Kursus 02403
Introduktion til Statistik

Klaus Kaae Andersen

Informatics and Mathematical Modelling
Building 321 - room 011
Technical University of Denmark
2800 Lyngby – Denmark
e-mail: kka@imm.dtu.dk

Kapitel 7: Hypotesetest for gennemsnit

- Hypotesetest (7.5-7.9)
  - ◇ Hypotesetest for ét gennemsnit
  - ◇ Test og konfidensintervaller
  - ◇ Hypotesetest for to gennemsnit
  - ◇ Randomisering og 'parring'

Hypoteser

nul hypotese testes mod en *alternativ hypotese*

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

Bemærk: 'bevisbyrden' er lagt på H_0. Man vælger enten at <u>acceptere H_0</u> eller at <u>forkaste H_0</u>

Hypoteseprøvning

Et par tommelfingerregler ved formulering af hypoteser:

- I nulhypotesen anvendes så vidt muligt lighedstegn '$=$'
- I den alternative hypotese placeres det udsagn som man gerne vil vise

Den alternative hypotese kan enten være ensidet eller tosidet, afhængig af hvad man gerne vil vise

tosidet: '$\neq$'

ensidet: '$<$' eller '$>$'

Hypoteser

Når man tester statistiske hypoteser, kan man i princippet begå to typer af fejl:

Type I: Fejlagtig forkaste H_0 når H_0 er sand

Type II: Fejlagtig acceptere H_0 når H_1 er sand

Vi definerer:

$$P(\text{fejl af type I}) = \alpha$$

$$P(\text{fejl af type II}) = \beta$$

Eksempel: formulering af hypoteser

Et ambulancefirma påstår at det i gennemsnit tager 20 minutter fra et opkald til centralen modtages indtil en ambulance er på stedet.

Eksempelvis kan vi have målt tiderne:

$21.1 \quad 22.3 \quad 19.6 \quad 24.2 \ldots$

Hvis vi f.eks. ønsker at påvise, at det i gennemsnit tager længere tid end 20 minutter, bliver nul- og alternativ hypotese:

$H_0: \quad \mu = 20$ minutter

$H_1: \quad \mu > 20$ minutter

Eksempel

Hvilke fejl kan begås?

Type I: Fejlagtig forkaster H_0 når H_0 er sand

dvs. man fejlagtig konkluderer at det tager længere tid for ambulancen at nå frem end 20 minutter

Type II: Fejlagtig accepterer H_0 når H_1 er sand

dvs. man fejlagtig konkluderer at det tager 20 minutter for ambulancen at nå frem

Valg af signifikansniveau α

- Man vælger signifikansniveau α ud fra hvor stor type I fejl man kan acceptere
- Typisk vælges $\alpha = 5\%$
- Såfremt man vil reducere fejlen for en type I fejl må α vælges mindre, f.eks. $\alpha = 1\%$
- Et mindre signifikansniveau betyder at det bliver sværere at påvise H_1

Trin ved Hypotesetest

1) Opstil hypoteser og vælg signifikansniveau α

2) Beregn teststørrelse

3) Beregn p-værdi vha. teststørrelse

4) Sammenlign p-værdi med signifikansniveau og drag en konklusion

$*$ alternativt til (4) kan testet udføres ved at sammenligne teststørrelse med *kritisk værdi*

Hypotesetest

- Antager at data (stikprøve) kommer fra en normalfordeling, dvs. $x_1, ..., x_n \in N(\mu, \sigma^2)$
- vi ønsker at teste en *nul hypotese* om middelværdien (eller gennemsnittet), f.eks.

$$H_0 : \qquad \mu = \mu_0$$

hvor μ_0 kan være en vilkårlig værdi af interesse. Afhængig af hvad vi ønsker at påvise vælges alternativ hypotese. Herefter vælges signifikansniveau α

Bereging af teststørrelse

Vi antager, at vi har formuleret en nulhypotese og en alternativ hypotese, og har valgt et signifikansniveau α. Herefter skal en teststørrelse beregnes.

Ved hypotesetest af én middelværdi for data, der antages normalfordelt og $\underline{\sigma \text{ er kendt}}$, fås teststørrelsen:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Bereging af p-værdi

Testets p-værdi svarer til sandsynligheden for at H_0 er korrekt.

Ved hypotesetest af én middelværdi for data der antages normalfordelt og σ er kendt, fås p-værdien for teststørrelsen Z ved opslag i normalfordelingen (tabel 3)

Hvis p-værdien er mindre end signifikansniveauet, afvises H_0

Hvis p-værdien er større end signifikansniveauet, accepteres H_0

Sammenligning med kritisk værdi:

Alternativt kan hypotesetestet udføres ved at sammenligne teststørrelse med kritisk værdi z_α (eller $z_{\alpha/2}$ i et tosidet test)

Ved hypotesetest af én middelværdi for data der antages normalfordelt og σ er kendt, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu < \mu_0$	$Z < -z_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$Z > z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Bereging af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af én middelværdi for data der antages normalfordelt hvor σ er ukendt, men stor stikprøve ($n > 30$), fås teststørrelsen

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Idet $Z \sim N(0, 1^2)$ fås p-værdien for teststørrelsen Z ved opslag i normalfordelingen (tabel 3)

Sammenligning med kritisk værdi

Alternativt kan hypotesetestet udføres ved at sammenligne teststørrelse med kritisk værdi z_α (eller $z_{\alpha/2}$ i et tosidet test). Ved hypoteseprøvning af én middelværdi for data der antages normalfordelt hvor σ er ukendt, men stor stikprøve, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu < \mu_0$	$Z < -z_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$Z > z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Bereging af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af én middelværdi for data der antages normalfordelt og σ er ukendt, og stikprøven er lille ($n < 30$), fås teststørrelsen

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Idet $t \sim t(n-1)$ fås p-værdien for teststørrelsen t ved opslag i t-fordelingen (tabel 4)

Sammenligning med kritisk værdi

Alternativt kan hypotesetestet udføres ved at sammenligne teststørrelse med kritisk værdi t_α (eller $t_{\alpha/2}$ i et tosidet test). Ved hypoteseprøvning af én middelværdi for data der antages normalfordelt og σ er ukendt og stikprøven er lille, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu < \mu_0$	$t < -t_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$t > t_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$t < -t_{\alpha/2}$ eller $t > t_{\alpha/2}$

Sammenhæng mellem hypoteseprøvning og konfidensintervaller

Vi betragter $(1-\alpha)100\%$ konfidensinterval for μ (eksempel for lille n og ukendt σ):

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Konfidensintervallet svarer til acceptområdet (af H_0), når man tester hypotesen (med to-sidet alternativ):

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

Fejl ved hypotesetest

Hvordan kan sandsynligheden for fejl påvirkes?

- Ændre signifikansniveau α
- Øge stikprøvestørrelsen, n

Testets styrke defineres ved $1 - \beta$

$\rightarrow$ Afsnit 7.7

Hypotesetest for to gennemsnit

- Vi sammenligner gennemsnit (middelværdier) af 2 stikprøver
  - ◇ Stikprøve 1: n_1, $\bar{X}_1$ og s_1^2
  - ◇ Stikprøve 2: n_2, $\bar{X}_2$ og s_2^2

Formulering af Hypoteser

nul hypotese testes mod en *alternativ hypotese* (her vist for et to-sidet alternativ)

$$H_0: \quad \mu_1 - \mu_2 = \delta$$
$$H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

Man vælger enten at <u>acceptere H_0</u> eller at <u>forkaste H_0</u>

(Typisk er man interesseret i at teste med $\delta = 0$)

2. Beregning af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af 2 middelværdier (μ_1 og μ_2) for data, der antages normalfordelt og varianser σ_1^2 og σ_2^2 er kendte, fås teststørrelsen

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

Det følger under nul hypotesen at $Z \sim N(0, 1^2)$. Herfra kan testets p-værdi beregnes

Sammenligning med kritisk værdi

Ved hypoteseprøvning af to middelværdier (μ_1 og μ_2) for data, der antages normalfordelt og σ_1^2 og σ_2^2 er kendte, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$Z < -z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$Z > z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Beregning af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af to middelværdier (μ_1 og μ_2) for data der antages normalfordelt hvor σ_1^2 og σ_2^2 er ukendte, men for store stikprøver, fås teststørrelsen

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

Det følger under nul hypotesen at $Z \sim N(0, 1^2)$. Herfra kan testets p-værdi beregnes.

Sammenligning med kritisk værdi

Ved hypoteseprøvning af to middelværdi for data der antages normalfordelt og σ_1^2 og σ_2^2 er ukendte, men vi har store stikprøver, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$Z < -z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$Z > z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Beregning af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af to middelværdier for data der antages normalfordelt hvor σ_1^2 og σ_2^2 er ukendte, og stikprøverne er små, fås teststørrelsen

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta}{\sqrt{s_p^2/n_1 + s_p^2/n_2}}$$

hvor

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Idet $t \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ kan testets p-værdi beregnes

Sammenligning med kritisk værdi

Ved hypoteseprøvning af to middelværdi for data der antages normalfordelt og σ_1^2 og σ_2^2 er ukendte, og for små stikprøver:

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$t < -t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$t > t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$t < -t_{\alpha/2}$ eller $t > t_{\alpha/2}$

Ved opsalg i tab. 4 vælges $v = n_1 + n_2 - 2$

Beregning af konfidensinterval for forskel i middelværdi

For store stikprøver beregnes et $(1 - \alpha)$% konfidensinterval ved:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

(kendes σ_1^2 og σ_2^2 anvendes disse i stedet for s_1^2 og s_2^2)

Beregning af konfidensinterval for forskel i middelværdi

For små stikprøver (ukendte σ_1^2 og σ_2^2) beregnes et $(1-\alpha)$% konfidensinterval ved:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

Ved opsalg i tabellen over t-fordelingen (tab. 4) vælges antal frihedsgrader $v = n_1 + n_2 - 2$

t-test

Test af ét eller to gennemsnit kaldes under et t-test også selv om varianserne er kendte og p-værdien fås fra normalfordelingen

Parret t-test

- Vi betragter nu en situation hvor vi vil sammenligne 2 middelværdier, men hvor data er parret
- Hypotesetestet foregår derfor ved at undersøge forskellen, D_i, mellem de parrede observationer:

$$D_i = X_i - Y_i \quad \text{for } i = 1, 2, ..., n$$

Vi kan herefter beregne middelværdi $\bar{D}$ og varians S_D^2 for D. Test af $\bar{D}$ gøres nu som de sædvanlige test for én middelværdi

Kapitel 7: Hypotesetest for gennemsnit

- Hypoteseprøvning (7.5-7.9)
  - ◇ Hypotesetest for ét gennemsnit
  - ◇ Test og konfidensintervaller
  - ◇ Hypotesetest for to gennemsnit
  - ◇ Randomisering og 'parring'