02405: Sandsynlighedsregning - Hjemmeopgave 3

Opgave 1

De stokastiske variable X og Y har simultan tæthed (joint density)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)\mathrm{e}^{-y} & -y \le x \le y, \quad y > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

c er en konstant.

a) Vis at Y har en gamma tæthed, og udled heraf at $c = \frac{1}{8}$.

b) Find tætheden af $4Y^3$

c) Forklar hvorfor $E(|X|)$ er højst 4.

Opgave 2

Lad X og Y være uafhængige eksponentialfordelte stokastiske variable med parametre α og β. Find fordelingsfunktionen (c.d.f.) af X/Y.

Opgave 3

Antag at N er en stokastisk variabel, der følger en Poisson fordeling med parameteren μ. Givet $N = n$ antag at de stokastiske variable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uafhængige med en uniform(0,1) fordeling. Det vil altså sige, at der er et stokastisk antal X'er.

a) Givet $N = n$ hvad er sandsynligheden for, at alle X'er er mindre end t?

b) Hvad er den (ubetingede) sandsynlighed for, at alle X'er er mindre end t?

c) Lad $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ betegne summen af det stokastiske antal X'er. I tilfældet hvor $N = 0$ er $S_N = 0$. Find $P(S_N = 0)$.

d) Find $E(S_N)$.