

*Skriftlig prøve, den:* 17. december 2025

*Kursus nr :* 02405

*Kursus navn:* Sandsynlighedsregning

*Varighed :* 4 timer

*Tilladte hjælpemidler:* Alle

Dette sæt er besvaret af:

\_\_\_\_\_  
(navn)

\_\_\_\_\_  
(underskrift)

\_\_\_\_\_  
(bord nr)

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 28 opgaver, benævnt opgave 1,2,..., 28 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,..., 30 i teksten. Svarene skal uploades via DE Digital Eksamen, ved brug af filen "answers.txt". I filen anføres studienummer på første linie, spørgsmålsnummer og svar anføres på de følgende linier med en linie for hvert spørgsmål.

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6.

Der gives 5 point for et korrekt svar og  $-1$  for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til "ved ikke") giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredsstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

*Der gøres opmærksom på, at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr 16.*

I teksten benyttes betegnelsen  $\log(\cdot)$  for naturlige logaritmer, dvs. logaritmer med grundtal  $e$ , medens  $\Phi$  betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

## Opgave 1

Til en bestemt udendørsaktivitet har man brug for, at vejret er overskyet, men, at det ikke regner. Sandsynligheden for, at det er overskyet en given dag, kan sættes til 0,35, medens sandsynligheden for, at det er overskyet, og, at det regner, kan sættes til 0,18. Idet man lader  $I$  være en indikatorvariabel, der angiver om den udendørsaktivitet kan foregå en given dag, ønskes middelværdien af  $I$  bestemt.

### Spørgsmål 1

Man finder  $E(I)$  til

- 1  0,53
- 2  0,25
- 3  0,17
- 4   $0,35 \cdot 0,18$
- 5  Kan ikke bestemmes ud fra de givne oplysninger
- 6  Ved ikke

## Opgave 2

Rejsetiden fra en forstad til centrum i en storby følger en generel fordeling med middelværdi 40 minutter. Man ønsker en sikker vurdering af, at rejsetiden ikke overstiger 2 timer.

### Spørgsmål 2

Sandsynligheden for, at rejsetiden overstiger 2 timer, er maksimalt

- 1   $\frac{1}{16}$
- 2   $\frac{1}{9}$
- 3   $\frac{1}{4}$
- 4   $\frac{1}{3}$
- 5   $\Phi\left(\frac{2-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)$
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 3

### Opgave 3

Ved en kemisk reaktion produceres et aktivt stof til brug for medicinering af en bestemt gruppe patienter. Koncentrationen af stoffet kan beskrives ved en kontinuert stokastisk variabel med tæthed  $f(x) = \frac{e^{-\frac{(\log(x))^2}{4}}}{2x\sqrt{\pi}}$ .

#### Spørgsmål 3

Sandsynligheden for, at koncentrationen befinder sig i intervallet  $[1; 1 + \frac{1}{10}]$ , findes, eventuelt approksimativt, til

- 1   $(20\sqrt[4]{\pi^2 e})^{-1}$
- 2   $\frac{\sqrt{\pi}}{20\pi}$
- 3   $\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{e^{-\frac{(\log(x))^2}{4}}}{2x\sqrt{\pi}} dx$
- 4   $\frac{e^{-\frac{(\log(\frac{11}{10}))^2}{4}}}{\frac{22}{10}\sqrt{\pi}}$
- 5   $\frac{\sqrt[4]{e}}{20\sqrt{\pi}}$
- 6  Ved ikke

### Opgave 4

Man har to stokastiske variable  $X$  og  $Y$  med  $E(X) = 4$ ,  $E(Y) = -3$ ,  $\text{Var}(X) = 9$ ,  $\text{Var}(Y) = 4$  og  $E(XY) = -16$ . Man danner nu den stokastiske variabel  $Z = 2X - 3Y$ .

#### Spørgsmål 4

Man finder  $E(Z)$  og  $\text{Var}(Z)$  til

- 1   $E(Z) = -1$ ,  $\text{Var}(Z) = 24$
- 2   $E(Z) = -1$ ,  $\text{Var}(Z) = 72$
- 3   $E(Z) = 17$ ,  $\text{Var}(Z) = 24$
- 4   $E(Z) = 17$ ,  $\text{Var}(Z) = 72$
- 5   $E(Z) = 17$ ,  $\text{Var}(Z) = 120$
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 4

## Opgave 5

I et Yatzy spil med fem almindelige sekssidede terninger er det største “to par”, man kan slå, to seksere og to femmere. Et “fuldt hus” er tre af en slags og to af en anden slags.

### Spørgsmål 5

Bestem sandsynligheden for at slå det størst mulige “to par” i et slag, som samtidigt *ikke* er et “fuldt hus”.

1   $\frac{5!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{4}{6^5}$

2   $\binom{5}{4} \frac{4}{6^5}$

3   $\frac{5!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{5}{6^5}$

4   $\binom{5}{2} \binom{5}{2} \frac{4}{6^5}$

5   $\frac{4}{6^5}$

6  Ved ikke

## Opgave 6

I en urne er der 30 kugler, hvoraf femten er røde og femten er blå. Der tages tilfældigt otte kugler op af urnen, således at der er toogtyve tilbage.

### Spørgsmål 6

Sandsynligheden for, at der er netop fire røde kugler blandt de otte udtagne, findes til

1   $\frac{\binom{15}{4}^2}{\binom{30}{8}}$

2   $\binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^8$

3   $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} e^{-\frac{1}{2}}$

4   $\frac{1}{2}$

5   $\frac{13}{42}$

6  Ved ikke

Fortsæt på side 5

## Opgave 7

Efter frigivelsen af et softwareprodukt er der to typer af fejl, der kan manifestere sig. Tiden til, at den ene type manifesterer sig, kan beskrives ved en eksponentialfordelt stokastisk variabel med intensitet  $\lambda$ , medens tiden til, at den anden manifesterer sig, kan beskrives ved en anden stokastisk variabel, der følger en  $gamma(2, \lambda)$  fordeling. De to variable kan opfattes som værende uafhængige.

### Spørgsmål 7

Sandsynligheden for, at der går mere end  $t$  tidsenheder før en fejl manifesterer sig, er

- 1   $e^{-2\lambda t} \left(1 + 2\lambda t + \frac{(2\lambda t)^2}{2}\right)$
- 2   $e^{-\lambda t} \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2}\right)$
- 3   $e^{-2\lambda t}(1 + \lambda t)$
- 4   $e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$
- 5   $e^{-3\lambda t}$
- 6  Ved ikke

## Opgave 8

Betragt et koordinatsystem med en bygning placeret i centrum. Et bombefly kaster en bombe, der rammer afstanden  $R$  fra centrum med tætheden  $f_R(r) = re^{-\frac{1}{2}r^2}$ . Sandsynligheden for, at bygningen bliver ødelagt, er  $e^{-r^2}$ , givet bomben rammer præcist afstanden  $r$  fra centrum.

### Spørgsmål 8

Sandsynligheden for, at bygningen bliver ødelagt, findes til

- 1   $\frac{3}{4}$
- 2   $\frac{2}{3}$
- 3   $\frac{1}{2}$
- 4   $\frac{1}{3}$
- 5   $\frac{1}{4}$
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 6

## Opgave 9

### Spørgsmål 9

Hvad er hazardfunktionen (engelsk hazard rate) for en Rayleighfordeling givet ved?

- 1   $e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- 2   $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$
- 3   $x$
- 4   $e$
- 5   $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- 6  Ved ikke

## Opgave 10

I en kemisk/farmaceutisk produktionsproces måles et standardiseret udbytte  $X$  og en standardiseret urenhed  $Y$ . De beskrives ved en standardiseret bivariat normalfordeling med korrelationskoefficient  $\rho = \frac{3}{5}$  (højere udbytte følges typisk af højere urenhed). I et forbedringsforsøg kaldes et produktionsforløb "succesfuldt", hvis udbyttet er over sin middelværdi, mens urenheden ikke stiger for voldsomt i forhold til udbyttet. Konkret kræves  $X > 0$  og  $\frac{1}{2}X < Y < X$ .

### Spørgsmål 10

Sandsynligheden for et succesfuldt produktionsforløb findes til

- 1   $\frac{1}{6}$
- 2   $\frac{\arctan(1/2)}{\pi}$
- 3   $\frac{\arctan(1/2) - \arctan(1/8)}{\pi}$
- 4   $\frac{\arctan(1/2) + \arctan(1/8)}{\pi}$
- 5   $\frac{\arctan(1/2) + \arctan(1/8)}{2\pi}$
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 7

## Opgave 11

Røde dværge er en type stjerner med lang levetid og ud fra den synsvinkel gode kandidater for at have tilknyttede planeter med liv. Forekomsten af røde dværge i den del af mælkevejen, hvor solen er placeret, er i gennemsnit 72 per 1 000 kubikparsec, hvor en parsec er en længdeenhed, der svarer til godt tre lysår. De røde dværge kan opfattes som tilfældigt fordelt i området.

### Spørgsmål 11

Sandsynligheden for at finde mindst en rød dværg i et område af størrelsen 50 kubikparsec findes til

- 1  8%
- 2  15%
- 3  42%
- 4  97%
- 5  99%
- 6  Ved ikke

## Opgave 12

Om en stokastisk variabel  $X$  oplyses, at den er *binomial*(100, $p$ ) fordelt. Samtidigt oplyses, at dens middelværdi og standardafvigelse er identiske ( $E(X) = SD(X)$ ).

### Spørgsmål 12

Parameteren  $p$  kan findes til

- 1   $p = \frac{1}{111}$
- 2   $p = \frac{1}{101}$
- 3   $p = \frac{1}{100}$
- 4   $p = \frac{1}{99}$
- 5  Middelværdi og standardafvigelse kan ikke være ens i en binomialfordeling.
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 8

### Opgave 13

En opdrætter af racekatte har en hvid hunkat, der skal have killinger. Han ved, at hver killing bliver hvid med sandsynlighed 0,4, og, at kullet bliver på 5 killinger. Opdrætteren snakker med en sælger, der er interesseret i at købe så mange af de hvide killinger som muligt.

#### Spørgsmål 13

Hvad er det mest sandsynlige antal hvide killinger i kullet?

- 1  1
- 2  2
- 3  3
- 4  4
- 5  5
- 6  Ved ikke

### Opgave 14

Man har den kontinuerte stokastiske variabel  $X$ , der følger en *exponential*(1) fordeling, samt den ligeledes kontinuerte stokastiske variabel  $Y$ , der for  $X = x$  har tæthedsfunktionen  $2\frac{y}{x^2}$ ,  $0 \leq y \leq x$ .

#### Spørgsmål 14

Forventningsværdien  $E(Y)$  af  $Y$  findes til

- 1   $\frac{1}{2}$
- 2  2
- 3   $\frac{x}{2}$
- 4   $\frac{1}{3}$
- 5   $\frac{2}{3}$
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 9

## Opgave 15

En spiller har et fast lodnummer hos en spiludbyder af et almennyttigt lotteri. Sandsynligheden for at vinde en gevinst i en enkelt trækning er  $\frac{1}{25}$ .

### Spørgsmål 15

Sandsynligheden for, at den femte gevinst, spilleren vinder, indtræffer netop ved den 15'ende trækning, findes til

- 1   $\binom{14}{4} \frac{24^{10}}{25^{15}}$
- 2   $\binom{15}{4} \frac{24^{10}}{25^{15}}$
- 3   $\frac{(\frac{1}{25})^5}{5!} e^{-\frac{1}{25}}$
- 4   $\binom{15}{5} \frac{1}{24^5} \left(\frac{24}{25}\right)^{10}$
- 5   $\frac{1}{3}$
- 6  Ved ikke

## Opgave 16

Den stokastiske variabel  $X$  følger en  $normal(1,4)$  fordeling. Man danner en ny variabel  $Y = \left(\frac{X-1}{2}\right)^2$ .

### Spørgsmål 16

Fordelingen af  $Y$  er en

- 1   $chi^2$  fordeling med 1 frihedsgrad
- 2   $chi^2$  fordeling med 2 frihedsgrader
- 3   $gamma(2,2)$  fordeling
- 4   $normal(0,1)$  fordeling
- 5   $Rayleigh$  fordeling
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 10

## Opgave 17

En fabrikant af elektriske pærer har konstateret, at sandsynligheden for, at en pære er defekt, er 2%, medens sandsynligheden for, at en forkert pakket pære er defekt, er 4%, og sandsynligheden for, at en korrekt pakket pære er defekt, er 1,5%.

### Spørgsmål 17

Hvor stor en andel af pærene er pakket korrekt?

- 1  90%
- 2  85%
- 3  80%
- 4  75%
- 5  Spørgsmålet kan ikke besvares grundet manglende oplysninger.
- 6  Ved ikke

## Opgave 18

Lad  $X \sim \text{Poisson}(\theta)$  og  $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$  være uafhængige stokastiske variable.

### Spørgsmål 18

Hvad er fordelingen af  $Y$  givet  $X + Y = z$ ?

- 1  binomial( $z, \theta/(\theta + \lambda)$ )
- 2  negativ binomial( $z, \theta/(\theta + \lambda)$ )
- 3  negativ binomial( $z, \lambda/(\theta + \lambda)$ )
- 4  Poisson( $\theta + \lambda$ )
- 5  binomial( $z, \lambda/(\theta + \lambda)$ )
- 6  ved ikke

Fortsæt på side 11

## Opgave 19

I de tre spørgsmål, der hører til denne opgave, har man parret  $(X, Y)$  af stokastiske variable med den simultane tæthedsfunktion  $f(x, y) = 5!x(y-x)(1-y)$ ,  $0 < x < y < 1$ .

### Spørgsmål 19

Den betingede tæthed af  $Y$  for  $X = \frac{1}{3}$  findes i værdimængden til at være

- 1   $\frac{27}{4}(4y - 3y^2 - 1)$
- 2   $\frac{3}{2}$
- 3   $\frac{5!}{3}(y - \frac{1}{3})(1 - y)$
- 4   $\frac{5! \frac{1}{3}(y - \frac{1}{3})(1 - y)}{\int_0^y 5!x(y-x)(1-y)dx}$
- 5  Den betingede tæthed er ikke defineret for  $X = \frac{1}{3}$ .
- 6  Ved ikke

### Spørgsmål 20

Med  $f(x, y) = 5!x(y-x)(1-y)$  for  $0 < x < y < 1$  finder man  $P(X \leq \frac{1}{3}, Y \leq \frac{2}{3})$  til

- 1   $\frac{40}{243}$
- 2   $\frac{9}{40}$
- 3   $\frac{112}{243}$
- 4   $\int_{x=0}^{\frac{1}{3}} \int_{y=0}^x 5!x(y-x)(1-y)dydx$
- 5   $\frac{1}{3}$
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 12

## Spørgsmål 21

Med  $f(x,y) = 5!x(y-x)(1-y)$  for  $0 < x < y < 1$  findes tætheden  $f_Z(z)$  for den stokastiske variabel  $Z = \frac{Y}{X}$  til

1   $\int_0^\infty x^2(xz-x)(1-xz)dx$

2   $\int_0^1 x^2(xz-x)(1-xz)dx$

3   $\frac{6}{z^3} \left(1 - \frac{1}{z}\right)$

4   $\frac{4}{z^3}$

5   $\frac{3}{(1+z)^4}$

6  Ved ikke

## Opgave 20

En stokastisk variabel defineres ud fra to kast med en retfærdig mønt på følgende måde: Ved 2 gange plat tildeles  $X$  værdien 0, ved 1 plat og 1 krone tildeles  $X$  værdien 1, medens  $X$  tildeles værdien 3 ved 2 gange krone.

## Spørgsmål 22

Middelværdien  $E(X)$  af  $X$  findes til

1  1

2  2

3   $\frac{5}{4}$

4   $\frac{7}{4}$

5   $\frac{3}{2}$

6  Ved ikke

Fortsæt på side 13

## Opgave 21

Ved en laserkirurgisk behandling har laseren en initial placering, der har en vis afvigelse fra den ønskede centrering. Afvigelsen kan på en passende normeret skala beskrives ved et koordinatsæt i to dimensioner, hvor de to koordinater kan beskrives ved uafhængige standardnormalfordelte variable.

### Spørgsmål 23

Sandsynligheden for, at afstanden fra den initiale placering til den ønskede centrering er mere end 1 på den normerede skala, findes til

- 1   $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}}$
- 2   $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- 3   $1 - e^{-\frac{1}{2}}$
- 4   $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$
- 5   $e^{-\frac{1}{2}}$
- 6  Ved ikke

## Opgave 22

Det antages, at aktiekursen  $S$  for et unavngivet farmaceutisk selskab (som producerer vægttabsmedicin) og forsøgsresultatet  $W$  (vægttabsgrad i procentpoint) kan beskrives ved en bivariat normalfordeling med korrelationskoefficient  $\rho = \frac{3}{4}$ . Parametrene er  $E(S) = 100$  kr,  $\text{Var}(S) = (15 \text{ kr})^2$ ,  $E(W) = 12\%$  og  $\text{Var}(W) = (4\%)^2$ . Højere vægttab i de kliniske forsøg følges typisk af højere aktiekurs.

### Spørgsmål 24

Sandsynligheden for, at aktiekursen er mindst 120 kr, når det kliniske forsøg viser et vægttab på 16%, er

- 1   $1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right)$
- 2   $1 - \Phi\left(\frac{11}{12}\right)$
- 3   $1 - \Phi\left(\frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)$
- 4   $1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$
- 5   $\Phi\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 14

## Opgave 23

DSB's S-tog registrerer kørselsvægten på hver afgang og registreringen sendes til en central server. I vinterhalvåret kan der være problemer med tilisning af underdelen af vognene, hvilket sker på 5% af vinterafgangene. Hvis der er problemer med tilisning på en bestemt vinterafgang, er sandsynligheden for, at kørselsvægten registreres til at være over 20 ton 95%, medens en registrering på over 20 ton sker med en sandsynlighed på 5% på denne afgang, hvis der ikke er problemer med tilisning.

### Spørgsmål 25

Hvis der på afgang registreres en vægt på over 20 ton, hvad er da sandsynligheden for, at der er problemer med tilisning?

- 1   $\frac{1}{4}$
- 2   $\frac{1}{2}$
- 3   $\frac{2}{3}$
- 4   $\frac{3}{4}$
- 5   $\frac{9}{10}$
- 6  Ved ikke

## Opgave 24

Et punkt  $(X, Y)$  vælges uniformt fra en firkant med endepunkter i  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  og  $(-1, -1)$ .

### Spørgsmål 26

Bestem sandsynligheden for hændelsen  $X^2 + Y^2 \leq 1$ .

- 1  0,8853
- 2   $\frac{\pi}{4}$
- 3  0,5378
- 4   $\frac{\pi}{6}$
- 5   $\frac{\pi}{8}$
- 6  ved ikke

Fortsæt på side 15

## Opgave 25

I forbindelse med deres portefølje af ulykkesforsikringer modtager et livsforsikringsselskab løbende skadesanmeldelser. Anmeldelserne kommer tilfældigt og uafhængigt af hinanden med et forventet antal månedlige anmeldelser på 4, hvor en måned regnes til at indeholde 30 dage.

### Spørgsmål 27

Sandsynligheden for, at der i en given uge går mere end 5 dage før selskabet modtager den anden skadesanmeldelse, findes til

- 1   $\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}$
- 2   $e^{-\frac{1}{3}}$
- 3   $\sum_{i=6}^{\infty} i \left(\frac{3}{15}\right)^{i-2} \left(\frac{2}{15}\right) \left(\frac{3}{15}\right)^2$
- 4   $1 - \Phi(\sqrt{15})$
- 5   $1 - \left(\frac{3}{15}\right)^5 - 5 \left(\frac{2}{15}\right) \left(\frac{3}{15}\right)^4$
- 6  Ved ikke

## Opgave 26

Et offentligt kontor har tilsagt 5 borgere til at ankomme i tidsrummet mellem kl. 9 og kl. 10. Det antages, at den enkelte borger kommer på et tilfældigt tidspunkt i tidsrummet uafhængigt af de øvrige borgere.

### Spørgsmål 28

Sandsynligheden for, at mindst 4 af borgerne er ankommet kl. 9.30, findes til

- 1   $\frac{1}{16}$
- 2   $\frac{3}{32}$
- 3   $\frac{5}{32}$
- 4   $\frac{3}{16}$
- 5   $\frac{1}{2}$
- 6  Ved ikke

Fortsæt på side 16

## Opgave 27

Et lille regionalt fartøj lastes med 100 containere. Vægten på containerne varierer, og man har fundet, at et nogenlunde pålideligt bud på vægten af en container er ti ton med en standardafvigelse af vægten på 15 ton. Det er kritisk, hvis skibet lastes med mere end 1 200 tons.

### Spørgsmål 29

Sandsynligheden for, at den samlede last overstiger 1 200 tons, kan angives til

- 1   $1 - \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)$
- 2   $\Phi\left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)$
- 3   $\Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{15}\right)$
- 4   $\Phi\left(-\frac{4}{3}\right)$
- 5   $1 - \Phi\left(\frac{2}{15}\right)$
- 6  Ved ikke

## Opgave 28

Lad  $(X, Y)$  være bivariat normalfordelte med korrelationskoefficient  $\rho = -\frac{1}{4}$ . Antag, at  $X$  er  $normal(4, 2^2)$  fordelt og  $Y$  er  $normal(1, 2^2)$  fordelt.

### Spørgsmål 30

Find sandsynligheden for  $2X + Y \leq 10$ .

- 1   $\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$
- 2   $\Phi\left(\frac{1}{4}\right)$
- 3   $\Phi\left(\frac{1}{5}\right)$
- 4   $1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)$
- 5   $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$
- 6  Ved ikke

Slut på opgavesættet.