

Kursus 02403

Introduktion til Statistik

Forelæsning 9: Inferens for andele (kapitel 10)

Jan Kloppenborg Møller

DTU Informatik

Bygning 305 - rum 219

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Lyngby – Danmark

e-mail: jkm@imm.dtu.dk

Oversigt

- 1 Intro
- 2 Konfidensinterval for én andel
 - Eksempel 1
 - Bestemmelse af stikprøvestørrelse
 - Eksempel 1 - fortsat
- 3 Hypotesetest for én andel
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Hypotesetest for to andele
 - Eksempel 2
- 5 Hypotesetest for flere andele
 - Eksempel 2 - fortsat
- 6 Analyse af antalstabeller
- 7 R (R note 8)

Oversigt

- 1 Intro
- 2 Konfidensinterval for én andel
 - Eksempel 1
 - Bestemmelse af stikprøvestørrelse
 - Eksempel 1 - fortsat
- 3 Hypotesetest for én andel
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Hypotesetest for to andele
 - Eksempel 2
- 5 Hypotesetest for flere andele
 - Eksempel 2 - fortsat
- 6 Analyse af antalstabeller
- 7 R (R note 8)

Forskellige Hypotesetest-situationer

- Gennemsnit for kvantitative data:
 - Hypotesetest for én middelværdi (one-sample)
 - Hypotesetest for to middelværdier (two samples)
- Varianser for kvantitative data:
 - Hypotesetest for én varians
 - Hypotesetest for to varianser
- I dag: Andele:
 - Hypotesetest for én andel
 - Hypotesetest for to og flere andele

Estimation af andele

- Estimation af andele fås ved at observere antal gange x en hændelse har indtruffet ud af n forsøg:

$$p = \frac{x}{n}$$

$$p \in [0; 1]$$

Oversigt

- 1 Intro
- 2 Konfidensinterval for én andel
 - Eksempel 1
 - Bestemmelse af stikprøvestørrelse
 - Eksempel 1 - fortsat
- 3 Hypotesetest for én andel
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Hypotesetest for to andele
 - Eksempel 2
- 5 Hypotesetest for flere andele
 - Eksempel 2 - fortsat
- 6 Analyse af antalstabeller
- 7 R (R note 8)

Konfidensinterval for én andel

Såfremt der haves en stor stikprøve, fås et $(1 - \alpha)\%$ konfidensinterval for p

$$\frac{x}{n} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1 - \frac{x}{n})}{n}} < p < \frac{x}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1 - \frac{x}{n})}{n}}$$

Hvor $p = \frac{x}{n}$. Ovenstående formel fås ved approximation til normalfordelingen.

Eksempel 1: Meningsmåling (dr.dk 13/5)

Følgende stemme fordeling er fundet ved telefoninterview de 9-12 maj 2011

	"Stemmer"
Helle	539
Lars	485
Total	1024

Find 95% konfidens intervallet for Helles stemmeandel

Maksimal fejl på estimat

Den maksimale fejl med $(1 - \alpha)\%$ konfidens bliver

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

hvor et estimat af p fås ved $p = \frac{x}{n}$

Bestemmelse af stikprøvestørrelse

Såfremt man højst vil tillade en maksimal fejl E med $(1 - \alpha)\%$ konfidens, bestemmes den nødvendige stikprøvestørrelse ved

$$n = p(1 - p) \left[\frac{z_{\alpha/2}}{E} \right]^2$$

Bestemmelse af stikprøvestørrelse

Såfremt man højst vil tillade en maksimal fejl E med $(1 - \alpha)\%$ konfidens, og p ikke kendes, bestemmes den nødvendige stikprøvestørrelse ved

$$n = \frac{1}{4} \left[\frac{z_{\alpha/2}}{E} \right]^2$$

idet man får den mest konservative stikprøvestørrelse ved at vælge $p = \frac{1}{2}$

Eksempel 1 - fortsat

Hvor mange telefoninterviews skal der gennemføres hvis vi kun vil acceptere en maximal fejl på $E=1\%$ på niveau 95%?

Oversigt

- 1 Intro
- 2 Konfidensinterval for én andel
 - Eksempel 1
 - Bestemmelse af stikprøvestørrelse
 - Eksempel 1 - fortsat
- 3 Hypotesetest for én andel
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Hypotesetest for to andele
 - Eksempel 2
- 5 Hypotesetest for flere andele
 - Eksempel 2 - fortsat
- 6 Analyse af antalstabeller
- 7 R (R note 8)

Trin ved Hypoteseprøvning

1. Opstil hypoteser og vælg signifikansniveau α
 2. Beregn teststørrelse
 3. Beregn kritisk værdi (eller p-værdi)
 4. Sammenlign teststørrelse og kritisk værdi og drag en konklusion
- (evt. 4. Sammenlign p-værdi og signifikansniveau og drag en konklusion)

Hypotesetest for én andel

Vi betragter en nul- og alternativ hypotese for én andel p :

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

Man vælger som sædvanligt enten at acceptere H_0 eller at forkaste H_0

Beregning af teststørrelse

Såfremt stikprøven er tilstrækkelig stor fås teststørrelsen:

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

Under nulhypotesen gælder at Z følger en standard normalfordeling, dvs. $Z \sim N(0, 1^2)$

Beregning af kritisk værdi

Afhængig af den alternative hypotese fås følgende kritiske værdier

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$p < p_0$	$Z < -z_\alpha$
$p > p_0$	$Z > z_\alpha$
$p \neq p_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Eksempel 1 - fortsat

Skal rød blok være bekymret (opstil hypotese og test på 5% niveau)?

Oversigt

- 1 Intro
- 2 Konfidensinterval for én andel
 - Eksempel 1
 - Bestemmelse af stikprøvestørrelse
 - Eksempel 1 - fortsat
- 3 Hypotesetest for én andel
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Hypotesetest for to andele
 - Eksempel 2
- 5 Hypotesetest for flere andele
 - Eksempel 2 - fortsat
- 6 Analyse af antalstabeller
- 7 R (R note 8)

Hypotesetest for to andele

Såfremt man ønsker at sammenligne to andele (her vist for et tosidet alternativ)

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

Fås teststørrelsen

$$Z = \frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \quad \text{hvor} \quad \hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

Eksempel 2

I et studie (USA, 1975) undersøgte man sammenhæng mellem brug af p-piller og risikoen for hjerteinfarkt. Fra et hospital havde man indsamlet følgende stikprøve

	Infarkt	Ikke infarkt
p-piller	23	34
Ikke p-piller	35	132

Udfør et test for om der er sammenhæng mellem brug af p-piller og risiko for hjerteinfarkt. Anvend signifikansniveau $\alpha = 1\%$

Oversigt

- 1 Intro
- 2 Konfidensinterval for én andel
 - Eksempel 1
 - Bestemmelse af stikprøvestørrelse
 - Eksempel 1 - fortsat
- 3 Hypotesetest for én andel
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Hypotesetest for to andele
 - Eksempel 2
- 5 Hypotesetest for flere andele**
 - Eksempel 2 - fortsat**
- 6 Analyse af antalstabeller
- 7 R (R note 8)

Hypotesetest for flere andele

I nogle tilfælde kan man være interesseret i at vurdere om to eller flere binomialfordlinger har den samme parameter p , dvs. man er interesseret i at teste nul-hypotesen

$$H_0 : p_1 = p_2 = \dots = p_k = p$$

mod en alternativ hypotese at disse andele ikke er ens

Hypotesetest for flere andele

	stikprøve 1	stikprøve 2	...	stikprøve k	Total
Succes	x_1	x_2	...	x_k	x
Fiasko	$n_1 - x_1$	$n_2 - x_2$	...	$n_k - x_k$	$n - x$
Total	n_1	n_2	...	n_k	n

Under nul-hypotesen fås et estimat for p :

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Hypotesetest for flere andele

Under nul-hypotesen fås et estimat for p :

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

såfremt nul-hypotesen gælder, vil vi forvente at den j 'te gruppe har e_{1j} succeser og e_{2j} fiaskoer, hvor

$$e_{1j} = n_j \cdot \hat{p} = \frac{n_j \cdot x}{n}$$

$$e_{2j} = n_j(1 - \hat{p}) = \frac{n_j \cdot (n - x)}{n}$$

Beregning af teststørrelse

Teststørrelsen bliver

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^k \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

hvor o_{ij} er observeret antal i celle (i, j) og e_{ij} er forventet antal i celle (i, j)

Beregning af kritisk værdi

- Vi har teststørrelsen

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^k \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- Teststørrelsen sammenlignes med $\chi^2_{\alpha}(k-1)$
- Såfremt $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}(k-1)$ forkastes nul-hypotesen

Eksempel 2 - fortsat

Observerede	Infarkt	Ikke infarkt
p-piller	23	34
Ikke p-piller	35	132

Oversigt

- 1 Intro
- 2 Konfidensinterval for én andel
 - Eksempel 1
 - Bestemmelse af stikprøvestørrelse
 - Eksempel 1 - fortsat
- 3 Hypotesetest for én andel
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Hypotesetest for to andele
 - Eksempel 2
- 5 Hypotesetest for flere andele
 - Eksempel 2 - fortsat
- 6 Analyse af antalstabeller**
- 7 R (R note 8)

Analyse af antalstabeller

	Gallup (6/5)	DR (13/5)	Pol. (23/5)	Total
A	420	289	238	947
B	88	66	62	216
F	231	137	117	485
Ø	51	47	47	145
Total	790	539	464	1793

Er stemmefordelingen ens?

$$H_0 : p_{i1} = p_{i2} = p_{i3}$$

Analyse af antalstabeller

		Dansk		
		dårlig	middel	god
Matematik	dårlig	23	60	29
	middel	28	79	60
	god	9	49	63

Er der uafhængighed mellem inddelingskriterier?

Beregning af teststørrelse

I en antalstable med r rækker og c søjler, fås teststørrelsen

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

hvor o_{ij} er observeret antal i celle (i, j) og e_{ij} er forventet antal i celle (i, j)

Beregning af kritisk værdi

- Vi har teststørrelsen

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- Teststørrelsen sammenlignes med $\chi^2_{\alpha}((r-1)(c-1))$
- Såfremt $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}((r-1)(c-1))$ forkastes nul-hypotesen

Oversigt

- 1 Intro
- 2 Konfidensinterval for én andel
 - Eksempel 1
 - Bestemmelse af stikprøvestørrelse
 - Eksempel 1 - fortsat
- 3 Hypotesetest for én andel
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Hypotesetest for to andele
 - Eksempel 2
- 5 Hypotesetest for flere andele
 - Eksempel 2 - fortsat
- 6 Analyse af antalstabeller
- 7 R (R note 8)

R (R note 8) ("orienterende")

Eksemplet side 295:

```
> prop.test(36,100)
```

Eksemplet side 302 (eksemplet anvendt på side 612):

```
> crumbled=c(41,27,22)
> intact=c(79,53,78)
> prop.test(crumbled,crumbled+intact)
```

Oversigt

- 1 Intro
- 2 Konfidensinterval for én andel
 - Eksempel 1
 - Bestemmelse af stikprøvestørrelse
 - Eksempel 1 - fortsat
- 3 Hypotesetest for én andel
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Hypotesetest for to andele
 - Eksempel 2
- 5 Hypotesetest for flere andele
 - Eksempel 2 - fortsat
- 6 Analyse af antalstabeller
- 7 R (R note 8)