CIVILINGENIØREKSAMEN *Side* **??** *af* **??** *sider*

Skriftlig prøve, den: 16. december 2004 *Kursus nr* : 02405

Kursus navn: Sandsynlighedsregning

Tilladte hjælpemidler: Alle

Dette sæt er besvaret af:

______________________ ______________________ ________

(navn) (underskrift) (bord nr)

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 30 opgaver, benævnt opgave 1,2,..., 30 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,...,30 i teksten. Bevarelserne af de 30 spørgsmål føres ind i nedenstående skema.

Spørgsmål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Svar															

Spørgsmål	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Svar															

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6. Indføres et forkert nummer i skemaet, kan dette rettes ved at "sværte" det forkerte nummer over og anføre det rigtige nedenunder. Er der tvivl om meningen med en rettelse, betragtes spørgsmålet som ubesvaret.

Kun forsiden skal afleveres. Afleveres blankt eller forlades eksamen i utide, skal forsiden alligevel afleveres. Kladde, mellemregninger og bemærkninger tillægges **ingen** betydning, kun tallene indført ovenfor registreres.

Der gives 5 point for et korrekt svar og -1 for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til "ved ikke") giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

Husk at forsyne opgaveteksten med navn, underskrift og bordnummer. *Der gøres opmærksom på, at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr* **??**; *blad lige om og se, at den er der.*

I teksten benyttes betegnelsen $\log(\cdot)$ for naturlige logaritmer, dvs. logaritmer med grundtal e.

Opgave 1

For hændelserne A og B har man $P(A) = \frac{1}{15}, P(B) = \frac{1}{7}, P(A \cap B) = \frac{1}{22}$.

Spørgsmål 1

Sandsynligheden for, at mindst en af hændelserne A og B indtræffer, er

1 ☐ $\frac{1}{15} + \frac{1}{7} + \frac{1}{22}$

2 ☐ $\frac{1}{15} + \frac{1}{7}$

3 ☐ $\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{22}\right)$

4 ☐ $\frac{1}{15} + \frac{1}{7} - \frac{1}{22}$

5 ☐ $1 - (1 - \frac{1}{15})(1 - \frac{1}{7})$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 2

I gennemsnit regner det hver tredje dag i december måned. Hvis det regner én dag, øger det sandsynligheden for, at det regner dagen efter.

Spørgsmål 2

Hvad kan vi på baggrund af dette sige om sandsynligheden p for, at det regner både den 24. og den 25. december?

1 ☐ $p = \frac{1}{3}$

2 ☐ $p = \frac{1}{9}$

3 ☐ $\frac{1}{9} \leq p \leq \frac{1}{3}$

4 ☐ $p \leq \frac{1}{9}$

5 ☐ $p \leq \frac{2}{9}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 3

Man har 9 rotter fra 3 forskellige kuld fordelt på køn som i angivet i tabellen

Kuld	Antal	Antal hunner
1	2	1
2	3	2
3	4	2

En tilfældig af rotterne udtages til et eksperiment. Rotten viser sig at være af hunkøn.

Spørgsmål 3

Hvad er sandsynligheden for, at rotten stammer fra kuld 3.

1 ☐ $\frac{4}{9}$

2 ☐ $\frac{2}{9}$

3 ☐ $\frac{2}{3}$

4 ☐ $\frac{2}{4}$

5 ☐ $\frac{2}{5}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 4

En boghandler sælger hver dag et stort antal bøger. En lille andel af dem bliver senere returneret. Bøger bliver returneret enkeltvis og uafhængigt af hinanden. I gennemsnit bliver tre bøger om dagen returneret.

Spørgsmål 4

Lad X betegne antallet af returnede bøger på en tilfældigt valgt dag. Hvilken fordelingstype danner det mest rimelige udgangspunkt for en model af X?

1 ☐ Normalfordelingen

2 ☐ Den geometriske fordeling

3 ☐ Den hypergeometriske fordeling

4 ☐ Poissonfordelingen

5 ☐ Ligefordelingen

6 ☐ Ved ikke

Opgave 5

Et system har tre komponenter a, b og c. Systemet fungerer, hvis a virker, eller, hvis a fejler, men både b og c virker. Komponenterne fungerer uafhængigt af hinanden med sandsynlighederne p_A, p_B, og p_C, hhv.

Spørgsmål 5

Bestem sandsynligheden for, at systemet fungerer.

1 ☐ $p_A + p_B p_C$

2 ☐ $1 - (1 - p_A)(1 - p_B)(1 - p_C)$

3 ☐ $1 - (1 - p_A) - (1 - p_B p_C) + (1 - p_A)(1 - p_B p_C)$

4 ☐ $p_A + p_B + p_C$

5 ☐ $p_A + p_B p_C - p_A p_B p_C$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 6

Et punkt vælges tilfældigt i området afgrænset af linierne $y = 0, x = 1$, og $y = x$. Koordinaterne til punktet betegnes (X, Y).

Spørgsmål 6

Den betingede fordeling $F(y|X = x) = P(Y \leq y|X = x)$ af andenkoordinaten Y givet førstekoordinaten X findes til

1 ☐ $y \quad 0 \leq y \leq 1$

2 ☐ $\frac{y}{x} \quad 0 \leq y \leq x$

3 ☐ $\frac{1}{x} \quad 0 \leq y \leq x$

4 ☐ $\frac{y-x}{1-x} \quad x \leq y \leq 1$

5 ☐ $x \quad 0 \leq x \leq 1$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 7

Lad X_i, $i = 1, \ldots, n$ være uafhængige identisk fordelte stokastiske variable på $[0, \pi]$ med tæthedsfunktion $\frac{1}{2} \sin x$.

Lad $Y = \max\{X_i \;:\; i = 1, \ldots, n\}$.

Spørgsmål 7

Bestem fordelingsfunktionen for Y.

1 ☐ $1 - \frac{1}{2^n}(1 + \cos x)^n$

2 ☐ $\frac{1}{2^n}(1 - \cos x)^n$

3 ☐ $\frac{n}{2^n}(1 - \cos x)^{n-1} \sin x$

4 ☐ $\frac{1}{2^n} \sin^n x$

5 ☐ $\frac{1}{2}(1 - \cos^n x)$

6 ☐ Ved ikke

Man kan eventuelt benytte at $\int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x$.

Opgave 8

Et spil kort indeholder 13 spar, 13 hjerter, 13 ruder og 13 klør. Der trækkes en hånd bestående af 4 kort ud af et sådant spil, uden tilbagelægning.

Spørgsmål 8

Bestem sandsynligheden for, at hånden indeholder 1 spar, 1 hjerter, 1 ruder og 1 klør.

1 ☐ $\frac{13}{52} + \frac{13}{51} + \frac{13}{50} + \frac{13}{49}$

2 ☐ $\left(\frac{\binom{13}{1}\binom{39}{3}}{\binom{52}{4}}\right)^4$

3 ☐ $(\frac{1}{4})^4$

4 ☐ $\frac{13}{52}\frac{13}{51}\frac{13}{50}\frac{13}{49}$

5 ☐ $\frac{39}{51}\frac{26}{50}\frac{13}{49}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 9

Man slår gentagne slag med to almindelige terninger.

Spørgsmål 9

Bestem sandsynligheden for, at man i det tiende slag for anden gang får et par i seksere.

1 ☐ 0.0055

2 ☐ 0.0216

3 ☐ 0.0277

4 ☐ 0.0008

5 ☐ 0.0006

6 ☐ Ved ikke

Opgave 10

En stokastisk variabel X antager værdier i $\{0, \ldots, 3\}$ med følgende sandsynligheder:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

Spørgsmål 10

Bestem variansen af X

1 ☐ 0

2 ☐ 1

3 ☐ $\frac{3}{2}$

4 ☐ $\frac{4}{3}$

5 ☐ 2

6 ☐ Ved ikke

Opgave 11

Fire venner spiller tennis. 2 af dem er venstrehåndede, de andre to højrehåndede. De danner to makkerpar à to spillere ved lodtrækning så alle konstellationer er lige sandsynlige.

Spørgsmål 11

Bestem sandsynligheden for, at de to venstrehåndede bliver makkere.

1 ☐ $\frac{1}{6}$

2 ☐ $\frac{1}{4}$

3 ☐ $\frac{1}{3}$

4 ☐ $\frac{1}{2}$

5 ☐ $\frac{2}{3}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 12

I en årgang er 51 % drenge og 49 % piger. En skoleklasse med 28 elever er dannet af denne årgang.

Spørgsmål 12

Bestem et tilnærmet udtryk for sandsynligheden for, at klassen har flere piger end drenge under antagelse af, at klassen er dannet tilfældigt,

1 ☐ $\binom{28}{15} 0.49^{15} 0.51^{13}$

2 ☐ $\sum_{i=15}^{28} \frac{(0.49 \cdot 28)^i}{i!} e^{-0.49 \cdot 28}$

3 ☐ 0.49

4 ☐ $\Phi\left(\frac{13.5 - 28 \cdot 0.51}{\sqrt{28 \cdot 0.51 \cdot 0.49}}\right)$

5 ☐ 0.49^{28}

6 ☐ Ved ikke

hvor Φ som sædvanligt angiver fordelingsfunktionen for en standard normalfordelt variabel.

Opgave 13

Koordinaterne (X, Y) til et punkt i planen vælges med tætheden $f(x,y) = \frac{1}{1.6\pi} e^{-\frac{1}{1.28}(x^2 + 1.2xy + y^2)}$.

Spørgsmål 13

Sandsynligheden for, at punktet ligger i første kvadrant (i.e. at både X og Y er positive), er

1 ☐ $\frac{1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(\frac{3}{4})}{4}$

2 ☐ $\frac{1}{4}$

3 ☐ $\frac{1}{1.6\pi}$

4 ☐ $\frac{1 - \frac{2}{\pi}\text{Arccos}(\frac{3}{5})}{4}$

5 ☐ e^{-2}

6 ☐ Ved ikke

Opgave 14

Om en stokastisk variabel X oplyses, at den følger en standardiseret normalfordeling (med middelværdi $\mu = 0$ og varians $\sigma^2 = 1$). Man danner nu $Y = \sqrt{e^X}$.

Spørgsmål 14

Tætheden $f(y)$ for Y indenfor definitionsmængden findes til

1 ☐ $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\log(y))^2}}$

2 ☐ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\log y)^2}$

3 ☐ e^{-x}

4 ☐ $\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{y}} e^{-2(\log(y))^2}$

5 ☐ $\frac{1}{y}\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(\log(y))^2}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 15

Man har de to stokastiske variable $X_i, i = 1, 2$ med middelværdi μ_i og varians σ_i^2. Man danner nu en ny variabel $Y = aX_1 + bX_2 + c$, hvor a, b og c er kendte konstanter.

Spørgsmål 15

Middelværdien $E(Y)$ af Y findes til

1 ☐ Kan ikke beregenes uden kendskab til, hvorvidt de variable er uafhængige.

2 ☐ $a\mu_1 \frac{1}{1+\sigma_1^2} + b\mu_2 \frac{1}{1+\sigma_2^2} + c$

3 ☐ $a\mu_1 + a^2\sigma_1^2 + b\mu_2 + b^2\sigma_2^2 + c$

4 ☐ $a^2\mu_1 + b^2\mu_2$

5 ☐ $a\mu_1 + b\mu_2 + c$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 16

Værnepligtige mænd har en middelhøjde på 182 cm; standard afvigelsen af de værnepligtiges højde er 8 cm. En deling består af 25 mand.

Spørgsmål 16

Angiv et overslag på sandsynligheden for, at gennemsnitshøjden i en deling overstiger 185 cm.

1 ☐ 0

2 ☐ 0.01

3 ☐ 0.03

4 ☐ 0.12

5 ☐ 0.35

6 ☐ Ved ikke

Opgave 17

Lad X være en stokastisk variabel, der beskriver levetiden af en komponent målt i dage. Antag, at X har hazardraten $1 + \cos x$ for $x > 0$.

Spørgsmål 17

Givet $t > 0$, bestem den betingede sandsynlighed for, at $X > t + \pi$, givet, at $X > t$

1 ☐ $\exp(-\pi + 2\sin t)$

2 ☐ $\exp(-\pi + 1)$

3 ☐ $\exp(-\pi - 1)$

4 ☐ $\exp(-\pi)$

5 ☐ $\exp(-1)$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 18

Lad X være en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi -1 og varians 4. Lad $Y = X^2$.

Spørgsmål 18

Bestem sandsynligheden $P(Y > 1)$.

1 ☐ $1 - \Phi(1)$

2 ☐ $\frac{1}{2} + \Phi(-1)$

3 ☐ $\sqrt{2} - 1$

4 ☐ $\frac{1}{2} + \Phi(\frac{1}{2})$

5 ☐ $\frac{1}{2} + \Phi(-\frac{1}{2})$

6 ☐ Ved ikke

hvor Φ som sædvanlig er fordelingsfunktionen for en standard normalfordelt variabel.

Opgave 19

X og Y er stokastiske variable med fælles middelværdi 0. X har varians 1, Y har varians 2, og korrelationskoefficient mellem X og Y er ρ.

Spørgsmål 19

Bestem ρ, således at variansen af $X + Y$ er 1.

1 ☐ 0

2 ☐ -1

3 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

4 ☐ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5 ☐ $-\frac{1}{2}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 20

Vi betragter 10 populære tekstbehandlingsprogrammer og antager, at hvert af de 10 programmer har den samme sandsynlighed for at blive foretrukket af en tilfældigt valgt person (diskret ligefordeling). Fire personer uden indbyrdes forhåndskendskab samles til en arbejdsgruppe.

Spørgsmål 20

Hvad er sandsynligheden for, at mindst to af deltagerne foretrækker det samme tekstbehandlingssystem.

1 ☐ $\frac{1000-9\cdot 8\cdot 7}{1000}$

2 ☐ $\frac{10000-9^4}{10000}$

3 ☐ $1-\binom{10}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(\frac{9}{10}\right)^6$

4 ☐ $1-\frac{\binom{1}{1}^4}{\binom{10}{4}}$

5 ☐ $\frac{1}{2}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 21

Lad X_i, $i = 1, \ldots, n$ være uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med kontinuert og voksende fordelingsfunktion $F(x)$.

Lad $Y = \max\{X_i \ : \ i = 1, \ldots, n\}$.

Spørgsmål 21

Bestem medianen for Y.

1 ☐ $F^{-1}(\frac{1}{2^{1/n}})$

2 ☐ $F^{-1}(\frac{1}{2^n})$

3 ☐ $(F^{-1}(\frac{1}{2}))^n$

4 ☐ $F^{-1}(\frac{1}{2})$

5 ☐ Kan ikke bestemmes ud fra det oplyste.

6 ☐ Ved ikke

Opgave 22

Du står i kø i supermarkedet. Foran dig står 3 andre kunder hvoraf den ene er ved at blive betjent. Tiden det tager at betjene en kunde er eksponentialfordelt med middelværdi 2 minutter, og forskellige kunder har uafhængige betjeningstider.

Spørgsmål 22

Hvad er sandsynligheden for at du er færdigbetjent indenfor 10 minutter?

1 ☐ ca. 74 %

2 ☐ ca. 65 %

3 ☐ ca. 35 %

4 ☐ ca. 27 %

5 ☐ Kan ikke beregnes uden at vide, hvor længe den første kunde har været under betjening.

6 ☐ Ved ikke

Opgave 23

Lad X og Y være stokastiske variable således at punktet (X, Y) er uniformt fordelt over cirkelskiven med centrum i $(0, 0)$ og radius 1.

Spørgsmål 23

Bestem den betingede sandsynlighed for $Y > 0$ givet $Y > X$, dvs. $(P(Y > 0|Y > X))$.

1 ☐ $\frac{1}{4}$

2 ☐ $\frac{3}{8}$

3 ☐ $\frac{1}{2}$

4 ☐ $\frac{5}{8}$

5 ☐ $\frac{3}{4}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 24

Lad der være givet n uafhængige variable $X_1, \ldots, X_n$, der alle er normalfordelte med middelværdi 0 og spredning 1.

Spørgsmål 24

Bestem sandsynligheden for, at den næststørste af X_i'erne ligger i intervallet $[0, dx]$, hvor $dx > 0$ er en infinitesemal størrelse.

1 ☐ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ dx$

2 ☐ $\frac{1}{2^{n(n-1)}\sqrt{2\pi}}\ dx$

3 ☐ $\frac{n(n-1)}{2^{n-1}\sqrt{2\pi}}\ dx$

4 ☐ $\frac{n(n-1)}{2^{n-1}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{n}{2}}\ dx$

5 ☐ $\frac{3}{4}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 25

Man har de to uafhængige positive stokastiske variable X og Y med tæthedsfunktion $f_X(x)$ og $f_Y(y)$ respektive. Man danner produktet $Z = X \cdot Y$.

Spørgsmål 25

Tætheden $f_Z(z)$ for Z findes til

1 ☐ $f_Z(z) = \int_0^\infty f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$

2 ☐ $f_Z(z) = \int_0^\infty \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$

3 ☐ $f_Z(z) = \int_0^\infty x f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$

4 ☐ $f_Z(z) = \int_0^\infty \frac{1}{x} f_X(x) f_Y(zx) \mathrm{d}x$

5 ☐ $f_Z(z) = \int_0^\infty x f_X(x) f_Y(zx) \mathrm{d}x$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 26

Ca. hver tredje person kan spille skak. Fire tilfældige personer er samlet.

Spørgsmål 26

Bestem sandsynligheden for, at et lige antal (0,2 eller 4) af de fire kan spille skak.

1 ☐ $\frac{3}{5}$

2 ☐ $\frac{1}{2}$

3 ☐ $\frac{16}{81}$

4 ☐ $\frac{1}{3}$

5 ☐ $\frac{41}{81}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 27

Vi betragter en ukrudtsplante på en mark og dens afkom (første generation). Afstandsvektoren mellem moderplanten og en tilfædigt valgt afkomsplante kan beskrives ved vektoren X_1, X_2 hvor $X_i \in N(0,1)$. Således kan begge afstandvektorens koordinater beskrives som normalfordelte variable, hvor standardafvigelsen er valgt som længdeenhed.

Spørgsmål 27

Sandsynligheden for, at en tilfældigt afkomsplante er placeret mere end én længdeenhed fra moderplanten, er

1 ☐ $1-(\Phi(1)-\Phi(-1))$

2 ☐ $(\Phi(1)-\Phi(-1))$

3 ☐ $\frac{1}{\sqrt{e}}$

4 ☐ $\frac{1}{\pi}$

5 ☐ $\frac{1}{e}$

6 ☐ Ved ikke

hvor Φ som sædvanlig angiver fordelingsfunktionen for en standard normalfordelt variabel.

Opgave 28

Den stokastiske vektor (X,Y) antager værdier i området $0 \leq y \leq x^2 \leq 1$, med fordelingsfunktionen $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = c(3x^2\sqrt{y} - 3xy + y\sqrt{y})$.

Spørgsmål 28

Konstanten c er

1 ☐ $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

2 ☐ $\frac{1}{2}$

3 ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

4 ☐ 1

5 ☐ $\frac{20}{3}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 29

To spillere kaster hver to mønter. Vi lader X betegne antallet af krone blandt de to mønter kastet af den første spiller og Y betegne det totale antal af krone i de ialt 4 kast. Vi betragter tilfældet, hvor $Y = 2$.

Spørgsmål 29

Man finder $(P(X = 0|Y = 2), P(X = 1|Y = 2), P(X = 2|Y = 2))$ til

1 ☐ $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

2 ☐ $\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$

3 ☐ $\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right)$

4 ☐ $\left(\frac{3}{16}, \frac{5}{8}, \frac{3}{16}\right)$

5 ☐ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 30

Belastningen af en kæde er givet ved en fordeling, der har middelværdi 1000 N og standardafvigelse på 500 N. Man ønsker at bestemme en værdi $x_{\max}$ for belastningen, der højst må overskrides med en sandsynlighed på en promille.

Spørgsmål 30

En mindste sikker belastningsgrænse $x_{\max}$ er

1 ☐ $\Phi\left(\frac{x_{\max}-1000\text{N}}{500\text{N}}\right) = 0.999$

2 ☐ $x_{\max} = 1000 \text{ N} + \sqrt{1000} \cdot 500 \text{ N}$

3 ☐ $0.001 x_{\max} = 1000 \text{ N}$

4 ☐ $0.001 x_{\max} = 500 \text{ N}$

5 ☐ $x_{\max} = \sqrt{1000} \cdot 500 \text{ N}$

6 ☐ Ved ikke

hvor Φ som sædvanlig angiver fordelingsfunktionen for en standard normalfordelt variabel.

Slut på opgavesættet.