Skriftlig prøve, den: 27. maj 2019 *Kursus nr* : 02405

Kursus navn: Sandsynlighedsregning *Varighed* : 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Alle

Dette sæt er besvaret af:

____________________ ____________________ ________

(navn) (underskrift) (bord nr)

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 30 opgaver, benævnt opgave 1,2,..., 30 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,...,30 i teksten. Svarene skal uploades via campusnet, ved brug af filen "answers.txt". I filen anføres studienummer på første linie, spørgsmålsnummer og svar anføres på de følgende linier med en linie for hvert spørgsmål. Nedenstående skema kan eventuelt afleveres som et supplement til den elektroniske aflevering. Ved uoverensstemmelse vil den elektroniske aflevering være gældende.

Spørgsmål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Svar															

Spørgsmål	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Svar															

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6.

Der gives 5 point for et korrekt svar og -1 for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til "ved ikke") giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredsstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

Der gøres opmærksom på, at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr 16; blad lige om og se, at den er der.

I teksten benyttes betegnelsen $\log(\cdot)$ for <u>naturlige</u> logaritmer, dvs. logaritmer med grundtal e, medens Φ betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Opgave 1

Hændelserne A og B er gensidigt udelukkende med $\mathsf{P}(A) = 0,3$ og $\mathsf{P}(B) = 0,4$.

Spørgsmål 1

Sandsynligheden for hændelsen $A \cup B$ findes til

1 ☐ 0,7

2 ☐ 0,35

3 ☐ 0,12

4 ☐ 0,1

5 ☐ 0

6 ☐ Ved ikke

Opgave 2

En partikelkanon skyder elektroner mod en plade, der kan betragtes som værende af ubegrænset størrelse. Koordinaterne til træfpunktet beskrives ved uafhængige standard normalfordelte variable.

Spørgsmål 2

Variansen af træfpunktets afstand til koordinatsystemets begyndelsespunkt findes til

1 ☐ 1

2 ☐ 2

3 ☐ $\frac{4-\pi}{2}$

4 ☐ 4

5 ☐ $\frac{\pi}{2}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 3

Opgave 3

Om de stokastiske variable X og Y oplyses, at $\mathsf{Var}(X) = 4$, $\mathsf{Var}(Y) = 2$, $\mathsf{Corr}(X, Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\mathsf{E}(X) = 0$. Man danner den nye stokastiske variabel $Z = 2X - 3Y$.

Spørgsmål 3

Man finder $\mathsf{Var}(Z)$ til

1 ☐ 58

2 ☐ 34

3 ☐ 10

4 ☐ 6

5 ☐ Var(Z) kan ikke beregnes på grund af manglende oplysninger.

6 ☐ Ved ikke

Opgave 4

Man har to typer af batterier, hvoraf der er 4 af hver slags. Man udtager tilfældigt 4 batterier.

Spørgsmål 4

Sandsynligheden for, at der ikke er et ulige antal af hver type batterier, findes til

1 ☐ $\dfrac{\binom{4}{0}+\binom{4}{2}+\binom{4}{4}}{2^4}$

2 ☐ $\dfrac{2\binom{4}{0}\binom{4}{4}+\binom{4}{2}^2}{\binom{8}{4}}$

3 ☐ $\dfrac{\left(\binom{4}{0}\binom{4}{4}+\binom{4}{2}\right)^2}{\binom{8}{4}}$

4 ☐ 2/5

5 ☐ 1/3

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 4

Opgave 5

Om en speciel type af elektronisk udstyr vides, at når det har opnået alderen x, da er fejlintensiteten $\mu\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right), x>0$.

Spørgsmål 5

Sandsynligheden for, at udstyret opnår en alder større end t, findes til

1 ☐ $e^{-\mu\sqrt{t}}$

2 ☐ $e^{-\int_t^\infty \mu\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x}$

3 ☐ $e^{-\int_0^t \mu\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x}$

4 ☐ $e^{-\mu\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}$

5 ☐ $\int_t^\infty \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 6

Et punkt (X,Y) vælges tilfældigt indenfor området afgrænset af linierne $y=0; x=0;$ $x+y=4$.

Spørgsmål 6

Man finder

1 ☐ $\mathsf{P}(X>1,Y>1)=\frac{1}{2}$

2 ☐ $\mathsf{P}(X>1,Y>1)=\frac{1}{3}$

3 ☐ $\mathsf{P}(X>1,Y>1)=\frac{1}{4}$

4 ☐ $\mathsf{P}(X>1,Y>1)=\frac{1}{6}$

5 ☐ $\mathsf{P}(X>1,Y>1)=\frac{1}{8}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 5

Opgave 7

Det vides, at middel vindhastigheden i et givet område er 4m/s. Hvis vindhastigheden overstiger 24m/s må elproduktionen ved vindmøller i området neddrosles.

Spørgsmål 7

Sandsynligheden for, at vindhastigheden overstiger 24m/s findes til maksimalt at være

1 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{24-4}{2}\right)$

2 ☐ $1/36$

3 ☐ $1/24$

4 ☐ $1/6$

5 ☐ $1/4$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 8

Diameteren af træstammer er givet ved en fordeling med tætheden $2e^{-t^2\pi}$. Det oplyses, at middelværdi og varians er henholdsvis $\frac{1}{\pi}$ og $\frac{\pi-2}{\pi^2}$.

Spørgsmål 8

Bestem, eventuelt approksimativt, sandsynligheden for, at diameteren af en træstamme ligger i intervallet $[x_0; x_0 + \Delta]$, hvor Δ er væsentligt mindre end $\frac{1}{\pi}$.

1 ☐ $2e^{-x_0^2\pi}\Delta$

2 ☐ $\Phi\left(\frac{x_0+\Delta-\frac{1}{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi-2}}{\pi}}\right) - \Phi\left(\frac{x_0-\frac{1}{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi-2}}{\pi}}\right)$

3 ☐ $2e^{-(x_0+\Delta)^2\pi} - 2e^{-x_0^2\pi}$

4 ☐ $\int_0^{x_0+\Delta} 2e^{-t^2\pi}\mathrm{d}t$

5 ☐ $2e^{-(x_0+\Delta)^2\pi}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 6

Opgave 9

En spiller slår 36 gange med en sædvanlig terning og tæller antallet af gange, terningen har vist to øjne.

Spørgsmål 9

Variansen på dette antal findes til

1 ☐ 6

2 ☐ 185/36

3 ☐ 175/36

4 ☐ 4

5 ☐ 5

6 ☐ Ved ikke

Opgave 10

Den stokastiske variabel Y er Poissonfordelt med parameter μ, medens der om den stokastiske variabel X gælder $\mathsf{P}(X=x|Y=y)=\frac{1}{y+1}$ for $x=0,\ldots,y$.

Spørgsmål 10

Man finder $\mathsf{P}(X=x)$ til

1 ☐ $\sum_{i=0}^{x}\binom{x}{i}\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^{i}\left(\frac{1}{\mu+1}\right)^{x-i}$

2 ☐ $\sum_{i=x}^{\infty}\frac{\mu^{i}}{(i+1)!}e^{-\mu}$

3 ☐ $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}\frac{\mu^{i}}{i!}e^{-\mu}$

4 ☐ $\frac{1}{y+1},\qquad x=0,\ldots,y$

5 ☐ $\frac{\left(\frac{\mu}{2}\right)^{x}}{x!}e^{-\frac{\mu}{2}}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 7

Opgave 11

En patient får taget 5 blodprøver i løbet af et hospitalsophold. Det antages, at resultatet af de enkelte prøver kan beskrives som uafhængige normalfordelte variable med middelværdi 7,6 og spredning 1,2.

Spørgsmål 11

Sandsynligheden for, at den største måling er mere end 2 standardafvigelser større end middelværdien, findes til

1 ☐ $1/4$

2 ☐ $1/16$

3 ☐ $1-\Phi(2)^5$

4 ☐ $(1-\Phi(2))^5$

5 ☐ $1-\Phi\left(\frac{9{,}6-7{,}6}{\sqrt{5}}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 12

I et geografisk område forekommer typisk en lomme per 2 km^2 med mineralet monasit, der indeholder metallet neodym. Man antager, at man kan se bort fra størrelsen af de enkelte lommer, ligesom man antager, at lommerne forekommer uafhængigt af hinanden.

Spørgsmål 12

Sandsynligheden for, at der findes netop 2 lommer i 3 km^2 af området, findes til

1 ☐ $\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

2 ☐ $2\left(\frac{1}{2}\right)^3$

3 ☐ $\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}$

4 ☐ $\frac{9}{8}e^{-\frac{3}{2}}$

5 ☐ $\frac{1}{3}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 8

Opgave 13

De stokastiske variable X og Y følger en standardiseret bivariat normalfordeling med $\mathsf{Corr}(X,Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Spørgsmål 13

Med fire betydende cifre finder man $\mathsf{P}(X+Y>1)$ til

1 ☐ 0,4180

2 ☐ 0,3085

3 ☐ 0,1587

4 ☐ 0,2398

5 ☐ 0,2942

6 ☐ Ved ikke

Opgave 14

Om tre hændelser A, B og C oplyses, at de er parvist uafhængige.

Spørgsmål 14

Om sandsynligheden $\mathsf{P}(A\cap B\cap C)$ gælder

1 ☐ $\mathsf{P}(A\cap B\cap C) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$

2 ☐ $\mathsf{P}(A\cap B\cap C) = \mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)+\mathsf{P}(C)-\mathsf{P}(A\cup B\cup C)$

3 ☐ $\mathsf{P}(A\cap B\cap C) = \mathsf{P}(A\cap B)\mathsf{P}(A\cap C)\mathsf{P}(B\cap C)$

4 ☐ $\mathsf{P}(A\cap B\cap C) = \mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)+\mathsf{P}(C)-\mathsf{P}(A\cup B)-\mathsf{P}(A\cup C)-\mathsf{P}(B\cup C)$

5 ☐ Der er ikke givet tilstrækkeligt med oplysninger til, at en af ovenstående formler kan benyttes med sikkerhed.

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 9

Opgave 15

Man har $Y = \sqrt{X}$, hvor X er en stokastisk variabel med tæthed $f_X(x) = 6x(1-x)$.

Spørgsmål 15

I værdimængden for Y findes tætheden $f_Y(y)$ af Y til

1 ☐ $12y^3(1-y^2)$

2 ☐ $30y^2(1-y)^2$

3 ☐ $6y^2(1-y)^2$

4 ☐ $12\sqrt{y}(1-\sqrt{y})$

5 ☐ $6\sqrt{y}(1-\sqrt{y})$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 16

Sandsynligheden for, at der kommer en lang frostperiode gennem vinteren er 1/4, medens sandsynligheden for, at der kommer voldsom isdannelse i de indre farvande, når der kommer en lang frostperiode er 3/5.

Spørgsmål 16

Sandsynligheden for, at der i løbet af en vinter kommer en lang frostperiode med voldsom isdannelse i de indre farvande, er

1 ☐ 17/20

2 ☐ 3/5

3 ☐ 1/2

4 ☐ 7/20

5 ☐ 3/20

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 10

Opgave 17

Vi betragter de to stokastiske variable X og N, hvorom der gælder $X \sim \exp(1)$ og $\mathsf{P}(N = n | X = x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

Spørgsmål 17

Man finder

1 ☐ $\mathsf{P}(N = 1) = e^{-1}$

2 ☐ $\mathsf{P}(N = 1) = \frac{1}{4}$

3 ☐ $\mathsf{P}(N = 1) = \frac{1}{2}$

4 ☐ $\mathsf{P}(N = 1) = \int_0^\infty x e^{-x} \mathrm{d}x$

5 ☐ $\mathsf{P}(N = 1) = e^{-2}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 18

Længden af en speciel type vækst af krystaller kan med rimelighed beskrives ved en eksponentialfordeling med intensitet λ. Man betragter 8 af disse vækster af krystaller.

Spørgsmål 18

Tætheden $g(t)$ for fordelingen af den næstmindste af væksterne af krystaller findes til

1 ☐ $56\lambda e^{-7\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$

2 ☐ $7\lambda e^{-7\lambda t}$

3 ☐ $\lambda(\lambda t) e^{-\lambda t}$

4 ☐ $8 \left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array} \right) \lambda e^{-\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 \left(e^{-\lambda t}\right)^5$

5 ☐ $8\lambda(8\lambda t) e^{-8\lambda t}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 11

Opgave 19

De stokastiske variable X og Y er standard normalfordelte med $\mathsf{Corr}(X,Y) = 0,6$.

Spørgsmål 19

En approksimativ værdi af $\mathsf{P}(1 < X < 1,002, 1 < Y < 1,005)$ er

1 ☐ $\frac{1}{2\pi}e^{-1}10^{-5}$

2 ☐ $\frac{1}{2\pi}e^{-1}10^{-4}$

3 ☐ $\frac{5}{8\pi}e^{-5/8}10^{-5}$

4 ☐ $\frac{5}{\sqrt{2\pi}}e^{-1}10^{-5}$

5 ☐ $\frac{5}{8\sqrt{2\pi}}e^{-5/8}10^{-5}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 20

Man antager, at blomstermotiver forekommer på 2%, 10% og 20% af henholdsvis fønikiske, græske og romerske antikke vaser. Man antager derudover, at 80%, 15% og 5% af de antikke vaser, der nåede til Hedeby, var henholdsvis fønikiske, græske og romerske. Man har i Hedeby fundet et potteskår med blomstermotiv fra en antik vase.

Spørgsmål 20

Sandsynligheden for, at denne vase var romersk, findes til

1 ☐ 5/8

2 ☐ 14/41

3 ☐ 1/5

4 ☐ 10/41

5 ☐ 1/3

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 12

Opgave 21

En botaniker undersøger forskellige orkideer. I et område forekommer 5 arter lige hyppigt. Botanikeren ønsker at undersøge mindst et eksemplar af hver art.

Spørgsmål 21

Hvor mange orkideer må botanikeren forvente at skulle undersøge, før alle arter er blevet undersøgt?

1 ☐ 25

2 ☐ $5\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$

3 ☐ $5+10+15+20+25$

4 ☐ $5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$

5 ☐ $1+2+3+4+5$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 22

Idet man antager, at større brande i alpetunneller forekommer uafhængigt af hinanden, er man interesseret i tiden indtil den 5'te større brand. Det oplyses, at der i gennemsnit forventes 3 større brande i løbet af en 25 års periode.

Spørgsmål 22

Sandsynligheden for, at tiden til den 5'te større brand overstiger 50 år, findes til

1 ☐ $\sum_{i=46}^{\infty} \binom{i}{4} \left(\frac{22}{25}\right)^i \left(\frac{3}{25}\right)^5$

2 ☐ $5\left(\frac{22}{25}\right)^{50}$

3 ☐ $61e^{-6}$

4 ☐ $115e^{-6}$

5 ☐ $\frac{61}{4}e^{-3}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 13

Opgave 23

De stokastiske variable X og Y angiver henholdsvis den største og den mindste af 3 uafhængige uniform(0,1) fordelte variable. Den simultane tæthed af de to variable er $f(x,y) = 6(x-y)$ i området, hvor tætheden er forskellig fra 0. Man danner nu $Z = Y/X$.

Spørgsmål 23

Tætheden $f_Z(z)$ af Z findes til

1 ☐ $2(1-z)$

2 ☐ 1

3 ☐ $6(1-z)$

4 ☐ $\frac{1}{2\sqrt{z}}$

5 ☐ $\frac{1}{\log(2)(1+z)}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 24

Det antages, at kropslængde og vægt for slagterisvin kan beskrives ved en bivariat normalfordeling med korrelationskoefficienten $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$, således at $\mathsf{E}(L) = 1,2\text{m}$, $\mathsf{Var}(L) = (0,1\text{m})^2$, $\mathsf{E}(V) = 85\text{kg}$ og $\mathsf{Var}(V) = (3\text{kg})^2$. Her er L og V stokastiske variable, der betegner henholdsvis længden og vægten af en slagtegris.

Spørgsmål 24

Sandsynligheden for, at et slagterisvin har en længde på mere end 1,2m og en vægt på mere end 85 kg., findes til

1 ☐ $\frac{1}{4}$

2 ☐ $\frac{1}{2}$

3 ☐ $\frac{3}{16}$

4 ☐ $\frac{5}{16}$

5 ☐ $\frac{3}{8}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 14

Opgave 25

Lille Peter samler på kort fra tyggegummipakker. I hver enkelt pakke er der ét kort, i alt findes 50 forskellige kort. Det kan antages, at alle 50 kort forekommer med samme hyppighed.

Spørgsmål 25

Sandsynligheden for, at de 10 første kort, Peter får, alle er forskellige, findes til

1 ☐ $\dfrac{\binom{10}{10}\binom{40}{0}}{\binom{50}{10}}$

2 ☐ $\frac{50!}{40!}50^{-10}$

3 ☐ $\binom{50}{10}\frac{1}{50^{10}}\left(\frac{49}{50}\right)^{40}$

4 ☐ $\left(\frac{49}{50}\right)^{10}$

5 ☐ $\binom{50}{10}50^{-10}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 26

Den stokastiske variabel X har tæthedsfunktion $f(x) = 3x^2$ for $0 \leq x \leq 1$ og 0 ellers.

Spørgsmål 26

Man finder $\mathsf{P}\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{1}{2}\right)$ til

1 ☐ 1/8

2 ☐ 1/4

3 ☐ 9/16

4 ☐ 7/64

5 ☐ 1/2

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 15

Opgave 27

Om to stokastiske variable vides, at X er diskret ligefordelt på $\{1, 2, 3\}$ medens $\mathsf{E}(Y|X=1) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{E}(Y|X=2) = \frac{3}{2}$ og $\mathsf{E}(Y|X=3) = 1$.

Spørgsmål 27

Om $\mathsf{E}(Y)$ kan man udtrykke

1 ☐ $\mathsf{E}(Y) = 1$

2 ☐ $\mathsf{E}(Y) = 2$

3 ☐ $\mathsf{E}(Y) = \frac{3}{2}$

4 ☐ $\mathsf{E}(Y) = \frac{7}{6}$

5 ☐ De angivne oplysninger er ikke tilstrækkelige til bestemmelsen af $\mathsf{E}(Y)$.

6 ☐ Ved ikke

Opgave 28

Under en strejke blandt DSB S-togs elektroførere regner SAS med, at 20% af flypassagererne når for sent frem til Københavns lufthavn.

Spørgsmål 28

Bestem, eventuelt approksimativt, sandsynligheden for, at der blandt 1000 flypassagerer er flere end 175, der kommer for sent frem til Københavns lufthavn.

1 ☐ $\sum_{i=0}^{174} \binom{1000}{i} \frac{1}{5^i} \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-i}$

2 ☐ $\Phi\left(\frac{6+\frac{1}{8}}{\sqrt{10}}\right)$

3 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{200-175{,}5}{10\sqrt{10\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}}\right)$

4 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{200-174{,}5}{10\sqrt{10\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}}\right)$

5 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{175{,}5-200}{\sqrt{1000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 16

Opgave 29

Man har de to stokastiske variable X og Y, der har simultan tæthedsfunktion $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{0{,}6}e^{-\frac{x^2-1{,}6xy+y^2}{0{,}72}}$.

Spørgsmål 29

Man finder $\mathsf{P}(Y \leq 0|X=1)$ til

1 ☐ $\frac{\pi+2\text{Arctan}(\frac{4}{3})}{2\pi}$

2 ☐ $1/2$

3 ☐ $\Phi\left(-\frac{3}{4}\right)$

4 ☐ $\Phi\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

5 ☐ $\Phi\left(-\frac{4}{3}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 30

I et observatorium er man interesseret i at observere gammaglimt fra fjerne galakser. Grundet begrænset udstyr kan der kun observeres et glimt per nat. Sandsynligheden for, at der observeres et gammaglimt en given nat, regnes som fast og uafhængigt af, hvad der hænder andre nætter. Til et forskningsprojekt skal benyttes 5 observationer af gammaglimt. Man ønsker at bestemme sandsynligheden for, at der skal ventes højest 30 nætter før, at der er tilstrækkeligt med observationer.

Spørgsmål 30

Til brug for sandsynlighedsberegningerne benyttes bedst

1 ☐ gammafordelingen

2 ☐ eksponentialfordelingen

3 ☐ den geometriske fordeling

4 ☐ den negative binomial fordeling

5 ☐ Poissonfordelingen

6 ☐ Ved ikke

Slut på opgavesættet.