Kursus 02403
Introduktion til Statistik

Birgitte Brøndum

Informatics and Mathematical Modelling
Building 321 - room 007
Technical University of Denmark
2800 Lyngby – Denmark
e-mail: kka@imm.dtu.dk

Kapitel 7: Inferens for gennemsnit

- Estimation (7.1-7.2)
  - ◇ Maksimal fejl på estimat af middelværdi
  - ◇ Intervalestimation
- Test af hypoteser (7.3-7.4)
  - ◇ Forumlering af nul-hypotese og alternativ hypotese
  - ◇ Mulige fejl ved hypoteprøvning

Inferens for gennemsnit

- Ved hjælp af en stikprøve forsøger man at generalisere om en population
- Det er derfor vigtigt, at stikprøven er repræsentativ for populationen

Inferens for middelværdier

- Parameter: middelværdi af population μ
- Data: en tilfældig stikprøve $x_1, x_2, ..., x_n$
- Estimator: $\bar{X}$
- Estimat af varians på middelværdi:

$$Var[\bar{X}] = \frac{S^2}{n}$$

Begreber

<u>Central Estimator</u>:

En estimator $\hat{\theta}$ er central (eller ikke-biased), hvis og kun hvis, middelværdien af stikprøvefordelingen for estimatoren er lig θ

<u>Efficient Estimator</u> En estimator $\hat{\theta}_1$ er en mere efficient estimator af θ end estimatoren $\hat{\theta}_2$ hvis:

1. $\hat{\theta}_1$ og $\hat{\theta}_2$ begge er centrale estimatorer af θ
2. Variansen af stikprøvefordelingen for $\hat{\theta}_1$ er mindre end for $\hat{\theta}_2$

Maksimal fejl på et estimat

For store n gælder (den centrale grænseværdi sætning):

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1^2)$$

Den maksimale fejl, E, på et estimat med sandsynlighed $(1-\alpha)$ bliver:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

hvor $z_{\alpha/2}$ findes i standard normalfordelingen (tabel 3)

Konfidens

- Når man udtaler sig om fremtidige værdier af en stokastisk variabel, taler man om sandsynligheder
- Når man udtaler sig om data man har målt, taler man om konfidens

Bestemmelse af stikprøvestørrelse

- Den maksimale fejl med sandsynlighed (eller konfidens) $1-\alpha$ er:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Når σ er kendt og vi ønsker at bestemme stikprøvestørrelse n for en maksimal fejl med sandsynlighed $1-\alpha$ fås:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$$

Maksimal fejl på et estimat (σ ukendt)

Når σ er ukendt, anvendes estimatet s for σ. I stedet for $z_{\alpha/2}$ anvendes $t_{\alpha/2}$ og den maksimale fejl, E med $(1-\alpha)$ konfidens, bliver

$$E = t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

hvor $t_{\alpha/2} = t(n-1)_{\alpha/2}$

findes i t-fordelingen (tabel 4)

Intervalestimation

Det er ofte mere informativt at angive intervalestimater end blot en enkelt værdi, f.eks. kan man være interesseret i et interval, der dækker $(1-\alpha)$%.

Idet vi kan skrive for kendt σ:

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$$

Ved omskrivning fås $(1-\alpha)$ <u>konfidensintervallet</u>:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Konfidensinterval

Såfremt man ikke kender σ, men har en stor stikprøve $(n \geq 30)$ anvendes den samme formel, blot erstattes σ med estimatet s:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Konfidensinterval

Såfremt man ikke kender σ og har en lille stikprøve $(n < 30)$, erstattes σ med estimatet s, og $z_{\alpha/2}$ erstattes med $t_{\alpha/2}$:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Generelt

I de anførte formler anvendes:

1. Når variansen er kendt, anvendes σ og $z_{\alpha/2}$
2. Når variansen ikke er kendt, men stikprøven er stor, anvendes s og $z_{\alpha/2}$
3. Når variansen ikke er kendt og stikprøven er lille, anvendes s og $t_{\alpha/2}$

Test af hypoteser

Vi betragter en parameter μ

Ofte vil der være en forhåndsinteresse knyttet til en bestemt værdi af μ. Vi ønsker derfor at teste, dvs acceptere eller forkaste, hypotesen

$\mu = \mu_0$

Da estimatet af μ er underkastet tilfældig variation, kan man ikke forvente at $\mu = \mu_0$ selvom de faktisk er ens.

Spørgsmålet er altså hvordan man skal forholde sig i sammenligningen af μ og μ_0

Hypoteser

nul hypotese testes mod en *alternativ hypotese*

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

Man vælger enten at <u>acceptere H_0</u> eller at <u>forkaste H_0</u>

Ensidet eller tosidet alternativ

tosidet alternativ

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

Vælges et *ensidet* alternativ, bliver H_1 enten

$$H_1: \quad \mu < \mu_0$$

eller

$$H_1: \quad \mu > \mu_0$$

Hypoteser

Når man tester statistiske hypoteser, kan man i princippet begå to typer af fejl:

Type I: Fejlagtig forkaste H_0 når H_0 er sand

Type II: Fejlagtig acceptere H_0 når H_1 er sand

Vi definerer

$$P(\text{fejl af type I}) = \alpha$$

$$P(\text{fejl af type II}) = \beta$$

Hypoteseprøvning

Et par tommelfingerregler ved formulering af hypoteser:

- I nulhypotesen anvendes så vidt som muligt lighedstegn
- I den alternative hypotese placeres det udsagn som man gerne vil vise

Eksempel

En mand stilles for en dommer, anklaget for noget kriminelt.

Nulhypotese og alternativ hypotese bliver:

- H_0 : Manden er ikke skyldig
- H_1 : Manden er skyldig

Eksempel

Hvilke fejl kan begås?

Type I: Fejlagtig forkaste H_0 når H_0 er sand

dvs. manden er uskyldig men dømmes skyldig (α)

Type II: Fejlagtig acceptere H_0 når H_1 er sand

dvs. manden er skyldig men frikendes (β)

Trin ved Hypoteseprøvning

1. Opstil hypoteser og vælg signifikansniveau α
2. Beregn teststørrelse
3. Beregn p-værdi vha. teststørrelse
4. Sammenlign p-værdi med signifikansniveau og drag en konklusion

Kapitel 7: Inferens for gennemsnit

- Estimation (7.1-7.2)
  - ◇ Maksimal fejl på estimat af middelværdi
  - ◇ Intervalestimation
- Test af hypoteser (7.3-7.4)
  - ◇ Forumlering af nul-hypotese og alternativ hypotese
  - ◇ Mulige fejl ved hypoteprøvning