Kursus 02433
Introduktion til Statistik

Birgitte Brøndum

Informatics and Mathematical Modelling
Building 321 - room 007
Technical University of Denmark
2800 Lyngby – Denmark
e-mail: kka@imm.dtu.dk

Kapitel 6: Stikprøvefordelinger

- Definition af population og tilfældig stikprøve
- Stikprøvefordeling for middelværdien fra en normalfordeling
- Stikprøvefordeling for variansen fra en normalfordeling
- Stikprøvefordlinger:
  - ◇ t-fordelingen
  - ◇ χ^2-fordelingen
  - ◇ F-fordelingen

Definition af population og tilfældig stikprøve

- Tilfældig stikprøve fra en endelig population:

Observationerne $X_1, X_2, ..., X_n$ er en tilfældig stikprøve af størrelse n fra en endelig population af størrelse N, såfremt værdierne er valgt således, at enhver delmængde af størrelse n af de N elementer fra populationen har den samme sandsynlighed for at blive valgt.

Definition af population og tilfældig stikprøve

- Tilfældig stikprøve fra en uendelig population:

Et sæt observationer $X_1, X_2, ..., X_n$ er en tilfældig stikprøve af størrelse n fra en uendelig population $f(x)$ såfremt:

1. Hvert X_i er en stokastisk variabel med tæthedsfunktion $f(x)$
2. De n stokastiske variable er uafhængige

Stikprøvefordeling for middelværdien når variansen er kendt

- Uendelig population:

Lad $\bar{X}$ være middelværdien af en stikprøve af størrelse n fra en fordeling med middelværdi μ og varians σ^2

Da er $\bar{X}$ en stokastisk variabel og følger en fordeling med middelværdi middelværdi μ og varians $\frac{\sigma^2}{n}$

Stikprøvefordeling for middelværdien når variansen er kendt

- Endelig population:

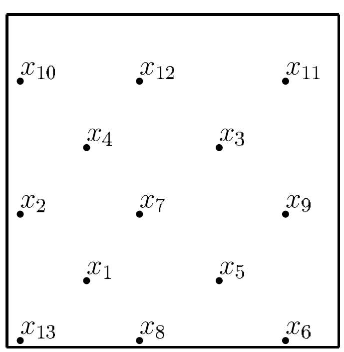
Lad $\bar{X}$ være middelværdien af en stikprøve af størrelse n fra en fordeling med middelværdi μ og varians σ^2

Da er $\bar{X}$ en stokastisk variabel og følger en fordeling med middelværdi middelværdi μ og varians $\frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Stikprøvefordeling for $\bar{X}$

Koncentration af bly på et stykke jord

Middelværdi: μ (ukendt μ)
Varians: σ^2 (kendt σ^2)



Stikprøve: $(x_1, x_2, .., x_n)$

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_i^n x_i$

$\boxed{\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}$

Den centrale grænseværdisætning

Lad $\bar{X}$ være middelværdien af en stikprøve fra en fordeling med middelværdi μ og varians σ^2

Da vil

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

følge en $N(0, 1^2)$ fordeling for $n \to \infty$

Stikprøvefordeling for middelværdien når variansen ikke er kendt

Lad $\bar{X}$ være middelværdien af en stikprøve af størrelse n fra en fordeling med middelværdi μ og varians σ^2 og hvor stikprøvens varians er estimeret:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Stikprøvefordeling for middelværdien når variansen ikke er kendt

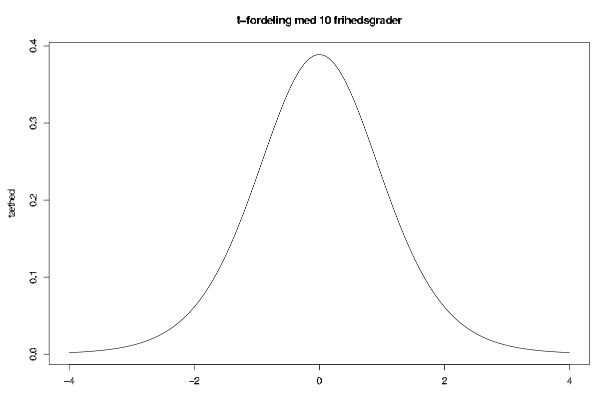
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Da er

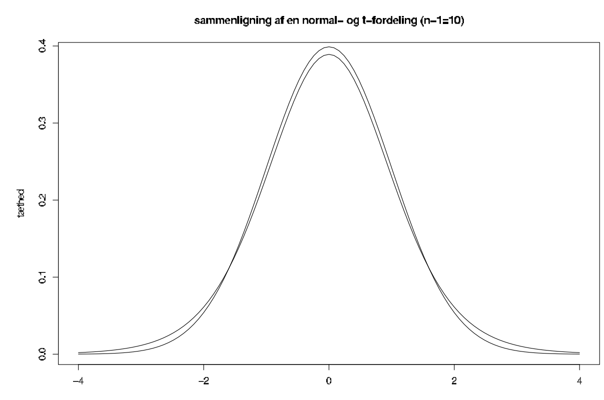
$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

en stokastisk variabel og følger en t-fordeling med parameter $v = n - 1$

t-fordelingen



t-fordelingen



Tabelopslag i t-fordelingen

- Tabelopslag i t-fordelingen gøres vha tabel 4
- Ved $t_\alpha(n-1)$ forstås den værdi, således at

$$P(t \geq t_\alpha) = \alpha$$

Stikprøvefordeling for variansen

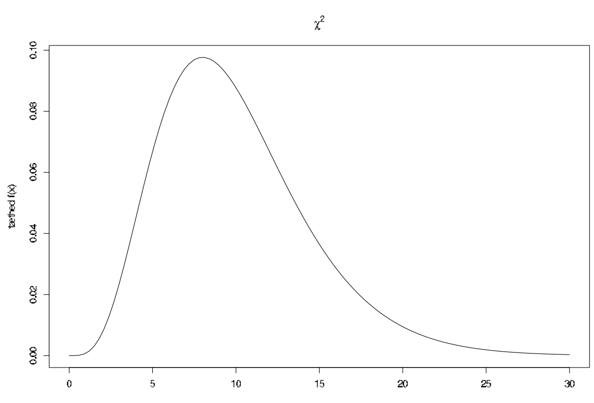
Lad S^2 være variansen af en stikprøve af størrelse n fra en normalfordeling med varians σ^2

Da er

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

en stokastisk variabel og følger en χ^2-fordeling med parameter $v = n - 1$

χ^2-fordelingen



Tabelopslag i χ^2-fordelingen

- Tabelopslag i χ^2-fordelingen gøres vha tabel 5
- Ved $\chi^2_\alpha(n-1)$ forstås den værdi, således at

$$P(\chi^2 \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$$

Stikprøvefordeling for sammenligning af varianser

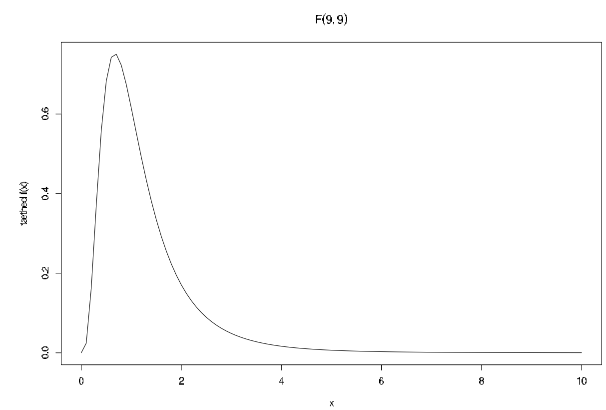
Lad S_1^2 og S_2^2 være varianser af stikprøver af størrelse henholdsvis n_1 og n_2 fra to normalfordelinger med samme varians

Da er

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

en stokastisk variabel og følger en F-fordeling med parameter $v_1 = n_1 - 1$ og $v_2 = n_2 - 1$

F-fordelingen



Tabelopslag i F-fordelingen

- Tabelopslag i F-fordelingen gøres vha tabel 6
- Ved $F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$ forstås den værdi, således at

$$P(F \geq F_\alpha) = \alpha$$

Kapitel 6: Stikprøvefordelinger

- Definition af population og tilfældig stikprøve
- Stikprøvefordeling for middelværdien fra en normalfordeling
- Stikprøvefordeling for variansen fra en normalfordeling
- Stikprøvefordlinger:
  - ◇ t-fordelingen
  - ◇ χ^2-fordelingen
  - ◇ F-fordelingen