

Københavnske boliger 1989 (antal)

Antal beboere:	0	1	2	3	4	5	6
1 værelse	3166	23554	2038	260	69	19	8
2 værelser	4874	73508	26670	3826	955	248	145
3 værelser	2408	31193	29023	8781	3735	925	565
4 værelser	1343	12301	14374	6487	4380	1064	585
5 værelser	436	2877	4376	2487	1977	538	264
6 værelser	442	1553	2748	1775	1543	615	521

- En bolig er således her karakteriseret ved to egenskaber størrelse - X og antal beboere - Y

Relative andele

Antal beboere	0	1	2	3	4	5	6
1 værelse	0,011	0,085	0,007	0,001	0,000	0,000	0,000
2 værelser	0,017	0,264	0,096	0,014	0,003	0,001	0,001
3 værelser	0,009	0,112	0,104	0,032	0,013	0,003	0,002
4 værelser	0,005	0,044	0,052	0,023	0,016	0,004	0,002
5 værelser	0,002	0,010	0,016	0,009	0,007	0,002	0,001
6 værelser	0,002	0,006	0,010	0,006	0,006	0,002	0,002

- Disse relative andele kan fortolkes som sandsynligheder, f.eks. P$(X = 1, Y = 0) = 0,011$ - for hvilket stokastisk eksperiment?

Antallet af beboere i en 3 værelses bolig

- Hvis „nogen“ har valgt en tilfældig bolig, og fortæller os, at den har tre værelser, hvilken sandsynlighedsfordeling vil vi så tillægge antallet af beboere?
  Fra rækken med 3 værelses boliger i tabellerne har vi:

Beboere:	0	1	2	3	4	5	6	Alle
Antal:	2408	31193	29023	8781	3735	925	565	76630
Andel:	0,009	0,112	0,104	0,032	0,013	0,003	0,002	0,275
Andel af 3 værelses	0,031	0,407	0,379	0,115	0,049	0,012	0,007	1,000

- Når vi ved, at boligen har 3 værelser, normerer vi sandsynlighederne, så de summerer til 1 *henover 3-værelsers boliger.*

Betinget sandsynlighed/fordeling

Husk formlen for den betingede sandsynlighed af hændelsen $Y = y$, givet hændelsen $X = x$ (kapitel 1):

$$\mathsf{P}(Y = y | X = x) = \frac{\mathsf{P}(Y = y, X = x)}{\mathsf{P}(X = x)}$$

Betragter vi x som en fast parameter i dette udtryk og y som en variabel, er $\mathsf{P}(Y = y | X = x)$ en sandsynlighedsfordeling for en stokastisk variabel (check det!).

Vi kalder den *Den betingede fordeling af Y givet $X = x$*.
Konkret får vi

$$\mathsf{P}(Y = y | X = 3) = \frac{\mathsf{P}(Y = y, X = 3)}{\mathsf{P}(X = 3)} = \frac{\mathsf{P}(X = 3, Y = y)}{0,275}$$

som i tabellen.

Betinget fordeling afsnit 6.1

- For fastholdt værdi af $X = x$ kan Y variere over hele eller dele af sit udfaldsrum.
- Vi kalder fordelingen af Y for fastholdt $X = x$ for den betingede fordeling af Y givet $X = x$

$$\mathsf{P}(Y = y | X = x) = \frac{\mathsf{P}(X = x, Y = y)}{\mathsf{P}(X = x)}$$

Vi har den meget vigtige:

$$\mathsf{P}(Y = y) = \sum_x \mathsf{P}(Y = y \cap X = x) = \sum_x \mathsf{P}(Y = y | X = x)\mathsf{P}(X = x)$$

Reglen om gennemsnit af betingede fordelinger

Opgave 6.1.2

I en bestemt by har 10% af familierne ingen børn, 20 % har et barn, 40% har to børn, 20 % har tre børn og 10 % har fire børn. Antag, at der er 50% chance for, at det enkelte barn er en pige uafhængigt af antallet af børn i familien. Bestem sandsynlighedsfordelingen for antallet af piger i en familie.

- Vi definerer først relevante stokastiske variable:C antallet af børn i en familie, og G antallet af piger i en familie.
- I en familie med $C = c$ børn finder vi

$$\mathsf{P}(G = i | C = c) = \begin{pmatrix} c \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{c-i}, \qquad i = 0, \ldots c$$

Vi fandt for en familie med $C = c$ børn

$$\mathsf{P}(G = i | C = c) = \begin{pmatrix} c \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{c-i}, \qquad i = 0, \ldots c$$

Vi skal nu finde den *ubetingede* fordeling af antallet af piger G.

Vi benytter reglen om gennemsnittet af betingede sandsynligheder (boksen side 41 eller Chapter 1 summary side 73).

$$\mathsf{P}(G = 0) = \mathsf{P}(G = 0 | C = 0)\mathsf{P}(C = 0) + \mathsf{P}(G = 0 | C = 1)\mathsf{P}(C = 1)$$

$$+ \cdots + \mathsf{P}(G = 0 | C = 4)\mathsf{P}(C = 4)$$

$$= \sum_{c=0}^{4} \mathsf{P}(G = 0 | C = c)\mathsf{P}(C = c)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \frac{2}{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \frac{4}{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \frac{2}{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \frac{1}{10} = \frac{53}{160}$$

Det var for 0 piger. For de andre muligheder får vi:

$$\mathsf{P}(G=i)=\sum_{j=0}^{4}\mathsf{P}(G=i|C=j)\mathsf{P}(C=j)$$

Det vil sige:

$$\mathsf{P}(G=4)=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{160}\qquad \mathsf{P}(G=3)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{16}\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$$

$$\mathsf{P}(G=1)=\frac{2}{5},\qquad \mathsf{P}(G=2)=\frac{17}{80}$$

Den generelle formel er:

$$\mathsf{P}(Y=y)=\sum_{x}\mathsf{P}(Y=y|X=x)\mathsf{P}(X=x)$$

Man kaster tre mønter. De mønter, der lander "plat" kastes igen. Lad X betegne antallet af "krone" efter første kast og Y betegne antallet af "krone" efter andet kast ($0 \leq X \leq Y \leq 3$).

Spørgsmål 2

Angiv den betingede fordeling $f_Y(y|X=x) = \mathrm{P}(Y=y|X=x)$ af Y for $X=x$

1 ☐ $f_Y(y|X=x) = \frac{3!}{y!(3-y)!}\frac{1}{8}, \qquad y = x, \ldots, 3$

2 ☐ $f_Y(y|X=x) = \frac{(3-x)!}{(y-x)!(3-y)!}\frac{1}{2^{3-x}}, \qquad y = x, \ldots, 3$

3 ☐ $f_Y(y|X=x) = \frac{1}{4-x}, \qquad y = x, \ldots, 3$

4 ☐ $f_Y(y|X=x) = \frac{(3+x)!}{(y+x)!(3-y)!}\frac{1}{2^{3-x}}, \qquad y = x, \ldots, 3$

5 ☐ $f_Y(y|X=x) = \frac{(3+x)!}{(y+x)!(3-y)!}\frac{1}{8}, \qquad y = x, \ldots, 3$

6 ☐ Ved ikke

Uafhængighed og betingede fordelinger

Hvis X og Y er uafhængige har vi

$$\mathsf{P}(X = x, Y = y) = \mathsf{P}(X = x) \cdot \mathsf{P}(Y = y)$$

og dermed

$$\mathsf{P}(Y = y | X = x) = \mathsf{P}(Y = y)$$

Omvendt, hvis dette holder $\forall x, y$, må X og Y være uafhængige.

Altså: X og Y er uafhængige, hvis og kun hvis den betingede fordeling af Y givet X er identisk med den ubetingede fordeling af Y.

Med andre ord: Hvis X ikke indeholder information of Y.

Middelantallet af beboere i en treværelses bolig

Beboere:	0	1	2	3	4	5	6	Alle
Andele	0,031	0,407	0,379	0,115	0,049	0,012	0,007	1,000

Hvis vi ved at boligen er treværelses, beregner vi middelværdien i den betingede fordeling:

Betinget middelværdi afsnit 6.2

$$\mathsf{E}(Y|X = x) = \sum_y y\mathsf{P}(Y = y|X = x)$$

$$\mathsf{E}(Y|X = 3) = 0,031 \cdot 0 + + \cdots + 6 \cdot 0,007 = 1,808$$

Betinget middelværdi er en funktion

Vi har de diskrete stokastiske variable X og Y. Hvoraf vi finder

$$\mathsf{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathsf{P}(X = x, Y = y)}{\mathsf{P}(X = x)}$$

med

$$\mathsf{E}(Y = y|X = x) = \sum_y y\mathsf{P}(Y = y|X = x) = h(x)$$

For hvert af de mulige, der kan være tælleligt mange værdier af x, har vi en værdi af $\mathsf{E}(Y = y|X = x)$. Så $\mathsf{E}(Y = y|X = x)$ definerer en funktion af x, som vi kunne kalde $h(x)$ for at lette notation.
En funktion af en stokastisk variabel er selv en stokastisk variabel,så $Z = h(X)$, definerer en ny stokastisk variabel. Vi bruger som regel notationen $Z = \mathsf{E}(Y|X)$ om denne stokastiske variabel.

Betinget middelværdi som stokastisk variabel

Hvad er en stokastisk variabel?

- Vi kan tænke på den som en variabel hvis værdi fastlægges gennem et (stokastisk) eksperiment, vi ikke har udført endnu

Her er sådan en konstruktion:

1. Vælg en tilfældig bolig.
2. Lad X være antallet af værelser i boligen.
3. Lad Z være det gennemsnitlige antal beboere blandt alle de boliger, der har X værelser.

Vi ser at $Z = \mathsf{E}(Y|X)$ er en stokastisk variabel.

- Vi bruger sandsynlighedsregning til at udtrykke, hvad vi ved om dens opførsel. I et eksperiment, hvor vi måler både X og Y, udtrykker den simultane fordeling, hvad vi ved om X's og Y's opførsel før eksperimentet.

Information og betingede fordelinger

Lad X og Y være to stokastiske variable knyttet til samme eksperiment, og forestil jer en observatør der kun får adgang til X.

For hende vil den realiserede værdi af Y være ukendt, både før *(a priori)* og efter *(a posteriori)* eksperimentet udføres.

For hende vil Y *a priori* være fordelt efter den *ubetingede* fordeling $\mathsf{P}(Y = y)$. Den vigtigste størrelse i denne fordeling er forventningsværdien $\mathsf{E}(Y)$.

Efter eksperimentet vil hun have adgang til informationen $X = x$. Derfor reviderer hun sin opfattelse af Y's fordeling til den *betingede* fordeling $\mathsf{P}(Y = y|X = x)$. Den vigtigste størrelse i denne fordeling er den betingede forventningsværdi $\mathsf{E}(Y|X = x)$.

Hvad er fordelingen af $Z = \mathrm{E}(Y|X)$?

For boligeksemplet finder vi:

x	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X = x)$	0,104	0,396	0,275	0,145	0,046	0,033
$\mathrm{E}(Y\|X = x)$	0,9902	1,3087	1,8079	2,1429	2,4139	2,6908

Dermed har vi direkte fordelingen af $Z = \mathrm{E}(Y|X)$:

z	0,9902	1,3087	1,8079	2,1429	2,4139	2,6908
$\mathrm{P}(Z = z)$	0,104	0,396	0,275	0,145	0,046	0,033

Hvad er forventningsværdien af $Z = \mathsf{E}(Y|X)$?

$$h(x) = \mathsf{E}(Y|X = x) = \sum_y y\mathsf{P}(Y = y|X = x)$$

Husk $\mathsf{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\mathsf{P}(X = x)$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(Z) &= \mathsf{E}(\mathsf{E}(Y|X)) = \mathsf{E}(h(X)) = \sum_x \overbrace{\mathsf{E}(Y|X = x)}^{h(x)=}\, \mathsf{P}(X = x) \\
&= \sum_x \left(\sum_y y\mathsf{P}(Y = y|X = x) \right) \mathsf{P}(X = x) \\
&= \sum_x \left(\sum_y y \frac{\mathsf{P}(X = x, Y = y)}{\mathsf{P}(X = x)} \right) \mathsf{P}(X = x) \\
&= \sum_y y \sum_x \mathsf{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_y y\mathsf{P}(Y = y) = \mathsf{E}(Y)
\end{aligned}$$

Hvad er forventningsværdien af $Z = \mathsf{E}(Y|X)$?

Man har

$$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(Y|X)) = \sum_x \mathsf{E}(Y|X = x)\mathsf{P}(X = x)$$

Intuitivt: Informationen $X = x$ vil ændre observatørens forventningsværdi af Y, men ikke *i middel*.

- I behøver ikke forstå dette i dybden, men I skal kunne anvende ovenstående formel (opgave 6.2.4 træner dette).
- Den *betingede middelværdi* er et vigtigt begreb/redskab i anvendelserne (statistik, signalbehandling, billedbehandling)

For boligeksemplet:

Vi havde fordelingen af $Z = \mathsf{E}(Y|X)$:

z	0,9902	1,3087	1,8079	2,1429	2,4139	2,6908
$\mathsf{P}(Z = z)$	0,104	0,396	0,275	0,145	0,046	0,033

hvoraf

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(Y) &= \mathsf{E}(Z) \\ &= 0.9902 \cdot 0,104 + 1.3087 \cdot 0,396 + \cdots + 2.6908 \cdot 0,033 \\ &= 1.6250 \end{aligned}$$

hvilket stemmer med hvad vi får direkte fra den marginale fordeling af Y.

Lad X_1 og X_2 være antal øjne i to kast med en almindelig terning.

Lad nu X betegne minimum og Y betegne maximum af X_1 og X_2.

Spørgsmål 3

$\mathsf{E}(Y|X = 4)$ kan karakteriseres ved

1 ☐ $4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{4}$

2 ☐ 3.5

3 ☐ 4.5

4 ☐ $4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3}$

5 ☐ $4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5}$

6 ☐ Ved ikke

Lad X_1 og X_2 være antal øjne i to kast med en almindelig terning. Lad nu X betegne minimum og Y betegne maximum af X_1 og X_2.

Spørgsmål 4

E$(Y|X)$ kan karakteriseres ved

1 ☐ $\frac{7}{2}$ med $P=\frac{1}{6}, 4$ med $P=\frac{1}{6}, \frac{9}{2}$ med $P=\frac{1}{6}$, 5 med $P=\frac{1}{6}, \frac{11}{2}$ med $P=\frac{1}{6}, 6$ med $P=\frac{1}{6}$

2 ☐ 3.5

3 ☐ $\frac{41}{11}$ med $P=\frac{11}{36}, \frac{38}{9}$ med $P=\frac{9}{36}, \frac{33}{7}$ med $P=\frac{7}{36}$, $\frac{26}{5}$ med $P=\frac{5}{36}, \frac{17}{3}$ med $P=\frac{3}{36}, 6$ med $P=\frac{1}{36}$

4 ☐ $\sum_{i=X}^{6} i \cdot \frac{1}{7-X}$

5 ☐ $\frac{X+6}{2}$

6 ☐ Ved ikke

Afsnit 6.1 og 6.2

- Betingede diskrete fordelinger $\mathsf{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathsf{P}(X=x, Y=y)}{\mathsf{P}(X=x)}$
  - $\mathsf{P}(Y = y) = \sum_x \mathsf{P}(X = x)\mathsf{P}(Y = y|X = x)$
- Betinget middelværdi (det diskrete tilfælde)
  - $\mathsf{E}(Y|X = x) = \sum_y y\mathsf{P}(Y = y|X = x)$
  - $\mathsf{E}(Y|X)$ en stokastisk variabel
  - $\mathsf{E}(Y) = E_X(E_Y(Y|X)) = \sum_x \mathsf{P}(X = x)\mathsf{E}(Y|X = x)$
  - $\mathsf{E}(g(X, Y)|X = x) = \mathsf{E}(g(x, Y)|X = x)$
  - $\mathsf{E}(XY|X) = X\mathsf{E}(Y|X)$