Kursus 02403
Introduktion til Statistik

Klaus Kaae Andersen

Informatics and Mathematical Modelling
Building 321 - room 011
Technical University of Denmark
2800 Lyngby – Denmark
e-mail: kka@imm.dtu.dk

Inferens for andele (kapitel 9)

- Estimation af andele
- Hypotesetest for én andel
- Hypotesetest for to andele
- Analyse af antalstabeller
- Goodness of fit (test for fordeling)

Forskellige Hypotestest

H ypotesetest for én middelværdi hvor data kan antages at være normalfordelt (7)	H ypotesetest for to middelværdier: a) almindelig t-test b) parret t-test (7)
H ypotesetest for én varians hvor data kan antages at være normalfordelt (8)	H ypotesetest for to varianser (8)
H ypotesetest for én andel (9)	H ypotesetest for flere andele (9)

Estimation af andele

- Estimation af andele fås ved at observere antal gange x en hændelse har indtruffet ud af n forsøg:

$$p = \frac{x}{n}$$

$$p \in [0; 1]$$

Konfidensinterval for én andel

- Såfremt der haves en stor stikprøve, fås et $(1-\alpha)\%$ konfidensinterval for p

$$\frac{x}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} < p < \frac{x}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}$$

Hvor $p = \frac{x}{n}$. Ovenstående formel fås ved approximation til normalfordelingen.

Maksimal fejl på estimat

- Den maksimale fejl med $(1-\alpha)\%$ konfidens bliver

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

hvor et estimat af p fås ved $p = \frac{x}{n}$

Bestemmelse af stikprøvestørrelse

- Såfremt man højst vil tillade en maksimal fejl E med $(1-\alpha)\%$ konfidens, bestemmes den nødvendige stikprøvestørrelse ved

$$n = p(1-p)[\frac{z_{\alpha/2}}{E}]^2$$

Bestemmelse af stikprøvestørrelse

- Såfremt man højst vil tillade en maksimal fejl E med $(1-\alpha)\%$ konfidens, og p ikke kendes, bestemmes den nødvendige stikprøvestørrelse ved

$$n = \frac{1}{4}[\frac{z_{\alpha/2}}{E}]^2$$

idet man får den mest konservative stikprøvestørrelse ved at vælge $p = \frac{1}{2}$

Trin ved Hypoteseprøvning

1. Opstil hypoteser og vælg signifikansniveau α

2. Beregn teststørrelse

3. Beregn kritisk værdi (eller p-værdi)

4. Sammenlign teststørrelse og kritisk værdi og drag en konklusion

(evt. 4. Sammenlign p-værdi og signifikansniveau og drag en konklusion)

Hypotesetest for én andel

- Vi betragter en nul- og alternativ hypotese for én andel p:

$$H_0: \quad p = p_0$$
$$H_1: \quad p \neq p_0$$

Man vælger som sædvanligt enten at acceptere H_0 eller at forkaste H_0

Beregning af teststørrelse

- Såfremt stikprøven er tilstrækkelig stor fås teststørrelsen:

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

Under nulhypotesen gælder at Z følger en standard normalfordeling, dvs. $Z \sim N(0, 1^2)$

Beregning af kritisk værdi

- Afhængig af den alternative hypotese fås følgende kritiske værdier

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$p < p_0$	$Z < -z_\alpha$
$p > p_0$	$Z > z_\alpha$
$p \neq p_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Hypotesetest for to andele

Såfremt man ønsker at sammenligne to andele (her vist for et tosidet alternativ)

$$H_0: \quad p_1 = p_2$$
$$H_1: \quad p_1 \neq p_2$$

Fås teststørrelsen

$$Z = \frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}, \quad hvor \quad \hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

Hypotesetest for flere andele

- I nogle tilfælde kan man være interesseret i at vurdere om to eller flere binomialfordlinger har den samme parameter p, dvs. man er interesseret i at teste nul-hypotesen

$$H_0: \quad p_1 = p_2 = ... = p_k = p$$

mod en alternativ hypotese at disse andele ikke er ens

Hypotesetest for flere andele

	stikprøve 1	stikprøve 2	...	stikprøve k	Total
Succes	x_1	x_2	...	x_k	x
Fiasko	$n_1 - x_1$	$n_2 - x_2$	...	$n_k - x_k$	$n - x$
Total	n_1	n_2	...	n_k	n

- Under nul-hypotesen fås et estimat for p:

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Hypotesetest for flere andele

- Under nul-hypotesen fås et estimat for p:

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

- såfremt nul-hypotesen gælder, vil vi forvente at den j'te gruppe har e_{1j} successer og e_{2j} fiaskoer, hvor

$$e_{1j} = n_j \cdot \hat{p} = \frac{n_j \cdot x}{n}$$

$$e_{2j} = n_j(1 - \hat{p}) = \frac{n_j \cdot (n - x)}{n}$$

Beregning af teststørrelse

- Teststørrelsen bliver

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

hvor o_{ij} er observeret antal i celle (i, j) og e_{ij} er forventet antal i celle (i, j)

Beregning af kritisk værdi

- Vi har teststørrelsen

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- Teststørrelsen sammenlignes med $\chi^2_\alpha(k-1)$
- Såfremt $\chi^2 > \chi^2_\alpha(k-1)$ forkastes nul-hypotesen

Analyse af antalstabeller

	4 uger før	2 uger før	1 uge før
Kandidat I	79	91	93
Kandidat II	84	66	60
ved ikke	37	43	47

Er stemmefordelingen ens?

$$H_0: \quad p_{i1} = p_{i2} = p_{i3}$$

Analyse af antalstabeller

	dårlig	middel	god
dårlig	23	60	29
middel	28	79	60
god	9	49	63

Er der uafhængighed mellem inddelingskriterier?

Beregning af teststørrelse

- I en antalstable med r rækker og c søjler, fås teststørrelsen

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

hvor o_{ij} er observeret antal i celle (i, j) og e_{ij} er forventet antal i celle (i, j)

Beregning af kritisk værdi

- Vi har teststørrelsen

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- Teststørrelsen sammenlignes med $\chi^2_\alpha((r-1)(c-1))$
- Såfremt $\chi^2 > \chi^2_\alpha((r-1)(c-1))$ forkastes nul-hypotesen

Goodness of fit (test for fordeling)

Ofte vil man gerne teste om data (observationer) følger en specifik fordeling. Dette gøres ved at sammenligne *observerede fraktiler* med tilsvarende *teoretiske fraktiler* under forudsætning af en given fordeling. Herefter beregnes teststørrelsen ved

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

Teststørrelsen skal sammenlignes med kritisk værdi, der findes i $\chi^2_\alpha(k-1-m)$, hvor k er antal inddelinger (celler i tabellen) og m er antal estimerede parametre

Inferens for andele (kapitel 9)

- Estimation af andele
- Hypotesetest for én andel
- Hypotesetest for to andele
- Analyse af antalstabeller
- Goodness of fit (test for fordeling)