Skriftlig prøve, den: XY. december 200Z *Kursus nr* : 02405

Kursus navn: Sandsynlighedsregning

Tilladte hjælpemidler: Alle

Dette sæt er besvaret af:

______________________ ______________________ ________

(navn) (underskrift) (bord nr)

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 25 opgaver, benævnt opgave 1,2,..., 25 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,...,30 i teksten. Bevarelserne af de 30 spørgsmål føres ind i nedenstående skema.

Opgave	1	2	3	-	4	-	5	6	7	-	8	9	10	-	11
Spørgsmål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Svar															

Opgave	12	13	14	15	16	17	18	19	-	20	21	22	23	24	25
Spørgsmål	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Svar															

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6. Indføres et forkert nummer i skemaet, kan dette rettes ved at "sværte" det forkerte nummer over og anføre det rigtige nedenunder. Er der tvivl om meningen med en rettelse, betragtes spørgsmålet som ubesvaret.

Kun forsiden skal afleveres. Afleveres blankt eller forlades eksamen i utide, skal forsiden alligevel afleveres. Kladde, mellemregninger og bemærkninger tillægges **ingen** betydning, kun tallene indført ovenfor registreres.

Der gives 5 point for et korrekt svar og -1 for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til "ved ikke") giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

Husk at forsyne opgaveteksten med navn, underskrift og bordnummer.

Der gøres opmærksom på at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr 18; blad lige om og se, at den er der.

Opgave 1

En stokastisk variabel N er (diskret) ligefordelt på $\{1, 2, \dots 10\}$. Lad X være indikator for hændelsen $(N \leq 5)$ og lad Y være indikator for hændelsen (N lige).

Spørgsmål 1

Man finder middelværdien af X og Y til

1 ☐ $E(X) = 5, \qquad E(Y) = \frac{1}{2}$

2 ☐ $E(X) = \frac{3}{5}, \qquad E(Y) = \frac{2}{5}$

3 ☐ $E(X) = \frac{1}{2}, \qquad E(Y) = \frac{1}{2}$

4 ☐ $E(X) = \frac{1}{2}, \qquad E(Y) = \frac{2}{5}$

5 ☐ $E(X) = \frac{11}{2}, \qquad E(Y) = \frac{1}{2}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 2

Antag, at der slås med 4 sædvanlige terninger.

Spørgsmål 2

Sandsynligheden for, at alle fire terninger viser et forskelligt antal øjne, er

1 ☐ $\frac{5}{6}\frac{4}{6}\frac{3}{6}\frac{2}{6}$

2 ☐ $\frac{5}{6}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$

3 ☐ $\frac{2}{3}$

4 ☐ $\frac{1}{3}$

5 ☐ $\frac{1}{6}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 3

Lad X, Y og Z være tre uafhængige $normal(0,1)$ fordelte stokastiske variable.

Spørgsmål 3

Man finder $E\left[(X+Y+Z)^2\right]$ til

1 ☐ 1

2 ☐ 2

3 ☐ 3

4 ☐ 4

5 ☐ 5

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 4

Sandsynligheden $P(X+Y \leq 2Z)$ findes som

1 ☐ $\frac{1}{2}$

2 ☐ $\frac{1}{3}$

3 ☐ $\frac{1}{4}$

4 ☐ $\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

5 ☐ $\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Hvor Φ som sædvanlig betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Opgave 4

En student besvarer et eksamenssæt med multiple choice, hvor hvert spørgsmål har 5 svarmuligheder. Hun besvarer spørgmålet korrekt, hvis hun kender svaret, ellers gætter hun, således at hver af de 5 svarmuligheder har samme sandsynlighed for at blive valgt. Antag, at der er 70% chance for, at hun kender svaret til et givet spørgsmål.

Spørgsmål 5

Hvad er sandsynligheden for, at studenten har besvaret et tilfældigt valgt spørgsmål korrekt? (besvar med to decimalers nøjagtighed)

1 ☐ 0.20

2 ☐ 0.70

3 ☐ 0.74

4 ☐ 0.76

5 ☐ 0.78

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 6

Givet, at studenten har besvaret et spørgsmål rigtigt, hvad er da sandsynligheden for, at hun kendte svaret? (besvar med to decimalers nøjagtighed)

1 ☐ 0.70

2 ☐ 0.76

3 ☐ 0.82

4 ☐ 0.87

5 ☐ 0.92

6 ☐ Ved ikke

Opgave 5

Antag, at den gennemsnitlige hustandsindkomst i et givet område er kr. 150 000.

Spørgsmål 7

En øvre grænse for andelen af familier, der har en husstandsindkomst højere end kr. 800 000 findes til

1 ☐ 0.1125

2 ☐ 0.1500

3 ☐ 0.1875

4 ☐ 0.2200

5 ☐ Spørgsmålet kan ikke besvares med de givne oplysninger.

6 ☐ Ved ikke

Opgave 6

Lad X, Y og Z være uafhængige standardiserede normalfordelte variable ($normal(0,1)$). Vi definerer en ny stokastisk variabel $W = X^2 + Y^2 + Z^2$.

Spørgsmål 8

Tætheden $f(w)$ af W findes til

1 ☐ $f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-\frac{(w-\sqrt{3})^2}{3}}$

2 ☐ $f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-\frac{w^2}{3}}$

3 ☐ $f(w) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{w-\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

4 ☐ $f(w) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{w}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{-\frac{w}{2}}$

5 ☐ $f(w) = 3e^{-3w}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 7

Lad T være antallet af gange man kaster en almindelig seksidet terning, før alle sider har vendt op mindst een gang, og lad N være antallet af forskellige sider, der har vendt op i de første seks kast.

Spørgsmål 9

Middelværdien $E(T)$ af T bestemmes til

1 ☐ 6

2 ☐ 14.7

3 ☐ 18.3

4 ☐ 24.5

5 ☐ 36

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 10

Middelværdein af T når N er tre ($E(T|N=3)$) findes til

1 ☐ $E(T|N=3)=9$

2 ☐ $E(T|N=3)=17$

3 ☐ $E(T|N=3)=25$

4 ☐ $E(T|N=3)=33$

5 ☐ $E(T|N=3)=43$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 8

Antag, at T er en stokastisk variabel, hvor $P(T > t) = e^{-t}$, og $X = \frac{1}{T}$.

Spørgsmål 11

Man finder tætheden $f_X(x)$ for X til

1 ☐ $f_X(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$

2 ☐ $f_X(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$

3 ☐ $f_X(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

4 ☐ $f_X(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$

5 ☐ $f_X(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 9

Vi vil betragte en negativ binomial fordelt stokastisk variabel X med antalsparameter r og sandsynlighedsparameter p, således at $X \in NB(r, p)$, hvor r er heltallig.

Spørgsmål 12

Den hyppigst forekommende værdi af X findes

1 ☐ Som medianen i fordelingen

2 ☐ Som middelværdien i fordelingen

3 ☐ Ved at betragte uligheden $r(1-p) - 1 > np$

4 ☐ Som heltalsdelen af $\frac{r}{p}$

5 ☐ r er altid den hyppigst forekommende værdi.

6 ☐ Ved ikke

Opgave 10

Lad $X_1, \ldots, X_{10}$ være indbyrdes uafhængige og lad $X_i \in \mathit{exponential}(0.1)$. Vi definerer $X_{(1)} = \min_i (X_i)$ og $Y = \bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$.

Spørgsmål 13

Da er $X_{(1)}$ fordelt som

1 ☐ $\mathit{beta}(10, 1)$

2 ☐ $\mathit{exponential}(1)$

3 ☐ $\mathit{poisson}(10)$

4 ☐ $\mathit{gamma}(10, 1)$

5 ☐ $\mathit{normal}(0, 10)$

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 14

Y er fordelt som

1 ☐ $\mathit{normal}(10, 10)$

2 ☐ $\mathit{gamma}(10, 0.1)$

3 ☐ $\mathit{poisson}(10)$

4 ☐ $\mathit{beta}(1, 10)$

5 ☐ $\mathit{geometric}\left(\frac{1}{10}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 11

Antag at X og Y er uafhængige stokastiske variable, begge ligefordelte på $[0, 1]$ ($uniform(0, 1)$ fordelte).

Spørgsmål 15

Man finder $P(Y^2 > 3X^2)$ til

1 ☐ $\frac{1}{3}$

2 ☐ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3 ☐ $\int_0^1 \int_0^{\frac{y}{\sqrt{3}}} xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

4 ☐ $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}x} y^2 x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

5 ☐ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 12

Højde og vægt af en stor gruppe mennesker kan beskrives ved en bivariat normalfordeling med korrelation 0.75.

Spørgsmål 16

Hvad er andelen af personer, med en højde på 90 % fraktilen, der har en vægt større end 90 % fraktilen i vægtfordelingen.

1 ☐ 5 %

2 ☐ 10 %

3 ☐ 21 %

4 ☐ 31 %

5 ☐ 100 %

6 ☐ Ved ikke

Opgave 13

Mikroorganismer er smurt ud på en plade med en gennemsnitlig tæthed af 5000 per cm^2. Et mikroskop har et synsfelt på 10^{-4} cm^2. Man antager, at mikroorganismerne forekommer tilfældigt på pladen.

Spørgsmål 17

Sandsynligheden for, at der er mindst en mikroorganisme i synsfeltet, findes til

1 ☐ $1 - e^{-0.5}$

2 ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3 ☐ e^{-5}

4 ☐ $\frac{1}{2}$

5 ☐ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 14

Vi betragter en eksponentialfordeling med middelværdi 10.

Spørgsmål 18

Den nedre kvartil (25% fraktilen) i fordelingen findes til

1 ☐ $\frac{1}{10}(\ln(4) - \ln(3))$

2 ☐ $10(\ln(4) - \ln(3))$

3 ☐ $10\ln(4)$

4 ☐ $\frac{1}{10}\ln(4)$

5 ☐ Ingen af de ovenstående

6 ☐ Ved ikke

Opgave 15

En terrasse hviler på fem søjler. Belastningen af terrassen kan antages at blive jævnt fordelt på de fem søjler. Den styrke de enkelte søjler kan klare beskrives ved gammafordeling med antalsparameter 3 og skala parameter $\frac{1}{10\ 000}$ ($gamma(3, \frac{1}{10\ 000})$) fordeling.

Spørgsmål 19

Sandsynligheden for, at konstruktionen vil bryde sammen ved en belastning på 50 000 (10 000 per søjle), findes til

1 ☐ $1 - e^{-\frac{3}{5}}$

2 ☐ $1 - \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i!}e^{-1}$

3 ☐ $1 - \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{2} \frac{\left(\frac{1}{10000}\right)^i}{i!}e^{-\frac{1}{10000}}$

4 ☐ $1 - \frac{3125}{32}e^{-5}$

5 ☐ $\left(\sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i!}e^{-1}\right)^5$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 16

Vi betragter fem uafhængige og ligefordelte variable på intevallet [0;1] $uniform(0,1)$ fordelte variable.

Spørgsmål 20

Fordelingen af den tredjestørste af disse variable er givet ved en

1 ☐ $beta(2,3)$ fordeling

2 ☐ $uniform(0,1)$ fordeling

3 ☐ $gamma\left(3, \frac{1}{2}\right)$ fordeling

4 ☐ $beta(3,3)$ fordeling

5 ☐ approksimativt ved en $normal\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$ fordeling

6 ☐ Ved ikke

Opgave 17

For en bestemt type af halebåndsmus vides det, at 23% af musene har store ører, at 14 % af musene har korte knurhår og, at 8 % har store ører og korte knurhår.

Spørgsmål 21

Sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt mus har store ører uden at have korte knurhår, findes til

1 ☐ $0.23 \cdot 0.08 = 0.004232$

2 ☐ $0.23 - 0.11 = 0.12$

3 ☐ $0.23 - 0.08 = 0.15$

4 ☐ $0.23 + 0.08 - 0.14 = 0.17$

5 ☐ $0.23 \cdot (1 - 0.14) = 0.1978$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 18

En type af elektronisk udstyr, der har opnået en alder t, vil fejle indenfor for kort tid Δt med en sandsynliged $t^2 \Delta t$.

Spørgsmål 22

Sandsynligheden for, at udstyret opnår en alder større end t_0, findes til

1 ☐ $e^{-t_0^2}$

2 ☐ $\int_{t_0}^{\infty} t^2 \mathrm{d}t$

3 ☐ $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$

4 ☐ $e^{-\int_0^{t_0} t^2 \mathrm{d}t}$

5 ☐ $e^{-2 \ln t_0}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 19

Et punkt vælges i området $0 < x < 1, 0 < y < 1$ ifølge tætheden $f(x, y) = k(3x^2 + 2xy)$.

Spørgsmål 23

Sandsynligheden $P\left(Y \leq \frac{1}{2}\right)$ findes til

1 ☐ $k(3x^2 + x)$

2 ☐ $(3x^2 + x)$

3 ☐ k

4 ☐ $\frac{4k}{3}$

5 ☐ $\frac{5k}{8}$

6 ☐ Ved ikke

Spørgsmål 24

Konstanten k findes til

1 ☐ $k = 1$

2 ☐ $k = \frac{3}{4}$

3 ☐ $k = \frac{2}{3}$

4 ☐ $k = \frac{1}{2}$

5 ☐ $k = \frac{1}{3}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 20

Rektor for et gymnasium ønsker at udvælge en elev tilfældigt fra tre gymnasieklasser med følgende elevtal:
Klasse 1 har 22 elever med 15 drenge og 7 piger
Klasse 2 har 24 elever med 12 drenge og 12 piger
Klasse 3 har 18 elever med 7 drenge og 11 piger.

Udvælgelsen skal ske således, at alle elever har den samme chance(sandsynlighed) for at blive valgt.

Antallet af elever i klasse i betegnes med n_i.

Spørgsmål 25

Hvilken af følgende metoder kan rektor benytte:

1 ☐ Først vælges en klasse (i) med sandsynlighed $\frac{1}{3}$, dernæst vælges en elev fra klasse i med sandsynlighed $\frac{1}{n_i}$

2 ☐ Først vælges en dreng blandt drengene med sandsynlighed $\frac{1}{34}$ og en pige blandt pigerne med sandsynlighed $\frac{1}{30}$. Man vælger drengen med sandsynlighed $\frac{1}{2}$ ellers pigen.

3 ☐ Klasse 1 vælges med sandsynlighed $\frac{n_i}{64}$. Når klassen er valgt, vælger man med sandsynlighed $\frac{1}{2}$ en dreng blandt drengene og med sandsynlighed $\frac{1}{2}$ en pige blandt pigerne.

4 ☐ Med sandsynligheden $\frac{15}{32}$ vælges en blandt alle pigerne med sandsynlighed $\frac{1}{30}$, med sandsynligheden $\frac{17}{32}$ vælges en dreng blandt drengene med sandsynlighed $\frac{1}{34}$.

5 ☐ Ingen af de ovenstående metoder er brugbare

6 ☐ Ved ikke

Opgave 21

Vi vil betragte to hændelser A og B.

Spørgsmål 26

Hændelserne A og B er uafhængige:

1 ☐ Netop når de ikke kan indtræffe samtidigt

2 ☐ Netop når det, at den ene indtræffer, ikke automatisk medfører, at den anden indtræffer.

3 ☐ Netop når sandsynligheden for, at de begge indtræffer, er lig produktet af sandsynlighederne for, at de indtræffer hver for sig.

4 ☐ Netop når sandsynligheden for, at de begge indtræffer, er lig summen af sandsynlighederne for, at de indtræffer hver for sig.

5 ☐ Det giver ikke mening at tale om uafhængighed mellem hændelser. Begrebet er kun meningsfyldt i forbindelse med stokastiske variable.

6 ☐ Ved ikke

Opgave 22

En belastningsprøve af stålbjælker medfører revner i bjælkerne med en sandsynlighed på 0.15 og misfarvning med en sandsynlighed på 0.20. Sandsynligheden for, at der sker en skade på bjælkerne d.v.s. enten revner eller misfarvning, er 0.31.

Spørgsmål 27

Sandsynligheden for at en stålbjælke både har revner og misfarvning efter belastningsprøven findes til

1 ☐ 0.05

2 ☐ 0.04

3 ☐ 0.03

4 ☐ 0.02

5 ☐ 0.01

6 ☐ Ved ikke

Opgave 23

En stokastisk variabel $X > 1$ har overlevelsesfunktion $G(x) = P(X > x) = \frac{1}{x}$.

Spørgsmål 28

Man finder forventningsværdien $E\left(\frac{1}{X}\right)$ af $\frac{1}{X}$ til

1 ☐ $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{4}$

2 ☐ $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{3}$

3 ☐ $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{2}$

4 ☐ $E\left(\frac{1}{X}\right) = 1$

5 ☐ $E\left(\frac{1}{X}\right) = \infty$ (middelværdien er ikke defineret)

6 ☐ Ved ikke

Opgave 24

Et firma producerer en bestemt type af kuglelejer. Den indre diameter af kuglelejerne beskrives godt ved en normalfordeling med middelværdi 1 cm og standardafvigelse 0.1 mm. Firmaet ønsker et specificere en tolerance for kuglelejerne.

Spørgsmål 29

Hvilket af nedenstående områder kan firmaet regne med, at ca. 95% af de indre diametre af kuglelejerne vil ligge i.

1 ☐ $[1 - 0.01 \cdot 1.645; 1 + 0.01 \cdot 1.645]$

2 ☐ $[1 - 0.01 \cdot 1.960; 1 + 0.01 \cdot 1.960]$

3 ☐ $[1 - 0.01 \cdot 1.833; 1 + 0.01 \cdot 1.833]$

4 ☐ $[1 - 0.01 \cdot 2.821; 1 + 0.01 \cdot 2.821]$

5 ☐ $[1 - 0.01 \cdot 12.706; 1 + 0.01 \cdot 12.706]$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 25

Et paskontor har to ekspeditionssteder. Ved det ene sidder en gammel garvet kontormus. Betjeningstiden her kan med god tilnærmelse beskrives ved en eksponentialfordeling med middelværdi 3 minutter. Ved det andet sidder en elev. Også her kan ekspeditionstiden med god tilnærmelse beskrives ved en eksponentialfordeling her med middelværdi 10 minutter. Når man ankommer til paskontoret trækker man et nummer, der afgør, hvilket af de to ekspeditionssteder man bliver betjent ved. Sandsynligheden for at blive betjent af den gamle garvede kontormus er $\frac{10}{13}$.

Spørgsmål 30

Sandsynligheden for, at en tilfældig betjeningstid er større end 5 minutter, findes til

1 ☐ $e^{-\frac{5}{\frac{3\cdot 10+10\cdot 3}{13}}}$

2 ☐ $\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{5}{3}}+e^{-\frac{1}{2}}\right)$

3 ☐ $\frac{10}{13}e^{-\frac{5}{3}}+\frac{3}{13}e^{-\frac{1}{2}}$

4 ☐ $1-e^{-\frac{5}{\frac{3\cdot 10+10\cdot 3}{13}}}$

5 ☐ $\frac{10}{13}\cdot e^{-\frac{1}{3}}+\frac{3}{13}e^{-\frac{1}{10}}$

6 ☐ Ved ikke

Slut på opgavesættet.