Skriftlig prøve, den: 15. december 2023 *Kursus nr* : 02405

Kursus navn: Sandsynlighedsregning *Varighed* : 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Alle

Dette sæt er besvaret af:

(navn)	(underskrift)	(bord nr)

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 30 opgaver, benævnt opgave 1,2,..., 30 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,...,30 i teksten. Svarene skal uploades via DE Digital Eksamen, ved brug af filen "answers.txt". I filen anføres studienummer på første linie, spørgsmålsnummer og svar anføres på de følgende linier med en linie for hvert spørgsmål.

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6.

Der gives 5 point for et korrekt svar og -1 for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til "ved ikke") giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredsstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

Der gøres opmærksom på, at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr 17.

I teksten benyttes betegnelsen $\log(\cdot)$ for naturlige logaritmer, dvs. logaritmer med grundtal e, medens Φ betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Opgave 1

Man har et billedbehandlingssystem til at analysere kvaliteten af kaffebønner, idet bønnerne har et varierende farvespil. I denne opgave vil vi koncentrere os om detektionen af, hvorvidt bønnerne har været udsat for angreb fra en billeart. Hvis bønnerne har været udsat for billeangreb, vil de være misfarvede med sandsynligheden 0,8, medens sandsynligheden for, at en ikke billeangreben bønne er misfarvet, er 0,01. Sandsynligheden for, at en bønne har været udsat for billeangreb, er 0,001.

Spørgsmål 1

Sandsynligheden for, at en misfarvet bønne har været udsat for billeangreb, findes til

1 □ 0,80

2 □ 0,0080

3 □ 0,0074

4 □ 0,074

5 □ 0,080

6 □ Ved ikke

Opgave 2

En bil-forhandler antager, at 45% af kunderne, der besøger butikken, vil købe en elbil, 15% vil købe et benzinbil og 40% vil ikke købe noget.

Spørgsmål 2

Hvis 5 kunder besøger hans butik på en given dag, hvad er så sandsynligheden for, at han vil sælge præcis 2 elbiler og 1 benzinbil på den pågældende dag?

1 □ $(0{,}45)^2 + (0{,}15) + (0{,}4)^2$

2 □ $(0{,}45)^2(0{,}15)(0{,}4)^2$

3 □ $\frac{5!}{2!2!}(0{,}45)^2(0{,}15)(0{,}4)^2$

4 □ $\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$

5 □ 0,75

6 □ Ved ikke

Fortsæt på side 3

Opgave 3

Den maksimale daglige bølgehøjde ved et dige kan beskrives ved en fordeling med middelværdi 2 meter og varians 1 meter^2.

Spørgsmål 3

Den bedste øvre grænse for sandsynligheden for, at et dige med en højde på 6 meter vil blive oversvømmet den givne dag, er

1 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{6-2}{1}\right)$

2 ☐ $\Phi\left(\frac{6-2}{1}\right)$

3 ☐ $\frac{1}{4}$

4 ☐ $\frac{1}{9}$

5 ☐ $\frac{1}{16}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 4

For to forskellige aktier betragter man ændringen i aktiekursen hen over et kalenderår. Den simultane ændring af de to aktiekurser kan med rimelighed beskrives som en standardiseret bivariat normalfordeling med korrelationskoefficient $\frac{1}{2}$.

Spørgsmål 4

Sandsynligheden for, at begge ændringer er positive, og, at ingen af de to ændringer er mere end dobbelt så stor som den anden, findes til

1 ☐ $1 - \Phi(1)$

2 ☐ $\frac{\text{Acrtan}(3)}{2\pi}$

3 ☐ $\frac{\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\pi}$

4 ☐ $\frac{1}{4}$

5 ☐ $\frac{1}{6}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 4

Opgave 5

Idet X_1 og X_2 er uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med fordelingsfunktion $P(X_i \leq x) = F(x), i = 1{,}2$, danner man parret $X_{(1)} = \min_i X_i$, $X_{(2)} = \max_i X_i$.

Spørgsmål 5

For $x \leq y$ findes den simultane fordelingsfunktion $F^*(x,y) = P(X_{(1)} \leq x, X_{(2)} \leq y)$ til

1 ☐ $F^*(x,y) = F(y)^2 - (F(y) - F(x))^2$

2 ☐ $F^*(x,y) = (F(y) - F(x))^2$

3 ☐ $F^*(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-\mu)^2 + (v-\mu)^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$

4 ☐ $F^*(x,y) = F(y)^2 - F(x)^2$

5 ☐ $F^*(x,y) = F(y)^2 - (F(y) - F(x))$

6 ☐ Ved ikke

Idet μ og σ^2 betegner middelværdi og varians i fordelingen af X_i.

Opgave 6

Den østlige Quoll er en nu truet australsk rovdyrart. Man har tidligere vurderet, at forekomsten af disse i et område nær Adelaide var 3 per km^2. Man antager, at disse fordeler sig tilfældigt og uafhængigt af hinanden over området.

Spørgsmål 6

Man har på et område på 2 km^2 fundet 1 Østlig Quoll. Under de ovenstående antagelser, hvad er da sandsynligheden for højst at finde 1 Østlig Quoll i et område på 2 km^2?

1 ☐ $\Phi\left(\frac{1-6}{\sqrt{6}}\right)$

2 ☐ $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{2}{3}$

3 ☐ $7e^{-6}$

4 ☐ $\frac{1}{6}$

5 ☐ 0

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 5

Opgave 7

En ikke negativ kontinuert stokastisk variabel X har overlevelsesfunktion $G(x)$.

Spørgsmål 7

Om egenskaberne for $G(x)$ ved man,

1 ☐ at $G(x) \geq 0$ og $\sum_{x=0}^{\infty} G(x) = 1$

2 ☐ at $0 \leq G(x) \leq 1$ og $G(x)$ ikke voksende

3 ☐ at $0 \leq G(x) \leq 1$ og $G(x)$ ikke aftagende

4 ☐ at $G(x) \geq 0$ og $\int_0^{\infty} G(x) \mathrm{d}x = 1$

5 ☐ kun, at $G(x) \geq 0$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 8

Tiden mellem afgivelser af partikler fra en radioaktiv kilde antages ekponentielt fordelt med middelværdi 0,2s. Antallet af afgivne partikler tælles fra tiden t_0.

Spørgsmål 8

Bestem eventuelt approksimativt sandsynligheden for, at partikel nummer 10 000 bliver afgivet inden, der er gået 33 minutter fra t_0.

1 ☐ $1 - \Phi(1{,}00)$

2 ☐ $\sum_{i=33}^{\infty} \frac{\left(10000 \cdot \frac{0{,}2}{60}\right)^i}{i!} e^{-10000 \cdot t \frac{0{,}2}{60}}$

3 ☐ $1 - e^{-\frac{33 \cdot 60}{2000}}$

4 ☐ $\frac{1}{2000} - e^{-\frac{33 \cdot 60}{2000}}$

5 ☐ $1 - \frac{200}{33 \cdot 60}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 6

Opgave 9

Sandsynligheden for solskin en vinterdag er 0,45, medens sandsynligheden for solskin og frostvejr er 0,35.

Spørgsmål 9

Sandsynligheden for solskin og plusgrader på en vinterdag findes til

1 ☐ 0,45 + 0,35 - 0,65

2 ☐ 0,55 - 0,35

3 ☐ 0,65 - 0,45

4 ☐ $0{,}45 \cdot 0{,}35$

5 ☐ 0,45 - 0,35

6 ☐ Ved ikke

Opgave 10

En ingeniør er blevet hyret af FDA til at teste holdbarheden af et medicinalfirmas påstand om, at der kun er 5% af deres piller, hvis koncentration af aktivt stof er for lavt. Ingeniøren udvælger tilfældigt 20 piller, og finder, at tre af dem har for lavt indhold af det aktive stof.

Spørgsmål 10

Hvad er sandsynligheden for, at tre eller flere piller ud af 20 har for lavt indhold af aktivt stof, hvis medicinalfirmaets påstand er sand?

1 ☐ $\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i!} e^{-1}$

2 ☐ $\sum_{i=0}^{3} \left(\begin{array}{c} 20 \\ i \end{array} \right) 0{,}05^i 0{,}95^{20-i}$

3 ☐ $\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} e^{-1}$

4 ☐ $\sum_{i=3}^{20} \left(\begin{array}{c} 20 \\ i \end{array} \right) 0{,}05^i 0{,}95^{20-i}$

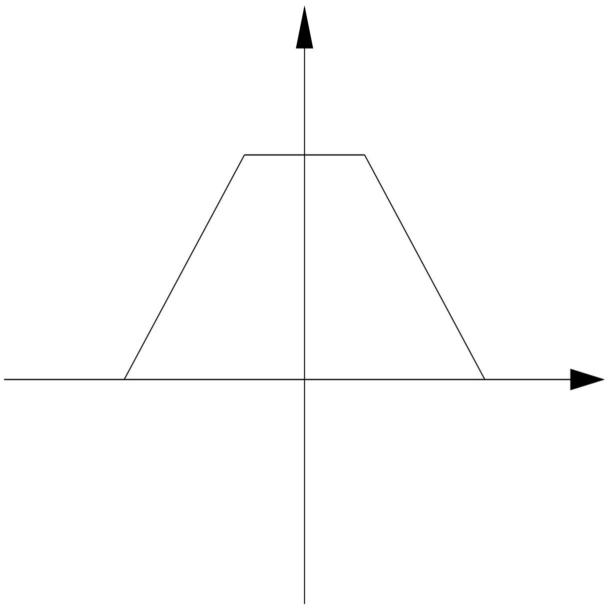
5 ☐ $1 - \Phi(\frac{3.5-1}{\sqrt{0.95}})$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 7

Opgave 11

Et punkt vælges tilfældigt i området vist på figuren. Området kan analytisk beskrives, som det område, der afgrænses af linierne $y = 3$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}(x+3)$ og $y = -\frac{3}{2}(x-3)$. Førstekoordinaterne til punktet betegnes med den stokastiske variabel X.



Spørgsmål 11

Sandsynligheden $P(X \geq 1)$ findes til

1 ☐ $\frac{1}{3}$

2 ☐ $\frac{1}{4}$

3 ☐ $\frac{1}{6}$

4 ☐ $\frac{1}{8}$

5 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{12}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 8

Opgave 12

Opkald til et call center antages at forekomme helt tilfældigt. I gennemsnit kommer der λ opkald pr. minut.

Spørgsmål 12

Med hvilken fordeling kan tiden mellem to opkald beskrives (regnet i minutter)?

1 ☐ $uniform(0{,}1)$

2 ☐ $normal(1/\lambda{,}1)$

3 ☐ $normal(\lambda{,}1)$

4 ☐ $eksponentiel(1/\lambda)$

5 ☐ $eksponentiel(\lambda)$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 13

Man har tæthedsfunktionen $f(x{,}y) = 6(x - y)$ for den simultane fordeling af maximum (X) og minimum (Y) af 3 uafhængige $uniformt(0{,}1)$ fordelte stokastiske variable.

Spørgsmål 13

Den betingede forventningsværdi $\mathsf{E}(Y|X = x)$ af Y for $X = x$ findes til

1 ☐ $\mathsf{E}(Y|X = x) = \frac{x}{2}$

2 ☐ $\mathsf{E}(Y|X = x) = \frac{x}{3}$

3 ☐ $\mathsf{E}(Y|X = x) = \frac{x}{4}$

4 ☐ $\mathsf{E}(Y|X = x) = x^3$

5 ☐ $\mathsf{E}(Y|X = x) = \frac{1}{4}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 9

Opgave 14

Den stokastiske variabel X har tætheden $f_x(x) = 2x$ på intervallet $[0; 1]$. Vi betragter nu en ny stokastisk variabel $Y = X^2$ med tæthed $f_Y(y)$

Spørgsmål 14

I værdimængden for Y findes $f_Y(y)$ til

1 ☐ $f_Y(y) = \frac{3}{2}\sqrt{y}$

2 ☐ $f_Y(y) = \frac{5}{2}y\sqrt{y}$

3 ☐ $f_Y(y) = 1$

4 ☐ $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

5 ☐ $f_Y(y) = 2y$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 15

En systemadministrator har behov for at tilgå en database, men denne er overbelastet. Alle der prøver at komme ind på siden har lige stor sandsynlighed for at blive ladt igennem, og der er en sandsynlighed på $\frac{1}{20}$ for at komme ind ved det enkelte forsøg.

Spørgsmål 15

Hvad er sandsynligheden for, at systemadministratoren kommer igennem netop i tredje forsøg?

1 ☐ $\frac{e^{-0,95} 0,95^3}{3!}$

2 ☐ $\frac{e^{-0,05} 0,05^3}{3!}$

3 ☐ $\frac{1}{20^3}$

4 ☐ $\frac{19^2}{20^2}$

5 ☐ $\frac{19^2}{20^3}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 10

Opgave 16

Sandsynligheden for, at der kommer en kraftig nedbørshændelse på en given lokalitet en given dag i juli er $\frac{1}{9}$. På et nærliggende rensningsanlæg anslår man, at sandsynligheden for overløb af anlægget givet en kraftig nedbørshændelse er $\frac{1}{4}$, medens sandsynligheden for overløb uden en kraftig nedbørshændelse er forsvindende.

Spørgsmål 16

Sandsynligheden for, at der opleves overløb på rensningsanlægget en given dag i juli, findes til

1 ☐ $\frac{1}{9}$

2 ☐ $\frac{5}{36}$

3 ☐ $\frac{1}{36}$

4 ☐ $\frac{13}{36}$

5 ☐ $\frac{1}{49}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 17

Den simultane tæthedsfunktion for X og Y er givet ved

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2.$$

Spørgsmål 17

Sandsynligheden $\mathsf{P}(Y > \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$ findes til

1 ☐ $\int_0^2 \int_0^1 \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dxdy$

2 ☐ 0,8625

3 ☐ $\int_{1/2}^{\infty} \int_{-\infty}^{1/2} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dxdy$

4 ☐ $\frac{6}{7}$

5 ☐ $\int_{1/2}^{2} \int_0^{1/2} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dxdy$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 11

Opgave 18

På en almindelig dartskive er der et rødt cirkelformet felt i midten kaldet *inner bull* med en diameter på 0,5 *tommer*. Uden om er et grønt ringformet felt kaldet *outer bull* med en ydre diameter på 1,25 *tommer*. Phil kaster en pil mod centrum af skiven. Koordinaterne (X,Y), regnet fra centrum, til det sted han rammer kan beskrives ved to uafhængige normalfordelte stokastiske varible begge med middelværdi 0 *tommer* og varians 1 *tomme*^{2}.

Spørgsmål 18

Hvad er sandsynligheden for at Phil rammer *outer bull*?

1 ☐ $e^{-\frac{1}{32}} - e^{-\frac{25}{128}}$

2 ☐ $1 - e^{-\frac{25}{128}}$

3 ☐ $\left(2\Phi(\frac{5}{4} - 1)\right)^2 - \left(2\Phi(\frac{1}{2} - 1)\right)^2$

4 ☐ $\left(2\Phi(\frac{5}{8} - 1)\right)^2 - \left(2\Phi(\frac{1}{4} - 1)\right)^2$

5 ☐ $\Phi\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)^2$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 19

Lad den simultane tæthed af de stokastiske variable X og Y være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{for } 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Spørgsmål 19

Kovariansen $\mathsf{Cov}(X,Y)$ mellem X og Y bestemmes til

1 ☐ 0

2 ☐ $\frac{5}{36}$

3 ☐ $\frac{1}{36}$

4 ☐ $\frac{1}{4}$

5 ☐ $\frac{1}{72}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 12

Opgave 20

To lige store biografer konkurrerer om 1000 kunder. Antag, at hver kunde vælger uafhængigt og med lige stor sandsynlighed mellem de to biografer. Lad N betegne antallet af sæder i hver biograf. Vi betragter nu den ene af de to biografer.

Spørgsmål 20

Find et udtryk, eventuelt approksimativt, for N, der vil garantere, at sandsynligheden for at afvise en kunde (grundet fuldt hus), er mindre end 1%.

1 ☐ $\sum_{x=N+1}^{500} \binom{500}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x < 0{,}01$

2 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{N-499{,}5}{\sqrt{250}}\right) < 0{,}01$

3 ☐ $\sum_{x=N+1}^{1000} \binom{1000}{x} 2^x \left(1-\frac{1}{2}\right)^{1000-x} < 0{,}01$

4 ☐ $\Phi\left(\frac{N-499{,}5}{\sqrt{500}}\right) > 0{,}01$

5 ☐ $\left(\frac{1}{2}\right)^{500} \sum_{x=N+1}^{500} \binom{500}{x} < 0{,}01$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 21

Af den stokastiske variabel $X \sim \mathit{binomial}\left(6, \frac{1}{2}\right)$ danner man $Y = |X-3|$.

Spørgsmål 21

For de mulige værdier af Y bestemmes

1 ☐ $\mathsf{P}(Y=y) = 2\mathsf{P}(X=3-y)$

2 ☐ $\mathsf{P}(Y=y) = \mathsf{P}(X=3-y) + \mathsf{P}(X=y-3)$

3 ☐ $\mathsf{P}(Y=0) = \frac{5}{16}, \quad \mathsf{P}(Y=1) = \frac{15}{32}, \quad \mathsf{P}(Y=2) = \frac{3}{16}, \quad \mathsf{P}(Y=3) = \frac{1}{32}$

4 ☐ $\mathsf{P}(Y=0) = \frac{1}{32}, \quad \mathsf{P}(Y=1) = \frac{3}{16}, \quad \mathsf{P}(Y=2) = \frac{15}{32}, \quad \mathsf{P}(Y=3) = \frac{5}{16}$

5 ☐ $\mathsf{P}(Y=y) = \binom{3}{y}\frac{1}{8}$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 13

Opgave 22

En tredimensional diskret stokastisk variabel (X_1,X_2,X_3), hvor $X_1 + X_2 + X_3 = 20$, har den simultane fordeling $P(X_1 = x_1,X_2 = x_2,X_3 = x_3) = \frac{20!}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{5}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{10}\right)^{x_3}$. Man observerer $X_1 = 10$.

Spørgsmål 22

Den betingede fordeling af (X_2,X_3) for given $X_1 = 10$ findes til

1 ☐ $P(X_2 = x_2,X_3 = x_3|X_1 = 10) = \frac{\frac{20!}{10!x_2!x_3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{10}\right)^{x_3}}{\sum_{x_1=0}^{20}\frac{20!}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{5}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{10}\right)^{x_3}}$ hvor $x_2 + x_3 = 10$

2 ☐ $P(X_2 = x_2,X_3 = x_3|X_1 = 10) = \frac{10!}{x_1!x_2!}\left(\frac{1}{5}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{10}\right)^{x_2}e^{-\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)}$ hvor $x_2 + x_3 = 10$

3 ☐ $P(X_2 = x_2,X_3 = x_3|X_1 = 10) = \frac{\frac{10!}{x_2!x_3!}\left(\frac{2}{5}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{5}\right)^{x_3}}{\sum_{x_1=0}^{20}\frac{20!}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{5}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{10}\right)^{x_3}}$ hvor $x_2 + x_3 = 10$

4 ☐ $P(X_2 = x_2,X_3 = x_3|X_1 = 10) = \binom{10}{x_2}\left(\frac{2}{5}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{5}\right)^{x_3}$ hvor $x_2 + x_3 = 10$

5 ☐ $P(X_2 = x_2,X_3 = x_3|X_1 = 10) = \frac{20!}{10!x_2!x_3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{10}\right)^{x_3}$, hvor $x_2 + x_3 = 10$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 23

Den kontinuerte stokastiske variabel X er ligefordelt på intervallet $]1,3[$ medens den kontinuerte stokastiske variabel Y er ligefordelt på intervallet $[2,4[$. De to stokastiske variable X og Y er uafhængige.

Spørgsmål 23

I værdimængden for (X,Y) findes den simultane tæthedsfunktion $f(x,y)$ findes til

1 ☐ $f(x,y) = \frac{1}{4}$

2 ☐ $f(x,y) = \frac{xy}{4}$

3 ☐ $f(x,y) = 1$

4 ☐ $f(x,y) = \frac{xy}{4} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + \frac{1}{2}$

5 ☐ Der er ikke givet tilstrækkelige oplysninger til, at opgaven kan løses.

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 14

Opgave 24

Lad R være en stokastisk variabel, der følger en Rayleigh fordeling.

Spørgsmål 24

Medianen i fordelingen for R er

1 ☐ $\sqrt{2\log(2)}$

2 ☐ $\frac{1}{2}$

3 ☐ 1

4 ☐ $\sqrt{\frac{\log(2)}{2}}$

5 ☐ Løsningen til ligningen $re^{-\frac{r^2}{2}} = \frac{1}{2}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 25

Vi betragter parret (X,Y) af ligefordelte stokastiske variable i området, der er afgrænset af linierne $x = 0, y = 0, 2x + y = 3$ og $x + 2y = 3$. Man danner herefter $Z = Y/X$.

Spørgsmål 25

Tætheden $f_Z(z)$ for Z findes til

1 ☐ $f_Z(z) = \int_0^{\frac{3}{1+z}} \frac{2}{9} x \mathrm{d}x$

2 ☐ $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{15}{8(\frac{3}{2}+z)^2} & \text{for } 0 \le z < 1 \\ \frac{15}{8(1+\frac{3}{2}z)^2} & \text{for } 1 \le z \end{cases}$

3 ☐ $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{5}{9(\frac{2}{3}+z)^2} & \text{for } 0 \le z < 1 \\ \frac{5}{9(1+\frac{2}{3}z)^2} & \text{for } 1 \le z \end{cases}$

4 ☐ $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{(2+z)^2} & \text{for } 0 \le z < 1 \\ \frac{3}{(1+2z)^2} & \text{for } 1 \le z \end{cases}$

5 ☐ $f_Z(z) = \int_0^{\frac{3}{1+2z}} \frac{4}{9} x \mathrm{d}x$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 15

Opgave 26

Målinger af vindhastigheder beskrives tilfredsstillende ved en Rayleigh fordeling. Der foretages tre uafhængige vindmålinger på en målestation.

Spørgsmål 26

Tætheden $f(x)$ for den næststørste af målingerne findes til

1 ☐ $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

2 ☐ $f(x) = 2xe^{-x^2}$

3 ☐ $f(x) = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 + e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

4 ☐ $f(x) = 6xe^{-x^2} - 6xe^{-\frac{3}{2}x^2}$

5 ☐ $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} - 2xe^{-x^2} + \frac{3}{2}xe^{-\frac{3}{2}x^2}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 27

Parret (X,Y) er bivariat normalfordelt med $\mathsf{E}(X) = 0, \mathsf{E}(Y) = \mu_Y, \mathsf{Var}(X) = \sigma_X^2, \mathsf{Var}(Y) = \sigma_Y^2$ og $\mathsf{Cov}(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$.

Spørgsmål 27

Sandsynligheden for, at Y er mellem værdierne y_1 og y_2, når X vides at være x, er

1 ☐ $\Phi\left(\frac{y_2-\mu_y-\rho x}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \Phi\left(\frac{y_1-\mu_y-\rho x}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right)$

2 ☐ $\Phi\left(\frac{y_2-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) - \Phi\left(\frac{y_1-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$

3 ☐ $\Phi\left(\frac{y_2-\mu_y-\rho x}{\sqrt{\sigma_Y^2+\sigma_X^2}\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \Phi\left(\frac{y_1-\mu_y-\rho x}{\sqrt{\sigma_Y^2+\sigma_X^2}\sqrt{1-\rho^2}}\right)$

4 ☐ $\Phi\left(\frac{y_2-\mu_y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}x}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \Phi\left(\frac{y_1-\mu_y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}x}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right)$

5 ☐ $\Phi\left(\frac{y_2-\mu_y-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}x}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \Phi\left(\frac{y_1-\mu_y-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}x}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 16

Opgave 28

Den stokastiske variabel X følger en $beta(2{,}1)$, medens den stokastiske variabel Y for givet $X = x$ følger en $binomial(4{,}x)$ fordeling.

Spørgsmål 28

Man finder

1 ☐ $\mathsf{P}(Y = 3) = \frac{4}{15}$

2 ☐ $\mathsf{P}(Y = 3) = \frac{32}{81}$

3 ☐ $\mathsf{P}(Y = 3) = \frac{1}{4}$

4 ☐ $\mathsf{P}(Y = 3) = \frac{1}{5}$

5 ☐ $\mathsf{P}(Y = 3) = \frac{2}{7}$

6 ☐ Ved ikke

Opgave 29

En offentlig institution har sendt en større opgave inden for IT i udbud. Man forventer, at der kommer i alt 4 tilbud, og, at de enkelte tilbud uafhængigt af hinanden kan beskrives ved brug af en fordelingsfunktion $F(x) = 1 - \exp(-(x - a)b)$ for $x \geq a$, hvor a og b er passende konstanter. Institutionen ønsker og er forpligtet til at benytte det laveste tilbud.

Spørgsmål 29

Sandsynligheden for, at den offentlige institution skal betale mindst $2a$ for at få udført IT opgaven, findes til

1 ☐ $\exp(-ab)$

2 ☐ $\exp(-4ab)$

3 ☐ $\exp(-8ab)$

4 ☐ $(1 - \exp(-ab))^4$

5 ☐ $1 - (1 - \exp(-ab))^4$

6 ☐ Ved ikke

Fortsæt på side 17

Opgave 30

Et containerskib af feeder typen skal lastes med henholdsvis 20 fods og 40 fods containere. Antallet af containere, der skal lastes, kan med rimelighed beskrives ved en bivariat normal fordeling med middelværdier 1000 og 500 for henholdsvis 20 fods og 40 fods containere. De tilhørende standardafvigelser er 100 (20 fods containere) og 50 (40 fods containere). Korrelationskoefficienten i fordelingen er opgjort til $-\frac{4}{5}$. Volumen af de to containertyper er 33 m^3 og 66 m^3.

Spørgsmål 30

Sandsynligheden for, at det samlede volumen af containerlasten overskrider 69 000 m^3, findes til

1 ☐ $\Phi\left(-\frac{5\sqrt{10}}{11}\right)$

2 ☐ $1-\Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{11}\right)$

3 ☐ $\Phi\left(-\frac{5\sqrt{10}}{33}\right)$

4 ☐ $1-\Phi\left(\frac{25\sqrt{2}}{11}\right)$

5 ☐ $\Phi\left(-\frac{\sqrt{2}}{11}\right)$

6 ☐ Ved ikke

Slut på opgavesættet.