Skriftlig prøve, den: PQ. juli 200Z *Kursus nr* : 02405

Kursus navn: Sandsynlighedsregning

Tilladte hjælpemidler: Alle

Dette sæt er besvaret af:

____________________ ____________________ ________

(navn) (underskrift) (bord nr)

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 25 opgaver, benævnt opgave 1,2,. . . , 25 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,. . . ,30 i teksten. Bevarelserne af de 30 spørgsmål føres ind i nedenstående skema.

Opgave	1	2	3	-	4	-	5	6	7	-	8	9	-	10	11
Spørgsmål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Svar															

Opgave	12	13	14	15	16	17	18	19	-	20	21	22	23	24	25
Spørgsmål	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Svar															

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6. Indføres et forkert nummer i skemaet, kan dette rettes ved at "sværte" det forkerte nummer over og anføre det rigtige nedenunder. Er der tvivl om meningen med en rettelse, betragtes spørgsmålet som ubesvaret.

Kun forsiden skal afleveres. Afleveres blankt eller forlades eksamen i utide, skal forsiden alligevel afleveres. Kladde, mellemregninger og bemærkninger tillægges **ingen** betydning, kun tallene indført ovenfor registreres.

Der gives 5 point for et korrekt svar og -1 for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til "ved ikke") giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

Husk at forsyne opgaveteksten med navn, underskrift og bordnummer.

Der gøres opmærksom på at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr 18; blad lige om og se, at den er der.

Opgave 1

I et apparat sidder to pærer. Hver pære antages at have eksponentialfordelt levetid med middellevetid på 1200 timer.

Spørgsmål 1

Hvor stor er sandsynligheden for, at begge pærer overlever et halvt års kontinuerlig drift, dvs 4380 timers samlet driftstid?

1 ☐ $2 \cdot e^{-\frac{4380}{1200}}$

2 ☐ $e^{-\frac{4380}{1200+1200}}$

3 ☐ $2 \cdot e^{-\frac{4380}{1200}} \left(1 - e^{-\frac{4380}{1200}}\right)$

4 ☐ $\left(e^{-\frac{4380}{1200}}\right)^2$

5 ☐ $(\left(1 - e^{-\frac{4380}{1200}}\right)^2$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 2

Vi betragter uafhængige stokastiske variable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ med fælles normal fordelingsfunktion $normal(\mu, \sigma^2)$, hvor μ og σ^2 angiver henholdsvis middelværdi og varians.

Spørgsmål 2

Hvilket af følgende udsagn er <u>ikke korrekt</u>:

1 ☐ $Var(2\bar{X}) = \frac{4\sigma^2}{n}$

2 ☐ $E(2\bar{X}) = 2\mu$

3 ☐ $E\left(\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1$

4 ☐ $(\bar{X} - \mu)$ vil være $normal\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ fordelt

5 ☐ $Var(n\bar{X}) = \sigma^2$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 3

Vi betragter et almindeligt terningekast og er interesseret i, hvor mange gange der skal slås, inden vi har fået 6 seksere.

Vi lader X betegne det slag, hvor vi får den 6'te sekser.

Spørgsmål 3

Da er forventningsværdien $E(X)$ af X

1 ☐ 12

2 ☐ 24

3 ☐ 36

4 ☐ 48

5 ☐ 60

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 4

Variansen af X er

1 ☐ 160

2 ☐ 180

3 ☐ 200

4 ☐ 220

5 ☐ 240

6 ☐ Ved ikke

Opgave 4

Der er sandsynligheden $\frac{2}{3}$ for, at NN lyver. NN kaster et kast med en mønt. NN bliver spurgt, om det bliver plat.

Spørgsmål 5

Sandsynligheden for, at NN svarer ja, er

1 ☐ 1

2 ☐ $\frac{1}{2}$

3 ☐ $\frac{1}{3}$

4 ☐ $\frac{1}{4}$

5 ☐ $\frac{1}{5}$

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 6

Sandsynligheden for, at det var plat givet, at NN svarer ja til spørgsmålet, er

1 ☐ $\frac{1}{6}$

2 ☐ $\frac{1}{5}$

3 ☐ $\frac{1}{4}$

4 ☐ $\frac{1}{3}$

5 ☐ $\frac{1}{2}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 5

Vi betragter $Z = \max(X, Y)$, hvor (X, Y), er standard bivariat normalfordelt med korellation $\rho = 0$, dvs. uafhængige.

Spørgsmål 7

Man finder $E(Z)$ til

1 ☐ 0

2 ☐ 1

3 ☐ $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x$

4 ☐ $\int_{-\infty}^{\infty} \left[x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}x$

5 ☐ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{y}^{\infty} \frac{x}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 6

Sandsynligheden for, at et telefonomstillingsbord på en enkelt dag belastes så meget, at normal ekspedition ikke kan opretholdes er 0.01. Det antages, at hændelser på forskellige dage er uafhængige, og, at et år indeholder 250 arbejdsdage.

Spørgsmål 8

Sandsynligheden for, at omstillingsbordet overbelastes mindst 1 gang inden for et år, er

1 ☐ 0.25

2 ☐ $\frac{1-0.01}{250}$

3 ☐ 0.75

4 ☐ 0.01^{250}

5 ☐ $1 - 0.99^{250}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 7

Lad $X \in exponential(1)$ og $Y \in exponential\left(\frac{1}{2}\right)$ være uafhængige stokastiske variable. Vi indfører

$$S = X + Y$$

Spørgsmål 9

Frekvensfunktionen $g(s)$ for S er givet ved

1 ☐ $\frac{1}{2}\int_0^s e^{-s+t}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$

2 ☐ $\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

3 ☐ $\frac{1}{2}\int_s^\infty e^{-s}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$

4 ☐ $\int_s^\infty t \cdot e^{-s+t}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$

5 ☐ $\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s+t}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 10

Varianskoefficienten $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$ er med 2 decimaler lig med

1 ☐ 0.25

2 ☐ 0.50

3 ☐ 0.75

4 ☐ 1.00

5 ☐ 1.25

6 ☐ Ved ikke

Opgave 8

En rimelig model for mænds vægt er en normalfordeling $normal(72, 8^2)$, medens en rimelig model for kvinders vægt er en normalfordeling $normal(63, 7^2)$ (vægtenheden er kg.)

Spørgsmål 11

Idet det oplyses at 40% af flypassagerer er kvinder og 60% er mænd skal sandsynligheden for, at en tilfældig valgt flypassager har en vægt, der overstiger 80 kg., bestemmes. Denne sandsynlighed bliver

1 ☐ $0.4 \cdot \left(1 - \Phi(\frac{80-63}{7}\right) + 0.6 \cdot \left(1 - \Phi(\frac{80-72}{8}\right)$

2 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{80-(0.4 \cdot 63+0.6 \cdot 72)}{\sqrt{0.16 \cdot 7^2+0.36 \cdot 8^2}}\right)$

3 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{80-(0.4 \cdot 63+0.6 \cdot 72)}{\sqrt{0.4 \cdot (63^2+7^2)+0.6 \cdot (72^2+8^2)-(0.4 \cdot 63+0.6 \cdot 72)^2}}\right)$

4 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{80-(0.4 \cdot 63+0.6 \cdot 72)}{\sqrt{0.4 \cdot 7^2+0.6 \cdot 8^2}}\right)$

5 ☐ Sandsynligheden kan ikke bestemmes uden kendskab til passagererens køn

6 ☐ Ved ikke

Hvor Φ som sædvanlig betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Opgave 9

Lad den stokastiske variabel X have tætheden

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} x^{-\frac{2}{3}} e^{-x}, \qquad x > 0$$

Spørgsmål 12

Sæt $Y = X^{\frac{1}{3}}$. Da har Y tætheden

1 ☐ $\frac{1}{2!} y^{-2} e^{-y^3}, \qquad y > 0$

2 ☐ $\frac{3}{\Gamma(\frac{1}{3})} e^{-y^3}, \qquad y > 0$

3 ☐ $\frac{1}{3} y^{-2} e^{-y^3}, \qquad y > 0$

4 ☐ $\frac{1}{3} y^{-1} e^{-y}, \qquad y > 0$

5 ☐ $\Gamma(3) y^{-\frac{2}{3}} e^{-y}, \qquad y > 0$

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 13

Forventningsværdien $E(X)$ af X er lig med

1 ☐ $\frac{2}{3}$

2 ☐ $\frac{2}{9}$

3 ☐ $\frac{1}{9}$

4 ☐ $\frac{1}{3}$

5 ☐ $\frac{4}{3}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 10

Vi vil betragte en stokastisk variabel T, til beskrivelse af en levetid. Sandsynligheden for, at den stokastiske variabel bliver marginalt større end τ givet, at den har opnået alderen τ, er proportionalt med alderen τ. Således er

$$P(T \in [\tau, \tau + \Delta\tau] | T > \tau) = \tau \Delta\tau$$

hvor $\Delta\tau << \tau$.

Spørgsmål 14

For T gælder et af følgende udsagn

1 ☐ T er eksponentialfordelt

2 ☐ Sandsynligheden for at leve længere stiger med alderen

3 ☐ Sandsynligheden for at leve længere falder med alderen

4 ☐ T er gammafordelt med antalsparameter 2.

5 ☐ T er uniformt (lige) fordelt

6 ☐ Ved ikke

Opgave 11

Lad U_1 og U_2 være to uafhængige $uniform(0,1)$ fordelte variable. Definer $X = \min(U_1, U_2)$ og $Y = \max(U_1, U_2)$.

Spørgsmål 15

Den simultane tæthedsfunktion $f(x, y)$ for X og Y findes til

1 ☐ $f(x, y) = 2, \qquad 0 \leq x \leq y \leq 1$

2 ☐ $f(x, y) = 1, \qquad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

3 ☐ $f(x, y) = y^2 - (y - x)^2, \qquad 0 \leq x \leq y \leq 1$

4 ☐ $f(x, y) = \frac{36}{5} xy(1 - xy), \qquad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

5 ☐ $f(x, y) = 4xy, \qquad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 12

Betragt gennemsnittet af $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ af n uafhængige stokastiske variable, der hver er ligefordelt på intervallet $[0; 1]$.

Spørgsmål 16

Find n således at $P(\bar{X}_n < 0.51)$ er approksimativt 90%.

1 ☐ 84

2 ☐ 175

3 ☐ 350

4 ☐ 1387

5 ☐ 10 531

6 ☐ Ved ikke

Opgave 13

Antag at α, β og γ betegner andelen af demokrater (D), republikanere (R), og andre (A) i en større population af vælgere. Således er $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ og $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Man vælger tilfældigt et individ fra populationen og indfører indikatorvariablene I_D, I_R og I_A svarende til hvilket parti vælgeren (individdet) foretrækker.

Spørgsmål 17

Man finder kovariansen $Cov(I_D, I_R)$ til

1 ☐ $\alpha\beta\gamma$

2 ☐ $-\frac{\alpha\beta}{\gamma}$

3 ☐ $-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

4 ☐ $-\alpha\beta$

5 ☐ $-\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\beta\gamma$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 14

Et EDB-program kan med god tilnærmelse danne en sekvens af tal, der kan opfattes som uafhængige ligefordelte ($uniform(0,1)$) stokastiske variable. Vi indfører U_i til at betegne det i'te tal i denne sekvens. Til en bestemt anvendelse ønsker man at simulere et tilfældigt tal fra en $\gamma(2,\lambda)$ fordeling.

Spørgsmål 18

Dette kan gøres ved følgende konstruktion

1 ☐ $\lambda(\lambda U_1)e^{-\lambda U_1}$

2 ☐ $1-(1+\lambda U_1)e^{-\lambda U_1}$

3 ☐ $-\frac{1}{\lambda}(\ln U_1 + \ln U_2)$

4 ☐ $1-(1+\lambda U_1)e^{-\lambda U_2}$

5 ☐ Konstruktionen er ikke mulig

6 ☐ Ved ikke

Opgave 15

Man har de uafhængige stokastiske variable $X \in uniform(-1,3)$ og $Y \in uniform(0,4)$.

Spørgsmål 19

Man ønsker at bestemme $P(|X+1-Y| \leq 1)$. Denne sandsynlighed findes til

1 ☐ $\frac{1}{4}$

2 ☐ $\frac{3}{8}$

3 ☐ $\frac{1}{2}$

4 ☐ $\frac{7}{16}$

5 ☐ $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 16

X, Y og Z er uafhængige standardiserede normalfordelte variable.

Spørgsmål 20

$SD(3Z - 2X + Y + 15)$ findes til

1 ☐ $\sqrt{2}$

2 ☐ $\sqrt{6}$

3 ☐ $\sqrt{14}$

4 ☐ $\sqrt{16}$

5 ☐ $\sqrt{239}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 17

En stokastisk variabel X med tæthed $f(x) = \frac{1}{x^2}$ har værdimængde $1, \infty$.

Spørgsmål 21

Forventningsværdien af $E(\sqrt{X})$ findes til

1 ☐ $\frac{1}{2}$

2 ☐ $\frac{2}{3}$

3 ☐ 1

4 ☐ 2

5 ☐ Udefineret (∞)

6 ☐ Ved ikke

Opgave 18

I et bestemt lottospil er der 32 kugler nummereret med hver sit af tallene $1, 2, 3, \ldots, 32$. Der udtrækkes 5 kugler uden tilbagelægning.

Spørgsmål 22

Da er sandsynligheden for, at alle numre er mindre end eller lig 16, lig med

1 ☐ 2^{-5}

2 ☐ $\frac{5}{32}$

3 ☐ $\dfrac{\binom{16}{5}\binom{16}{5}}{\binom{32}{5}}$

4 ☐ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$

5 ☐ $\dfrac{\binom{16}{5}}{\binom{32}{5}}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 19

Vi betragter en stokastisk variabel $X \in binomial(n, P)$, hvor P selv er en stokastisk variabel med tæthed $f_P(p)$ givet ved

$$f_P(p) = \frac{1}{Beta(r,s)} p^{r-1}(1-p)^{s-1}$$

det vil sige at P er $beta(r, s)$ fordelt ($P \in beta(r, s)$).

Spørgsmål 23

Middelværdien $E(X)$ findes til

1 ☐ $\frac{n}{2}$

2 ☐ $n \cdot p$

3 ☐ $n \cdot r(r+s)$

4 ☐ n

5 ☐ $\frac{n \cdot r}{r+s}$

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 24

Hvis man efter at have observeret $X = x$ ønsker at beregne $P(P \leq p)$ vil man benytte følgende tæthed

1 ☐ $f_P(p) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}$

2 ☐ $f_P(p) = \frac{1}{Beta(r,s)} p^{r-1}(1-p)^{s-1}$

3 ☐ $f_P(p) = \frac{1}{Beta(x,n-x)} p^{x-1}(1-p)^{n-x-1}$

4 ☐ $f_P(p) = \frac{1}{Beta(r+x,s+n-x)} p^{r+x-1}(1-p)^{s+n-x-1}$

5 ☐ $f_P(p) = \begin{pmatrix} r+s+n \\ x+r \end{pmatrix} p^{x+r}(1-p)^{n+r+s-(x+r)}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 20

Antag, at atomer af en given slags har en eksponentialfordelt levetid med intensitet (rate) λ. Lad X_t være antallet af atomer, der er tilbage til tid t, hvor $X_0 = n$.

Spørgsmål 25

Udtrykt ved n, t og λ finder man $Var(X_t)$ til

1 ☐ $\frac{\pi}{4} n\lambda t e^{-\lambda}$

2 ☐ $ne^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$

3 ☐ $(n\lambda t)^2$

4 ☐ $\frac{\lambda t}{n}$

5 ☐ $ne^{-\lambda t}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 21

Et punkt vælges tilfældigt i enhedskvadratet. Lad D betegne afstanden fra punktet til midtpunktet af en af kvadratets sider.

Spørgsmål 26

Man finder $P(D \geq \frac{1}{2})$ til

1 ☐ $\frac{1}{2}$

2 ☐ $1 - \frac{\pi}{4}$

3 ☐ $\frac{1}{4}$

4 ☐ $1 - \frac{\pi}{8}$

5 ☐ e^{-1}

6 ☐ Ved ikke

$\boxed{\textbf{Opgave 22}}$

Vi har de to uafhængige ligefordelte stokastiske variable U og V, der er ligefordelte på enhedsintervallet ($uniform(0,1)$).

Spørgsmål 27

Tætheden $f(z)$ af $Z = U \cdot V$ findes til

1 ☐ 1

2 ☐ $\frac{e^{-z}}{1-e^{-1}}$

3 ☐ $2z$

4 ☐ $1 + \sin(2\pi z)$

5 ☐ $-\ln(z)$

6 ☐ Ved ikke

$\boxed{\textbf{Opgave 23}}$

I et planteeksperiment måler man, hvorledes afkommet til en bestemt moderplante er placeret. Til beskrivelse benyttes et koordinatsystem, hvor nulpunktet placeres i moderplantens position. Med en rigtigt valgt måleenhed kan koordinaterne til et givet afkom beskrives ved to uafhængige standardiseret normalfordelte variable X og Y.

Spørgsmål 28

Idet Z betegner summen af de kvadrerede afstande fra moderplanten til fire planter, der er afkom af denne, kan Z beskrives ved en

1 ☐ $normal(8, 16)$ fordeling

2 ☐ $\chi^2(8)$ fordeling

3 ☐ $\chi^2(4)$ fordeling

4 ☐ $normal(4, 8)$ fordeling

5 ☐ $exponential(4)$ fordeling

6 ☐ Ved ikke

Opgave 24

Visse ikke negative stokastiske variable, e.g. $X \geq 0$, karakteriseres til tider i teletrafikteorien ved den såkaldte "peakedness" størrelse betegnet med ϵ, der er forholdet mellem variansen og middelværdien dvs. $\epsilon = \frac{Var(X)}{E(X)}$

Spørgsmål 29

For en Poissonfordelt stokastisk variabel gælder

1 ☐ $\epsilon < 1$

2 ☐ $\epsilon = 1$

3 ☐ $\epsilon > 1$

4 ☐ Om ϵ er større eller lig 1 afhænger af parameteren i Poissonfordelingen.

5 ☐ Poissonfordelte stokastiske variable kan have alle værdier, så "peakedness" begrebet er ikke meningsfyldt

6 ☐ Ved ikke

Opgave 25

Vi betragter tre hændelser A_1, A_2 og A_3. Foreningshændelsen $A_1 \cup A_2$ kan alternativt skrives som foreningenen af to gensidigt udelukkende hændelser, A'_1 og A'_2 hvor $A'_1 = A_1$ og $A'_2 = A_2 - A_1$, hvor "-" her betegner operationen mængdedifferens. Vi har altså $A_1 \cup A_2 = A'_1 \cup A'_2$ og $A'_1 \cap A'_2 = \emptyset$. Man ønsker nu at indføre en hændelse A'_3, således at $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3$ og, således at de tre hændelser A'_1, A'_2 og A'_3 er gensidigt udelukkende.

Spørgsmål 30

Dette kan gøres ved at vælge A'_3 til

1 ☐ $A'_3 = A_3$

2 ☐ $A'_3 = (A_3 - A_1) \cup (A_3 - A_2)$

3 ☐ $A'_3 = A_3 - (A_1 \cap A_2)$

4 ☐ $A'_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2)$

5 ☐ $A'_3 = A_3 \cap (A_1^c \cup A_2^c)$

6 ☐ Ved ikke

Slut på opgavesættet.