

Kursus 02403

Introduktion til Statistik

Forelæsning 7: Kapitel 7 og 8: Statistik for to gennemsnit,
(7.7-7.8,8.1-8.5)

Jan Kloppenborg Møller

DTU Informatik

Bygning 305 - rum 219

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Lyngby – Danmark

e-mail: jkm@imm.dtu.dk

Oversigt

- 1 Hypotesetest - en repetition
 - Hypotesetest og konfidensintervaller
- 2 Styrke og stikprøvestørrelse
- 3 Hypotesetest for to gennemsnit
 - Eksempel 1
 - Generel formulering
 - Med kendt varians
 - Med "ukendt" varians - store stikprøver
 - Med "ukendt" varians - små stikprøver, normalfordelinger
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Konfidensinterval for forskel i middelværdi
 - Eksempel 1 - fortsat
 - Eksempel 2
- 5 Parret t-test
- 6 R (R note 7)

Kapitel 7 og 8: Statistik for to gennemsnit, (7.7-7.8,8.1-8.5)

- Hypotesetest (7.7-7.8,8.1-8.5)
- Test og konfidensintervaller
- Hypotesetest for to gennemsnit
- Randomisering og 'parring'
- R

Oversigt

- 1 Hypotesetest - en repetition
 - Hypotesetest og konfidensintervaller
- 2 Styrke og stikprøvestørrelse
- 3 Hypotesetest for to gennemsnit
 - Eksempel 1
 - Generel formulering
 - Med kendt varians
 - Med "ukendt" varians - store stikprøver
 - Med "ukendt" varians - små stikprøver, normalfordelinger
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Konfidensinterval for forskel i middelværdi
 - Eksempel 1 - fortsat
 - Eksempel 2
- 5 Parret t-test
- 6 R (R note 7)

Hypoteser

nul hypotese testes mod en *alternativ hypotese*

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Bemærk: 'bevisbyrden' er lagt på H_0 . Man vælger enten at acceptere H_0 eller at forkaste H_0

Hypoteser

Et par tommelfingerregler ved formulering af hypoteser:

- I nulhypotesen anvendes så vidt muligt lighedstegn ' $=$ '
- I den alternative hypotese placeres det udsagn som man gerne vil vise
- Den alternative hypotese kan enten være ensidet eller tosidet, afhængig af hvad man gerne vil vise

tosidet: ' $\neq$ '

ensidet: '<' eller '>'

Hypoteser

Når man tester statistiske hypoteser, kan man i princippet begå to typer af fejl:

Type I: Fejlagtig forkaste H_0 når H_0 er sand

Type II: Fejlagtig acceptere H_0 når H_1 er sand

Vi definerer:

$$P(\text{fejl af type I}) = \alpha$$

$$P(\text{fejl af type II}) = \beta$$

Eksempel: formulering af hypoteser

Et ambulancefirma påstår at det i gennemsnit tager 20 minutter fra et opkald til centralen modtages indtil en ambulance er på stedet.

Eksempelvis kan vi have målt tiderne:

21.1 22.3 19.6 24.2...

Hvis vi f.eks. ønsker at påvise, at det i gennemsnit tager længere tid end 20 minutter, bliver nul- og alternativ hypotese:

$$H_0 : \mu = 20 \text{ minutter}$$

$$H_1 : \mu > 20 \text{ minutter}$$

Eksempel

Hvilke fejl kan begås?

Type I: Fejlagtig forkaster H_0 når H_0 er sand

dvs. man fejlagtig konkluderer at det tager længere tid for ambulancen at nå frem end 20 minutter

Type II: Fejlagtig accepterer H_0 når H_1 er sand

dvs. man fejlagtig konkluderer at det tager 20 minutter for ambulancen at nå frem

Valg af signifikansniveau α

- Man vælger signifikansniveau α ud fra hvor stor type I fejl man kan acceptere
- Typisk vælges $\alpha = 5\%$
- Såfremt man vil reducere fejlen for en type I fejl må α vælges mindre, f.eks. $\alpha = 1\%$
- Et mindre signifikansniveau betyder at det bliver sværere at påvise H_1

Trin ved Hypotesetest

- Opstil hypoteser og vælg signifikansniveau α (vælg "risiko-niveau")
- Beregn teststørrelse (se på data)
- Beregn p-værdi vha. teststørrelse (mål forskellen på data og hypotesen)
- Sammenlign p-værdi med signifikansniveau og drag en konklusion

* alternativt til (4) kan testet udføres ved at sammenligne teststørrelse med *kritisk værdi*

Sammenhæng mellem hypoteseprøvning og konfidensintervaller

Vi betragter $(1 - \alpha)100\%$ konfidensinterval for μ (eksempel for lille n og ukendt σ):

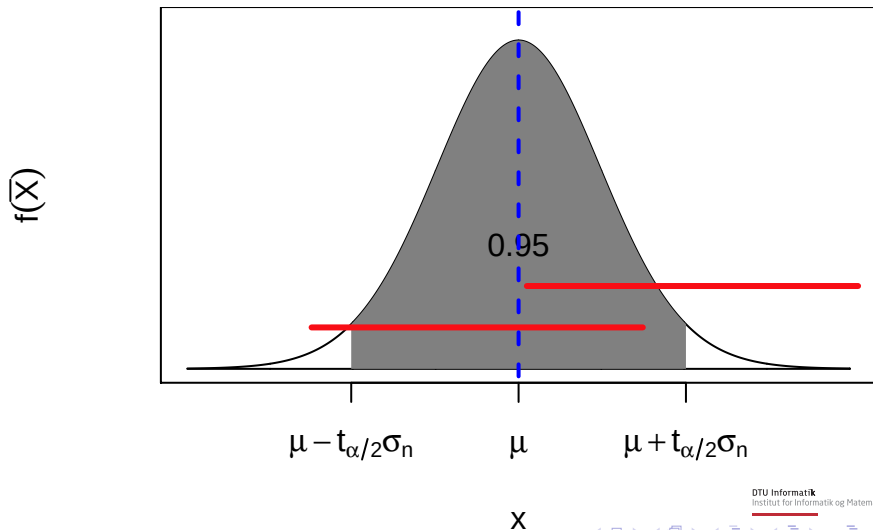
$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Konfidensintervallet svarer til acceptområdet (af H_0), når man tester hypotesen (med to-sidet alternativ):

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Konfidens interval



Oversigt

- 1 Hypotesetest - en repetition
 - Hypotesetest og konfidensintervaller
- 2 **Styrke og stikprøvestørrelse**
- 3 Hypotesetest for to gennemsnit
 - Eksempel 1
 - Generel formulering
 - Med kendt varians
 - Med "ukendt" varians - store stikprøver
 - Med "ukendt" varians - små stikprøver, normalfordelinger
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Konfidensinterval for forskel i middelværdi
 - Eksempel 1 - fortsat
 - Eksempel 2
- 5 Parret t-test
- 6 R (R note 7)

Styrke og stikprøvestørrelse

Hvordan kan sandsynligheden for fejl påvirkes?

- Ændre signifikansniveau α
- Øge stikprøvestørrelsen, n
- Testets styrke defineres ved $1 - \beta \rightarrow$ Afsnit 7.8
- Krævet stikprøvestørrelse givet en ønsket styrke:

$$n = \left(\sigma \frac{z_\beta + z_\alpha}{(\mu_0 - \mu_1)} \right)^2$$

Oversigt

- 1 Hypotesetest - en repetition
 - Hypotesetest og konfidensintervaller
- 2 Styrke og stikprøvestørrelse
- 3 Hypotesetest for to gennemsnit
 - Eksempel 1
 - Generel formulering
 - Med kendt varians
 - Med "ukendt" varians - store stikprøver
 - Med "ukendt" varians - små stikprøver, normalfordelinger
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Konfidensinterval for forskel i middelværdi
 - Eksempel 1 - fortsat
 - Eksempel 2
- 5 Parret t-test
- 6 R (R note 7)

Eksempel 1

I et ernæringsstudie ønsker man at undersøge om der er en forskel i energiforbrug for forskellige typer (moderat fysisk krævende) arbejde. I studiet har man målt energiforbruget for 9 sekretærer, som forventes at have et stillesiddende arbejde, og 9 sygeplejersker, som forventes at have et lidt mere fysisk betonet arbejde. Målingerne, angivet i MJ, er givet i nedenstående tabel:

Eksempel 1

A (sekretærer)	B (sygeplejersker)
7.53	9.21
7.48	11.51
8.08	12.79
8.09	11.85
10.15	9.97
8.40	8.79
10.88	9.69
6.13	9.68
7.90	9.19

Eksempel 1

Opstil nul hypotese, alternativ hypotese og beregn nøgle tal

Hypotesetest for to gennemsnit

- Vi sammenligner gennemsnit (middelværdier) af 2 stikprøver
- Stikprøve 1: n_1 , $\bar{X}_1$ og s_1^2
- Stikprøve 2: n_2 , $\bar{X}_2$ og s_2^2

Formulering af Hypoteser

nul hypotese testes mod en *alternativ hypotese* (her vist for et to-sidet alternativ)

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

Man vælger enten at acceptere H_0 eller at forkaste H_0
(Typisk er man interesseret i at teste med $\delta = 0$)

2. Beregning af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af 2 middelværdier (μ_1 og μ_2) for data, der antages normalfordelt og varianser σ_1^2 og σ_2^2 er kendte, fås teststørrelsen

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

Det følger under nul hypotesen at $Z \sim N(0, 1^2)$. Herfra kan testets p-værdi beregnes

Sammenligning med kritisk værdi

Ved hypoteseprøvning af to middelværdier (μ_1 og μ_2) for data, der antages normalfordelt og σ_1^2 og σ_2^2 er kendte, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$Z < -z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$Z > z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Beregning af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af to middelværdier (μ_1 og μ_2) for data hvor σ_1^2 og σ_2^2 er ukendte, men for store stikprøver, fås teststørrelsen

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

Det følger under nul hypotesen at $Z \sim N(0, 1^2)$. Herfra kan testets p-værdi beregnes.

Sammenligning med kritisk værdi

Ved hypoteseprovning af to middelværdi for data hvor σ_1^2 og σ_2^2 er ukendte, men vi har store stikprøver, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$Z < -z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$Z > z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Beregning af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af to middelværdier for data der antages normalfordelt hvor σ_1^2 og σ_2^2 er ukendte (men med $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), og stikprøverne er små, fås teststørrelsen

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta}{\sqrt{s_p^2/n_1 + s_p^2/n_2}}$$

hvor

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Idet $t \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ kan testets p-værdi beregnes

Sammenligning med kritisk værdi

Ved hypoteseprøvning af to middelværdi for data der antages normalfordelt og σ_1^2 og σ_2^2 er ukendte, og for små stikprøver:

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$t < -t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$t > t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$t < -t_{\alpha/2}$ eller $t > t_{\alpha/2}$

Ved opslag i tab. 4 vælges $v = n_1 + n_2 - 2$

Beregning af teststørrelse

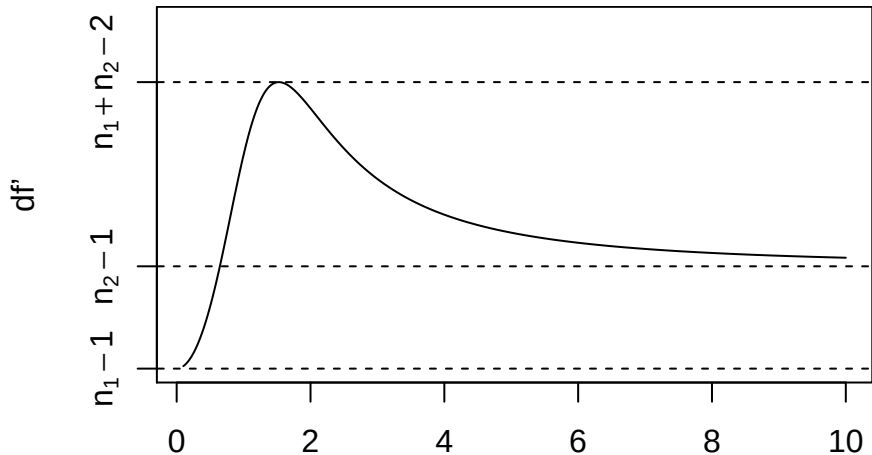
Ved hypoteseprøvning af to middelværdier for data der antages normalfordelt hvor σ_1^2 og σ_2^2 er ukendte (og $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), og stikprøverne er små, fås teststørrelsen

$$t' = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

hvor $t' \sim t(df')$ med

$$df' = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

Korrigerede frihedsgrader



Eksempel 1

A (sekretærer)	B (sygeplejersker)
7.53	9.21
7.48	11.51
8.08	12.79
8.09	11.85
10.15	9.97
8.40	8.79
10.88	9.69
6.13	9.68
7.90	9.19

Eksempel 1 - fortsat

Udfør et hypotesetest om energiforbruget (i middel) ved de to typer arbejde er ens. Anvend signifikansniveau $\alpha = 5\%$

Oversigt

- 1 Hypotesetest - en repetition
 - Hypotesetest og konfidensintervaller
- 2 Styrke og stikprøvestørrelse
- 3 Hypotesetest for to gennemsnit
 - Eksempel 1
 - Generel formulering
 - Med kendt varians
 - Med "ukendt" varians - store stikprøver
 - Med "ukendt" varians - små stikprøver, normalfordelinger
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Konfidensinterval for forskel i middelværdi
 - Eksempel 1 - fortsat
 - Eksempel 2
- 5 Parret t-test
- 6 R (R note 7)

Beregning af konfidensinterval for forskel i middelværdi

For store stikprøver beregnes et $(1 - \alpha)\%$ konfidensinterval ved:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

(kendes σ_1^2 og σ_2^2 anvendes disse i stedet for s_1^2 og s_2^2)

Beregning af konfidensinterval for forskel i middelværdi

For små stikprøver (ukendte σ_1^2 og σ_2^2) (men med $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) beregnes et $(1 - \alpha)\%$ konfidensinterval ved:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Ved opslag i tabellen over t-fordelingen (tab. 4) vælges antal frihedsgrader $v = n_1 + n_2 - 2$

Eksempel 2

I et studie er man interesseret i at sammenligne 2 sovemidler A og B . For 10 testpersoner har man fået følgende resultater, der er givet i forlænget søvntid (i timer)

Eksempel 2 - fortsat

person	A	B
1	+0.7	+1.9
2	-1.6	+0.8
3	-0.2	+1.1
4	-1.2	+0.1
5	-1.0	-0.1
6	+3.4	+4.4
7	+3.7	+5.5
8	+0.8	+1.6
9	0	+4.6
10	+2.0	+3.4

Oversigt

- 1 Hypotesetest - en repetition
 - Hypotesetest og konfidensintervaller
- 2 Styrke og stikprøvestørrelse
- 3 Hypotesetest for to gennemsnit
 - Eksempel 1
 - Generel formulering
 - Med kendt varians
 - Med "ukendt" varians - store stikprøver
 - Med "ukendt" varians - små stikprøver, normalfordelinger
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Konfidensinterval for forskel i middelværdi
 - Eksempel 1 - fortsat
 - Eksempel 2
- 5 Parret t-test
- 6 R (R note 7)

Parret t-test

- Vi betragter nu en situation hvor vi vil sammenligne 2 middelværdier, men hvor data er parret
- Hypotesetestet foregår derfor ved at undersøge forskellen, D_i , mellem de parrede observationer:

$$D_i = X_i - Y_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

Vi kan herefter beregne middelværdi $\bar{D}$ og varians S_D^2 for D . Test af $\bar{D}$ gøres nu som de sædvanlige test for én middelværdi

Eksempel 2 - fortsat

person	A	B	$D = B - A$
1	+0.7	+1.9	+1.2
2	-1.6	+0.8	+2.4
3	-0.2	+1.1	+1.3
4	-1.2	+0.1	+1.3
5	-1.0	-0.1	+0.9
6	+3.4	+4.4	+1.0
7	+3.7	+5.5	+1.8
8	+0.8	+1.6	+0.8
9	0	+4.6	+4.6
10	+2.0	+3.4	+1.4

Eksempel 2 - fortsat

*Udfør et hypotesetest sovemidlerne er lige effektive.
Anvend signifikansniveau $\alpha = 5\%$*

Oversigt

- 1 Hypotesetest - en repetition
 - Hypotesetest og konfidensintervaller
- 2 Styrke og stikprøvestørrelse
- 3 Hypotesetest for to gennemsnit
 - Eksempel 1
 - Generel formulering
 - Med kendt varians
 - Med "ukendt" varians - store stikprøver
 - Med "ukendt" varians - små stikprøver, normalfordelinger
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Konfidensinterval for forskel i middelværdi
 - Eksempel 1 - fortsat
 - Eksempel 2
- 5 Parret t-test
- 6 R (R note 7)

R (R note 7)

```
> x1=c(10,13,16,19,17,15,20,23,15,16)
> x2=c(13,16,20,25,18,16,27,30,17,19)
> t.test(x1,x2,alt="less",conf.level=0.95,var.equal=TRUE)
```

Pooled-Variance Two-Sample t-Test

data: x1 and x2

t = -1.779, df = 18, p-value = 0.04606

alternative hypothesis: difference in means is less than 0

95 percent confidence interval:

-Inf -0.09349972

sample estimates:

mean of x mean of y

16.4 20.1

Oversigt

- 1 Hypotesetest - en repetition
 - Hypotesetest og konfidensintervaller
- 2 Styrke og stikprøvestørrelse
- 3 Hypotesetest for to gennemsnit
 - Eksempel 1
 - Generel formulering
 - Med kendt varians
 - Med "ukendt" varians - store stikprøver
 - Med "ukendt" varians - små stikprøver, normalfordelinger
 - Eksempel 1 - fortsat
- 4 Konfidensinterval for forskel i middelværdi
 - Eksempel 1 - fortsat
 - Eksempel 2
- 5 Parret t-test
- 6 R (R note 7)