Skriftlig prøve, den: 19. december 2016 *Kursus nr* : 02405

Kursus navn: Sandsynlighedsregning *Varighed* : 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Alle

Dette sæt er besvaret af:

______________________ ______________________ ________

(navn) (underskrift) (bord nr)

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 30 opgaver, benævnt opgave 1,2,. . . , 30 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,. . . ,30 i teksten. Svarene skal uploades via campusnet, ved brug af filen "answers.txt" eller en lignende fil. I filen anføres studienummer på første linie, spørgsmålsnummer og svar anføres på de følgende linier med en linie for hvert spørgsmål. Nedenstående skema kan eventuelt afleveres som et supplement til den elektroniske aflevering. Ved uoverensstemmelse vil den elektroniske aflevering være gældende.

Spørgsmål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Svar															

Spørgsmål	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Svar															

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6.

Der gives 5 point for et korrekt svar og -1 for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til "ved ikke") giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredsstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

Der gøres opmærksom på, at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr 17; blad lige om og se, at den er der.

I teksten benyttes betegnelsen $\log(\cdot)$ for naturlige logaritmer, dvs. logaritmer med grundtal e, medens Φ betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Opgave 1

Hvis man følger en bestemt rute gennem en jungle, vides det, at sandsynligheden for at blive bidt af en bestemt giftig slangeart, er 0,001. Sandsynligheden for at dø, som følge af et bid fra denne art, er 0,05.

Spørgsmål 1

Hvad er sandsynligheden for at dø af et bid fra denne slangeart, hvis man følger denne rute gennem junglen?

1 ☐ 0,00004

2 ☐ 0,00005

3 ☐ 0,02

4 ☐ 0,00063

5 ☐ 0,00045

6 ☐ Ved ikke

Opgave 2

I et bestemt område kan antallet af kraftige haglbyger på et år beskrives ved en Poisson(5) fordeling. Sandsynligheden for, at et specialbygget tag i området skal repareres efter sådan en haglbyge, er $0,1$.

Spørgsmål 2

Hvad er sandsynligheden for, at taget ikke skal repareres på et givet år?

1 ☐ $\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{e^{-5}5^i}{i!}$

2 ☐ $e^{-\frac{1}{6}}$

3 ☐ $e^{-\frac{1}{2}}$

4 ☐ $e^{-\frac{1}{4}}$

5 ☐ $e^{-\frac{1}{3}}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 3

Opgave 3

En skiskyder skyder til måls mod 5 skydeskiver en efter en. Skiverne har en radius på $2cm$. Punktet, hvor skuddet rammer, kan antages at være beskrevet ved to uafhængige normalfordelte variable med middelværdi $0cm$ og varians $1cm^2$, i et koordinat system, med nulpunkt i centrum af den skydeskive, der sigtes efter. Det kan antages, at skiskyderen kun rammer den skydeskive, der sigtes efter.

Spørgsmål 3

Hvad er sandsynligheden for, at skiskyderen rammer alle skydeskiverne på 5 skud?

1 ☐ $(1 - \mathrm{e}^{-4})^5$

2 ☐ $\left(1 - \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}y \mathrm{d}x\right)^5$

3 ☐ $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$

4 ☐ $1 - \mathrm{e}^{-5}$

5 ☐ $(1 - \mathrm{e}^{-2})^5$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 4

En astronom undersøger et bestemt område af stjernehimlen for at finde en bestemt type stjerne. Det vides, at en ud af 1000 stjerner er af denne type.

Spørgsmål 4

Forventningsværdien, for antallet af stjerner astronomen skal observere, før der er fundet 3 af den ønskede stjernetype blandt observationerne, findes til

1 ☐ $\sum_{i=0}^{1000} i \cdot \binom{1000}{i} \left(\frac{1}{1000}\right)^i \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^i$

2 ☐ 3003

3 ☐ $\frac{1000}{3}$

4 ☐ 2997

5 ☐ 3000

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 4

Opgave 5

En honningbi producerer i gennemsnit 2 gram honning på en sæson med en standard afvigelse på 1,5 gram.

Spørgsmål 5

Find, eventuelt approksimativt, sandsynligheden for, at en koloni med 2000 honningbier producerer mere end 4,1 kg honning på en sæson.

1 ☐ $0,0680$

2 ☐ $0,0341$

3 ☐ $0,0521$

4 ☐ $0,0012$

5 ☐ $0,0003$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 6

En stokastisk variabel X følger en såkaldt Paretofordeling med tæthedsfunktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i værdimængden $X \geq 1$. Man danner en ny variabel $Y = \frac{1}{X}$.

Spørgsmål 6

Middelværdien af Y, $E(Y)$ findes til

1 ☐ ∞ (ikke defineret)

2 ☐ 1

3 ☐ $\frac{1}{2}$

4 ☐ $\frac{1}{4}$

5 ☐ $\frac{1}{6}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 5

Opgave 7

Man har $X \sim$N(5,25) og $Y \sim$N(8,9). Parret er bivariat normalfordelt med korrelationskoefficient $-\frac{4}{5}$.

Spørgsmål 7

$\mathbb{E}(X|Y = 11)$ findes til

1 ☐ 1

2 ☐ 0

3 ☐ 3

4 ☐ 4

5 ☐ 5

6 ☐ Ved ikke

Opgave 8

Et stort elektrisk apparat bruger 10 batterier, hvoraf to er defekte. Det vides ikke hvilke. Tre (3) tilfældige batterier skiftes.

Spørgsmål 8

Hvad er sandsynligheden for, at de 2 defekte batterier er blevet udskiftet?

1 ☐ $\frac{1}{15}$

2 ☐ $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}$

3 ☐ $\frac{1}{3}$

4 ☐ $\frac{1}{4}$

5 ☐ $\frac{1}{7}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 6

Opgave 9

Lad X_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, være uafhængige kontinuerte stokastiske variable, der er ligefordelt på enhedsintervallet $]0; 1[$.

Spørgsmål 9

Den fjerde største af de syv variable følger en

1 ☐ Beta(3,3) fordeling

2 ☐ Normal$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{84}\right)$ fordeling

3 ☐ Binomial$\left(7, \frac{1}{2}\right)$ fordeling

4 ☐ Uniform(0,1) fordeling

5 ☐ Beta(4,4) fordeling

6 ☐ Ved ikke

Opgave 10

Et bestemt træs overlevelse, afhænger af vejret. Hvis træet på et givet år udsættes for frostgrader, dør det med 50% sandsynlighed, ellers er sandsynligheden for det dør 1%. I området hvor træet står, fremkommer frostgrader med 10% sandsynlighed om året.

Spørgsmål 10

Sandsynligheden for, at et træ dør på et givet år, findes til

1 ☐ $\frac{1}{5000}$

2 ☐ $\frac{59}{1000}$

3 ☐ $\frac{1}{10}$

4 ☐ $\frac{17}{250}$

5 ☐ $\frac{1}{100}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 7

Opgave 11

En bordpladeproducent har produceret 10 borde, hvor 5 af dem ikke lever op til kvalitetskravene. 3 af de 10 borde udvælges tilfældigt til kvalitestkontrol.

Spørgsmål 11

Hvad er sandsynligheden for, at mindst 1 af de udvalgte borde ikke lever op til kvalitetskravene?

1 ☐ $1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$

2 ☐ $\frac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}}$

3 ☐ $\frac{\binom{7}{0}\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}$

4 ☐ $1 - \frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8}$

5 ☐ $\frac{8}{17}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 12

En butiks indtægt på en dag, kan beskrives ved en stokastisk variabel, med en middelværdi på 100.000 kr. og en standard afvigelse på 50.000 kr.

Spørgsmål 12

En øvre grænse for sandsynligheden for, at butikken har en indtægt på over 250.000 kr. på en dag, er

1 ☐ $\frac{1}{12}$

2 ☐ $\frac{1}{9}$

3 ☐ $\frac{1}{3}$

4 ☐ $\frac{1}{27}$

5 ☐ $\frac{1}{18}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 8

Opgave 13

Lad X være uniform fordelt på intervallet $]0;1[$. Lad Y være givet ved $Y = -\frac{log(X)}{\lambda}$.

Spørgsmål 13

Tæthedsfunktionen $f_Y(y)$ for Y er

1 ☐ $\frac{1}{\lambda-1}\left(\log(y)+\lambda\right), \quad 0 \leq y \leq 1$

2 ☐ $1 - e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0$

3 ☐ $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}, \quad y \geq 0$

4 ☐ $\frac{\lambda^2}{4}\log(y+1)y, \quad 0 \leq y \leq 1$

5 ☐ $\frac{x^2}{2\lambda \mathrm{e}^x} \quad y \geq 0$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 14

Et firma skal bruge 10 enheder af en bestemt type elektrisk komponent. Firmaet ved erfaringsmæssigt, at hver femte af disse komponenter er defekte ved modtagelse.

Spørgsmål 14

Sandsynligheden for, at firmaet modtager mindst 10 funktionelle komponenter, hvis de bestiller 15, er

1 ☐ $\frac{2}{3}$

2 ☐ $\frac{5}{19}$

3 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{15-\frac{1}{5}10}{\sqrt{10\frac{1}{5}\frac{4}{5}}}\right)$

4 ☐ $\sum_{i=10}^{15} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^i}{i!}$

5 ☐ $\sum_{i=10}^{15} \binom{15}{i}\left(\frac{4}{5}\right)^i\left(\frac{1}{5}\right)^{15-i}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 9

Opgave 15

Man ønsker at frasortere spam-emails. Det vides erfaringsmæssigt, at 5% af alle spam-emails indeholder en bestemt sætning, mens denne sætning kun findes i 0,5% af email, der ikke er spam. 40% af alle emails er spam. En email er modtaget, og den indeholder sætningen.

Spørgsmål 15

Hvad er sandsynligheden for, at emailen er spam?

1 ☐ $\frac{12}{17}$

2 ☐ $\frac{2}{3}$

3 ☐ $\frac{20}{23}$

4 ☐ $\frac{4}{5}$

5 ☐ $\frac{27}{41}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 16

Mængden af henholdsvis chokolade og slik indtaget af en dansker pr. år beskrives ved en bivariat normalfordeling. Den gennemsnitlige mængde chokolade er 8,8kg med en standardafvigelse på 1kg. Den gennemsnitlige slikmængde er 8kg, med standardafvigelsen 0,8kg. Korrelationskoefficienten mellem de to mængder er $\rho = 0.7$.

Spørgsmål 16

Hvad er sandsynligheden for, at en dansker spiser mere chokolade end gennemsnittet, givet vedkommende spiser mindre slik end gennemsnittet?

1 ☐ 0,6214

2 ☐ 0,2636

3 ☐ 0,2468

4 ☐ 0,2532

5 ☐ 0,3256

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 10

Opgave 17

Lad X, Y være uafhængige, uniforme stokastiske variable, der antager værdier i mængden $\{1, 2, \ldots, n\}$

Spørgsmål 17

Man finder $P(X < Y)$ til

1 ☐ $\frac{n-1}{2n}$

2 ☐ $\frac{1}{n}$

3 ☐ $\frac{1}{n^2}$

4 ☐ $\frac{1}{2}$

5 ☐ $\frac{1}{3}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 18

Lad den stokastiske variabel X være Poisson(λ) fordelt, og lad, for givet $X = x$, Y være $binomial(x, p)$ fordelt.

Spørgsmål 18

Kovariansen mellem X og Y, $Cov(X, Y)$ findes til

1 ☐ λp^2

2 ☐ $\frac{p}{\lambda}$

3 ☐ $\frac{\lambda}{p}$

4 ☐ λp

5 ☐ $\lambda^2 p$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 11

Opgave 19

En brandstation modtager regelmæssigt alarmer. Processen af ankomne alarmer kan med rimelighed beskrives som en Poissonprocess med en intensitet på seks alarmer per døgn. På et tidspunkt er det 12 timer siden, at der sidst har været modtaget en alarm.

Spørgsmål 19

Sandsynligheden for, at der går mindst 4 timer mere til den næste alarm modtages, er

1 ☐ $\frac{1}{2}$

2 ☐ $\frac{3}{8}$

3 ☐ $\frac{\int_{16}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x}{\mathsf{P}(X>12)}$

4 ☐ $e^{-\frac{1}{2}}$

5 ☐ e^{-1}

6 ☐ Ved ikke

Opgave 20

Et punkt vælges uniformt tilfældigt indenfor en cirkel med centrum i (0,0) og radius 2. Et kvadrat er defineret ved $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

Spørgsmål 20

Sandsynligheden for, at et punkt vælges indenfor kvadratet, er

1 ☐ 0,318

2 ☐ 0,412

3 ☐ 0,354

4 ☐ 0,532

5 ☐ 0,614

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 12

Opgave 21

Lad X være $beta(r,s)$ fordelt og Y være $beta(p,q)$ fordelt. Man kan antage at X og Y er uafhængige. Man danner nu den stokastiske variabel $Z = \frac{Y}{X}$.

Spørgsmål 21

Tæthedesfunktionen $f_Z(z)$ for Z findes til

1 ☐ $\frac{1}{B(p-r,q-s)} z^{p-r-1}(1-z)^{q-s-1}$

2 ☐ $\int_0^{\min\left(1,\frac{1}{z}\right)} \frac{|x|}{B(r,s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1} \frac{1}{B(p,q)}(zx)^{p-1}(1-zx)^{q-1}\mathrm{d}x$

3 ☐ $\int_0^1 \frac{|x|}{B(r,s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1} \frac{1}{B(p,q)}(zx)^{p-1}(1-zx)^{q-1}\mathrm{d}x$

4 ☐ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(p+q)\sqrt{pq(r+s+1)}}{(r+s)\sqrt{rs(p+q+1)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(z-\frac{(r+s)p}{r(p+q)}\right)^2}{\frac{pq(r+s)^2(r+s+1)}{rs(p+q)^2(p+q+1)}}}$

5 ☐ $\int_0^\infty \frac{|x|}{B(r,s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1} \frac{1}{B(p,q)}(zx)^{p-1}(1-zx)^{q-1}\mathrm{d}x$

6 ☐ Ved ikke

hvor $B(r,s)$ er den sædvanlige betafunktion

$$B(r,s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\mathrm{d}x$$

Fortsæt på side 13

Opgave 22

Tiden mellem kraftige jordskælv i et bestemt område kan beskrives ved den stokastiske variabel T. Tæthedsfunktionen $f_T(t)$ for T, hvor t angives i år, er ikke nærmere specificeret, dog er det oplyst at $f_T(50) = 0.1$, samt at $P(T > 50) = 0.9$. Det er præcist 50 år siden, der sidst har været et kraftigt jordskælv i området.

Spørgsmål 22

Sandsynligheden for, at der forekommer et kraftigt jordskælv i området indenfor de næste 24 timer, bestemmes, eventuelt approksimativt, til

1 ☐ 0,000304

2 ☐ 0,000451

3 ☐ 0,000325

4 ☐ 0,000154

5 ☐ 0,000652

6 ☐ Ved ikke

Opgave 23

Den stokastiske variabel X kan antage værdierne $-1, 0, 1$. Det er samtidig oplyst, at $E(X) = \frac{1}{3}$ og $E(X^2) = \frac{2}{3}$.

Spørgsmål 23

Sandsynlighederne $P(X = -1), P(X = 0), P(X = 1)$ findes til

1 ☐ $P(X = -1) = \frac{1}{2}, P(X = 0) = \frac{1}{2}, P(X = 1) = \frac{1}{4}$

2 ☐ $P(X = -1) = \frac{1}{3}, P(X = 0) = \frac{1}{3}, P(X = 1) = \frac{1}{3}$

3 ☐ $P(X = -1) = \frac{1}{5}, P(X = 0) = \frac{1}{5}, P(X = 1) = \frac{3}{5}$

4 ☐ $P(X = -1) = \frac{1}{7}, P(X = 0) = \frac{3}{7}, P(X = 1) = \frac{4}{7}$

5 ☐ $P(X = -1) = \frac{1}{6}, P(X = 0) = \frac{1}{3}, P(X = 1) = \frac{1}{2}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 24

Lad S_n angive antallet af gange, en normal mønt er landet plat, i de første n kast.

Spørgsmål 24

Man finder $E(S_5|S_{10} = 7)$ til

1 ☐ $\frac{9}{2}$

2 ☐ $\frac{7}{2}$

3 ☐ 4

4 ☐ $\frac{12}{3}$

5 ☐ $\frac{6}{5}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 25

Et punkt vælges uniformt tilfældigt indenfor området $0 \leq y \leq 1 - |x| < 1$.

Spørgsmål 25

Den betingede tæthed $f_x(x|Y = y)$ findes til

1 ☐ $\begin{cases} \frac{x+1}{2}, & \text{for } 0 \leq y \leq 1 - |x| < 1. \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$

2 ☐ $\begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{for } -1 \leq x \leq 1. \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$

3 ☐ $\begin{cases} \frac{1}{2-2y}, & \text{for } 0 \leq y \leq 1 - |x| < 1. \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$

4 ☐ $\begin{cases} \frac{1}{4-4y}, & \text{for } -(1-y) \leq x \leq 1 - y. \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$

5 ☐ $\begin{cases} \frac{1}{2y}, & \text{for } 0 \leq y \leq 1 - |x| < 1. \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 15

Opgave 26

En tæthedsfunktion er givet ved $f(x) = 4x(1 - x^2)$, hvor $x \in [0; 1]$.

Spørgsmål 26

Fordelingsfunktion $F(X)$ findes til

1 ☐ $4 - 12x^2$

2 ☐ $-3x^2(x^2 - 1)$

3 ☐ $-4x^2(x^2 - 4)$

4 ☐ $-x^2(x^2 - 2)$

5 ☐ $-x^2$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 27

Den simultane tæthedsfunktion for X, Y er givet ved $f(x, y) = 2(x + y - 1)^{-3}$, hvor $x, y > 1$.

Spørgsmål 27

Sandsynligheden $P(2 < x < 4, 1 < y < 3)$ findes til

1 ☐ $\frac{1}{6}$

2 ☐ $\frac{1}{5}$

3 ☐ $\frac{1}{4}$

4 ☐ $\frac{1}{9}$

5 ☐ $\frac{8}{17}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 16

Opgave 28

Lad $X_i, i = 1, 2, \ldots, 5$, være standard normalfordelte variable. Der dannes nu $Z = \sum_{i=1}^{5} X_i^2$.

Spørgsmål 28

Hvilken fordeling følger Z?

1 ☐ Normal(0,5)

2 ☐ Normal(0,25)

3 ☐ Beta(5,1)

4 ☐ $\chi^2(5)$

5 ☐ Exponential($\frac{1}{5}$)

6 ☐ Ved ikke

Opgave 29

Lad $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$, og $Z \sim$ Binomial $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Der dannes nu

$$Y = \begin{cases} -X, & \text{hvis } Z = 0. \\ X, & \text{hvis } Z = 1. \end{cases}$$

Spørgsmål 29

Hvad kan der siges om parret (X, Y)?

1 ☐ X og Y er positivt korrelerede.

2 ☐ X og Y er negativt korrelerede.

3 ☐ X og Y er ukorrelerede, men afhængige.

4 ☐ X og Y er uafhængige.

5 ☐ Ingen af ovenstående.

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 17

Opgave 30

En landmand producerer både havre og majs. Havre kan sælges for 30 kr/kg, mens majs sælges for 35 kr/kg. Havreudbyttet på en sæson følger en Normal(10000kg,1600kg^2)-fordeling, mens majsudbyttet følger en Normal(8000kg,1600kg^2)-fordeling. Korrelationskoefficienten mellem majs og havre udbyttet er 0,8. Det kan antages, at alle afgrøder landmanden producerer kan sælges.

Spørgsmål 30

Hvad er sandsynligheden for, at landmanden sælger for mere 500000kr på en sæson?

1 ☐ $\Phi\left(\frac{50000}{\sqrt{3541320}}\right)$

2 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{50000}{\sqrt{3541320}}\right)$

3 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{80000}{\sqrt{6088000}}\right)$

4 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{80000}{\sqrt{3400000}}\right)$

5 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{80000}{\sqrt{3541320}}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Slut på opgavesættet.