

Kursus 02402

Introduktion til Statistik

Forelæsning 6: Kapitel 7: Hypotesetest for gennemsnit
(one-sample setup). 7.4-7.6

Jan Kloppenborg Møller

DTU Informatik

Bygning 305 - rum 219

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Lyngby – Danmark

e-mail: jkm@imm.dtu.dk

Oversigt

- 1 Konfidens Intervaller
- 2 Motiverende eksempel
- 3 Hypoteser og test af disse
- 4 Hypotesetest i praksis I
- 5 Hypotesetest i praksis II
- 6 One-sample hypotesetest uden "kendt" varians
- 7 R (R note 7)

Oversigt

- 1 Konfidens Intervaller
- 2 Motiverende eksempel
- 3 Hypoteser og test af disse
- 4 Hypotesetest i praksis I
- 5 Hypotesetest i praksis II
- 6 One-sample hypotesetest uden "kendt" varians
- 7 R (R note 7)

Konfidens Intervaller

Givet observationerne $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ udregnes

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum x_i; \quad \hat{\sigma}^2 = \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^2,$$

betragtes den standardiserede størrelse

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

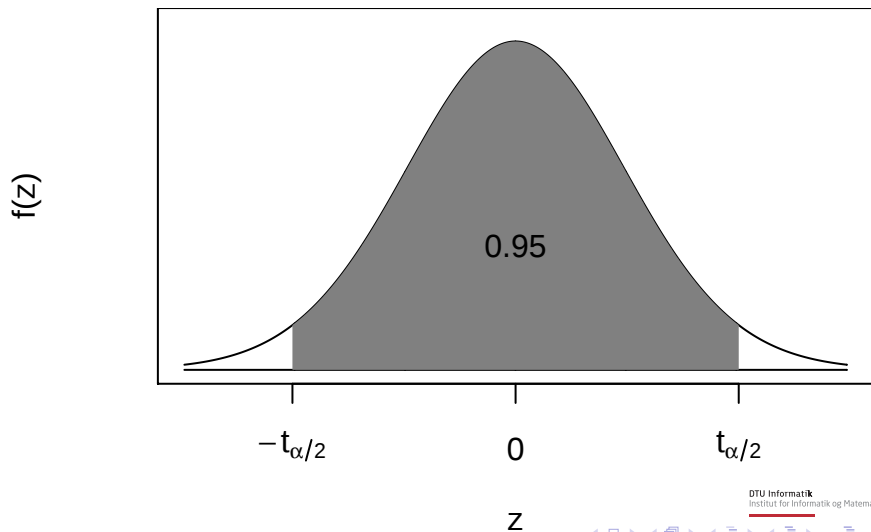
Konfidens Intervaller Formelt

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(v)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(v)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

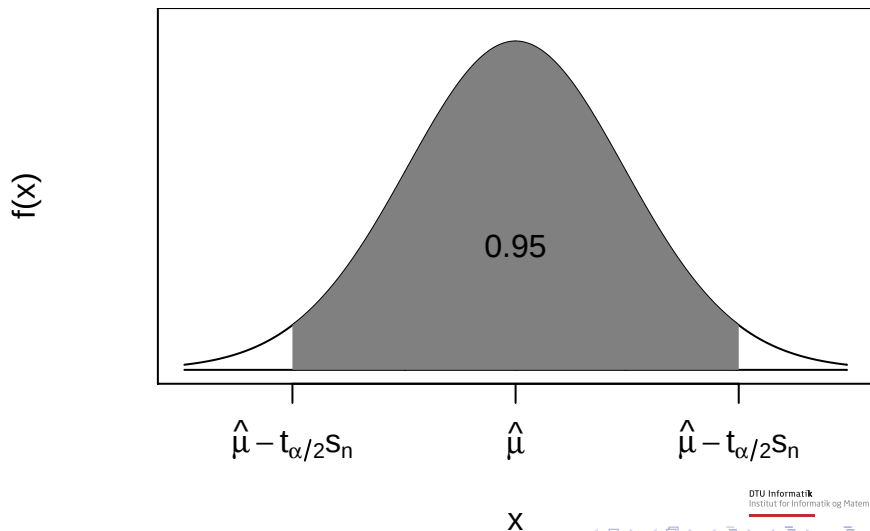
eller mere uformelt

$$P(\text{Konfidens interval indeholder } \mu) = 1 - \alpha$$

Konfidens interval



Konfidens interval



Oversigt

- 1 Konfidens Intervaller
- 2 Motiverende eksempel
- 3 Hypoteser og test af disse
- 4 Hypotesetest i praksis I
- 5 Hypotesetest i praksis II
- 6 One-sample hypotesetest uden "kendt" varians
- 7 R (R note 7)

Motiverende eksempel

En producent af pc skærme oplyser, at skærmen i gennemsnit bruger 83 W. Desuden kan det antages, at forbruget er normalfordelt med kendt varians $\sigma^2 = 4^2 \text{ (W)}^2$. En forbrugergruppe vil nu afprøve producentens påstand og planlægger at udføre et antal målinger af strømforbruget for den pågældende type pc skærm.

Formuler nul og alternativ hypotese.

Oversigt

- 1 Konfidens Intervaller
- 2 Motiverende eksempel
- 3 Hypoteser og test af disse
 - Ensidet eller tosidet alternativ
 - Fejl ved hypotesetest
- 4 Hypotesetest i praksis I
- 5 Hypotesetest i praksis II
- 6 One-sample hypotesetest uden "kendt" varians

Test af hypoteser

- Vi betragter en parameter μ
- Ofte vil der være en forhåndsinteresse knyttet til en bestemt værdi af μ . Vi ønsker derfor at teste, dvs acceptere eller forkaste, hypotesen
$$\mu = \mu_0$$
- Da estimatet af μ er underkastet tilfældig variation, kan man ikke forvente at $\hat{\mu} = \mu_0$ selvom de faktisk er ens.
- Spørgsmålet er altså hvordan man skal forholde sig i sammenligningen af $\hat{\mu}$ og μ_0

Hypoteser

nul hypotese testes mod en *alternativ hypotese*

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Man vælger enten at acceptere H_0 eller at forkaste H_0

Ensidedt eller tosidet alternativ

tosidet alternativ

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Vælges et *ensidedt* alternativ, bliver H_1 enten

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

eller

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Hypoteseprøvning

Et par tommelfingerregler ved formulering af hypoteser:

- I nulhypotesen anvendes så vidt som muligt lighedstegn
- I den alternative hypotese placeres det udsagn som man gerne vil vise

Fejl ved hypotesetest

Når man tester statistiske hypoteser, kan man i princippet begå to typer af fejl:

Type I: Fejlagtig forkaste H_0 når H_0 er sand

Type II: Fejlagtig acceptere H_0 når H_1 er sand

Vi definerer

$$P(\text{fejl af type I}) = \alpha$$

$$P(\text{fejl af type II}) = \beta$$

Analogi

En mand stilles for en dommer, anklaget for noget kriminelt.

Nulhypotese og alternativ hypotese bliver:

H_0 : Manden er ikke skyldig

H_1 : Manden er skyldig

Analogi

Hvilke fejl kan begås?

Type I: Fejlagtig forkaste H_0 når H_0 er sand
dvs. manden er uskyldig men dømmes skyldig (α)

Type II: Fejlagtig acceptere H_0 når H_1 er sand
dvs. manden er skyldig men frikendes (β)

Oversigt

- 1 Konfidens Intervaller
- 2 Motiverende eksempel
- 3 Hypoteser og test af disse
- 4 Hypotesetest i praksis I
 - P-værdi
 - Eksempel 1
- 5 Hypotesetest i praksis II
- 6 One-sample hypotesetest uden "kendt" varians

Trin ved Hypotesetest

- 1 Opstil hypoteser og vælg signifikansniveau α (vælg "risiko-niveau")
- 2 Beregn teststørrelse (se på data)
- 3 Beregn p-værdi vha. teststørrelse (mål forskellen på data og hypotesen)
- 4 Sammenlign p-værdi med signifikansniveau og drag en konklusion

* alternativt til (4) kan testet udføres ved at sammenligne teststørrelse med *kritisk værdi*

Hypotesetest

- Antager at data (stikprøve) kommer fra en normalfordeling, dvs. $x_1, \dots, x_n \in N(\mu, \sigma^2)$
- ELLER: stor stikprøve ($n > 30$)
- vi ønsker at teste en *nul hypotese* om middelværdien, f.eks.

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0$$

hvor μ_0 kan være en vilkårlig værdi af interesse.

Afhængig af hvad vi ønsker at påvise vælges alternativ hypotese. Herefter vælges signifikansniveau α

Beregning af teststørrelse

Vi antager, at vi har formuleret en nulhypotese og en alternativ hypotese, og har valgt et signifikansniveau α . Herefter skal en teststørrelse beregnes.

Ved hypotesetest af én middelværdi for data, der antages normalfordelt og σ er kendt, fås teststørrelsen:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Beregning af p-værdi

Testets p-værdi måler data's afvigelser fra H_0

Ved hypotesetest af én middelværdi for data der antages normalfordelt og σ er kendt, fås p-værdien for teststørrelsen Z ved opslag i normalfordelingen (tabel 3)

Hvis p-værdien er mindre end signifikansniveauet, afvises H_0

Hvis p-værdien er større end signifikansniveauet, accepteres H_0

Eksempel 1

En producent af pc skærme oplyser, at skærmen i gennemsnit bruger 83 W. Desuden kan det antages, at forbruget er normalfordelt med kendt varians $\sigma^2 = 4^2 \text{ (W)}^2$. En forbrugergruppe vil nu afprøve producentens påstand og planlægger at udføre et antal målinger af strømforbruget for den pågældende type pc skærm.

Formuler nul og alternativ hypotese.

Eksempel 1

Der udføres nu 12 målinger af forbruget:

82 86 84 84 92 83 93 80 83 84 82 86

Herfra estimeres middelforbruget til $\bar{X} = 84.92$.

Udfør hypotesetestet. Anvend signifikansniveau $\alpha = 1\%$

Oversigt

- 1 Konfidens Intervaller
- 2 Motiverende eksempel
- 3 Hypoteser og test af disse
- 4 Hypotesetest i praksis I
- 5 Hypotesetest i praksis II**
 - Kritisk værdi
- 6 One-sample hypotesetest uden "kendt" varians
- 7 R (R note 7)

Sammenligning med kritisk værdi:

Alternativt kan hypotesetestet udføres ved at sammenligne teststørrelse med kritisk værdi z_α (eller $z_{\alpha/2}$ i et tosidet test)

Ved hypotesetest af én middelværdi for data der antages normalfordelt og σ er kendt, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu < \mu_0$	$Z < -z_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$Z > z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Oversigt

- 1 Konfidens Intervaller
- 2 Motiverende eksempel
- 3 Hypoteser og test af disse
- 4 Hypotesetest i praksis I
- 5 Hypotesetest i praksis II
- 6 One-sample hypotesetest uden "kendt" varians
 - Store stikprøver
 - Små stikprøver - normalfordelt
 - Eksempel 2

Beregning af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af én middelværdi for data der antages normalfordelt hvor σ er ukendt, men stor stikprøve ($n > 30$), fås teststørrelsen

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Idet $Z \sim N(0, 1^2)$ fås p-værdien for teststørrelsen Z ved opslag i normalfordelingen (tabel 3)

Sammenligning med kritisk værdi

Alternativt kan hypotesetestet udføres ved at sammenligne teststørrelse med kritisk værdi z_α (eller $z_{\alpha/2}$ i et tosidet test). Ved hypoteseprøvning af én middelværdi for data der antages normalfordelt hvor σ er ukendt, men stor stikprøve, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu < \mu_0$	$Z < -z_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$Z > z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$

Beregning af teststørrelse

Ved hypoteseprøvning af én middelværdi for data der antages normalfordelt og σ er ukendt, og stikprøven er lille ($n < 30$), fås teststørrelsen

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Idet $t \sim t(n - 1)$ fås p-værdien for teststørrelsen t ved opslag i t-fordelingen (tabel 4)

Sammenligning med kritisk værdi

Alternativt kan hypotesetestet udføres ved at sammenligne teststørrelse med kritisk værdi t_α (eller $t_{\alpha/2}$ i et tosidet test). Ved hypoteseprøvning af én middelværdi for data der antages normalfordelt og σ er ukendt og stikprøven er lille, fås

Alternativ hypotese	Afvis nul-hypotese hvis
$\mu < \mu_0$	$t < -t_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$t > t_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$t < -t_{\alpha/2}$ eller $t > t_{\alpha/2}$

Eksempel 2

I et amerikansk studie ønskede man at sammenligne indhold af arsenik i drikkevandet ved 8 forskellige lokaliteter:

lokalitet	vandprøve (ppm)
1	2.2
2	4.1
3	2.1
4	0.8
5	0.1
6	3.2
7	2.9
8	2.2
	$\bar{x} = 2.2$ og $s_x^2 = 1.64$

Eksempel 2

Sundhedsmyndighederne vil gerne teste om middelindhold i drikkevandet kan antages at være 2 ppm.

Udfør dette hypotesetest ved anvendelse af signifikansniveau $\alpha = 5\%$

Oversigt

- 1 Konfidens Intervaller
- 2 Motiverende eksempel
- 3 Hypoteser og test af disse
- 4 Hypotesetest i praksis I
- 5 Hypotesetest i praksis II
- 6 One-sample hypotesetest uden "kendt" varians
- 7 R (R note 7)

R (R note 7)

```
> x=c(10,13,16,19,17,15,20,23,15,16)
> t.test(x,mu=20,conf.level=0.99)
```

One-sample t-Test

```
data:  x
t = -3.1125, df = 9, p-value = 0.0125
alternative hypothesis: mean is not equal to 20
99 percent confidence interval:
 12.64116 20.15884
sample estimates:
mean of x
 16.4
```

Oversigt

- 1 Konfidens Intervaller
- 2 Motiverende eksempel
- 3 Hypoteser og test af disse
- 4 Hypotesetest i praksis I
- 5 Hypotesetest i praksis II
- 6 One-sample hypotesetest uden "kendt" varians
- 7 R (R note 7)